

28 de Janeiro de 2025

AZULEJOS, PADRÕES E SIMETRIAS MATEMÁTICA COM VIDA AVEIRO

ISABEL S. LABOURIAU

Comecei a preparar esta palestra com um dicionário¹, onde encontrei 3 acepções de *simetria*:

Simetria s.f. [Do grego *symmetría*, ‘justa proporção’, pelo latim *symmetria*]

- (1) Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio, ou ainda, que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo.
- (2) Harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares.
- (3) *Geom.* Propriedade duma configuração que é invariante sob transformações que não alteram as relações métricas, mas alteram a posição dos seus elementos constitutivos.

A palestra procura dar algumas respostas possíveis à pergunta:

Como usar *simetria* para criar padrões com *harmonia*?

Começando pelo tipo mais simples de simetria.

1. SIMETRIA BILATERAL

Nosso corpo tem aproximadamente simetria bilateral, assim como os corpos de muitos animais. É um tipo de simetria aproximada comum na natureza, como na flor da Figura 1.

A mesma simetria aparece na representação que fazemos da natureza como nos esquemas da Figura 1, copiados de um atlas de botânica, que representa alguns tipos de inflorescência.

Ainda mais comum é a simetria bilateral criada pelo homem, como nas duas imagens da Figura 2, que têm simetria bilateral em relação à linha vertical da figura.

As duas figuras têm tipos diferentes de simetria bilateral, como nos textos da direita da Figura 2.

Definição 1. A simetria de um objeto é uma transformação geométrica que transforma o objeto em si mesmo.

¹Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, *Novo dicionário da língua portuguesa*, 1ª edição

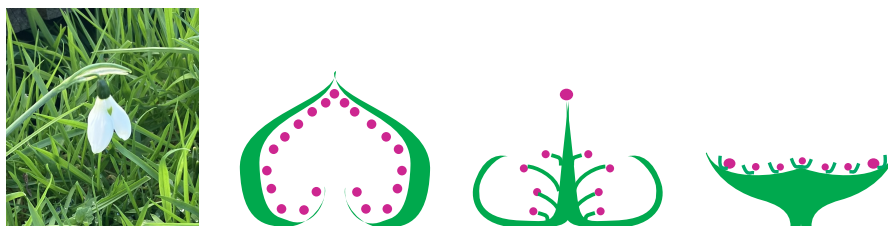


FIGURE 1. À esquerda, simetria bilateral em corola de flor. À direita representação esquemática de inflorescências.



FIGURE 2. À esquerda dois exemplos de simetria bilateral. À direita: diferença entre os tipos de simetria bilateral.

Por isso:

A inversa de uma simetria de um objeto é uma simetria.

A composição de duas simetrias de um objeto é uma simetria.

A transformação identidade $\mathcal{I}$ (não fazer nada) é uma simetria de qualquer objeto.

Ou seja: as simetrias de um objeto formam um *grupo*. No exemplo da R. XV de Novembro da Figura 2 o grupo é $G = \{R_v, \mathcal{I}\}$ onde R_v é a reflexão na reta vertical. No mosaico romano da mesma figura o grupo é $G = \{\rho_{180}, \mathcal{I}\}$ onde ρ_{180} é uma rotação de 180° .

2. FRISOS

Usamos simetria para criar objetos decorativos como o friso da Figura 3. O friso pode ser continuado enquanto a fábrica continuar a produzir os mesmos azulejos e tem uma nova simetria T , a translação para a esquerda.



FIGURE 3. Friso de azulejos em quarto de banhos coletivo em ilha, Ramalde, Porto



FIGURE 4. Friso em quartos de banho públicos, Foz, Porto. As reflexões nas duas linhas verticais são simetrias.

Definição 2. Um friso é uma faixa infinita no plano constituída por um padrão que se repete ou seja uma faixa cujo grupo de simetrias contém uma translação T .

O grupo G de simetrias de um friso contém:

$$\begin{aligned} T &= \text{translação para a esquerda} & T^{-1} &= \text{translação para a direita} \\ T \circ T^{-1} &= \mathcal{I} & T^2 &= T \circ T, & T^{-2} &= T^{-1} \circ T^{-1}, & T^3 &= T \circ T \circ T, \dots \\ G &= \{\mathcal{I}, T, T^2, T^3, \dots, T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, \dots\} \end{aligned}$$

Teorema 1. O grupo de simetrias G de um friso é infinito.

Se escrevermos $T^0 = \mathcal{I}$ então $G = \{T^j : j \in \mathbb{Z}\}$. Dizemos que o grupo G é gerado por T e denotamos isto por $G = \langle T \rangle$.

Há frisos com mais simetria. Por exemplo a reflexão R_v na reta vermelha do friso da Figura 4 é uma simetria deste friso e o grupo é $G = \{T^n, R_v \circ T^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Definição 3. O grupo de simetrias G é gerado por $X_1, \dots, X_n$ (escrevemos $G = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$) se todos os seus elementos forem compostas de um número finito de elementos X_j , $j = 1, \dots, n$.

No exemplo dos banhos públicos da Foz, $G = \langle T, R_v \rangle \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Em particular $T \circ R_v = R_w$ é a reflexão em outra reta vertical e por isso $T = R_w \circ R_v$. Podemos escrever também $G = \langle R_v, R_w \rangle$.

Os frisos podem ter ainda mais simetrias. O grupo de simetrias da gelosia da Figura 5 contém a reflexão R_h em uma reta horizontal, além de reflexões em duas retas verticais. Para transformar o friso em si mesmo, a reta horizontal tem que estar exatamente no centro da faixa. O grupo é $G = \{T^n, R_{v_1} \circ T^n, R_{v_2} \circ T^n, R_h \circ T^n, \mid n \in \mathbb{Z}\}$
 $G = \langle R_{v_1}, R_{v_2}, R_h \rangle = \langle T, R_{v_1}, R_h \rangle$.

Na Figura 6 representamos um friso e sua imagem pela reflexão R_h na reta horizontal pelo centro da faixa, que claramente não é uma

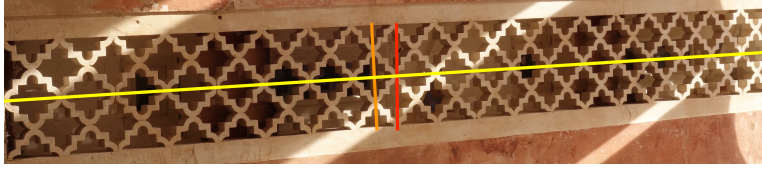


FIGURE 5. Gelosia, Teatro Góngora, Córdoba, um friso com simetria de reflexão em reta horizontal



FIGURE 6. Friso de azulejos, R. Fernandes Costa, Porto e sua imagem pela reflexão R_h na reta horizontal.



FIGURE 7. O mesmo friso da Figura 6 e o resultado da reflexão deslizante $R_\Delta = R_h \circ (\frac{1}{2}T)$.

simetria do friso, mas compondo R_h com uma translação, o resultado passa a ser uma simetria aproximada como se vê na Figura 7. Se R_h for a reflexão na reta horizontal, então a *reflexão deslizante* $R_\Delta = R_h \circ (\frac{1}{2}T)$ é uma simetria deste friso. O seu grupo de simetrias é $G = \{T^n, R_\Delta \circ T^n, \quad n \in \mathbb{Z}\} = \langle T, R_\Delta \rangle$. Mas como $R_\Delta^2 = T$ podemos simplesmente escrever $G = \langle R_\Delta \rangle$.

O grupo de simetrias do mosaico da Figura 8 contém reflexões em duas retas verticais R_{v_1} e R_{v_2} , isto é $G \supset \{T^n, R_{v_1} \circ T^n, R_{v_2} \circ T^n \quad n \in \mathbb{Z}\}$. Se esquecermos as cores, há mais simetrias. Para começar, como se vê na Figura 9, a reflexão deslizante $R_\Delta = R_h \circ (\frac{1}{2}T)$. Também a rotação ρ_{180} de 180° em torno do ponto indicado na figura é uma simetria, e as rotações em torno de todas as cópias deste ponto por sucessivas aplicações de $\frac{1}{2}T$. O grupo é $G = \langle R_{v_1}, R_{v_2}, R_\Delta, \rho_{180} \rangle$.

Na verdade estas são todas as simetrias possíveis para um friso.

Teorema 2. *O grupo de simetrias de um friso (infinito) e periódico horizontal só pode ser um dos seguintes:*

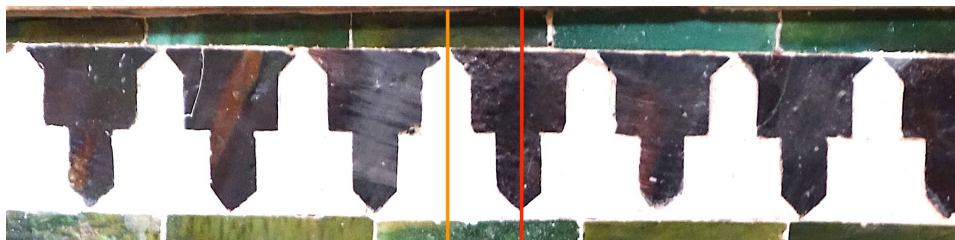


FIGURE 8. O grupo de simetrias destes mosaicos moçárabes de Córdoba contém reflexões em duas retas verticais.

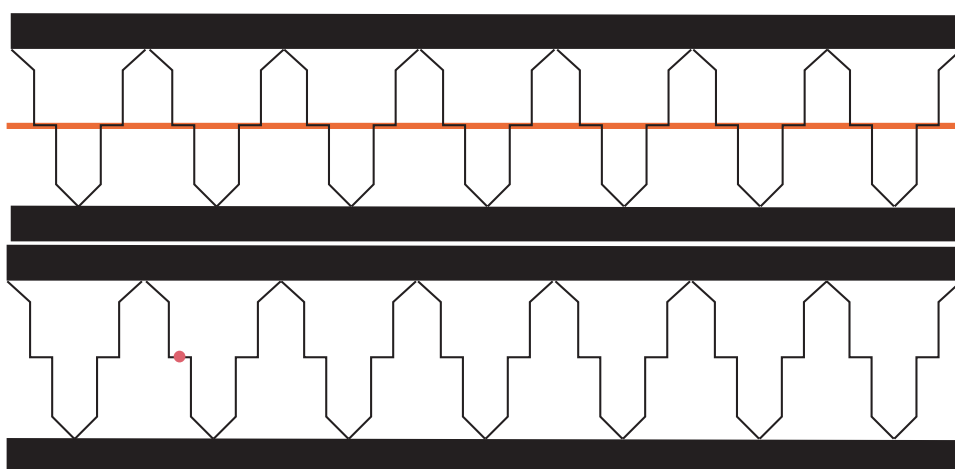


FIGURE 9. Mais simetrias do mosaico da Figura 8, se esquecermos as cores. Acima, reflexão deslizante $R_\Delta = R_h \circ (\frac{1}{2}T)$. Abaixo, rotação ρ_{180} de 180° em torno do ponto indicado.

- | | |
|---|------------------------------------|
| (1) $G = \langle T \rangle$ | |
| (2) $G = \langle R_\Delta \rangle$ | onde |
| (3) $G = \langle T, \rho_{180} \rangle$ | T translação |
| (4) $G = \langle T, R_v \rangle$ | R_Δ reflexão deslizante |
| (5) $G = \langle T, R_h \rangle$ | ρ_{180} rotação 180° |
| (6) $G = \langle T, R_v, \rho_{180} \rangle$ | R_v reflexão em reta vertical |
| (7) $G = \langle R_v, R_\Delta, \rho_{180} \rangle$ | R_h reflexão em reta horizontal. |

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer-Verlag (1988).

3. MÚSICA

Simetrias semelhantes às dos frisos são usadas em música. A mais simples de todas ocorre em um *cânone* em que a mesma melodia é tocada ou cantada por dois instrumentos ou duas vozes, uma delas começando atrasada em relação à outra.

*Il est à observer, en joüant ces Canons, que, l'orx
que le premier instrument est avancé jusqu'à cette
marque. Si le second commence et suit le premier pas à pas,
et quand celui-ci est au bout l'autre finit auprès
de ces signes. ^ ^*

FIGURE 10. Introdução da coleção de 6 cânones de G.P. Teleman (1738)

Em 1738, G.P. Teleman publicou uma coleção de 6 cânones. A introdução da partitura, reproduzida na Figura 10, explica como tocar. Reproduzimos também a primeira linha da partitura do primeiro cânone da coleção, onde está indicado o local onde o segundo instrumento começa a tocar.



Pensando na linha da partitura como um friso, isto é uma translação. No cânone do exemplo, uma translação de um compasso. Ouça este cânone em

<https://youtu.be/orBb718FHMU?si=wN-6V5TtPz9NFEWP>

O exemplo acima é um cânone simples, isto é, gerado por uma única translação horizontal. Há outras operações em música que também são consideradas cânones. A lista completa é a seguinte:

- | | |
|--|---------|
| • Translação “horizontal” (cânone simples) | • T |
| • Translação “vertical” (transposição). | • V |
| • Inversão “vertical” (retrógrada). | • R_v |
| • Inversão “horizontal”. | • R_h |
| • Expansão (alteração da velocidade). | • E |

Explicando em mais detalhe: a transposição (translação V) consiste em tocar a mesma melodia, mas começando em uma nota mais aguda. Corresponde a uma translação do friso na direção vertical. Na inversão retrógrada toca-se a música de trás para diante. Corresponde a uma reflexão R_v do friso em uma reta vertical. O outro tipo de inversão corresponde a uma reflexão R_h do friso em uma reta horizontal. Quando a melodia inicial se torna mais aguda, a melodia invertida fica mais grave e vice-versa. Por fim, com a expansão E toca-se a mesma melodia a



FIGURE 11. Painel de azulejos R. de Diu, Porto

um múltiplo da velocidade. Esta transformação não é propriamente uma simetria.

Assim, o grupo de todas as transformações possíveis para produzir um cânone é $G = \langle T, V, R_v, R_h, E \rangle$.

Podemos aplicar estas transformações a qualquer melodia, mas em geral o resultado não soará bem. A dificuldade está em produzir uma melodia que gere um cânone harmonioso. O grande mestre desta arte foi Johann Sebastian Bach. Tinha tanto orgulho dos seus cânones que em um retrato oficial pintado por Haussmann em 1746, fez-se representar segurando uma folha de papel em que está escrito o tema para um *Canon triplex à 6 V*.

Exemplos dos cânones de J.S. Bach são as famosas *Variações Goldberg* editadas em 1741 sob o título *Clavier-Übung*. Em 1974 apareceu uma surpresa: na última página de um exemplar da edição original destas variações, página que tinha sido deixada em branco pelo editor, estava um manuscrito com 14 cânones, do punho do próprio J.S. Bach. Pensa-se que este exemplar seria provavelmente a cópia pessoal do compositor. Para cada um dos cânones está indicada apenas a melodia de base, além da lista de transformações a aplicar. O décimo cânone da lista, com a violinista de cabeça para baixo quando toca as vozes refletidas, pode ser ouvido em

<https://youtu.be/FPjSpjR9-SA?si=KtMObWEuyhayTKmk>

4. PAINÉIS DE AZULEJOS

Em geral azulejos são usados para criar painéis como o da Figura 11. O grupo de simetrias de um painel de azulejos contém duas translações: T translação horizontal e V translação vertical.

Para o painel da Figura 11 o grupo de simetrias é $G = \langle T, V \rangle$.



FIGURE 12. Um azulejo e o painel formado por ele com rotações. À esquerda, R. dos Bragas, Porto, á direita Passeio Alegre, Porto

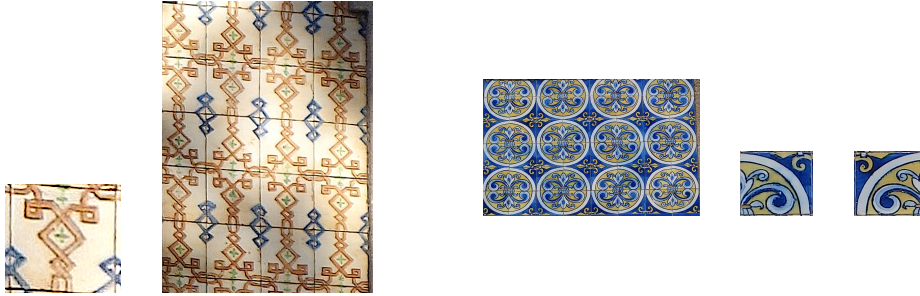


FIGURE 13. ‘A esquerda, um azulejo e painel formado por ele por rotações na Rotunda da Boavista, Porto. À direita, dois azulejos simétricos usados para formar um painel na R. João de Deus, Porto.

Podemos criar painéis com mais simetria mudando a posição em que os azulejos são colocados, ou seja aplicando sucessivamente alguma transformação aos azulejos ou usando azulejos que tenham alguma simetria.

A única simetria do azulejo da esquerda na Figura 12 é a rotação ρ_{180cen} de 180° em torno do seu centro. Como o azulejo foi rodado de 90° a cada aplicação sucessiva, o grupo de simetrias do painel é $G = \langle T, V, \rho_{90can}, \rho_{180cen} \rangle$ onde ρ_{90can} é uma rotação de 90° em torno dos cantos do azulejo. O mesmo procedimento foi seguido para o outro painel da figura, em que o azulejo é simétrico para a reflexão R_d em uma das diagonais. O grupo de simetrias do painel é $G = \langle T, V, \rho_{90can}, R_d \rangle$.

Já o painel da esquerda na Figura 13 é formado por um azulejo simétrico para a reflexão R_v na reta vertical pelo seu centro. Os azulejos foram rodados de 180° em filas alternadas, gerando um painel com grupo de simetrias

$G = \langle T, V, R_v, R_h, \rho_{180} \rangle$ onde R_h é a reflexão em um dos lados horizontais do azulejo.

Os azulejos não são transparentes, de modo que não é possível criar um painel com simetria de reflexão se os azulejos não tiverem esta simetria. Podemos usar dois azulejos simétricos, como é o caso do painel da direita na Figura 13 com grupo de simetrias $G = \langle T, V, R_v, R_h, \rho_{180} \rangle$.

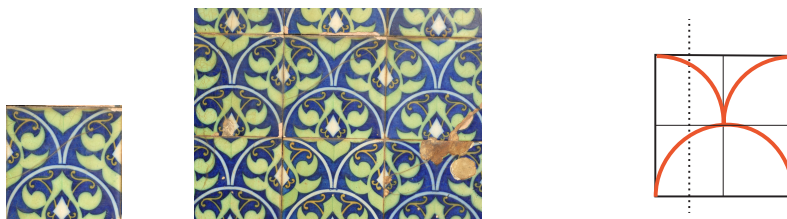


FIGURE 14. Azulejo e painel formado por ele com simetria oculta, na Av. Brasil, Porto. À direita, reflexão deslizante que cria a nova simetria.

Finalmente, com um pouco de trabalho de desenho, podemos criar um painel simétrico para translação na diagonal a partir de um azulejo cuja única simetria é a reflexão R_v , como na Figura ?? . O trabalho de desenho é na verdade uma simetria oculta do azulejo, uma reflexão deslizante $R_{\Delta v}$ ao longo da linha tracejada da figura ao lado, que transforma o quadrado com metade dos lados do azulejo em outro quadrado do mesmo azulejo. Como $R_{\Delta v} \circ R_{\Delta v}$ é a translação vertical V , então esta reflexão deslizante é uma simetria do painel. A composta $R_{\Delta v} \circ R_v$ é a translação na diagonal.

Uma simetria de um painel de azulejos quadrados tem que transformar um azulejo quadrado em um quadrado, mas não necessariamente em um azulejo quadrado, como o exemplo acima mostra. Isto restringe a lista de grupos de simetria possíveis.

Teorema 3. *O grupo de simetrias de um painel plano (infinito) e periódico de azulejos quadrados, além de $\langle T, V \rangle$ só pode ser um dos seguintes:*

$$G = \langle T, V \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{180} \rangle$$

$$G = \langle T, V, R_h \rangle$$

$$G = \langle T, V, R_{\Delta h} \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{180}, R_h, R_v \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{180}, R_h, R_{\Delta v} \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{180}, R_{\Delta h}, R_{\Delta v} \rangle$$

$$G = \langle T, V, R_{\Delta v}, R_v \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{180}, R_d \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{90} \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{90}, R_h \rangle$$

$$G = \langle T, V, \rho_{90}, R_{\Delta h} \rangle$$

Convenções:

T = translação horizontal.

V = translação vertical.

ρ_θ = rotação de um ângulo θ .

R_h = reflexão em reta horizontal.

R_v = reflexão em reta vertical.

R_d = reflexão na diagonal.

$R_{\Delta h}$ = reflexão deslizante em reta horizontal.

$R_{\Delta v}$ = reflexão deslizante em reta vertical.

A demonstração deste teorema (parte dela deixada como exercício) pode ser encontrada no livro de M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer-Verlag (1988). O teorema é um caso particular de um resultado mais geral, a classificação dos *grupos cristalográficos planos*, também conhecidos como *grupos papel de parede* em que os azulejos podem ser também hexágonos ou paralelogramos.

5. DESAFIOS

- (1) Determine o grupo de simetrias (de frisos) da grade do balcão na foto da R. de Diu.
- (2) Encontre na lista do Teorema 3 os grupos de simetria que correspondem a cada um dos painéis das figuras.
- (3) Verifique que a composta $R_{\Delta v} \circ R_v$, discutida para o painel da Av. Brasil, é realmente a translação na diagonal.
- (4) Descubra na sua cidade frisos com cada um dos grupos de simetria do Teorema 2.
- (5) Descubra na sua cidade painéis de azulejos com cada um dos grupos de simetria do Teorema 3.

6. AGRADECIMENTOS

Agradeço a Luiza Labouriau por conversas e textos sobre música e por autorizar o uso dos seus videos, que podem ser vistos em <https://www.youtube.com/@luizalabouriau863> e também em <http://www.luiza-labouriau.com>