

UM CARROSSEL CAÓTICO: DINÂMICA PERTO DE REDES HETEROCLÍNICAS¹

*Alexandre A. P. Rodrigues**, *Isabel S. Labouriau** e *Manuela A. D. Aguiar*[◇]

*Centro de Matemática da Universidade do Porto

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Rua do Campo Alegre 687, 4169-007 Porto, Portugal

e-mail: alexandre.rodrigues@fc.up.pt, islabour@fc.up.pt

◇Centro de Matemática da Universidade do Porto

Faculdade de Economia da Universidade do Porto

Rua Dr. Roberto Frias, 4200-464 Porto, Portugal

e-mail: maguiar@fep.up.pt

Resumo

Neste texto, pretendemos abordar brevemente a dinâmica perto de ciclos e redes heteroclínicos, os quais ocorrem robustamente, por exemplo em equações diferenciais com simetria. Consideramos apenas redes em variedades de dimensão 3 com nós em torno dos quais há movimentos em espiral das soluções que passam perto (selas de rotação). Apresentamos propriedades geométricas e robustas que surgem na vizinhança destas redes heteroclínicas e analisamos dinâmica genérica que pode ocorrer.

Introdução

Vamos estudar equações diferenciais autónomas do tipo $\dot{x} = f(x)$, com $x \in M$ onde M é uma variedade diferenciável 3-dimensional compacta e sem bordo e f é um campo de vectores suave. O grupo de difeomorfismos a um parâmetro $\Phi : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ tal que $f(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x)|_{t=0}$ designa-se por *fluxo* associado à equação $\dot{x} = f(x)$. Basicamente, o campo de vectores f *indica* o vector velocidade em 0 da curva $\Phi(t, x_0)$ ($x_0 \in M$).

Dada uma equação diferencial, em geral, não é fácil determinar explicitamente o fluxo que lhe está associado. No entanto, existem diversas técnicas algébricas e geométricas que nos permitem estudar qualitativamente a dinâmica associada e uma delas é o uso de simetria.

¹A investigação levada a cabo por todos os autores, membros do Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP), teve apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Portugal, através dos programas POCTI e POSI, com fundos nacionais e da União Europeia. A. A. P. Rodrigues foi apoiado financeiramente pela FCT através da bolsa de doutoramento com referência SFRH/BD/28936/2006.

No caso de campos de vectores equivariantes sob a acção de um grupo de simetrias, estas, para além de facilitarem frequentemente o estudo da dinâmica, favorecem o aparecimento de ciclos e redes heteroclínicos robustos entre conjuntos invariantes pelo fluxo. Neste texto, esses conjuntos invariantes serão pontos de equilíbrio ou soluções periódicas não triviais. Para além disso, supomos que os valores próprios da linearização do campo de vectores f nos pontos de equilíbrio e que os expoentes de Floquet associados a cada solução periódica têm parte real não nula.

Denotando por d a métrica riemanniana, para cada conjunto invariante ξ definem-se os conjuntos,

$$W^s(\xi) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi(t, x), \xi) = 0\}$$

e

$$W^u(\xi) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\Phi(t, x), \xi) = 0\},$$

os quais possuem estrutura de variedade diferenciável e são designados de *variedades invariantes*, respectivamente *estável* e *instável*, associadas a ξ . Os casos mais interessantes dizem respeito a conjuntos invariantes ξ tais que $W^s(\xi) \neq \{\xi\}$ e $W^u(\xi) \neq \{\xi\}$, os quais irão ser designados por *selas invariantes*. Dadas duas selas invariantes ξ_j e ξ_{j+1} , se $W^u(\xi_j) \cap W^s(\xi_{j+1}) \neq \emptyset$, dizemos que existe uma ligação heteroclínica de ξ_j para ξ_{j+1} . No caso de $\dim[W^u(\xi_j) \cap W^s(\xi_{j+1})] = 1$, essa ligação heteroclínica corresponde a uma união de curvas solução do sistema inicial que se aproximam de ξ_i no passado e de ξ_{i+1} no futuro.

Estamos interessados no estudo de ciclos heteroclínicos, os quais têm definições mais ou menos formais na literatura. Informalmente, um *ciclo heteroclínico* é dado pela união de um conjunto finito ordenado de selas invariantes $\mathcal{A} = \{\xi_i, i = 1, \dots, n\}$ tais que existe um ciclo de ligações heteroclínicas entre elas, isto é, existe uma ligação heteroclínica de ξ_j para ξ_{j+1} , para todo $j = 1, \dots, n-1$ e de ξ_n para ξ_1 . Quando só há uma sela, o ciclo é chamado de *homoclínico*.

Uma *rede heteroclínica* corresponde a uma união conexa de ciclos heteroclínicos, de modo que, para qualquer par de selas ξ_i e ξ_j na rede, existe uma sequência de ligações heteroclínicas que as unem (veja-se exemplo de uma rede numa 2-esfera na figura 1 (a)).

Um ponto de equilíbrio p_0 (do tipo sela) tal que $df(p_0)$ tem valores próprios complexos não reais diz-se uma *sela-foco*. Em qualquer vizinhança

de uma sela-foco ou de uma solução periódica não trivial, soluções próximas tendem a enrolar em torno da sela, razão pela qual estas selas vão ser designadas por *selas de rotação*.

1 Ciclos em que nenhuma das selas é de Rotação

Um aspecto absolutamente notável é que, genericamente, a dinâmica em torno de uma rede homo ou heteroclínica pode ficar completamente determinada pelo estudo dos valores próprios não nulos de $df(\xi_i)$ ($i = 1, \dots, k$).

Quando se trata de um ciclo heteroclínico onde as ligações heteroclínicas estão contidas em subespaços invariantes e onde o produto dos módulos dos valores próprios contractores (com parte real negativa) é maior do que o produto dos valores próprios expansores (com parte real positiva), trajectórias arbitrariamente perto do ciclo aproximam-se dele, seguindo as ligações na sequência induzida pelo ciclo, noção a que vulgarmente se chama *estabilidade assintótica* (Krupa e Melbourne [7]). Neste contexto, dada uma trajectória perto do ciclo, o tempo que esta passa perto de cada sela vai aumentando em progressão geométrica e a razão desta progressão só depende dos valores próprios da linearização do campo de vectores nos equilíbrios. Esta noção é naturalmente generalizável para redes.

A questão que se coloca é a seguinte: se uma rede for assintoticamente estável, poderá haver um ciclo *preferido* para a convergência das trajectórias? Noutros termos, se uma rede for atractora, poderá existir um ciclo que atraia quase todas as trajectórias (noção habitualmente conhecida por *estabilidade assintótica essencial*)?

Depois de várias conjecturas reforçando a possibilidade afirmativa de resposta, a pergunta acima é, genérica e afirmativamente respondida em 1998, por Ashwin e Chossat [4], no contexto de ciclos homoclínicos, usando o *Lambda Lema Forte* estudado por Bo Deng [5]². O requinte da demonstração de Ashwin *et al* reside no facto dos autores conseguirem caracterizar o ciclo atractor, como sendo o ciclo associado às direcções instáveis mais fortes (ligações que são tangentes aos vectores próprios cujos valores associados estão mais afastados de 0) — ver figura 1 (b). Neste contexto, a existência de um ciclo atractor não é incompatível com a ocorrência de comportamento transiente aparentemente caótico.

²O resultado de Deng [5] é mais geral do que dimensão 3.

Em dimensão 3, em redes com nenhuma sela de rotação e sem transversalidade entre variedades invariantes, a dinâmica perto delas afigura-se pouco rica. No entanto, se pelo menos se admitir que uma das selas é de rotação, num trabalho pioneiro, L.P. Shilnikov [11] mostrou que a dinâmica poderá ser bastante mais complexa, devido ao espiralamento das soluções que as selas forçam.

2 Ciclos em que todas as selas são de Rotação

Em 1965, Shilnikov [11] estudou uma ligação homoclínica associada a uma sela-foco, com valores próprios σ e $-\rho \pm iw$ (onde $\sigma, \rho > 0$) e constatou que:

- se $\sigma > \rho$, existe um ferradura (conjugada a um número infinito de símbolos) suspensa não uniformemente hiperbólica perto da ligação;
- se $\sigma < \rho$, a ligação homoclínica é atractora.

Em 1984, Tresser [12], melhorou o resultado de Shilnikov no caso de $\sigma > \rho$, afirmando que as ferraduras suspensas estão ligadas, no sentido em que não existe uma isotopia capaz de as desconectar. Pumariño e Rodriguez [9], estudaram o caso ressonante ($\sigma = -\rho$) e provaram a coexistência de vários atractores do tipo *Hénon* na vizinhança da ligação homoclínica.

Em 1980, P. Holmes [6], provou que se p_0 é uma sela-foco com duas ligações homoclínicas simétricas, então perto da rede existe um conjunto invariante topologicamente conjugado ao conjunto $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ de sequências de dois símbolos, com a seguinte dinâmica surpreendente: se codificarmos cada uma das ligações com o número 1 e 2, então para cada possível sequência de símbolos $(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, existe uma trajectória (solução da equação diferencial) que segue de perto as ligações pela ordem da sequência dada (ver figura 1 (c)).

Esta possibilidade de sobreposição de redes heteroclínicas abriu caminho a uma linha de investigação no ramo dos sistemas dinâmicos: o da procura de soluções que seguem de perto uma dada sequência infinita pré-determinada de ligações na rede (fenómeno ao qual designaremos por *comutação heteroclínica*).

Numa rede mergulhada numa variedade de dimensão 3, conjectura-se que existe comutação heteroclínica se e só se os nós da rede são selas de rotação e se as variedades invariantes das selas se intersectam transversalmente (quando possível). A suficiência foi provada em Aguiar, Castro e Labouriau [1], em 2005, no caso em que os nós são selas-foco e por Aguiar, Labouriau e

Rodrigues [3], em 2009, no caso em as redes envolvem os dois tipos de nodos de rotação. Mais concretamente, em [3] prova-se:

Teorema: Se Σ for uma rede heteroclínica de nodos de rotação, satisfazendo a

Condição de Transversalidade: se $\dim W^u(\xi_i) > 1$ e $\dim W^s(\xi_{i+1}) > 1$ então $W^u(\xi_i)$ intersecta transversalmente $W^s(\xi_{i+1})$ (ver figura 1 (d)),

então Σ exhibe comutação heteroclínica e, arbitrariamente perto da rede, existe uma ferradura suspensa hiperbólica.

A prova deste resultado assenta na construção de secções transversais ao fluxo junto da entrada e da saída de vizinhanças das selas e no estudo da geometria da aplicação de primeiro retorno a uma secção fixada. A rotação induzida pela parte complexa dos valores próprios e/ou pelas soluções periódicas fazem com que o retorno de dado um segmento com medida finita seja alvo de uma expansão.

Os resultados de Aguiar *et al* [1, 3, 10] garantem ainda a existência de um conjunto hiperbólico invariante suspenso na vizinhança da rede. O estudo deste tipo de *atractores estranhos* durante alguns anos não foi alvo de uma tão grande atenção como foi o atractor de Lorenz, porém recentemente tem surgido o interesse do seu estudo por vários autores (Pacífico, Rovella e Viana [8]).

Em questões relacionadas com astrofísica e no contexto do problema dos três corpos, para além de sabermos se existem soluções que seguem uma dada rede, interessam as voltas em torno das selas de rotação. Este problema tem particular aplicabilidade no caso de órbitas de cometas em torno de corpos com grandes massas. Assim, coloca-se uma nova questão: dado um ciclo, será possível controlar o número de voltas em torno de nodos de rotação? Mais formalmente, dada uma sequência bi-infinita de números naturais, existirá uma solução do sistema que, à medida que segue o ciclo, vai dando número de voltas em torno dos nós, associado à sequência dada? A este fenómeno vamos chamar *ciclicidade*.

A resposta foi afirmativamente respondida por Rodrigues *et al* [10] no contexto de ciclos em que as selas são trajectórias fechadas. Na demonstração do resultado é usada dinâmica simbólica, para provar que, dado um ciclo associado a soluções periódicas, existe uma infinidade não numerável de trajectórias que seguem o ciclo no passado e no futuro, e que podem ser codificadas através de um número finito de elementos. Um aspecto notável é que usando a mesma dinâmica simbólica, é possível provar a existência de

uma infinidade de outras ligações homo e heteroclínicas entre qualquer par de selas da rede. Esta construção permite, em particular, concluir acerca da existência de um atrator robusto perto do ciclo contendo as variedades invariantes de todos os nós do ciclo as quais, por sua vez, exibem ciclicidade e formam um duplo carrossel caótico.

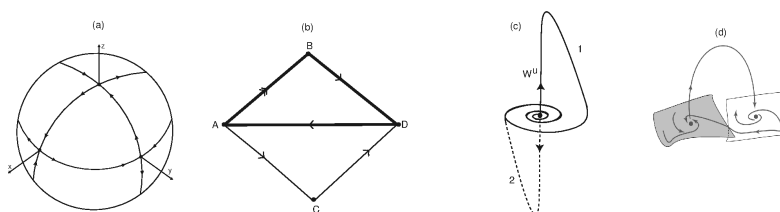


Figura 1: (a) Exemplo de uma rede com vários ciclos, numa 2-esfera; (b): Exemplo de uma rede com dois ciclos, onde um dos ciclos é essencialmente assintoticamente estável; (c): Rede homoclínica estudada por P. Holmes; (d) Exemplo de uma rede com duas selas-foco e onde as variedades invariantes se intersectam transversalmente (quando possível).

Referências

- [1] M. A. D. Aguiar, S. B. S. D. Castro, I. S. Labouriau, *Dynamics near a heteroclinic network*, Nonlinearity 18, páginas 391–414, 2005
- [2] M. A. D. Aguiar, S. B. S. D. Castro, I. S. Labouriau. *Simple Vector Fields with Complex Behavior*, Int. Jour. of Bif. and Chaos, Vol. 16 No. 2, páginas 369–381, 2006
- [3] M. A. D. Aguiar, I. S. Labouriau, A. A. P. Rodrigues, *Switching near a heteroclinic network of rotating nodes*, Dynamical Systems: an International Journal, Vol. 25, Issue 1, páginas 75–95, 2010
- [4] P. Ashwin, P. Chossat, *Attractors for Robust Heteroclinic Cycles with Continua of Connections*, J. Nonlinear Sci. 8, páginas 103–129, 1998
- [5] B. Deng, *The Shilnikov Problem, Exponential Expansion, Strong λ -Lemma, C^1 Linearisation and Homoclinic Bifurcation*, Journal of Differential Equations, Vol. 79, No. 2, páginas 189–231, 1989

- [6] P. Holmes, *A strange family of three-dimensional vector fields near a degenerate singularity*, J. Diff. Eqns, No. 37, páginas 382–403, 1980
- [7] M. Krupa, I. Melbourne, *Asymptotic Stability of Heteroclinic Cycles in Systems with Symmetry, II*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, No. 134A, páginas 1177–1197, 2004
- [8] M. J. Pacífico, A. Rovella, M. Viana, *Persistence of global spiraling attractors*, in preparation
- [9] A. Pumariño, A. Rodriguez, *Persistence and Coexistence of strange attractors in homoclinic saddle-focus connections*, Lect. Notes in Maths, Vol. 1658, Springer-Verlag, 1997
- [10] A. A. P. Rodrigues, I. S. Labouriau, M. A. D. Aguiar, *Chaotic Double Cycling*, Dynamical Systems: an International Journal, Vol. 26, Issue 2, 2011
- [11] L. P. Shilnikov, *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions*, Sov. Math. Dokl, No. 6, páginas 163–166, 1965
- [12] C. Tresser, *About some theorems by L. P. Shilnikov*, Ann. Inst. Henri Poincaré, No. 40, páginas 441–461, 1984