

Redes heteroclínicas e aplicações a convecção

Seminário de Sistemas Dinâmicos

Isabel S. Labouriau
CMUP

Porto 21 de Maio de 2010

Redes heteroclínicas e aplicações a convecção

Trabalho em colaboração com

- Sofia B.S.D. Castro
CMUP

e

Faculdade de Economia da Universidade do Porto

- Olga Podvigina
International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics,
Moscou, Rússia

e

Observatoire de la Côte d'Azur
Nice, França

Plano da palestra

Motivação — convecção

Um só modo

Interação de modos

rede quociente
motivos
resultados numéricos

Dinâmica em torno da rede

em torno de um nó
agulhas
estabilidade

Problemas abertos

I.S. Labouriau

Motivação —
convecção

Um só modo

Interação de
modos

rede quociente
motivos
resultados numéricos

Dinâmica em torno
da rede

em torno de um nó
agulhas
estabilidade

Problemas abertos

- ▶ Convecção de um fluido entre duas placas planares com diferença térmica.
- ▶ Busca de padrões com simetria hexagonal.

Plano do trabalho

- ▶ Buscar soluções periódicas com simetria hexagonal.
- ▶ Simetria $\longrightarrow$ redução da dimensão.
- ▶ Simetria $\longrightarrow$ forma normal.
- ▶ Simetria $\longrightarrow$ existência e persistência de ligações.
- ▶ Equilíbrio trivial $\longrightarrow$ rede heteroclínica (primeira bifurcação).
- ▶ Dinâmica em torno da rede heteroclínica.

Um só modo

Espaço central $\mathbf{R}^6 \sim \mathbf{C}^3$.

Simetrias: $\Gamma = \mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{T}^2 \times \mathbf{Z}_2$

Equações em forma normal:

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_1(a_1|z_1|^2 + a_2(|z_2|^2 + |z_3|^2)) + a_3\bar{z}_1\bar{z}_2^2\bar{z}_3^2$$

$$\dot{z}_2 = \lambda z_2 + z_2(a_1|z_2|^2 + a_2(|z_1|^2 + |z_3|^2)) + a_3\bar{z}_2\bar{z}_1^2\bar{z}_3^2$$

$$\dot{z}_3 = \lambda z_3 + z_3(a_1|z_3|^2 + a_2(|z_1|^2 + |z_2|^2)) + a_3\bar{z}_3\bar{z}_1^2\bar{z}_2^2$$

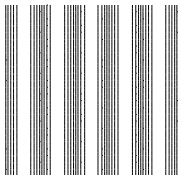
Equilíbrios ($x \in \mathbf{R}$):

	Nome	Representante
R	Rolos	$(x, 0, 0)$
H	Hexágonos	(x, x, x)
T	Triângulos	(ix, ix, ix)
PQ	Colcha de retalhos	$(x, x, 0)$

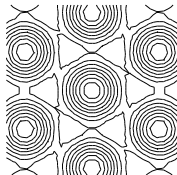
$\mathbf{R}^3$ ($z_j \in \mathbf{R}$) é um espaço invariante.

Um só modo — pontos de equilíbrio

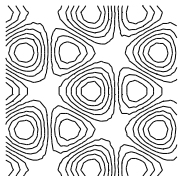
Rolos R



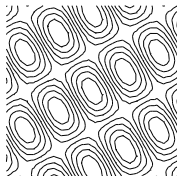
Hexágonos H



Triângulos T

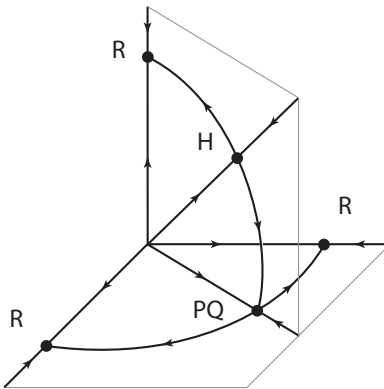


Colcha de retalhos PQ



Curvas de nível da componente vertical da velocidade no
plano médio horizontal

Um só modo



Algumas ligações heteroclínicas para um só modo em $\mathbf{R}^3$.

Interação de modos

Espaço central $\mathbf{R}^{12} \sim \mathbf{C}^6$.

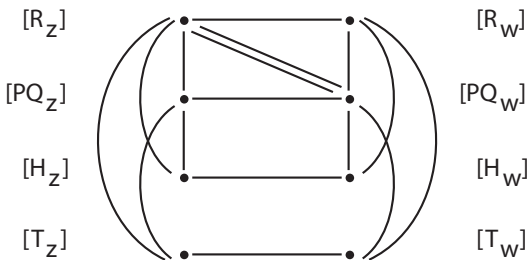
Simetrias: $\Gamma = \mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{T}^2 \times \mathbf{Z}_2$

Equilíbrios: os mesmos de um só modo, para cada modo
($x, y \in \mathbf{R}$)

	Nome	Representante	Simetrias
R_z	Rolos	$(x, 0, 0; 0, 0, 0)$	$\mathbf{O}(2) \ltimes (\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2)$
PQ_z	Colcha de retalhos	$(0, x, x; 0, 0, 0)$	$\mathbf{D}_2 \ltimes \mathbf{Z}_6$
H_z	Hexágonos	$(x, x, x; 0, 0, 0)$	$\mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{Z}_3$
T_z	Triângulos	$(ix, ix, ix; 0, 0, 0)$	$\mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{Z}_3$
R_w	Rolos	$(0, 0, 0; y, 0, 0)$	$\mathbf{O}(2) \ltimes \mathbf{D}_4$
PQ_w	Colcha de retalhos	$(0, 0, 0; 0, y, y)$	$\mathbf{D}_2 \ltimes (\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2)$
H_w	Hexágonos	$(0, 0, 0; y, y, y)$	$\mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{Z}_2$
T_w	Triângulos	$(0, 0, 0; iy, iy, iy)$	$\mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{Z}_2$

$\mathbf{R}^6$ ($z_j, w_j \in \mathbf{R}$) é um espaço invariante.

Interação de modos



Ligações heteroclínicas que podem existir para dois modos em $\mathbf{C}^6$.

A orientação das ligações depende dos parâmetros.

Redução ao subespaço invariante $\mathbf{R}^6$

$$\mathbf{R}^6 = \text{Fix}(\langle s_3 \rangle)$$

Simetrias em $\mathbf{R}^6$:

$$\tilde{\Gamma} = \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 = N(\langle s_3 \rangle) / \langle s_3 \rangle$$

subgrupo de

$$\Gamma = \mathbf{D}_6 \ltimes \mathbf{T}^2 \times \mathbf{Z}_2$$

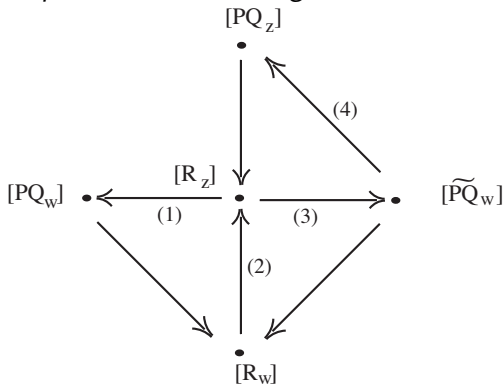
vantagem: $\tilde{\Gamma}$ é discreto

problema: simetrias escondidas.

Rede quociente por $\tilde{\Gamma}$

Teorema

Para um conjunto aberto do espaço de parâmetros o sistema em $\mathbf{R}^6$ com interação de dois modos tem uma rede heteroclínica persistente com a seguinte estrutura:

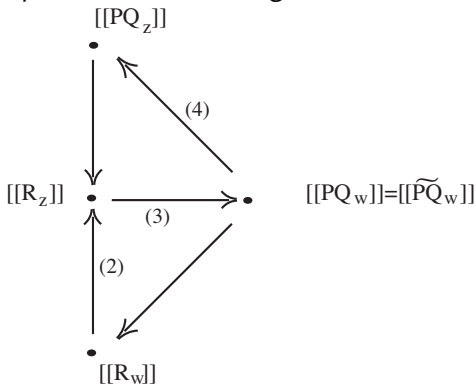


onde $[X]$ representa a órbita de X pelo grupo $\tilde{\Gamma}$.

Rede quociente por Γ

Corolário

Para um conjunto aberto do espaço de parâmetros o sistema em $\mathbf{R}^6$ com interação de dois modos tem uma rede heteroclínica persistente com a seguinte estrutura:



onde $[[X]]$ representa a órbita de X pelo grupo Γ .

Rede quociente $\rightarrow$ rede em $\mathbf{R}^6$

$\xi \in [X], \quad \eta \in [Y] \quad \text{com} \quad [X] \rightarrow [Y]$
não quer dizer $\xi \rightarrow \eta$

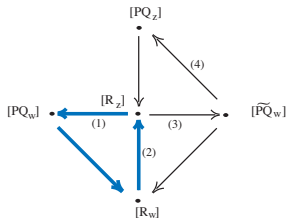
$[X] \rightarrow [Y]$ significa:

existem $\xi \in [X], \quad \eta \in [Y]$ tais que $\xi \rightarrow \eta$.

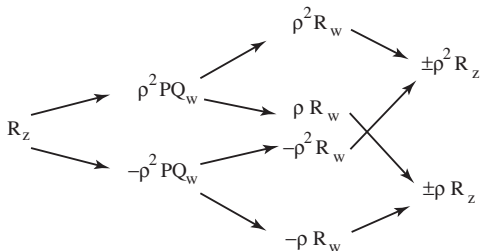
Um ciclo na rede quociente representa uma subrede heteroclínica.

Um **motivo** para um ciclo heteroclínico na rede quociente é a sequência de todas as ligações que existem na rede até chegar a um nó simétrico do nó inicial.

Motivo — ciclo C_{12}

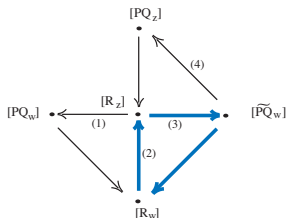


$\rho \in \tilde{\Gamma} = \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$
elemento de ordem 3

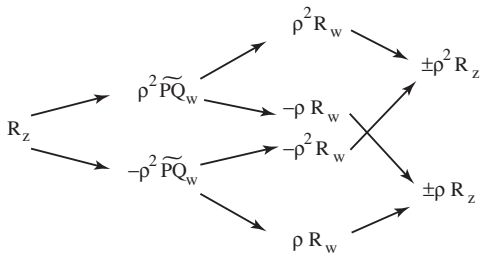


Todos os caminhos neste motivo são conjugados por $\tilde{\Gamma}$.

Motivo — ciclo C_{23}

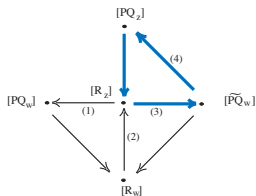


$\rho \in \tilde{\Gamma} = \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$
elemento de ordem 3

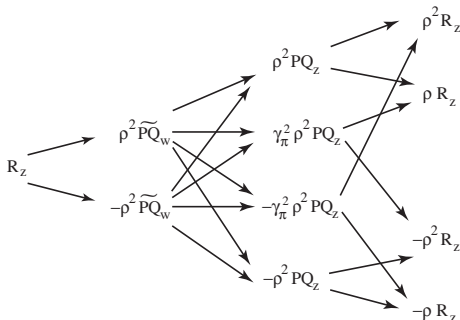


Todos os caminhos neste motivo são conjugados por $\tilde{\Gamma}$ ou por uma simetria escondida.

Motivo — ciclo C_{34}

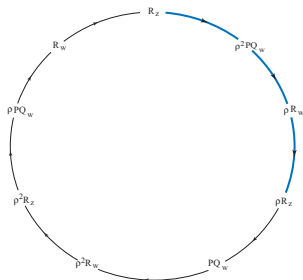
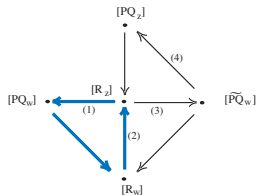
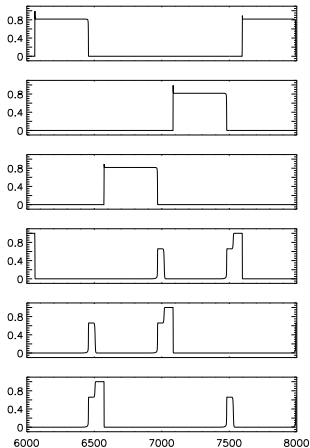


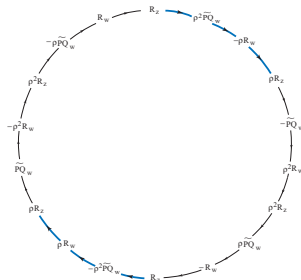
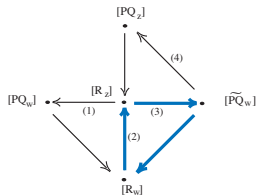
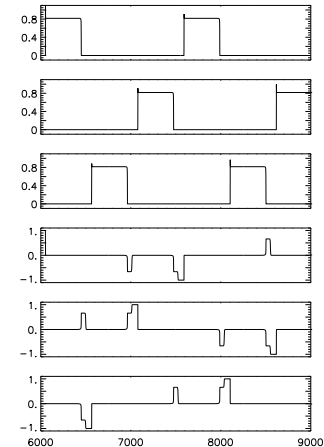
$\rho \quad \gamma_\pi^2 \rho^2$
elementos de ordem 3
em $\tilde{\Gamma} = \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$



Os caminhos neste motivo estão em duas Γ órbitas distintas.

Resultados numéricos — C_{12} — ciclo com 9 nós





Resultados numéricos — C_{23} — ciclo com 6 nós

Motivação —
convecção

Um só modo

Interação de
modos

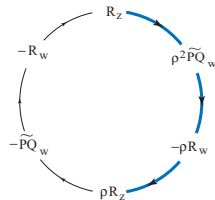
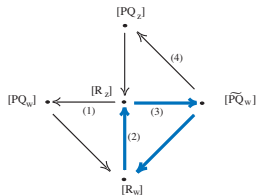
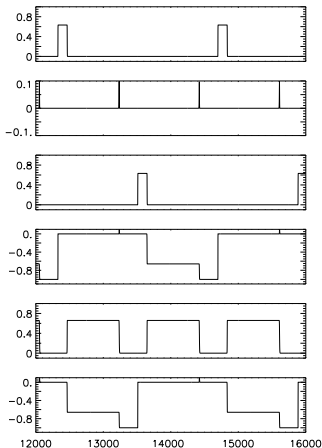
rede quociente
motivos

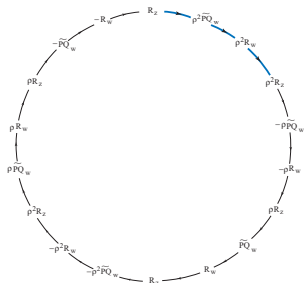
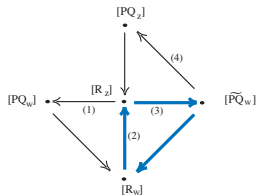
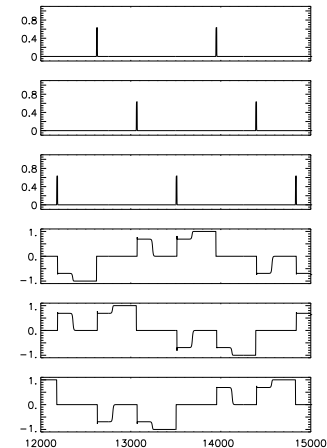
resultados numéricos

Dinâmica em torno
da rede

em torno de um nó
agulhas
estabilidade

Problemas abertos





Comutação em um nó

X_B **ponto de ramificação** de um campo em $\mathbf{R}^n$:

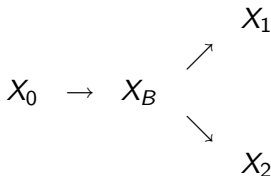
$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \\ & \nearrow & \\ X_0 & \rightarrow & X_B \\ & \searrow & \\ & & X_2 \end{array} \quad (1)$$

Existe **comutação no nó** X_B se para todo $\varepsilon > 0$ e para todo disco D^{n-1} transverso a $X_0 \rightarrow X_B$ existirem pontos em D^{n-1} que sombreiem $X_B \rightarrow X_1$ e $X_B \rightarrow X_2$ a uma distância ε .

Proposição

Em um motivo contendo as conexões (1) entre nós hiperbólicos sempre há comutação no ponto de ramificação X_B .

X_B ponto de ramificação de um campo em $\mathbf{R}^n$:



D_η disco de raio η transverso a $X_0 \rightarrow X_B$

S_η pontos em D_η que sombreiam $X_B \rightarrow X_2$ à distância ε

L medida de Lebesgue em D_η

Diz-se que a ramificação em X_B **segue essencialmente** a
ligação $X_B \rightarrow X_2$ se para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{L(S_\eta)}{L(D_\eta)} = 1.$$

Lema

Suponha que os autovalores em X_B satisfaçam:

$$-\nu_4 \leq -\nu_3 \leq -\nu_2 \leq -\nu_1 < 0 < \mu_1 < \mu_2$$

e que não tenham as ressonâncias:

$$\nu_2 = 2\nu_1$$

$$\nu_3 = 2\nu_1$$

$$\nu_4 = 2\nu_1$$

$$\nu_1 = \nu_2$$

e

$$\nu_4 = 2\nu_3$$

$$\nu_1 = \nu_2$$

e

$$\nu_4 = \nu_3 + \nu_2$$

Então a ramificação em X_B segue essencialmente a ligação $X_B \rightarrow X_2$.

I.S. Labouriau

Motivação —
convecção

Um só modo

Interação de
modos

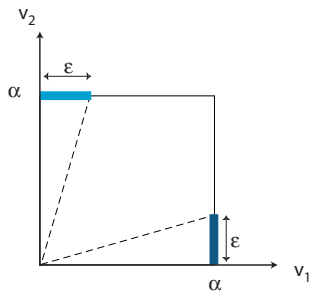
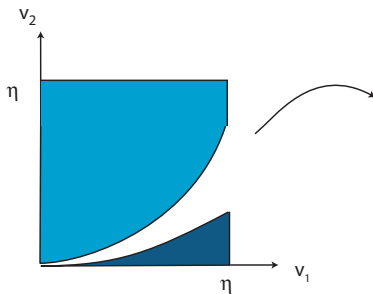
rede quociente
motivos
resultados numéricos

Dinâmica em torno
da rede

em torno de um nó
agulhas
estabilidade

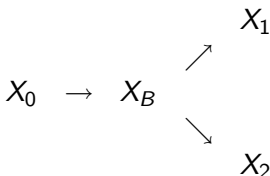
Problemas abertos

Linearização C^2 (Samovol) e



Agulhas

X_B ponto de ramificação de um campo em $\mathbf{R}^n$:



Há uma **agulha** em X_B se existir um caminho $p(s)$ no espaço de parâmetros tal que

para $s < 0$ a ramificação em X_B segue essencialmente a ligação $X_B \rightarrow X_1$,

para $s > 0$ a ramificação em X_B segue essencialmente a ligação $X_B \rightarrow X_2$.

Lema

Se a ligação $X_B \rightarrow X_1$ for simétrica da ligação $X_B \rightarrow X_2$ então não pode existir uma agulha em X_B .

Estabilidade

$X_0 \rightarrow X_B$ ligação em uma subrede Σ com agulha em X_B

D_η disco transversal à ligação

L medida de Lebesgue em D_η

$S_\eta \subset D_\eta$ pontos que sombreiam a subrede à distância $\varepsilon > 0$
até alguma ligação $\gamma X_0 \rightarrow \delta X_B \quad \gamma, \delta \in \tilde{\Gamma}$

Definição

A subrede Σ é *essencialmente estável* se para toda ligação com agulha e para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{L(S_\eta)}{L(D_\eta)} = 1$$

Estabilidade

$X_0 \rightarrow X_B$ ligação em uma subrede Σ com agulha em X_B

D_η disco transversal à ligação

L medida de Lebesgue em D_η

$T_\eta \subset D_\eta$ pontos com trajetórias que tendem para Σ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição

A subrede Σ é *essencialmente assintoticamente estável* se for essencialmente estável e se para toda ligação com agulha

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{L(T_\eta)}{L(D_\eta)} = 1$$

Teorema

Existe um conjunto aberto não vazio de parâmetros para o qual as duas subredes C_{12} e C_{23} coexistem e a subrede C_{12} é essencialmente assintoticamente estável em $\mathbf{R}^6$. O mesmo vale para a subrede C_{23} .

I.S. Labouriau

Motivação —
convecção

Um só modo

Interação de
modos

rede quociente
motivos
resultados numéricos

Dinâmica em torno
da rede

em torno de um nó
agulhas
estabilidade

Problemas abertos

Conjunto aberto de parâmetros:

- ▶ desigualdades para coexistência dos ciclos;
- ▶ desigualdades para agulha apontando para a subrede;
- ▶ desigualdades para estabilidade essencial (a seguir).

Não vazio — basta encontrar um ponto.

Desigualdades para estabilidade

X_j nó do ciclo quociente

P_j plano contendo $X_j \rightarrow X_{j+1}$

Autovalores em X_j , todos reais:

e_j maior autovalor em P_j

$-c_j$ autovalor não radial em P_{j-1}

t_j maior autovalor para autovetores fora de $(P_{j-1} + P_j)$.

Lema

A subrede é essencialmente assintoticamente estável se

$$\prod_{j=1}^3 \min(c_j, e_j - t_j) > \prod_{j=1}^3 e_j.$$

...e agora?

Problemas abertos

- ▶ Comutação na subrede que é ass. estável
ou
seqüências de padrões simétricos?
- ▶ Levantamento das redes para $\mathbf{C}^6$.
- ▶ Consequências para convecção.

I.S. Labouriau

Motivação —
convecção

Um só modo

Interação de
modos

rede quociente
motivos
resultados numéricos

Dinâmica em torno
da rede

em torno de um nó
agulhas
estabilidade

Problemas abertos