

Um carrossel caótico: dinâmica perto da simetria

Isabel S. Labouriau

Centro de Matemática da Universidade do Porto
Portugal

UnB, 5 de junho de 2013

Dinâmica perto da simetria

em colaboração com

- ▶ Alexandre A.P. Rodrigues
- ▶ Manuela A.D. Aguiar
- ▶ Sofia B.S.D. Castro

do Centro de Matemática da Universidade do Porto

Dinâmica perto da simetria

Equações diferenciais com simetria

Ciclos heteroclínicos e redes heteroclínicas

Uma rede com nós rotacionais e simetria

Quebra da simetria

- Quiralidade

- Carrossel — rede com nós rotacionais

- Visibilidade

- Técnica

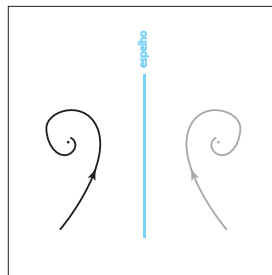
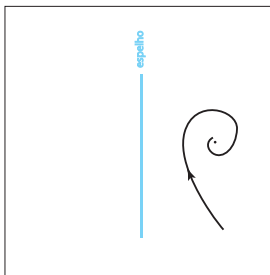
Dinâmica local

Equações diferenciais com simetria

Simetria $\gamma \in \mathbf{O}(n)$ de uma equação diferencial:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) \quad f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \quad f(\gamma x) = \gamma f(x) \quad f \in C^\infty$$

$x(t)$ solução $\Rightarrow \gamma \cdot x(t)$ é solução



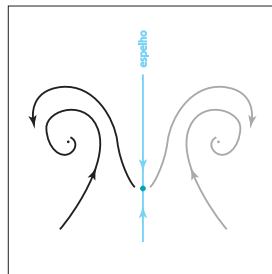
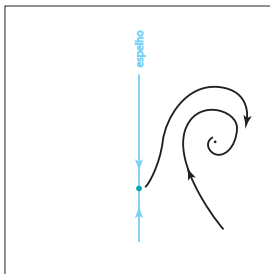
Equações diferenciais com simetria

Espelhos:

Se γ é uma simetria de $\dot{x} = f(x)$, então

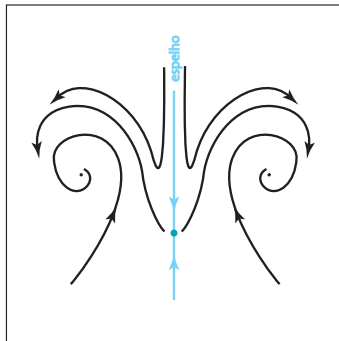
$\text{Fix}(\gamma) = \{x \in \mathbf{R}^n : \gamma x = x\}$ é invariante:

$x(t)$ solução, $x(t_0) \in \text{Fix}(\gamma) \Rightarrow x(t) \in \text{Fix}(\gamma) \quad \forall t$

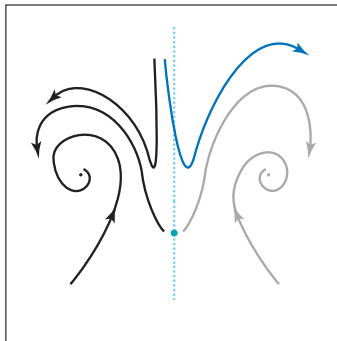


Equações diferenciais quebrando a simetria

simetria exata



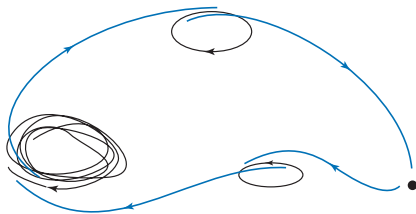
simetria aproximada



Contexto: $\dot{x} = f(x)$ equação diferencial ordinária em $\mathbf{R}^n$, $f \in C^\infty$.

Ciclo heteroclínico

Conjunto finito de objetos invariantes hiperbólicos (**nós**)
trajetórias ligando os objetos (**ligações**) em um ciclo.



Contexto: $\dot{x} = f(x)$ equação diferencial ordinária em $\mathbf{R}^n$, $f \in C^\infty$.

Ciclo heteroclínico

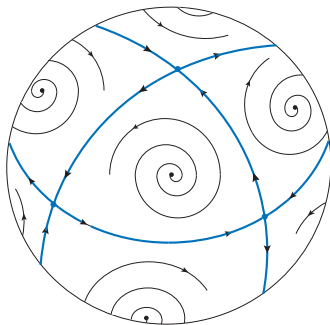
Conjunto finito de objetos invariantes hiperbólicos (nós)
trajetórias ligando os objetos (ligações) em um ciclo.

Caso especial

- ▶ espaço de fase de dimensão 3 (esfera)
- ▶ nós são equilíbrios ou trajetórias fechadas
- ▶ simetria $\Rightarrow$ espaços invariantes contendo as ligações (ciclos persistentes)

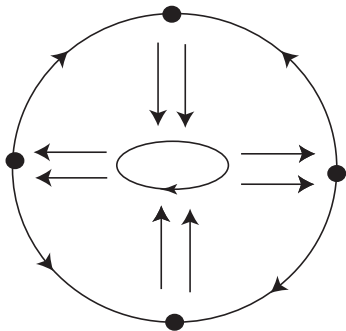
Rede heteroclínica

Conjunto conexo, união finita de ciclos heteroclínicos



Rede heteroclínica

Conjunto conexo, união finita de ciclos heteroclínicos



Perguntas sobre ciclos e redes

- ▶ Visibilidade;
- ▶ Dinâmica local:
 - ▶ Soluções periódicas;
 - ▶ Estrutura geométrica local;
- ▶ Quebra da simetria (ou da rede):
 - ▶ Persistência da dinâmica:
 - ▶ Aparecimento de novas estruturas.

Equação diferencial com simetria em $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{R}^4$

Simetrias herdadas de $\mathbf{R}^4$:

$$\gamma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, x_3, x_4)$$

$$\gamma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, -x_3, x_4)$$

Em $\mathbf{S}^3$, conjuntos invariantes:

circunferência $\mathbf{S}^1 = \{(0, 0, x_3, x_4)\} \cap \mathbf{S}^3$

2-esfera $\mathbf{S}^2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4)\} \cap \mathbf{S}^3$

dois pontos de equilíbrio $\mathbf{S}^1 \cap \mathbf{S}^2 = \{(0, 0, 0, \pm 1)\}$

Equação diferencial com simetria em $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{R}^4$

Simetrias herdadas de $\mathbf{R}^4$:

$$\gamma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, x_3, x_4)$$

$$\gamma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, -x_3, x_4)$$

Em $\mathbf{S}^3$, conjuntos invariantes:

circunferência $\mathbf{S}^1 = \{(0, 0, x_3, x_4)\} \cap \mathbf{S}^3$

2-esfera $\mathbf{S}^2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4)\} \cap \mathbf{S}^3$

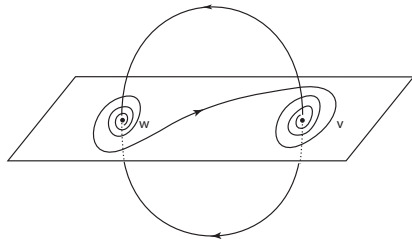
dois pontos de equilíbrio $\mathbf{S}^1 \cap \mathbf{S}^2 = \{(0, 0, 0, \pm 1)\}$

Compatível com rede heteroclínica,
que sobrevive a perturbações que preservem a simetria.

Exemplos explícitos em Aguiar, Castro, Labouriau (2006) e em Labouriau, Rodrigues (2011)

Rede Σ com simetrias $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ em $\mathbf{S}^3$

Dois equilíbrios v e w



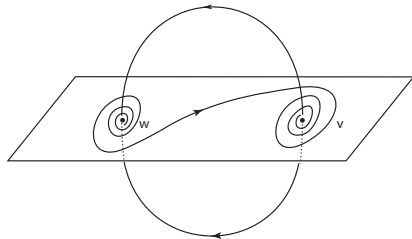
ligação 2-D em $\text{Fix}(\gamma_2)$
 $W^u(w) = W^s(v)$

ligação 1-D em $\text{Fix}(\gamma_1)$
 $W^s(w) = W^u(v)$

A rede é
assintoticamente estável

Rede Σ com simetrias $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ em $\mathbf{S}^3$

Dois equilíbrios v e w



ligação 2-D em $\text{Fix}(\gamma_2)$
 $W^u(w) = W^s(v)$

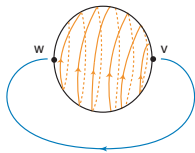
ligação 1-D em $\text{Fix}(\gamma_1)$
 $W^s(w) = W^u(v)$

A rede é
assintoticamente estável

Por causa da simetria:

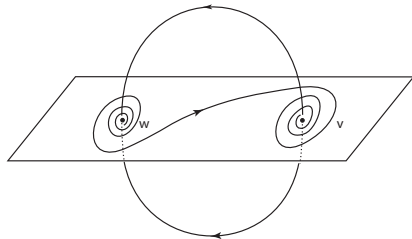
$$\overline{W^u(w)} = \overline{W^s(v)} = \mathbf{S}^2$$

$$\overline{W^s(w)} = \overline{W^u(v)} = \mathbf{S}^1$$



Rede Σ com simetrias $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ em $\mathbf{S}^3$

Dois equilíbrios v e w



ligação 2-D em $\text{Fix}(\gamma_2)$
 $W^u(w) = W^s(v)$

ligação 1-D em $\text{Fix}(\gamma_1)$
 $W^s(w) = W^u(v)$

A rede é
assintoticamente estável

Por causa da simetria:

$$\overline{W^u(w)} = \overline{W^s(v)} = \mathbf{S}^2$$

$$\overline{W^s(w)} = \overline{W^u(v)} = \mathbf{S}^1$$

Quebrando a simetria:

$$W^s(v) \cap W^u(w)$$

$$W^u(v) \cap W^s(w) = \emptyset$$

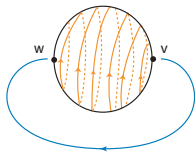
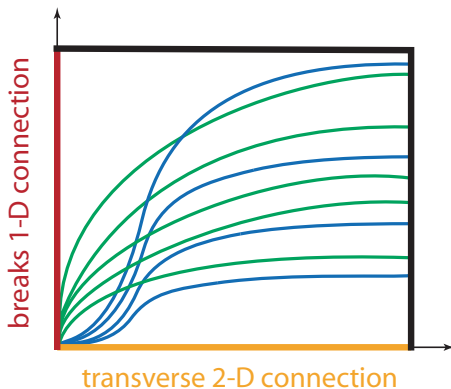


Diagrama de bifurcação para quebra da simetria



Quebra da ligação de dimensão 1

Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja f_λ uma família de campos de vetores com simetria γ_2 , tal que f_0 tem também simetria γ_1 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável.

Quebra da ligação de dimensão 1

Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja f_λ uma família de campos de vetores com simetria γ_2 , tal que f_0 tem também simetria γ_1 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável.

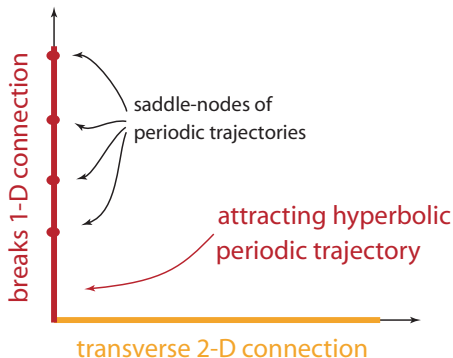
Então, genericamente, para $\lambda \neq 0$ pequeno, $\dot{x} = f_\lambda(x)$ tem uma solução periódica assintoticamente estável e não há ligações heteroclínicas $v \rightarrow w$.

Quebra da ligação de dimensão 1

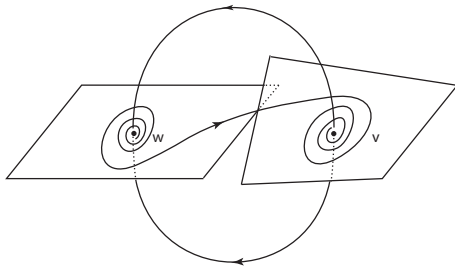
Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja f_λ uma família de campos de vetores com simetria γ_2 , tal que f_0 tem também simetria γ_1 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável.

Então, genericamente, para $\lambda \neq 0$ pequeno, $\dot{x} = f_\lambda(x)$ tem uma solução periódica assintoticamente estável e não há ligações heteroclínicas $v \rightarrow w$.

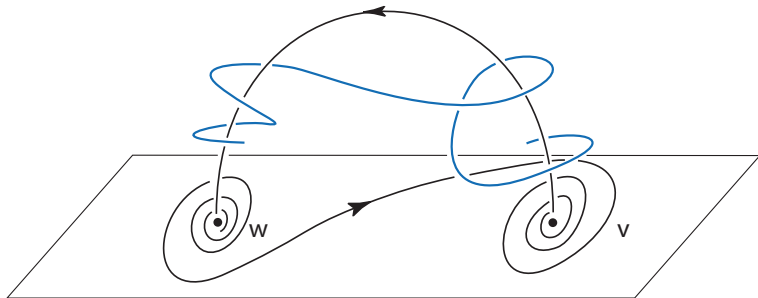


Quebra da ligação de dimensão 2



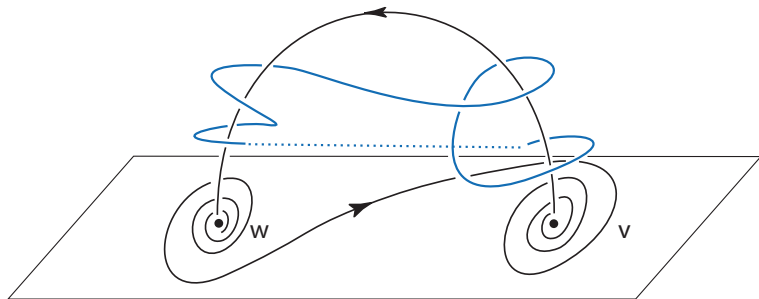
Dois nós com a mesma quiralidade

rodam com a mesma orientação em torno dos equilíbrios



Dois nós com a mesma quiralidade

rodam com a mesma orientação em torno dos equilíbrios

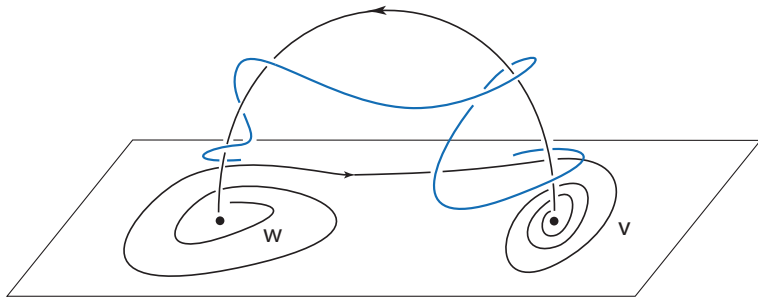


Ligando as pontas de trajetórias próximas

enlace com a rede.

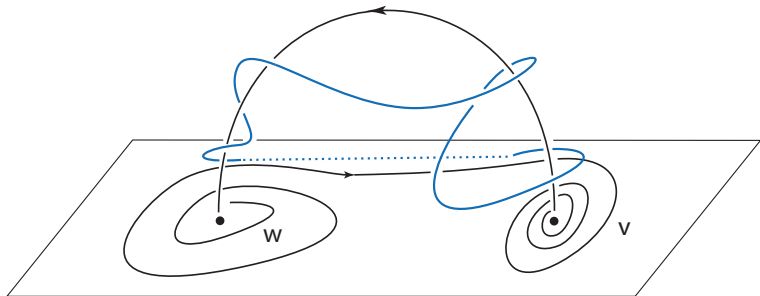
Dois nós com quiralidade diferente

rodam com orientações diferentes em torno dos equilíbrios



Dois nós com quiralidade diferente

rodam com orientações diferentes em torno dos equilíbrios



Ligando as pontas de trajetórias próximas
pode não criar enlace com a rede.

Quebra da ligação de dimensão 2 — mesma quiralidade

Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja f_λ uma família de campos de vetores com simetria γ_1 , tal que f_0 tem também simetria γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável com a mesma quiralidade.

Quebra da ligação de dimensão 2 — mesma quiralidade

Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja f_λ uma família de campos de vetores com simetria γ_1 , tal que f_0 tem também simetria γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável com a mesma quiralidade.

Então genericamente, para $\lambda \neq 0$ pequeno, $\dot{x} = f_\lambda(x)$ tem uma rede heteroclínica Σ_λ com nós rotacionais, e por isso:

- ▶ *não há ligações homoclínicas;*
- ▶ *a rede Σ_λ tem visibilidade infinita;*
- ▶ *uma infinidade de ferraduras suspensas, uniformemente hiperbólicas acumula em Σ_λ .*

Quebra da ligação de dimensão 2 — mesma quiralidade

Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja f_λ uma família de campos de vetores com simetria γ_1 , tal que f_0 tem também simetria γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável com a mesma quiralidade.

Então genericamente, para $\lambda \neq 0$ pequeno, $\dot{x} = f_\lambda(x)$ tem uma rede heteroclínica Σ_λ com nós rotacionais, e por isso:

- ▶ *não há ligações homoclínicas;*
- ▶ *a rede Σ_λ tem visibilidade infinita;*
- ▶ *uma infinidade de ferraduras suspensas, uniformemente hiperbólicas acumula em Σ_λ .*

visibilidade infinita?

rede heteroclínica com nós rotacionais ?

Carrossel — rede com nós rotacionais

Um nó rotacional é:

uma trajetória hiperbólica fechada não trivial de tipo sela

ou

um equilíbrio de tipo sela com autovalores

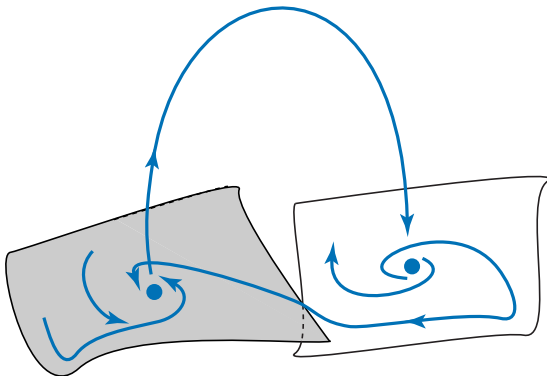
$$A \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad B \pm iC$$

onde

$$AB < 0 \quad AB \neq -1 \quad \text{e} \quad C \neq 0$$

Uma rede com nós rotacionais satisfaz:

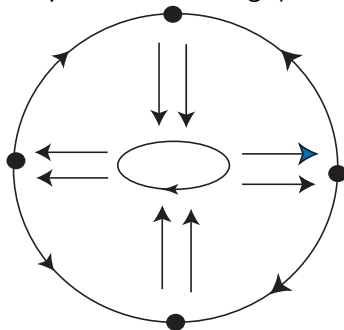
- ▶ todos os nós são rotacionais
- ▶ todas as ligações contidas em variedades invariantes de dimensão 2 são intersecções transversais.



Visibilidade (switching)

Passagem por um nó:

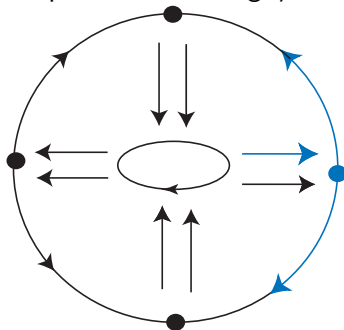
Dada uma ligação da rede, que chega em um nó,
para toda ligação que sai desse nó,
existe uma trajetória que sombreia a ligação de saída.



Visibilidade (switching)

Passagem por um nó:

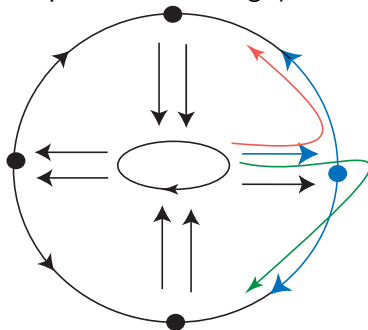
Dada uma ligação da rede, que chega em um nó,
para toda ligação que sai desse nó,
existe uma trajetória que sombreia a ligação de saída.



Visibilidade (switching)

Passagem por um nó:

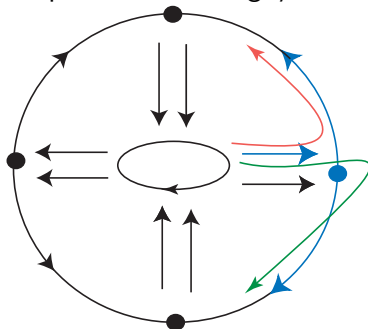
Dada uma ligação da rede, que chega em um nó,
para toda ligação que sai desse nó,
existe uma trajetória que sombreia a ligação de saída.



Visibilidade (switching)

Passagem por um nó:

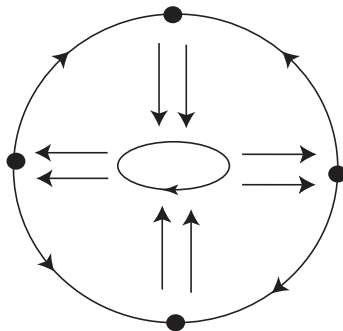
Dada uma ligação da rede, que chega em um nó,
para toda ligação que sai desse nó,
existe uma trajetória que sombreia a ligação de saída.



Para nós hiperbólicos, consequência do λ -lema.

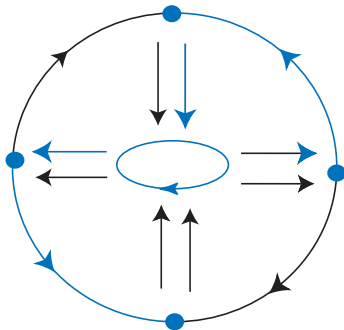
Visibilidade finita (switching) da rede

Dado um caminho finito na rede,
existe uma trajetória que sombreia o caminho.



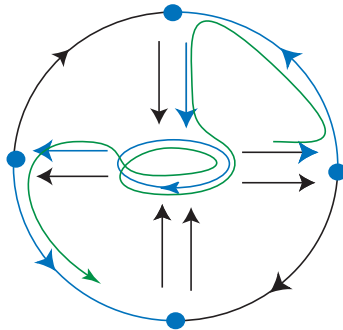
Visibilidade finita (switching) da rede

Dado um caminho finito na rede,
existe uma trajetória que sombreia o caminho.



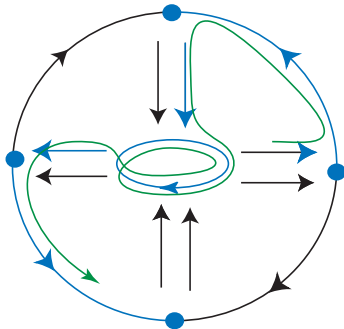
Visibilidade finita (switching) da rede

Dado um caminho finito na rede,
existe uma trajetória que sombreia o caminho.



Visibilidade finita (switching) da rede

Dado um caminho finito na rede,
existe uma trajetória que sombreia o caminho.



Visibilidade infinita (switching) da rede: todos os caminhos infinitos
podem ser sombreados

Teorema (Aguiar, Castro & L. 2005; Aguiar, L. & Rodrigues 2009)

Se um campo de vetores na esfera $\mathbf{S}^3$ de dimensão 3 tem uma rede heteroclínica com nós rotacionais da mesma quiralidade, então a rede tem sempre visibilidade infinita.

Teorema (Aguilar, Castro & L. 2005; Aguilar, L. & Rodrigues 2009)

Se um campo de vetores na esfera $\mathbf{S}^3$ de dimensão 3 tem uma rede heteroclínica com nós rotacionais da mesma quiralidade, então a rede tem sempre visibilidade infinita.

Visibilidade infinita — conjunto de Cantor de condições iniciais.

Visibilidade finita — conjunto de condições iniciais com medida positiva.

Técnica

Em torno de cada nó, mudança de coordenadas lineariza a equação diferencial (Samovol).

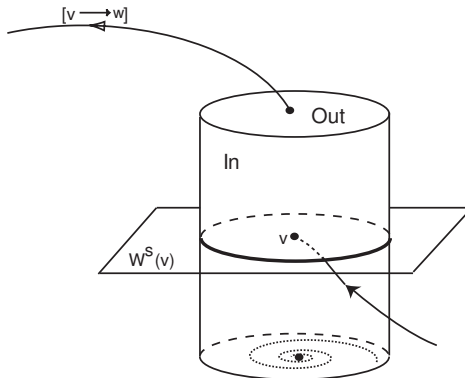
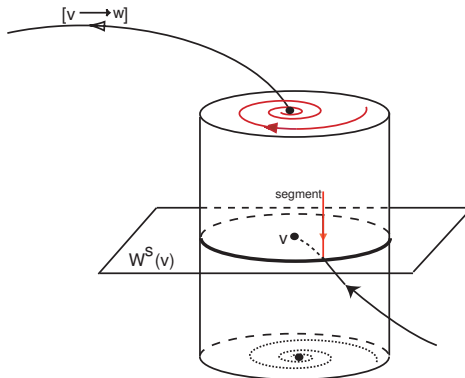


Imagem de conjuntos de condições iniciais em anteparos.

Técnica

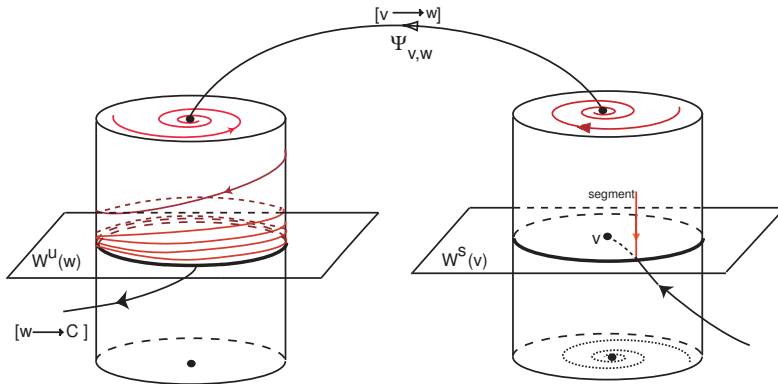
Um segmento no conjunto de entrada é transformado em uma espiral no conjunto de saída



a linha vermelha **não** é uma trajetória!

Técnica

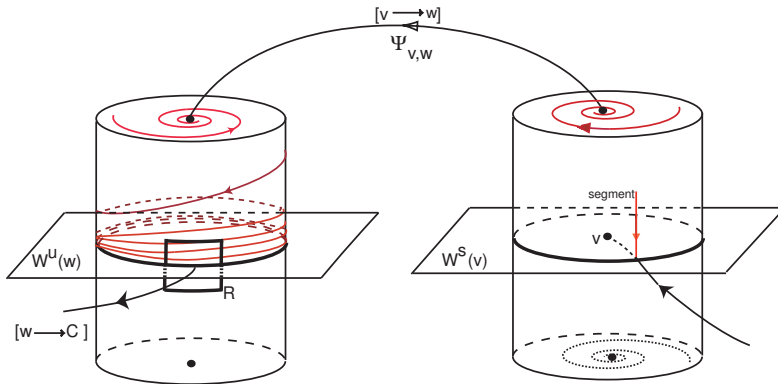
Uma espiral no conjunto de entrada é transformada em uma hélice no conjunto de saída



a linha vermelha **não** é uma trajetória!

Técnica

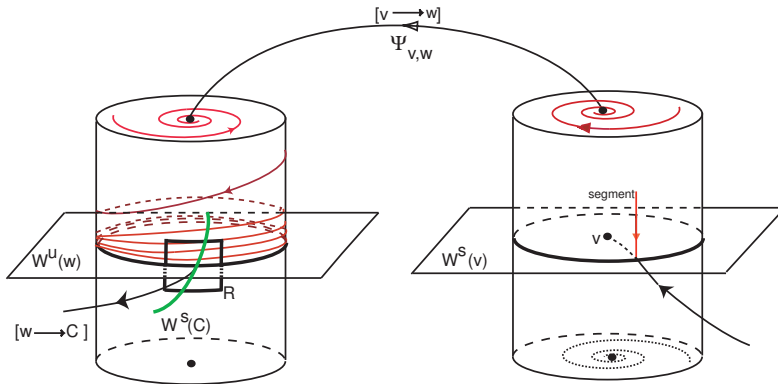
A hélice passa infinitas vezes em um pequeno retângulo em torno da próxima ligação



a linha vermelha **não** é uma trajetória!

Técnica

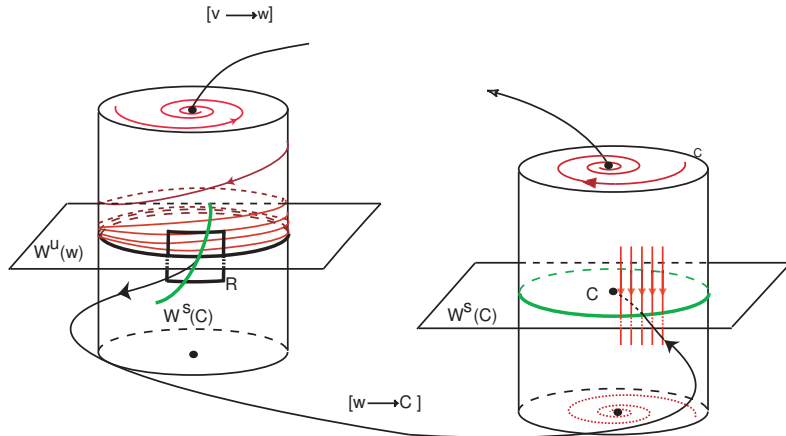
A hélice cruza uma infinidade de vezes o conjunto de pontos que são atraídos para o nó seguinte



a linha vermelha **não** é uma trajetória!

Técnica

Cada passagem da hélice pelo retângulo cria um novo segmento na parede de entrada seguinte

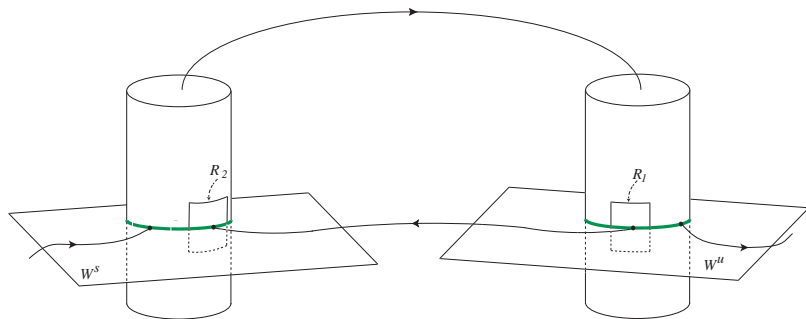


a linha vermelha **não** é uma trajetória!

Teorema (Aguilar, Castro & L. 2005)

Se um campo de vetores na esfera $\mathbf{S}^3$ de dimensão 3 tem uma rede heteroclínica com nós rotacionais com a mesma quiralidade, então existe uma ferradura suspensa que sombreia cada um dos ciclos da rede.

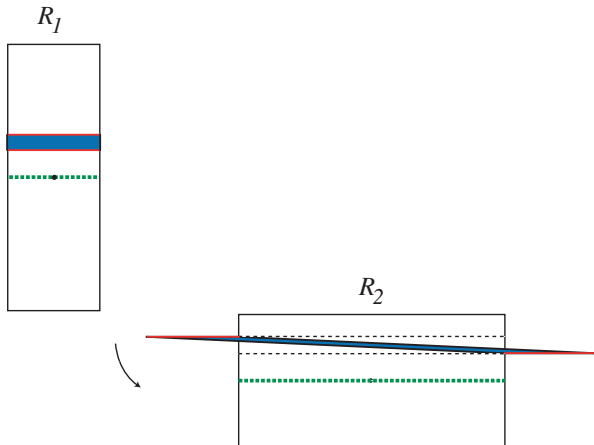
Idéia da prova



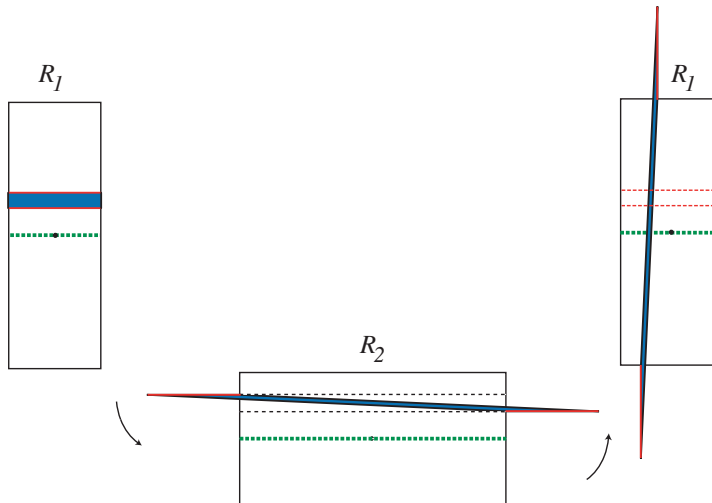
Idéia da prova



Idéia da prova



Idéia da prova



Quebra das duas ligações — mesma quiralidade

Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja $f_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ uma família de campos de vetores, tal que $f_{(0,0)}$ tem simetrias γ_1 e γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável, com a mesma quiralidade.

Quebra das duas ligações — mesma quiralidade

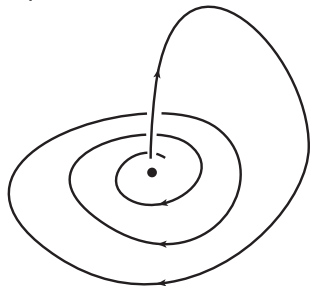
Teorema (L. & Rodrigues 2012)

Seja $f_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ uma família de campos de vetores, tal que $f_{(0,0)}$ tem simetrias γ_1 e γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável, com a mesma quiralidade. $\dot{x} = f_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x)$. Então, genericamente, no plano (λ_1, λ_2) , perto da origem:

- ▶ *existe uma sucessão de línguas onde $\dot{x} = f_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x)$ tem uma solução periódica não trivial;*
- ▶ *estas línguas são delimitadas por ciclos homoclínicos de Shilnikov atratores;*
- ▶ *existe uma sucessão de línguas delimitadas por ciclos homoclínicos de Shilnikov repulsores;*
- ▶ *no interior dessas línguas existem ferraduras uniformemente hiperbólicas;*
- ▶ *fora dessas línguas existem ferraduras não uniformemente hiperbólicas.*

Quebra das duas ligações — mesma quiralidade

Aparecem ciclos homoclínicos de Shilnikov



autovalores:
 $-a \pm i\omega$ e b
 $a, b, \omega > 0$

se $a > b$

ciclo atrator

bifurca em solução periódica atratora

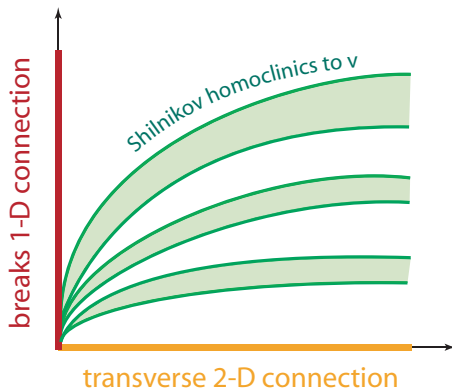
se $a < b$

ferraduras suspensas em torno do ciclo

algumas ferraduras persistem quando o ciclo é quebrado

Quebra das duas ligações — mesma quiralidade

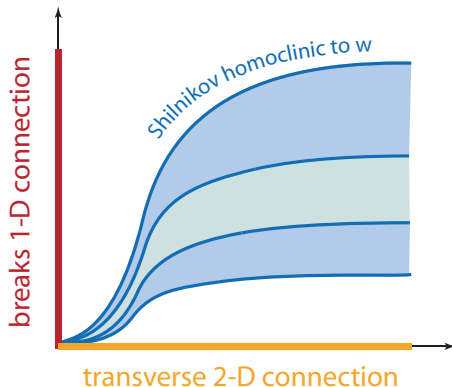
Ciclos homoclínicos em v



Línguas sombreadas — soluções periódicas.

Quebra das duas ligações — mesma quiralidade

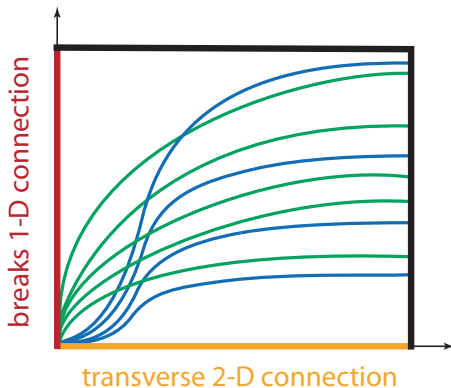
Ciclos homoclínicos em w



Línguas sombreadas — ferraduras

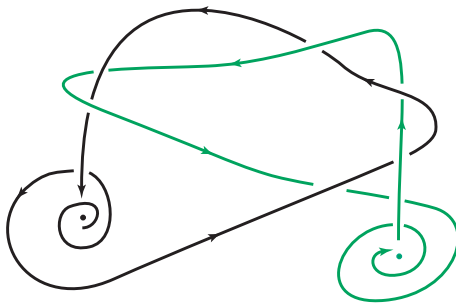
azul: uniformemente hiperbólicas
verde: não uniformemente hiperbólicas

Diagrama de bifurcação — mesma quiralidade



Quebra das duas ligações — mesma quiralidade

Coexistência de ciclos homoclínicos de Shilnikov em v e w , enlaçados.



Quebra das duas ligações — quiralidade diferente

Teorema (L. & Rodrigues 2013)

Seja $f_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ uma família de campos de vetores, tal que $f_{(0,0)}$ tem simetrias γ_1 e γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável, com quiralidade diferente.

Quebra das duas ligações — quiralidade diferente

Teorema (L. & Rodrigues 2013)

Seja $f_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ uma família de campos de vetores, tal que $f_{(0,0)}$ tem simetrias γ_1 e γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável, com quiralidade diferente.

Então, genericamente, existem valores dos parâmetros (λ_1, λ_2) , arbitrariamente perto da origem, tais que para $\dot{x} = f_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x)$ as variedades invariantes $W^u(w)$ e $W^s(v)$ são tangentes.

Quebra das duas ligações — quiralidade diferente

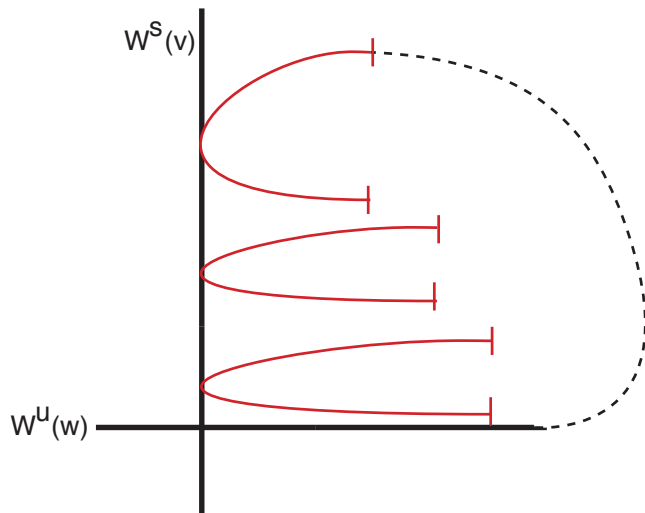
Teorema (L. & Rodrigues 2013)

Seja $f_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ uma família de campos de vetores, tal que $f_{(0,0)}$ tem simetrias γ_1 e γ_2 e uma rede heteroclínica Σ , assintoticamente estável, com quiralidade diferente.

Então, genericamente, existem valores dos parâmetros (λ_1, λ_2) , arbitrariamente perto da origem, tais que para $\dot{x} = f_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x)$ as variedades invariantes $W^u(w)$ e $W^s(v)$ são tangentes.

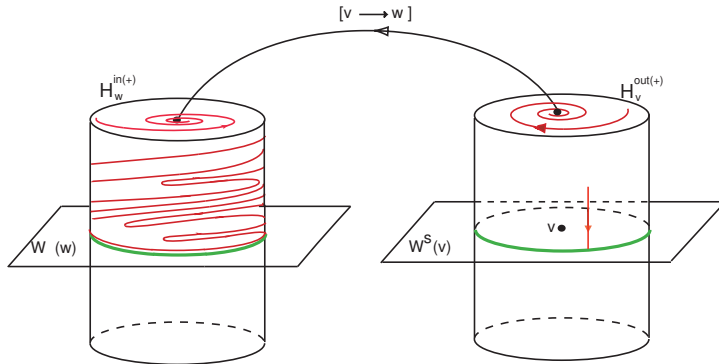
Perto desses valores existem infinitas soluções periódicas atratoras e repulsoras (fenômeno de Newhouse).

Quebra das duas ligações — quiralidade diferente



Quebra das duas ligações — quiralidade diferente

Porque acontece:



Bibliografia

- ▶ M. A.D. Aguiar, S. B. Castro and I. S. Labouriau, *Dynamics near a heteroclinic network*, Nonlinearity 18, 2005
- ▶ M. A. D. Aguiar, I. S. Labouriau and A. A. P. Rodrigues, *Switching near a heteroclinic network of rotating nodes*, Dynamical Systems: an International Journal 25, 2010
- ▶ I. S. Labouriau, A. A. P. Rodrigues, *Global generic dynamics close to symmetry*, J. Differential Equations 253, 2012
- ▶ I. S. Labouriau, A. A. P. Rodrigues, *Partial symmetry breaking and heteroclinic tangencies*, preprint CMUP, 2013

The End