

Padrões e Simetria

Isabel S. Labouriau



CENTRO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE DO PORTO

17 de Junho 2023

Simetria s.f.

Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, *Novo dicionário da língua portuguesa*, 1^a edição

[Do grego *symmetría*, 'justa proporção', pelo latim *symmetria*]

1. Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio, ou ainda, que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo.
2. Harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares.
3. *Geom.* Propriedade duma configuração que é invariante sob transformações que não alteram as relações métricas, mas alteram a posição dos seus elementos constitutivos.

Pergunta

Como usar **simetria** para criar padrões com **harmonia**?

Simetria bilateral

Na natureza



Corola de flor

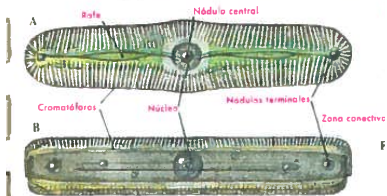
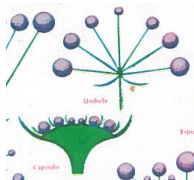
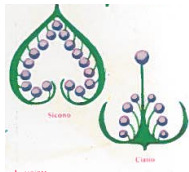


Fig. 1 - Nomenclatura de las diversas partes de una Diatomea (*Pinnularia viridis*). En A, vista por su cara valvar; en B, por su cara conectiva.

Diatomacea

Na representação da natureza

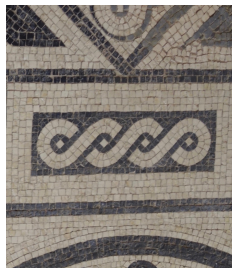


Tipos de inflorescência

Simetria bilateral— Criada pelo homem



R. XV de Novembro, Porto



mosaicos romanos
Córdoba

Simetria bilateral— Criada pelo homem



R. XV de Novembro, Porto



mosaicos romanos
Córdoba

Simetria bilateral

Esta imagem será refletida

Esta imagem será refletida

Esta imagem será rodada

Esta imagem será rodada

Simetria bilateral— Criada pelo homem



R. XV de Novembro, Porto



mosaicos romanos
Córdoba

Simetria de um objeto

Transforma um objeto em si mesmo

- ▶ A inversa de uma simetria de um objeto é uma simetria.
- ▶ A composição de duas simetrias de um objeto é uma simetria.
- ▶ A transformação identidade $\mathcal{I}$ é uma simetria de qualquer objeto.

As simetrias de um objeto formam um **grupo**.

G: Grupo de simetria bilateral



$$G = \{R_v, \mathcal{I}\}$$

R_v = reflexão

ρ_{180} = rotação

$\mathcal{I}$ = identidade



$$G = \{\rho_{180}, \mathcal{I}\}$$

$$G \sim \mathbb{Z}_2$$

Usamos simetria para criar objetos decorativos.



mosaicos árabes, Córdoba



detalhe — friso

Nova simetria — **translação**

Frisos — nova simetria — translação T



banhos coletivos em ilha, Ramalde, Porto

T = translação para a esquerda

T^{-1} = translação para a direita

$$T \circ T^{-1} = \mathcal{I}$$

$$T^2 = T \circ T, \quad T^{-2} = T^{-1} \circ T^{-1}, \quad T^3 = T \circ T \circ T, \dots$$

$$G = \{\mathcal{I}, T, T^2, T^3, \dots, T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, \dots\}$$

Grupo de simetrias G infinito.

$$T^0 = \mathcal{I}$$

G é gerado por T

$$G \sim \mathbb{Z}$$

$$G = \langle T \rangle.$$

Friso

Faixa constituída por um padrão que se repete.

ou

Faixa cujo grupo de simetrias contém $\langle T \rangle$.

Frisos com mais simetria — translação e reflexão



banhos públicos, Foz, Porto

$$G = \{T^n, R_v \circ T^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle T, R_v \rangle \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

Frisos com mais simetria — translação e reflexão



gelosia, Teatro Góngora, Córdoba

Frisos com mais simetria — translação e reflexão



gelosia, Teatro Góngora, Córdoba

Reflexões

R_{v_1} e R_{v_2} em duas retas verticais v_1 e v_2

Frisos com mais simetria — translação e reflexão



gelosia, Teatro Góngora, Córdoba

Reflexões

R_{v_1} e R_{v_2} em duas retas verticais v_1 e v_2

$$R_{v_1} \circ R_{v_2} = T$$

Frisos com mais simetria — translação e reflexão



gelosia, Teatro Góngora, Córdoba

Mais reflexões

R_h em reta horizontal.

$$G = \{T^n, R_{v_1} \circ T^n, R_{v_2} \circ T^n, R_h, \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

$$G = \langle R_{v_1}, R_{v_2}, R_h \rangle = \langle T, R_{v_1}, R_h \rangle$$

$$R_{v_2} = T \circ R_{v_1}$$

Frisos com mais simetria



R. Fernandes Costa, Porto

R_h em reta horizontal não é uma simetria

Frises com mais simetria — translação e reflexão deslizante



R. Fernandes Costa, Porto

Mais reflexões

R_h em reta horizontal.

reflexão deslizante R_d

$$R_d = R_h \circ \left(\frac{1}{2} T \right)$$

$$G = \{ T^n, R_d \circ T^n, \quad n \in \mathbb{Z} \} = \langle T, R_d \rangle$$

$$G = \langle R_d \rangle$$

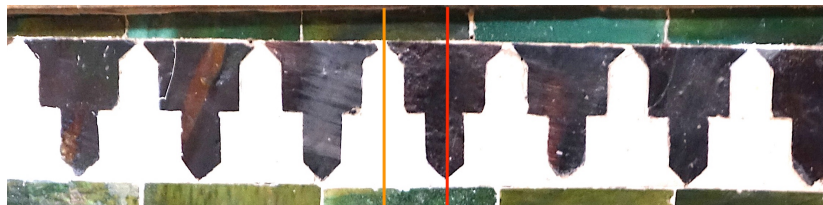
$$R_d^2 = T$$

Frisos com ainda mais simetria



mosaicos moçárabes, Córdoba

Frisos com ainda mais simetria

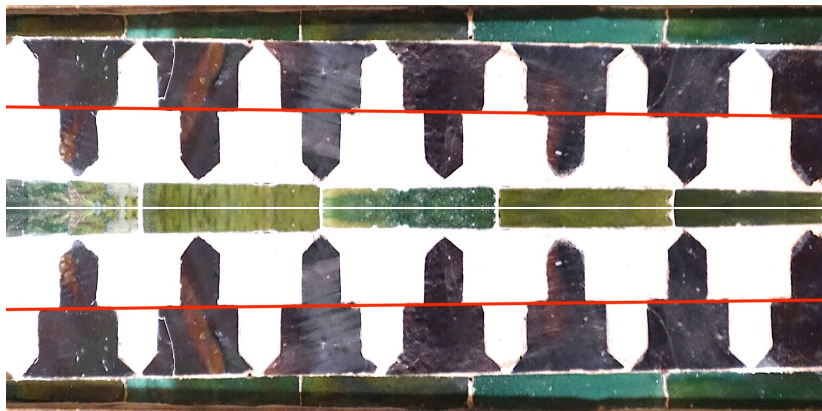


mosaicos moçárabes, Córdoba

$$G \supset \{T^n, R_{v_1} \circ T^n, R_{v_2} \circ T^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_{v_2} = \left(\frac{1}{2}T\right) \circ R_{v_1}$$

Mais uma simetria — esquecendo a cor

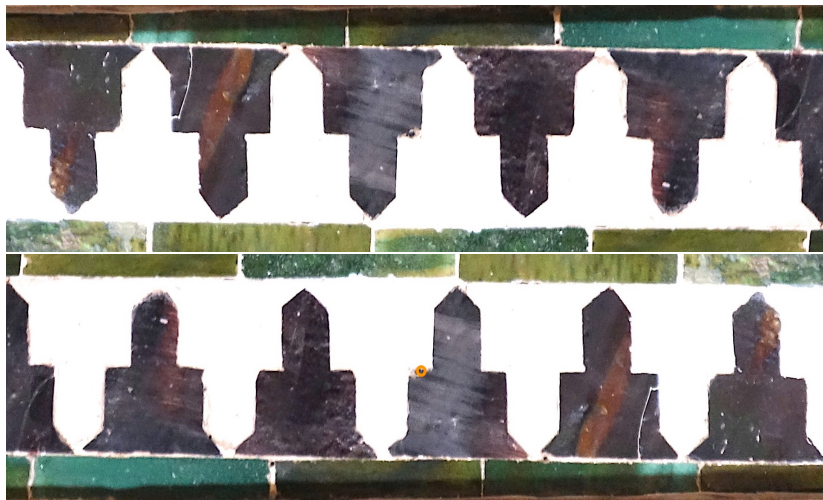


mosaicos moçárabes, Córdoba

reflexão deslizante R_d

$$R_d = R_h \circ \left(\frac{1}{2} T \right)$$

Ainda mais simetrias — esquecendo a cor



Rotação ρ_{180} e também $\rho_{180} \circ R_{v_1}$

$$G = \langle R_{v_1}, R_{v_2}, R_d, \rho_{180} \rangle$$

Simetrias de frisos

Teorema

O grupo de simetrias de um friso (infinito) e periódico horizontal só pode ser um dos seguintes:

1. $G = \langle T \rangle$

2. $G = \langle R_d \rangle$

3. $G = \langle T, \rho_{180} \rangle$

4. $G = \langle T, R_v \rangle$

5. $G = \langle T, R_h \rangle$

6. $G = \langle T, R_v, \rho_{180} \rangle$

7. $G = \langle R_v, R_d, \rho_{180} \rangle$

onde

- ▶ T translação
- ▶ R_d reflexão deslizante
- ▶ ρ_{180} rotação 180°
- ▶ R_v reflexão em reta vertical
- ▶ R_h reflexão em reta horizontal

XIIX
CANONS MÉLODIEUX
OU
VI. SONATES EN DUO
A
FLUTES TRAVERSES, OU
VIOLONS, OU BASSES DE VIOLE

Música

Cânone

Simetria: translação

G.P. Telemann

Avertissement

*Il est à observer, en jouant ces Canons, que, l'orç
que le premier instrument est avancé jusqu'à cette
marque. Si le second commence et suit le premier pas à pas;
et quand celui-ci est au bout l'autre finit auprès
de ces signes. ^ ^*

Música

Cânone

Simetria: translação

Canons Mélodieux I

G.P. Teleman



G. P. Telemann

1. Sonate en Duo

- a -

Flutes Traverses ou Violons

ou Basses de Violes

1. Vivace

- Violin -

Luiza Labouriau

Música — Mais simetrias

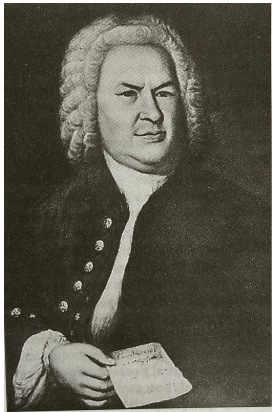
- | | |
|--|---------|
| ▶ Translação “horizontal” (cânone simples) | ▶ T |
| ▶ Translação “vertical” (transposição). | ▶ V |
| ▶ Inversão “vertical” (retrógrada). | ▶ R_v |
| ▶ Inversão “horizontal”. | ▶ R_h |
| ▶ Expansão (metade da velocidade). | ▶ E |

O grupo de todas as transformações possíveis para produzir um cânone é

$$G = \langle T, V, R_v, R_h, E \rangle$$

Música — Mais simetrias

J.S. Bach



Canon triplex à 6 V.

G. Cantagrel, *Le moulin et la fièvre, air et variations sur Bach*

J.S. Bach — redescoberto em 1974 — 14 cânones

*Descriptio Canones librorum in octava aeth fundamental =
Noten verschiedener Arie. von J.S. Bach.*

1. Canon simplex 2. all' reverscio.

3. Canon octava Canones quilibet. motu recto & contrario. 4. motu contrario & recto.

5. Canon duplex à 4. 6. Canon simplex librorum in octava aeth.

7. Idem. 8. Canon simplex il soggetto.

9. Canon in unisono octo scilicet. a 3.

J.S. Bach — Canon duplex übers Fundament, à 5



Canon 11 BWV 1087 expandido — 2^a linha

Azulejos



R. de Diu, Porto

Simetrias do
painel de azulejos:

- ▶ T translação horizontal;
- ▶ V translação vertical.

$$G = \langle T, V \rangle.$$

Exercício

Determine o grupo de simetrias (de frisos) da grade do balcão.

Outros padrões planos



Instalação com vidro
Ebeltoft
Dinamarca

Outros padrões planos



Antigo átrio do edifício da Reitoria UP

Simetrias de padrões planos

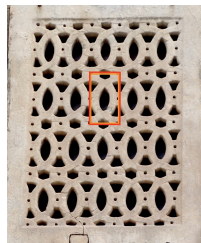
Duas translações em direções diferentes.

- ▶ Azulejo quadrado direções perpendiculares
distância igual



R. Diu, Porto

- ▶ “Azulejo” retangular direções
perpendiculares
distância diferente

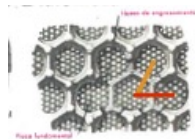


Mesquita de Córdoba

Simetrias de padrões planos

Duas translações em direções diferentes.

- ▶ “Azulejo” hexagonal direções a 60°
distância igual



carapaça de Diatomacea

- ▶ Azulejos
retangulares
desencontrados direções a α°
distância diferente

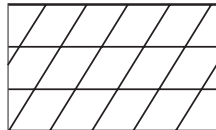


R. de Diu, Porto

Simetrias de padrões planos

Duas translações em direções diferentes.

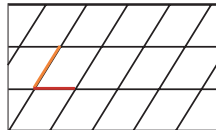
- ▶ “Azulejo” paralelogramo direções a α°
distância igual
ou não



Simetrias de padrões planos

Duas translações em direções diferentes.

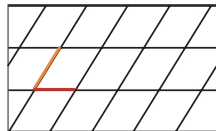
- ▶ “Azulejo” paralelogramo direções a α°
distância igual
ou não



Simetrias de padrões planos

Duas translações em direções diferentes.

- ▶ “Azulejo” paralelogramo direções a α°
distância igual
ou não



Grupo de simetrias de painéis de azulejos

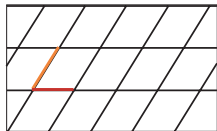
Contém duas translações em direções diferentes:

H = translação horizontal T = translação transversa

$$G \supset \langle H, T \rangle$$

Simetrias de painéis de azulejos

Grupo de simetrias $G \supset \langle H, T \rangle$



Outras simetrias S

Podem ser:

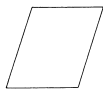
- ▶ Reflexões em retas paralelas (ou não) às direções de translação.
- ▶ Rotações de ângulos 60° , 90° , 120° ou 180° .
- ▶ Reflexões deslizantes.

Simetrias de painéis de azulejos

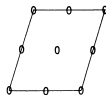
Teorema

O grupo de simetrias de um painel plano (infinito) e periódico só pode ser um de uma lista de 17.

Simetrias de painéis de azulejos I



p1



p2



pm



pg



p2mm



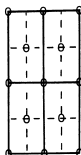
p2mg



p2gg



cm



c2mm

Convenções

○ rotação de 180°

linha cheia

reflexão

linha tracejada

reflexão deslizante

Simetrias de painéis de azulejos II



p4



p4mm



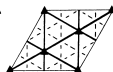
p4gm



p3



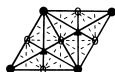
p3m1



p31m



p6



p6mm

Convenções

- rotação de 180°
- ▲ rotação de 120°
- rotação de 90°
- rotação de 60°

linha cheia

reflexão

linha tracejada

reflexão deslizante

Agradecimentos

Luiza Labouriau — violino

YouTube <https://www.youtube.com/@luizalabouriau863>

e também <http://www.luiza-labouriau.com>

E a voces, pela atenção.