

Seminário Ortogonal

Pescadinha de rabo na boca

Isabel S. Labouriau

Centro de Matemática da Universidade do Porto
Portugal

Porto, 13 de Maio de 2009

Máquina de Turing

Componentes

fita infinita — cabeça de comando — unidade de controle

Σ conjunto finito de símbolos na fita

Q conjunto finito de estados de comando

Máquina de Turing

Componentes

fita infinita — cabeça de comando — unidade de controle

Σ conjunto finito de símbolos na fita

Q conjunto finito de estados de comando

Configuração em cada passo

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots, a_n$ sequência finita na fita $a_j \in \Sigma$

k posição da cabeça na sequência da fita

$q \in Q$ estado da máquina

Máquina de Turing

Componentes

fita infinita — cabeça de comando — unidade de controle

Σ conjunto finito de símbolos na fita

Q conjunto finito de estados de comando

Configuração em cada passo

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots a_n$ sequência finita na fita $a_j \in \Sigma$

k posição da cabeça na sequência da fita

$q \in Q$ estado da máquina

Configuração no próximo passo dada por $\sigma(\alpha, k, q)$:

nova posição $k_{\text{novo}}(\alpha, k, q) \in \{k - 1, k, k + 1\}$

nova sequência $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = a_{\text{novo}}(\alpha, q), a_{k+1}, \dots a_n$

novo estado $q_{\text{novo}}(\alpha, q) \in Q$

Máquina de Turing

Componentes

fita infinita — cabeça de comando — unidade de controle

Σ conjunto finito de símbolos na fita

Q conjunto finito de estados de comando

Configuração em cada passo

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots a_n$ sequência finita na fita $a_j \in \Sigma$

k posição da cabeça na sequência da fita

$q \in Q$ estado da máquina

Configuração no próximo passo dada por $\sigma(\alpha, k, q)$:

nova posição $k_{\text{novo}}(\alpha, k, q) \in \{k - 1, k, k + 1\}$

nova sequência $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = a_{\text{novo}}(\alpha, q), a_{k+1}, \dots a_n$

novo estado $q_{\text{novo}}(\alpha, q) \in Q$

dada uma configuração inicial

repete até atingir uma configuração final em que $q \in F \subset Q$,

Numerologia

alfabeto da fita Σ com b símbolos (incluindo $\emptyset$)

$$\Sigma \longleftrightarrow \{0, 1, \dots, b-1\}$$

$$\emptyset \longleftrightarrow 0$$

Numerologia

alfabeto da fita Σ com b símbolos (incluindo $\emptyset$)

$$\Sigma \longleftrightarrow \{0, 1, \dots, b-1\}$$

$$\emptyset \longleftrightarrow 0$$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

associo $(y_1, y_2) \in \mathbf{N}$

$$y_1 = a_k + a_{k+1}b + a_{k+2}b^2 + \dots + a_nb^n =$$

$$y_2 = a_{k-1} + a_{k-2}b + a_{k-3}b^2 + \dots + a_1b^{k-2}$$

Numeralogia

alfabeto da fita Σ com b símbolos (incluindo $\emptyset$)

$$\Sigma \longleftrightarrow \{0, 1, \dots, b-1\}$$

$$\emptyset \longleftrightarrow 0$$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

associo $(y_1, y_2) \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_k + a_{k+1}b + a_{k+2}b^2 + \dots + a_nb^n = \\ &= a_n a_{n-1} \dots a_{k+2} a_{k+1} a_k \text{ na base } b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= a_{k-1} + a_{k-2}b + a_{k-3}b^2 + \dots + a_1b^{k-2} \\ &= a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} \text{ na base } b. \end{aligned}$$

Numerologia

alfabeto da fita Σ com b símbolos (incluindo $\emptyset$)

$$\Sigma \longleftrightarrow \{0, 1, \dots, b-1\}$$

$$\emptyset \longleftrightarrow 0$$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

associo $(y_1, y_2) \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_k + a_{k+1}b + a_{k+2}b^2 + \dots + a_nb^n = \\ &= a_n a_{n-1} \dots a_{k+2} a_{k+1} a_k \text{ na base } b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= a_{k-1} + a_{k-2}b + a_{k-3}b^2 + \dots + a_1b^{k-2} \\ &= a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1} \text{ na base } b. \end{aligned}$$

$$Q \longleftrightarrow \{1, \dots, m\}$$

A cada configuração corresponde um $(y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots, a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

$y_1 = a_n a_{n-1} \dots a_{k+2} a_{k+1} a_k$ na base b .

$y_2 = a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1}$ na base b .

$Q \longleftrightarrow \{1, \dots, m\}$

Reconstrução da configuração

A cada configuração corresponde um $(y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots, a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

$y_1 = a_n a_{n-1} \dots a_{k+2} a_{k+1} a_k$ na base b .

$y_2 = a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1}$ na base b .

$Q \longleftrightarrow \{1, \dots, m\}$

Reconstrução da configuração

símbolo que está sendo lido $\alpha = a_k = 1^\circ$ algarismo de y_1

posição da cabeça $k = 1 +$ ordem de grandeza de y_2

estado q

A cada configuração corresponde um $(y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots, a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

$y_1 = a_n a_{n-1} \dots a_{k+2} a_{k+1} a_k$ na base b .

$y_2 = a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1}$ na base b .

$Q \longleftrightarrow \{1, \dots, m\}$

Reconstrução da configuração

símbolo que está sendo lido $\alpha = a_k = 1^\circ$ algarismo de y_1

$\alpha = w(y_1) = y_1 \pmod{b}$

posição da cabeça $k = 1 +$ ordem de grandeza de y_2

estado q

A cada configuração corresponde um $(y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3$

Configuração

posição k

$a_1, \dots, a_k = \alpha, \dots a_n$ sequência na fita $a_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$

$y_1 = a_n a_{n-1} \dots a_{k+2} a_{k+1} a_k$ na base b .

$y_2 = a_1 a_2 \dots a_{k-2} a_{k-1}$ na base b .

$Q \longleftrightarrow \{1, \dots, m\}$

Reconstrução da configuração

símbolo que está sendo lido $\alpha = a_k = 1^\circ$ algarismo de y_1

$\alpha = w(y_1) = y_1 \pmod{b}$

posição da cabeça $k = 1 +$ ordem de grandeza de y_2

estado q

Operação da máquina (dinâmica)

$\psi : \mathbf{N}^3 \longrightarrow \mathbf{N}^3 \quad \psi(y_1, y_2, q) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$

Construção da dinâmica

$$\psi(y_1, y_2, q) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (y_{1novo}, y_{2novo}, q_{novo})$$

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = i \\ 0 & \text{se } x \neq i \end{cases} \quad q_{novo}(\alpha, j) = q_{\alpha j}$$

$$\psi_3(y_1, q) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^m \chi_i(w(y_1)) \chi_j(q) q_{\alpha j}$$

$\psi_1(y_1, y_2, q)$ e $\psi_2(y_1, y_2, q)$ análogos.

Dinâmica

$$Y = (y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3 \quad \psi : \mathbf{N}^3 \longrightarrow \mathbf{N}^3 \quad Y \mapsto \psi(Y)$$

Dada a configuração inicial Y_0

a máquina passa pelas configurações:

$$Y_1 = \psi(Y_0), \quad Y_2 = \psi(Y_1) = \psi^2(Y_0), \quad Y_3 = \psi(Y_2) = \psi^3(Y_0), \dots$$

até que o estado de $Y_f = \psi^f(Y_0)$ esteja em F (se acontecer).

Dinâmica

$$Y = (y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3 \quad \psi : \mathbf{N}^3 \longrightarrow \mathbf{N}^3 \quad Y \mapsto \psi(Y)$$

Mergulho no contínuo

$$\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in \mathbf{R}^3 \quad \bar{\psi} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad \bar{Y} \mapsto \bar{\psi}(\bar{Y})$$

$\bar{\psi}$ derivável

e se $\bar{Y} \in \mathbf{N}^3$ então $\bar{\psi}(\bar{Y}) = \psi(\bar{Y})$

Mergulho no contínuo

Exemplo

$$\alpha = w(y_1) = y_1 \pmod{b}$$

símbolo que está sendo lido $\alpha = a_k = 1^o$ algarismo de y_1

$\bar{w}(x)$ função periódica de período b que mergulha $w(y)$.

Mergulho no contínuo

Exemplo

$\alpha = w(y_1) = y_1 \pmod{b}$

símbolo que está sendo lido $\alpha = a_k = 1^o$ algarismo de y_1

$\bar{w}(x)$ função periódica de período b que mergulha $w(y)$.

$\bar{w}(x)$ — combinação linear de

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2j\pi x}{b}\right) \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{2j\pi x}{b}\right) \quad j = 0, 1, \dots, b$$

Mergulho no contínuo

Exemplo

$\alpha = w(y_1) = y_1 \pmod{b}$

símbolo que está sendo lido $\alpha = a_k = 1^{\text{º}}$ algarismo de y_1

$\bar{w}(x)$ função periódica de período b que mergulha $w(y)$.

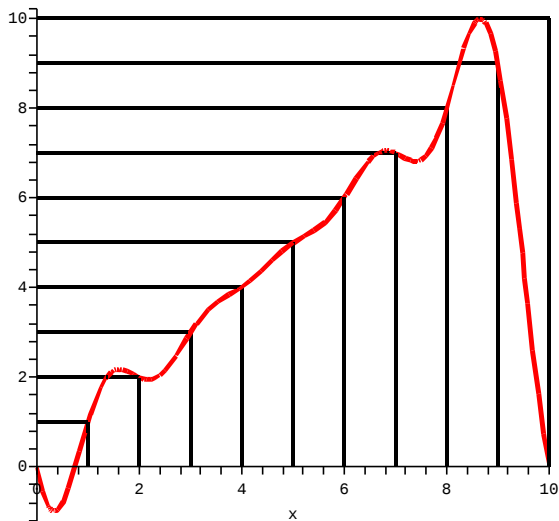
$\bar{w}(x)$ — combinação linear de

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2j\pi x}{b}\right) \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{2j\pi x}{b}\right) \quad j = 0, 1, \dots, b$$

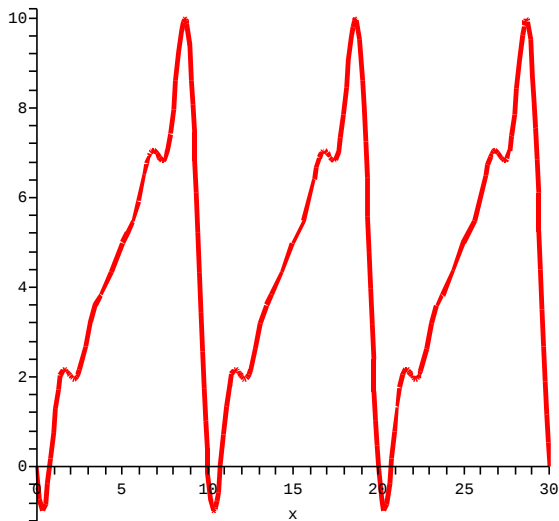
para $b = 10$:

$$\begin{aligned} w(x) = & \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x) - \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \\ & - \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right) - \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{5}\right) + \\ & - \cos\left(\frac{3\pi x}{5}\right) - \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{5}\right) + \\ & - \cos\left(\frac{4\pi x}{5}\right) - \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{5}\right) \end{aligned}$$

Mergulho no contínuo $\bar{w}(x)$



Mergulho no contínuo $\bar{w}(x)$



Mergulho no contínuo

Exemplo

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = i \\ 0 & \text{se } x \neq i \end{cases} \quad q_{\text{novo}}(\alpha, j) = q_{\alpha j}$$

$$\psi_3(y_1, q) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^m \chi_i(w(y_1)) \chi_j(q) q_{\alpha j}$$

Mergulho no contínuo

Exemplo

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = i \\ 0 & \text{se } x \neq i \end{cases} \quad q_{\text{novo}}(\alpha, j) = q_{\alpha j}$$

$$\psi_3(y_1, q) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^m \chi_i(w(y_1)) \chi_j(q) q_{\alpha j}$$

Uso

$$Q_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - j}{i - j}$$

Dinâmica mergulhada no contínuo

Mergulho

$$\bar{Y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in \mathbf{R}^3 \quad \bar{\psi} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad \bar{Y} \mapsto \bar{\psi}(\bar{Y})$$

$\bar{\psi}$ derivável (esquecendo as barras...)

Dinâmica

$$Y = (y_1, y_2, q) \in \mathbf{N}^3 \quad \psi : \mathbf{N}^3 \longrightarrow \mathbf{N}^3 \quad Y \mapsto \psi(Y)$$

Dada a configuração inicial Y_0

a máquina passa pelas configurações:

$$Y_1 = \psi(Y_0), \quad Y_2 = \psi(Y_1) = \psi^2(Y_0), \quad Y_3 = \psi(Y_2) = \psi^3(Y_0), \dots$$

até que o estado de $Y_f = \psi^f(Y_0)$ esteja em F (se acontecer).

Equação diferencial

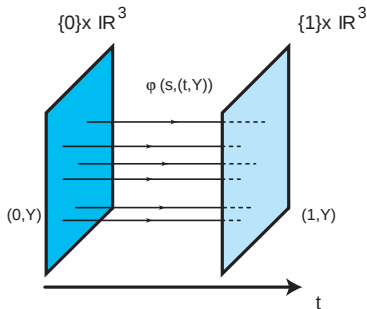
Suspensão da aplicação $\psi(Y)$

$$\psi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

defino $\varphi : [0, 1] \times ([0, 1] \times \mathbf{R}^3) \longrightarrow [0, 1] \times \mathbf{R}^3$ para $Z = (t, Y)$

Curva que vai ser a solução da equação diferencial: $s \mapsto \varphi(s, Z)$

$$\varphi(s, Z) = \varphi(s(t, Y)) = (t + s, Y)$$



Equação diferencial

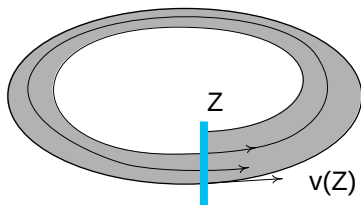
Suspensão da aplicação $\psi(Y)$

$$\psi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\varphi : [0, 1] \times ([0, 1] \times \mathbf{R}^3) \longrightarrow [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \text{ para } Z = (t, Y)$$

$$\varphi(s, Z) = \varphi(s(t, Y)) = (t + s, Y)$$

e agora a pescadinha de rabo na boca $(1, Y) \approx (0, \psi(Y))$



$$\{0\} \times \mathbf{R}^3 \approx \{1\} \times \mathbf{R}^3$$

Equação diferencial

Suspensão da aplicação $\psi(Y)$

$$\psi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\varphi : [0, 1] \times ([0, 1] \times \mathbf{R}^3) \longrightarrow [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \text{ para } Z = (t, Y)$$

$$\varphi(s, Z) = \varphi(s(t, Y)) = (t + s, Y)$$

e agora com a pescadinha de rabo na boca $(1, Y) \approx (0, \psi(Y))$

Equação diferencial

Suspensão da aplicação $\psi(Y)$

$$\psi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\varphi : [0, 1] \times ([0, 1] \times \mathbf{R}^3) \longrightarrow [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \text{ para } Z = (t, Y)$$

$$\varphi(s, Z) = \varphi(s(t, Y)) = (t + s, Y)$$

e agora com a pescadinha de rabo na boca $(1, Y) \approx (0, \psi(Y))$
temos um fluxo $\varphi(t, Z)$ em uma variedade de dimensão 4
(Whitney: contida em $\mathbf{R}^n$, $n \leq 8$)

Equação diferencial

Suspensão da aplicação $\psi(Y)$

$$\psi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\varphi : [0, 1] \times ([0, 1] \times \mathbf{R}^3) \longrightarrow [0, 1] \times \mathbf{R}^3 \text{ para } Z = (t, Y)$$

$$\varphi(s, Z) = \varphi(s(t, Y)) = (t + s, Y)$$

e agora com a pescadinha de rabo na boca $(1, Y) \approx (0, \psi(Y))$
temos um fluxo $\varphi(t, Z)$ em uma variedade de dimensão 4
(Whitney: contida em $\mathbf{R}^n$, $n \leq 8$) e a equação diferencial para a
variável $Z = (t, Y)$ é:

$$\frac{dZ}{dt} = v(Z) \quad v(Z) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0}$$

FIM