

Padrões e Projecções

Isabel S.Labouriau e Eliana M. Pinho

Porto, 2000

Padrões

Na figura 1 podes ver a fotografia de um dos átrios do edifício antigo da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que fica na Praça Gomes Teixeira (Leões). O chão está coberto por quadrados brancos e pretos que foram assentados formando um padrão repetitivo.

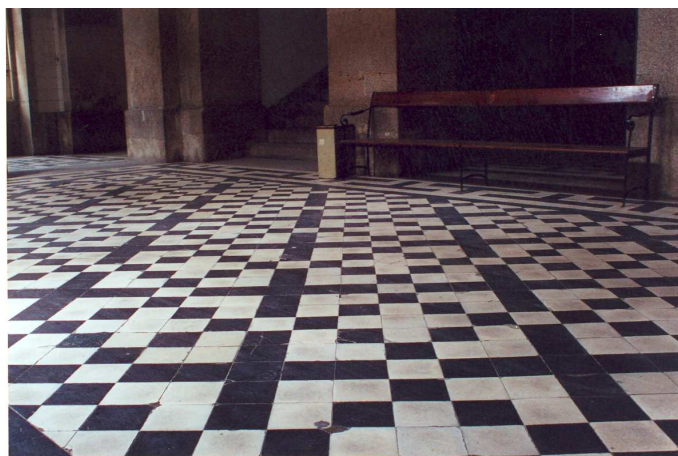


Figura 1: Átrio

O trabalho do ladrilhador teria sido mais fácil se lhe tivessem dado peças todas iguais às da figura 2 e uma regra para as assentar: lado a lado e fazendo coincidir os vértices.

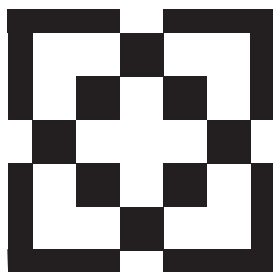


Figura 2: Módulo

Chamamos módulo a esta peça básica e à ideia de repetição do módulo no espaço vamos chamar periodicidade.

Para melhor compreender estes conceitos podes tentar desenhar outras peças básicas que permitam construir este padrão,

- a) supondo que as peças possam ser rodadas antes da colocação;
- b) supondo que as peças sejam colocadas todas na mesma posição.

Procura padrões repetitivos à tua volta. Podes encontrá-los no chão, nas paredes, nos tecidos, na natureza. Para cada um desses padrões descobre uma peça básica que os permita construir segundo a regra: colocação de peças todas iguais, lado a lado e com os vértices a coincidir.

Repara que o módulo de um padrão no plano não pode ter uma forma qualquer. Mostra que não é possível cobrir o plano só com pentágonos regulares (sem deixar espaços, claro).

Que outros polígonos podem ser usados como módulo para criar um padrão no plano?

Todos os padrões repetitivos de que te falámos são planares mas os mesmos conceitos servem para descrever padrões repetitivos numa linha ou numa faixa e padrões repetitivos tridimensionais como é o caso dos cristais.

Os padrões repetitivos são muito práticos: se quisermos aumentar o átrio da figura 1 basta-nos acrescentar mais alguns ladrilhos preservando o ritmo visual do pavimento já existente.

A partir deste exemplo podemos imaginar um padrão repetitivo com o mesmo aspecto mas que se estende infinitamente. A figura 3 mostra uma região desse padrão imaginário.

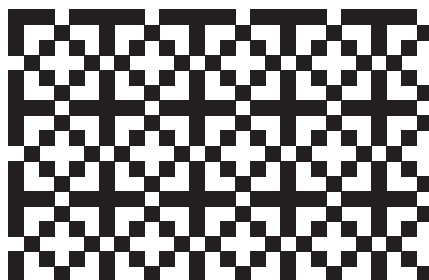


Figura 3: Região do padrão imaginário

Para encontrarmos as simetrias do padrão repetitivo começamos por procurar as do módulo.

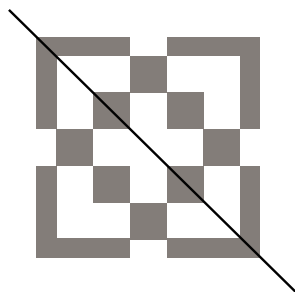


Figura 4: Uma simetria do módulo

A reflexão na recta da figura 4 é uma simetria do módulo: quando reflectimos o módulo nesta recta obtemos o mesmo desenho, no mesmo lugar.

Quais são as outras simetrias do módulo? Sugestão: Há reflexões em mais 3 rectas e 3 rotações em torno de um ponto.

O padrão tem simetrias herdadas das do módulo. De facto, se reflectires o padrão numa recta como a da figura 4 obténs o mesmo padrão. Para além das simetrias comuns ao módulo e ao padrão, este último tem também simetrias (translações) que vêm da regra usada para montá-lo a partir do módulo.

O padrão possui ainda simetrias menos óbvias. Por exemplo, o pedaço a preto na figura 5 é transformado no pedaço cinza escuro se reflectirmos na recta e depois transladarmos ao longo da mesma recta.

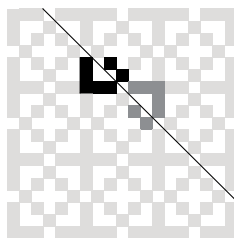


Figura 5: Simetria do padrão que não é simetria do módulo — reflexão deslizante

Esta operação chama-se uma reflexão deslizante ao longo de uma recta. A reflexão deslizante do exemplo transforma todo o padrão infinito em si mesmo.

Esta simetria é mais fácil de observar na fotografia das autoras (figura 6) que foi tirada no mesmo lugar que a da figura 1, mas de outro ângulo.



Figura 6: Átrio — outro ângulo

Projecções

Vamos retirar uma faixa ao padrão e projectá-la fazendo corresponder a cada abcissa a altura total da mancha preta que a cobre, tal como na figura 7.

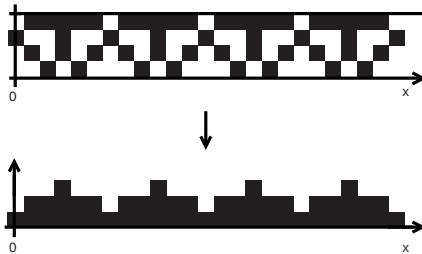


Figura 7: Projecção de uma faixa

Repara que no exemplo apresentado a projecção é uma função periódica. Para além disso é também uma função par.

Se escolhermos outra faixa poderemos ter uma função diferente. O resultado depende da largura da faixa e da inclinação das rectas paralelas que a definem. No caso da figura 8 essa função ainda é periódica e par.

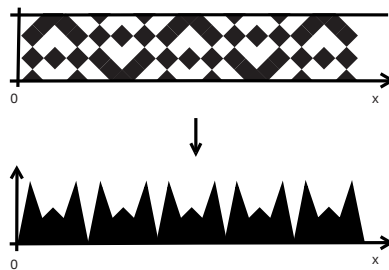


Figura 8: Projecção de outra faixa

Experimenta variar a espessura das faixas, será que a função continua par e periódica?

Quais as outras faixas, sobre este padrão, que produzem funções periódicas com períodos diferentes dos das figuras 7 e 8?

Repara que o resultado da projecção nem sempre é uma função periódica, apesar de termos começado com um padrão periódico. Quais as faixas que, tal como a da figura 9, produzem funções não periódicas?

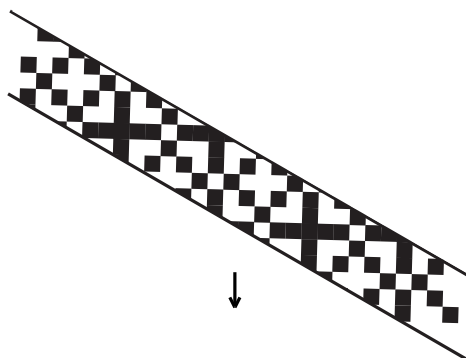


Figura 9: Quais são as faixas que produzem funções não periódicas?

Um problema de investigação em Matemática é: para um padrão e uma faixa, prever como será o gráfico da função que a cada x associa a altura total, acima de x , da mancha preta na faixa. O problema é fazer a previsão sem saber qual é o padrão, sabendo apenas as suas simetrias.

O problema é ainda mais interessante se projectarmos padrões tridimensionais sobre um plano.

Este estudo tem algumas aplicações práticas a sistemas que só podem ser observados depois de projectados. Por exemplo: reacções químicas em camadas finas de gel; formação de padrões em pêlos de animais.

O tema deste texto é uma simplificação de um trabalho de investigação em Matemática de:

Isabel S. Labouriau

Centro de Matemática Aplicada da Universidade do Porto

Eliana M. Pinho

Universidade da Beira Interior, Estudante de Doutoramento em Matemática, Universidade do Porto