Análise Funcional

José Ferreira Alves

Março de 2002

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Departamento de Matemática Pura

Introdução

Estas notas foram elaboradas para a disciplina de Complementos de Análise do Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, nos anos lectivos de 1998/99 e 1999/00. Os alunos provinham maioritariamente de uma licenciatura em ensino da matemática, onde usualmente têm um contacto bastante reduzido com a Análise Funcional.

Nos objectivos traçados para esta disciplina, além de se pretender apresentar uma abordagem a alguns dos tópicos fundamentais da Análise Funcional, pretende-se também fornecer material para uma introdução à Teoria Ergódica, área em grande desenvolvimento e de sobeja importância numa moderna perspectiva do estudo dos Sistemas Dinâmicos e Mecânica Estatística. A legitimidade para esta introdução é redobrada: em primeiro lugar, pela roupagem analítica da maior parte dos seus resultados e, em segundo lugar, pelos próprios objectivos do mestrado, que se pretende em fundamentos e aplicações da Matemática.

No primeiro capítulo são revistos alguns dos conceitos fundamentais de Topologia Geral, que supomos serem, na sua grande maioria, do conhecimento dos alunos. A sua apresentação é feita com a intenção de uniformizar linguagem e notação e, eventualmente, introduzir algum tópico desconhecido. Com o intuito de apresentar esses resultados de maneira natural, e não deixar única e simplesmente uma lista de resultados importantes, em um ou outro dos assuntos abordados os resultados apresentados vão para além das necessidades posteriores.

O segundo capítulo consiste de uma introdução à Teoria da Medida e Integração, que se supõe seja do desconhecimento dos alunos. Pretende-se que essa abordagem seja sintética, não só porque a matéria daria, por si só, para cobrir vários cursos, como também porque se pretende que esta primeira abordagem se concretize de forma leve e sem grandes abstracções. Na parte de Teoria da Medida, além do material necessário para a Teoria de Integração, introduzem-se as mínimas ferramentas necessárias para poder construir alguns exemplos interessantes de espaços de medida, dentre os quais se destaca a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. A Teoria de Integração contém uma secção de comparação entre os integrais de Riemann e Lebesgue. Resolvemos incluí-la, não só porque relaciona estes dois tipos de integração – ficando assim legitimado o uso das técnicas de integração do cálculo em $\mathbb{R}^n$ –, como também deixa claro o carácter mais geral do integral de Lebesgue.

Os dois capítulos seguintes consistem de uma apresentação de resultados básicos da teoria de espaços normados e espaços com produto interno, com particular atenção a ser dispensada aos espaços de Banach e espaços de Hilbert. O leque de assuntos para uma introdução é bastante vasto e a escolha revelou-se difícil também pelas limitações de tempo disponível. Apresentadas as definições e resultados indispensáveis para uma introdução ao assunto, optamos posteriormente por resultados com aplicações no capítulo final.

O derradeiro capítulo, sobre transformações que preservam medida, pode ser visto, não só como uma aplicação de resultados e técnicas dos capítulos anteriores à Teoria Ergódica, como também, pela sua linguagem e conteúdo, mais um capítulo em Análise Funcional. A sua apresentação é auto-suficiente e não são necessários conhecimentos prévios em Teoria Ergódica ou Sistemas Dinâmicos para a sua compreensão.

Porto, 3 de Abril de 2003

Conteúdo

Capítulo 1

Noções topológicas

Neste capítulo faremos uma apresentação dos resultados de índole topológica essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes. Salvo algumas excepções, os resultados serão apresentados sem demonstração, uma vez que estas podem ser facilmente encontradas nas referências bibliográficas; as excepções correspondem a alguns lemas técnicos que aqui são formulados num contexto algo particular com o intuito de ser facilmente usados mais adiante.

1.1 Espaços topológicos

Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ um conjunto de partes de X. Diremos que $\mathcal{T}$ é uma **topologia** em X se forem satisfeitos os seguintes axiomas:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
2. se $A, B \in \mathcal{T}$, então $A \cap B \in \mathcal{T}$;
3. se $A_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo α em algum conjunto de índices I, então $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Se $\mathcal{T}$ for uma topologia num conjunto X, denominaremos o par $(X, \mathcal{T})$ de **espaço topológico** e os elementos de $\mathcal{T}$ de **abertos** da topologia. Mais geralmente, e para simplificar, falaremos do espaço topológico X e dos abertos de X. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B}$ de uma topologia $\mathcal{T}$ é uma **base da topologia** $\mathcal{T}$ se todo elemento de $\mathcal{T}$ puder ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$.

Exemplo 1.1.1. *O conjunto das partes de um conjunto X, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, define uma topologia em X. Tal topologia, em que todo subconjunto de X é um aberto, diz-se a* **topologia discreta**. *Uma outra topologia (no caso de X ter mais do que um elemento) que podemos sempre considerar sobre X é $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Tal topologia diz-se a* **topologia grosseira**.

Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são duas topologias sobre um mesmo conjunto X, dizemos que que $\mathcal{T}_1$ é **mais fraca** do que $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Segue imediatamente das definições dadas que a topologia grosseira é a mais fraca das topologias sobre um determinado conjunto e a topologia discreta não é mais fraca do que nenhuma outra.

Exemplo 1.1.2. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e Y um subconjunto de X. É imediato verificar que $\mathcal{U} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ define uma topologia em Y a qual dizemos ser a* **topologia induzida** *em Y pela topologia $\mathcal{T}$. Dizemos que $(Y,\mathcal{U})$ é um* **subespaço topológico** *de $(X, \mathcal{T})$.*

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um conjunto $V \subset X$ diz-se uma **vizinhança** de um ponto $x \in X$, se existir algum aberto A tal que $x \in A \subset V$. Dizemos que $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{P}(X)$ é um **sistema fundamental de vizinhaças** do ponto $x \in X$, se todo elemento de $\mathcal{V}_x$ for uma vizinhança de x e toda vizinhança de x contiver algum elemento de $\mathcal{V}_x$. Dizemos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ satisfaz o **primeiro axioma de numerabilidade**, se todo ponto de X tem um sistema fundamental de vizinhanças numerável. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ satisfaz o **segundo axioma de numerabilidade**, se existe alguma base numerável da topologia $\mathcal{T}$.

Proposição 1.1.3. *Um espaço topológico que satisfaça o segundo axioma de numerabilidade também satisfaz o primeiro axioma de numerabilidade.*

Um conjunto $F \subset X$ diz-se **fechado** quando o seu complementar for um conjunto aberto. Resulta imediatamente da definição de topologia que:

1. $\emptyset$ e X são fechados;

2. a união finita de fechados é um fechado;

3. qualquer intersecção de fechados é um fechado.

Se $A \subset X$, dizemos que $x \in A$ é um **ponto interior** de A, se existe algum aberto $B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in B \subset A$. Definimos o **interior** de A como o conjunto dos pontos interiores de A. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto aderente** de A, se qualquer vizinhança de x intersecta A. Definimos $\overline{A}$, a **aderência** de A, como o conjunto dos pontos aderentes de A.

Proposição 1.1.4. *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$.*

1. *O interior de A coincide com a união dos seus subconjuntos abertos.*

2. *A aderência de A coincide com a intersecção dos conjuntos fechados que o contêm.*

Corolário 1.1.5. *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$.*

1. *A é aberto se e só se A coincide com o seu interior.*

2. *A é fechado se e só se A coincide com a sua aderência.*

Um subconjunto D de um espaço topológico X diz-se **denso** se a sua aderência coincide com X. Um espaço topológico é dito **separável** se possui algum subconjunto numerável denso. Veremos mais adiante que em certos espaços topológicos (espaços métricos) a separabilidade e o primeiro axioma de numerabilidade são suficientes para que se verifique o segundo axioma de numerabilidade.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos num espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** para $x \in X$, ou tem **limite** $x \in X$, e escrevemos $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, ou simplesmente $x_n \to x$, se qualquer vizinhança de x contiver todo x_n excepto, possivelmente, um número finito. Pode acontecer de uma sucessão ter vários limites distintos.

Exemplo 1.1.6. *Seja $\mathcal{T}$ a topologia grosseira sobre um conjunto X. Qualquer sucessão de elementos de X converge para qualquer ponto de X.*

Exemplo 1.1.7. *Seja $\mathcal{T}$ a topologia discreta sobre um conjunto X. Então uma sucessão converge se e só se é constante a partir de uma certa ordem. Em tal caso, a sucessão converge para essa constante.*

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ diz-se **separado** (ou **Hausdorff**), se e somente se, dados dois pontos distintos $x, y \in X$, existirem V_x uma vizinhança de x e V_y uma vizinhança de y tais que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

1.2 Funções contínuas

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{U})$ espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma **função contínua** se para qualquer $U \in \mathcal{U}$ tivermos $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Resulta facilmente da definição que se $f : X \to Y$ é uma função contínua, então a imagem recíproca de um fechado de Y é um fechado de X e, reciprocamente, se $f : X \to Y$ é tal que a imagem recíproca de qualquer fechado é um fechado, então f é contínua. Temos ainda que dados $x \in X$ e $V_{f(x)}$ vizinhança de $f(x)$ em Y, existe uma vizinhança V_x de x em X tal que $f(V_x) \subset V_{f(x)}$. Esta última afirmação traduz-se dizendo que f é **contínua no ponto** x.

Proposição 1.2.1. 1. *Uma função é contínua se e só se é contínua em todo ponto do seu domínio.*

2. *A restrição de uma função contínua a um subespaço do domínio é uma função contínua.*

Para ver que uma função entre dois espaços topológicos é contínua, nem sempre é necessário verificar que a imagem recíproca de um aberto é um aberto, para todo aberto do espaço de chegada.

Proposição 1.2.2. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{U})$ espaços topológicos e $\mathcal{B}$ uma base da topologia $\mathcal{U}$. Se $f : X \to Y$ é uma função tal que para todo $B \in \mathcal{B}$ se tem $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, então f é contínua.*

Sejam S um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de funções $f_\alpha : S \to X_\alpha$, onde $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ é um espaço topológico para cada α. A **topologia $\mathcal{F}$-inicial** (ou simplesmente **topologia inicial**) em S é a topologia mais fraca na qual toda $f_\alpha \in \mathcal{F}$ é contínua. Note-se que uma tal topologia existe sempre, uma vez que a topologia discreta em S torna as funções contínuas, e a intersecção de topologias é ainda uma topologia. Uma base para a topologia $\mathcal{F}$-inicial pode ser obtida tomando as intersecções finitas de conjuntos do tipo $f_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ onde $f_\alpha \in \mathcal{F}$ e $A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ (cf. Exercício 1.5.2).

Exemplo 1.2.3. *Podemos usar a topologia inicial para definir uma topologia num produto cartesiano de espaços topológicos. Seja $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de espaços topológicos e consideremos $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ o produto cartesiano dos conjuntos X_α, $\alpha \in I$. Para cada $\beta \in I$ temos a projecção natural $p_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ definida como $p_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha \in I}\big) = x_\beta$. Definimos a* **topologia produto** *em $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ como a topologia inicial para a família de projecções $(p_\beta)_{\beta \in I}$. Como base para esta topologia podemos considerar os conjuntos do tipo $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$, onde cada A_α coincide com X_α excepto, possivelmente, para um número finito de índices $\alpha \in I$ onde A_α é igual a algum aberto de X_α.*

Proposição 1.2.4. *Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas e Y um espaço separado. Se f e g coincidem num subespaço denso de X então f e g coincidem em todo X.*

Este resultado não permanece válido se omitirmos a hipótese de Y ser separado. De facto, basta observar que se Y tiver a topologia grosseira, então qualquer função tomando valores em Y é contínua.

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se f é uma bijecção contínua com inversa contínua. Dois espaços X e Y dizem-se **homeomorfos** se existir um homeomorfismo $f : X \to Y$.

1.3 Compactidade

Dizemos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **compacto** se qualquer cobertura de X por abertos tiver uma subcobertura finita; isto é, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ é tal que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, então existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Um conjunto $K \subset X$ diz-se compacto, se e somente se K com a topologia de subespaço for compacto.

Neste caso, a compactidade de K pode ser formulada em termos equivalentes (cf. Exercício 1.5.3) do seguinte modo: se $\mathcal{A}$ é uma família de abertos de X tal que $K \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, então existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Proposição 1.3.1. *Sejam X um espaço topológico e $F \subset X$.*

1. *Se X é compacto e F é fechado, então F é compacto.*

2. *Se X é separado e F é compacto, então F é fechado.*

Proposição 1.3.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $K \subset X$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Corolário 1.3.3. *Sejam X um espaço topológico compacto e Y um espaço topológico separado. Se $f : X \to Y$ é uma bijecção contínua, então f é um homeomorfismo.*

Teorema 1.3.4. (Tychonoff) *Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família de espaços topológicos compactos. Então $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ com a topologia produto é compacto.*

Resulta da Proposição 1.3.2 que a recíproca do Teorema de Tychonoff também é válida, isto é, se $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ é compacto com a topologia produto, então cada X_α é compacto.

1.4 Espaços métricos

Uma **métrica** ou **distância** sobre um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A um par (X, d), onde d é uma métrica definida em X, chamamos **espaço métrico**. Dados $x_0 \in X$ e um número real $r > 0$, definimos a **bola aberta** de centro x_0 e raio r (relativa à métrica d) como sendo o conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, \tag{1.1}$$

Analogamente, definimos a **bola fechada** de centro x_0 e raio $r > 0$ tomando a desigualdade não estrita em (1.1).

Seja (X, d) um espaço métrico. Podemos facilmente definir uma topologia em X, tomando como abertos da topologia os conjuntos $A \subset X$ tais que para qualquer ponto $x_0 \in A$ existe uma bola aberta centrada em x_0 contida em A. É imediato verificar que os conjuntos abertos assim definidos satisfazem os axiomas da definição de topologia.

Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ diz-se **metrizável** se existir alguma métrica d em X tal os abertos associados a d pelo processo descrito no parágrafo anterior coincidam com os elementos de $\mathcal{T}$. Num espaço metrizável temos sempre que uma bola aberta é um aberto da topologia e uma bola fechada é um fechado da topologia. Contudo, nem sempre é verdade que a bola fechada coincida com a aderência da bola aberta. Dado um conjunto não vazio X, podemos definir em X uma métrica do seguinte modo:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \neq y \\ 0 & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

Esta diz-se a **métrica discreta** e a topologia a ela associada coincide com a topologia discreta.

Como consequência do resultado que apresentamos a seguir, temos que se X é um conjunto com mais do que um ponto, então não existe nenhuma métrica em X que induza a topologia grosseira sobre X.

Proposição 1.4.1. *Todo espaço métrico é separado e satisfaz o primeiro axioma de numerabilidade.*

Se (X, d) é um espaço métrico e A é um subconjunto de X, facilmente se vê que a restrição de d a $A \times A$ define uma métrica em A. A topologia associada a esta métrica em A coincide com a topologia de subespaço induzida pela topologia de X associada a d.

Exemplo 1.4.2. *Em $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) podemos considerar a distância d dada por $d(x,y) = |x - y|$ e a topologia a ela associada. Tal topologia denomina-se a* **topologia usual** *em $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Mais geralmente, designaremos por topologia usual de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) a topologia produto obtida da topologia usual de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Tal topologia também provém de uma métrica, por exemplo $d\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.*

Um subconjunto A de um espaço métrico X diz-se **limitado**, se existir alguma bola (aberta ou fechada é indiferente) em X que contenha A. Se f é uma função definida num conjunto S e tomando valores num espaço métrico X, dizemos que f é uma **função limitada**, se $f(S)$ for um subconjunto limitado de X.

Teorema 1.4.3. (Borel-Lebesgue) *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (com a topologia usual) é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Este resultado não é válido em espaços métricos de um modo geral. Por exemplo, o intervalo $(0, 1/2]$ é fechado e limitado em $(0, 1)$ com a métrica usual mas não é compacto.

Corolário 1.4.4. *Se X é um espaço compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitada e existem pontos de X onde f atinge valores máximo e mínimo.*

Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e consideremos em X_1 e X_2 as topologias dadas por d_1 e d_2 respectivamente. Neste contexto, a continuidade de uma função $f\colon X_1 \to X_2$ num ponto $x \in X_1$ pode ser formulada em termos equivalentes do seguinte modo: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $f\big(B(x,\delta)\big) \subset B\big(f(x),\epsilon\big)$.

Sejam (X, d) um espaço métrico, y um ponto de X e Y um subconjunto de X. Definimos a função distância a x

$$\begin{array}{rccc} d(\cdot, y): & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

e, tomando $d(x, Y) = \inf_{x\in X} d(x, y)$, a função distância a Y

$$\begin{array}{rccc} d(\cdot, Y): & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x,Y) \end{array}$$

Estas são funções contínuas (cf. Exercício 1.5.5).

Nas proposições abaixo enunciamos alguns resultados válidos para espaços métricos que não são válidos para espaços topológicos em geral.

Proposição 1.4.5. *Seja X um espaço métrico. São equivalentes:*

1. *X é separável;*
2. *X satisfaz o segundo axioma de numerabilidade.*

Proposição 1.4.6. *Todo espaço métrico compacto satisfaz o segundo axioma de numerabilidade.*

Proposição 1.4.7. *Num espaço métrico compacto qualquer sucessão tem alguma subsucessão convergente.*

Uma sucessão $(x_n)_n$ num espaço métrico (X, d) diz-se uma **sucessão de Cauchy**, se dado $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para todos $m, n \geq n_0$. O resultado que apresentamos a seguir dá um critério útil para provar a convergência de uma sucessão de Cauchy.

Proposição 1.4.8. *Se $(x_n)_n$ for uma sucessão de Cauchy com alguma subsucessão convergente, então $(x_n)_n$ é convergente.*

Uma sucessão de Cauchy num espaço métrico X é, grosso modo, uma sucessão cujos termos ficam muito próximos entre si para ordens muito altas. Isto, por si só, pode não ser suficiente para garantir a convergência da sucessão para algum ponto do espaço X (cf. Exemplo 1.4.9). Se X é um espaço métrico tal que toda sucessão de Cauchy é convergente, dizemos que o espaço X **completo**.

Exemplo 1.4.9. *Os espaços* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$*, com a métrica usual, são completos. O espaço* $(0, +\infty)$ *com a métrica induzida da métrica usual de* $\mathbb{R}$ *não é completo: a sucessão* $(x_n)_n$ *dada por* $x_n = 1/n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é uma sucessão de Cauchy que não converge para nenhum ponto de* $(0, +\infty)$.

Proposição 1.4.10. *Um subespaço de um espaço métrico completo é completo se e somente se for um subespaço fechado.*

Dizemos que duas métricas sobre um mesmo conjunto são **equivalentes**, se forem coincidentes as topologias associadas a essas métricas. Se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços métricos e $f : X \to Y$ é uma bijecção que preserva as métricas, isto é $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ para todos $x, y \in X$, dizemos que f é uma **isometria**. Existindo uma isometria entre dois espaços métricos estes dizem-se **isométricos**.

Noções como "conjunto limitado" ou "sucessão de Cauchy" não são invariantes por equivalência de métricas (cf. Exercício 1.5.7); isto é, duas métricas equivalentes sobre um mesmo conjunto podem não produzir os mesmos conjuntos limitados ou as mesmas sucessões de Cauchy. Contudo, tais noções são invariantes por isometria.

Dado um espaço métrico X, dizemos que um espaço métrico $\widehat{X}$ é um **completamento** de X, se X for isométrico a um subespaço denso de $\widehat{X}$.

Teorema 1.4.11. *Todo espaço métrico tem um completamento.*

De facto, o completamento de um espaço métrico é único a menos de isometria, isto é, dois quaisquer completamentos de um mesmo espaço métrico são isométricos.

1.5 Exercícios

1. Mostrar que num espaço topológico separado uma sucessão não pode convergir para mais do que um ponto.

2. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções $f_\alpha : S \to X_\alpha$, onde cada $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ é um espaço topológico. Mostre que as intersecções finitas de conjuntos do tipo $f_\alpha^{-1}(A)$, onde $f_\alpha \in \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{T}_\alpha$, definem uma base da topologia $\mathcal{F}$-inicial.

3. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e K um subconjunto de X. Prove que são equivalentes:

   (a) K é compacto;

   (b) se $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ é tal que $K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, então existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

4. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ é contínua.

5. Sejam (X, d) um espaço métrico, $y \in X$ e $Y \subset X$. Mostre que as funções $d(\cdot, y)$ e $d(\cdot, Y)$ são contínuas.

6. Dê exemplo de um espaço métrico para o qual a aderência de alguma bola aberta não coincida com a bola fechada.

7. Dê duas métricas equivalentes em $\mathbb{R}$ de tal modo que $\mathbb{R}$ seja limitado e completo em uma delas e não seja nem limitado nem completo na outra.

Capítulo 2

Medida e integração

Faremos neste capítulo uma apresentação dos resultados fundamentais da teoria da medida e integração. Nem a abordagem nem alguns dos resultados serão apresentados na sua forma mais geral, de modo a não tornar demasiado árdua a tarefa do leitor que tenha neste o seu primeiro contacto com o assunto.

2.1 Espaços de medida

Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ um conjunto de partes de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra** se forem válidas as seguintes condições:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. se $A \in \mathcal{A}$ então $X \backslash A \in \mathcal{A}$;
3. se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Diremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma **σ-álgebra** se a condição 3 puder ser generalizada para uniões infinitas numeráveis: se $(A_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$, então $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ é também um elemento de $\mathcal{A}$. Denominamos de **espaço mensurável** um par $(X, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X.

Proposição 2.1.1. *Dada uma sucessão $(A_n)_n$ de elementos de uma álgebra $\mathcal{A}$, existe uma sucessão $(B_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos, com $B_n \subset A_n$ para todo n, cuja união coincide com $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$.*

Prova. Consideremos os conjuntos

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_3 = A_3 \setminus (A_2 \cup A_1), \ldots.$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra, temos que $(B_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e, pelo modo como estes conjuntos foram definidos, é fácil verificar que a sua união coincide com $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$. □

Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma função definida numa álgebra $\mathcal{A}$ de algum conjunto X, onde $[0, +\infty]$ representa $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. Dizemos que μ é **aditiva** se valerem as seguintes condições:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Se $A_1, \ldots, A_n$ são elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos então

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Uma tal função diz-se **σ-aditiva** se valer a condição 2 para famílias numeráveis de elementos de $\mathcal{A}$: se $(A_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos cuja união ainda está em $\mathcal{A}$, então

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Acrescentando, se necessário, infinitas cópias de $\emptyset$ a uma família finita de elementos de $\mathcal{A}$, deduzimos facilmente que toda função σ-aditiva é aditiva. Uma função aditiva $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ diz-se **finita** se $\mu(X) < \infty$ e diz-se **σ-finita** se existir uma sucessão $(A_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n.

Proposição 2.1.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma função σ-aditiva.*

1. *Se $A, B \in \mathcal{A}$ são tais que $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2. *Se $(A_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, então*

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Prova. Para o primeiro item, notar que podemos escrever B como a união disjunta de A com $B \setminus A$. Logo, pela aditividade de μ temos $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ e portanto $\mu(A) \leq \mu(B)$. (De facto, para a prova deste item basta apenas que μ seja aditiva).

Para o segundo item, tomemos uma sucessão $(B_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois com $B_n \subset A_n$ para todo n e cuja união coincide $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dada pela Proposição 2.1.1. Da σ-aditividade de μ resulta

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

resultando esta última desigualdade do primeiro item. □

Denominaremos de **medida** uma função σ-aditiva μ definida numa σ-álgebra $\mathcal{A}$ e **espaço de medida** um terno $(X, \mathcal{A}, \mu)$ onde $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e μ é uma medida definida em $\mathcal{A}$. Se $\mu(X) = 1$ dizemos que μ é uma **probabilidade** e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um **espaço de probabilidade**.

Exemplo 2.1.3. *Dado um conjunto X consideremos uma função $\#$ definida em $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X), tomando para cada $A \subset X$ o valor de $\#(A)$ como o número de elementos de A ($+\infty$ se A não é finito). $\#$ define uma medida sobre $\mathcal{P}(X)$ que será denominada a* **medida de contagem** *em X.*

Exemplo 2.1.4. *Consideremos um conjunto X e fixemos $x \in X$. Dado $A \subset X$ definimos uma função δ_x no conjunto das partes de X do seguinte modo: $\delta_x(A) = 1$ se $x \in A$ e $\delta_x(A) = 0$ se $x \notin A$. δ_x define uma medida (probabilidade) em $\mathcal{P}(X)$ que denominaremos de* **medida de Dirac** *no ponto x.*

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e A um subconjunto de X. Dizemos que $A \subset X$ tem **medida nula**, se existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset B$ e $\mu(B) = 0$. Uma determinada propriedade sobre os elementos de X diz-se que vale em **quase todo ponto** (**qtp** mais simplesmente), se o conjunto dos pontos onde a propriedade não vale tem medida nula.

Proposição 2.1.5. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(A_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$.*

1. *Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ então $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim \mu(A_n)$.*
2. *Se $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ e $\mu(A_1) < \infty$ então $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim \mu(A_n)$.*

Prova. Comecemos por provar o primeiro item. Uma simples manipulação de conjuntos e limites leva-nos a obter

$$\begin{aligned}
\mu\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) &= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu(A_i \setminus A_{i-1})\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_1 \cup \big(\textstyle\bigcup_{i=2}^{n} (A_i \setminus A_{i-1})\big)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Para a prova do segundo item, começamos por observar que

$$B \subset A_1 \Rightarrow \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus B). \tag{2.1}$$

De facto, dado $B \subset A_1$ podemos escrever A_1 como a união disjunta de B com $A_1 \setminus B$ e portanto, pela aditividade de μ,

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \mu(A_1 \setminus B).$$

Como $\mu(A_1 \setminus B) \leq \mu(A_1) < \infty$, obtemos (2.1) subtraindo $\mu(A_1 \setminus B)$ a ambos os membros da igualdade anterior. Aplicando (2.1) a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ e A_1, e tendo em conta que

$$A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n),$$

obtemos

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_1 \setminus A_n\right)\right).$$

Sendo $\left(A_1 \setminus A_n\right)_n$ uma sucessão encaixada crescente, resulta do item anterior que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_1 \setminus A_n\right)$$

e portanto, tendo mais uma vez em conta (2.1), obtemos

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

que é precisamente o que pretendíamos demonstrar. □

2.2 Extensões

Apesar de ter sido fácil definir as medidas dos Exemplos 2.1.3 e 2.1.4, em geral, definir medidas com propriedades interessantes sobre σ-álgebras pode ser uma tarefa bem mais árdua. Torna-se muitas vezes conveniente começar por considerar uma função aditiva definida numa certa classe $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X e posteriormente estendê-la a uma medida definida numa σ-álgebra que contenha $\mathcal{C}$.

A **álgebra gerada** (resp. **σ-álgebra gerada**) por uma classe $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto X define-se como a menor álgebra (resp. σ-álgebra) de X que contém $\mathcal{C}$. Note-se que uma tal álgebra (resp. σ-álgebra) existe sempre, pois $\mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra e a intersecção de uma família de álgebras (resp. σ-álgebras) é ainda uma álgebra (resp. σ-álgebra).

Exemplo 2.2.1. *Se X é um espaço topológico, denominamos de* **σ-álgebra de Borel** *a σ-álgebra gerada pelos abertos de X. Designaremos os elementos desta σ-álgebra por* **borelianos***.*

Dado um conjunto X, dizemos que uma classe $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X é uma **semi-álgebra** se valerem as seguintes condições:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$;

2. se $A, B \in \mathcal{S}$, então $A \cap B \in \mathcal{S}$;

3. se $A \in \mathcal{S}$, então $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, onde os E_i são elementos de $\mathcal{S}$ dois a dois disjuntos.

Introduzimos as noções de aditividade e σ-aditividade para funções definidas em semi-álgebras de maneira inteiramente análoga ao que fizemos para álgebras.

Exemplo 2.2.2. *Consideremos em $\mathbb{R}^n$ a classe de subconjuntos*

$$\mathcal{S} = \Big\{ \prod_{i=1}^{n} I_i : I_i \text{ intervalo de } \mathbb{R} \Big\} \cup \{\emptyset\}.$$

É fácil verificar que $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.2.3. *Seja $\mathcal{S}$ uma semi-álgebra de um conjunto X. A álgebra gerada por $\mathcal{S}$ consiste da colecção de todos conjuntos do tipo $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, onde os E_i's são elementos de $\mathcal{S}$ dois a dois disjuntos.*

Prova. Observar que, por um lado, a álgebra gerada por $\mathcal{S}$ terá forçosamente que conter as uniões do tipo citado. Por outro lado, é imediato verificar que a colecção de tais uniões é uma álgebra. □

Proposição 2.2.4. *Sejam $\mathcal{S}$ uma semi-álgebra de X e $\mathcal{A}$ a álgebra gerada por $\mathcal{S}$. Se $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ é aditiva, então existe uma única $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ aditiva tal que $\nu \mid \mathcal{S} = \mu$. Além disso, se μ é σ-aditiva, então ν também é σ-aditiva.*

Prova. Resulta da Proposição 2.2.3 que dado $A \in \mathcal{A}$ existem $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos tais que $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Definimos então

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Precisamos de ver que ν está bem definida: se $F_1, \ldots, F_l$ são também elementos de $\mathcal{S}$ dois a dois disjuntos tais que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(F_i),$$

o que mostra que ν está bem definida.

Mostremos agora que se μ é σ-aditiva, então ν também é σ-aditiva. Seja $(A_k)_k$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos tais que $A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$ é ainda um elemento de $\mathcal{A}$. Temos pela Proposição 2.2.3 que existem $E_1, \ldots, E_m$ elementos de $\mathcal{S}$ dois a dois disjuntos tais que $A = \bigcup_{j=1}^m E_j$. Além disso, para cada k existem $F_{k,1}, \ldots, F_{k,n_k}$ elementos de $\mathcal{S}$ dois a dois disjuntos tais que $A_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} F_{k,i}$. Definindo para $1 \leq j \leq m$, $k \geq 1$ e $1 \leq i \leq n_k$ os conjuntos $G_{k,i}^j = E_j \cap F_{k,i}$, estes são elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e podemos escrever

$$E_j = \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} G_{k,i}^j \quad \text{e} \quad F_{k,i} = \bigcup_{j=1}^m G_{k,i}^j.$$

Atendendo a que μ é σ-aditiva, valem as igualdades

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \mu(G_{k,i}^j) \quad \text{e} \quad \mu(F_{k,i}) = \sum_{j=1}^{m} \mu(G_{k,i}^j).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{j=1}^{m} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \mu(G_{k,i}^j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m} \mu(G_{k,i}^j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \mu(F_{k,i}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)
\end{aligned}$$

Temos assim provada a σ-aditividade de ν. $\square$

Pretendemos agora obter um resultado análogo ao anterior, que nos permita estender uma função σ-aditiva definida numa álgebra a uma medida definida na σ-álgebra por ela gerada. A prova desse tipo de resultado será mais elaborada do que a anterior e, para tal, introduziremos mais alguns conceitos.

Dada uma função σ-aditiva definida numa álgebra $\mathcal{A}$ de X, definimos uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ do seguinte modo:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;:\; A_n \in \mathcal{A} \quad \text{para todo } n \text{ e } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Obtém-se facilmente da definição anterior que μ^* é não negativa e $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Lema 2.2.5. *Valem as seguintes propriedades para μ^*:*

1. *Se $A \subset B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

2. *Se* $(A_n)_n$ *é uma sucessão de subconjuntos de* X*, então*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Prova. O primeiro item sai trivialmente da definição de μ^*. Para o segundo item, começamos por observar que se $\mu^*(A_n) = +\infty$ para algum n, então nada há a provar. Suponhamos então que temos $\mu^*(A_n) < +\infty$ para todo n. Atendendo à definição de μ^*, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher, para cada n, conjuntos $B_n^1, B_n^2, \ldots$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n^i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_n^i) < \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Temos então que a família $(B_n^i)_{n,i}$ cobre A e

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_n^i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos provado o lema. □

Uma questão que se pode colocar neste momento é a de tentar saber se μ^* define uma medida em $\mathcal{P}(X)$. Tal não é verdade em geral, conforme se poderá depreender das considerações após o Exemplo 2.2.10 e do Exercício 2.8.8. Contudo, veremos que existe sempre uma σ-álgebra de X na qual a restrição de μ^* a essa σ-álgebra define uma medida.

Dizemos que $M \subset X$ é **mensurável** (com respeito a μ^*) se

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M)$$

para todo $A \subset X$. Denotamos por $\mathcal{M}$ a classe de todos subconjuntos mensuráveis de X. Como consequência do item 2 do Lema 2.2.5 (vale um resultado análogo para uniões finitas, bastando, para tal, acrescentar infinitas cópias do conjunto vazio e atender a que $\mu^*(\emptyset) = 0$), é suficiente mostrar que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M)$$

para todo $A \subset X$, para concluir que $M \subset X$ é mensurável.

Teorema 2.2.6. $\mathcal{M}$ *é uma* σ*-álgebra e a restrição de* μ^* *a* $\mathcal{M}$ *é uma medida.*

Prova. Começamos por provar que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra. Obtemos facilmente da definição de conjunto mensurável que $X \in \mathcal{M}$ e, se $M \in \mathcal{M}$, então também $X \setminus M \in \mathcal{M}$. Falta verificar que $\mathcal{M}$ é fechada para uniões infinitas. Começamos por ver que

$\mathcal{M}$ é fechada para uniões finitas e, para tal, é suficiente mostrar que se $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ então $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$. Tomemos então M_1 e M_2 em $\mathcal{M}$. Dado $A \subset X$, resulta da mensurabilidade de M_1 que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M_1) + \mu^*(A \setminus M_1). \tag{2.2}$$

Por outro lado, resulta da mensurabilidade de M_2 que

$$\mu^*(A \setminus M_1) = \mu^*\big((A \setminus M_1) \cap M_2\big) + \mu^*\big(A \setminus (M_1 \cup M_2)\big). \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3) obtemos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M_1) + \mu^*\big((A \setminus M_1) \cap M_2\big) + \mu^*\big(A \setminus (M_1 \cup M_2)\big).$$

Resulta do Lema 2.2.5 que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\big(A \cap (M_1 \cup M_2)\big) + \mu^*\big(A \setminus (M_1 \cup M_2)\big).$$

Isto é precisamente o que faltava provar para concluir que $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$ sendo, portanto, $\mathcal{M}$ uma álgebra. Provemos agora que $\mathcal{M}$ é fechada para uniões infinitas. Sejam $M_1, M_2, \ldots$ elementos de $\mathcal{M}$. Sendo $\mathcal{M}$ uma álgebra, podemos, pela Proposição 2.1.1, supor que os conjuntos $M_1, M_2, \ldots$ são dois a dois disjuntos. Definindo $B_n = \bigcup_{i=1}^n M_i$ para $n \geq 1$, provemos por indução que para todo $n \geq 1$ vale

$$\mu^*(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap M_i) \quad \text{para todo } A \subset X. \tag{2.4}$$

O resultado é claramente válido para $n = 1$. Assumindo que (2.4) vale para $n \geq 1$, provemos que também vale para $n + 1$. Usando a mensurabilidade de B_n e o facto de que $M_1, M_2, \ldots$ são dois a dois disjuntos, temos para qualquer $A \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap B_{n+1}) &= \mu^*\big((A \cap B_{n+1}) \cap B_n\big) + \mu^*\big((A \cap B_{n+1}) \setminus B_n\big) \\ &= \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap M_{n+1}). \end{aligned}$$

Assumindo que (2.4) vale para n, temos assim provado que (2.4) vale também para $n+1$. Logo (2.4) vale para todo $n \geq 1$. Assim, tomando $M = \bigcup_{n\geq 1} M_n$, e tendo em conta que $B_n \subset M$ para todo n, temos para qualquer $A \subset X$

$$\mu^*(A \cap M) \geq \mu^*(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap M_i)$$

e portanto

$$\mu^*(A \cap M) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A \cap M_i).$$

Tendo em conta o Lema 2.2.5, obtemos

$$\mu^*(A \cap M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap M_i). \tag{2.5}$$

Assim, para quaisquer $A \subset X$ e $n \geq 1$, temos pela mensurabilidade de B_n, por (2.4) e pelo facto de $A \setminus M$ estar contido em $A \setminus B_n$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \setminus B_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap M_i) + \mu^*(A \setminus M).$$

Atendendo a (2.5) obtemos

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M),$$

e isto finalmente implica que $M \in \mathcal{M}$, donde se conclui que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra. Para concluir que a restrição de μ^* a $\mathcal{M}$ é σ-aditiva (e portanto uma medida) basta considerar (2.5) com $A = X$. □

Teorema 2.2.7. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de X e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Se μ é uma função σ-aditiva definida em $\mathcal{A}$, então existe alguma medida ν definida em $\mathcal{B}$ tal que $\nu \mid \mathcal{A} = \mu$.*

Prova. Pelo Teorema 2.2.6 é suficiente mostrar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ e $\mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Comecemos por provar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Dado $B \in \mathcal{A}$, queremos ver que para todo $A \subset X$ se tem

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

É claro que podemos assumir $\mu^*(A) < \infty$, pois, caso contrário, nada há a provar. Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma sucessão $(A_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ com

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \epsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(A_n \cap B) + \mu(A_n \setminus B)\big) \\ &\geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos provado que $B \in \mathcal{M}$.

Provemos agora que $\mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Por um lado, resulta facilmente da definição de μ^* que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Por outro lado, dados $A \in \mathcal{A}$ e $\epsilon > 0$, seja $(A_n)_n$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$ tal que

$$A \subset \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad \mu^*(A) + \epsilon > \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Pela Proposição 2.1.1, podemos tomar uma sucessão $(B_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos tais que $B_n \subset A_n$ para todo n e cuja união coincide com $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Temos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$, sendo esta união disjunta, e portanto, pela aditividade de μ e pela Proposição 2.1.2,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Logo

$$\mu^*(A) + \epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos provado que também $\mu^*(A) \geq \mu(A)$. $\square$

Teorema 2.2.8. *Seja μ uma função σ-aditiva definida numa álgebra $\mathcal{A}$. Se μ é σ-finita, então existe uma única medida estendendo μ à σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.*

Prova. Denotando por $\mathcal{B}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$, é suficiente mostrar que se ν é uma extensão de μ a $\mathcal{B}$, então $\nu(B) = \mu^*(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Seja $B \in \mathcal{B}$ e tomemos $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de μ^*, existe alguma sucessão $(A_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e

$$\mu^*(B) + \epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Pelas Proposições 2.1.1 e 2.1.2 podemos tomar uma sucessão $(B_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois tais que $B_n \subset A_n$ para todo n,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Temos então

$$\mu^*(B) + \epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) = \nu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \geq \nu(B),$$

e portanto, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\mu^*(B) \geq \nu(B)$.

Para a outra desigualdade, começamos por assumir que temos $B \in \mathcal{B}$ com $\mu^*(B) < \infty$ e tomemos $\epsilon > 0$. Como anteriormente, podemos tomar uma sucessão $(B_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois tais que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ e

$$\mu^*(B) + \epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) = \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big).$$

Sendo
$$\mu^*\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty B_n\big) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mu^*(B_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) = \nu\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty B_n\big),$$
temos ainda
$$\mu^*(B) \leq \mu^*\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty B_n\big) = \nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\big) = \nu(B) + \nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n \setminus B\big). \tag{2.6}$$
Como $\mu^*(B) < \infty$, podemos também supor $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) < \infty$ e portanto, usando a desigualdade já provada, obtemos
$$\nu\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty B_n \setminus B\big) \leq \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n \setminus B\big) = \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\big) - \mu^*(B) < \epsilon. \tag{2.7}$$
De (2.6) e (2.7) deduzimos que $\mu^*(B) \leq \nu(B)$, que é precisamente o que faltava para concluir que $\mu^*(B) = \nu(B)$ sempre que $B \in \mathcal{B}$ for tal que $\mu^*(B) < \infty$.

Para o caso geral, sendo μ é σ-finita podemos escrever $X = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ com $A_n \in \mathcal{A}$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. Atendendo à Proposição 2.1.1 podemos, sem perda de generalidade, supor que os A_n's são disjuntos dois a dois. Logo, dado $B \in \mathcal{B}$, temos $\mu^*(B \cap A_n) < \infty$ para todo n, e portanto
$$\mu^*(B) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(B \cap A_n) = \nu(B),$$
ficando assim concluída a prova do teorema. □

Se não assumirmos que μ é σ-finita, a extensão dada pelo teorema anterior não é necessariamente única. Para um contra-exemplo, ver o Exercício 2.8.4. Na prova do Teorema 2.2.8 foi usada a existência da medida μ^* estendendo μ a $\mathcal{B}$ para provar que não há mais do que uma extensão. Contudo, podemos provar directamente que não poderá haver mais do que uma medida estendendo μ a $\mathcal{B}$ sem assumir a existência de alguma extensão (cf. Exercício 2.8.5).

Exemplo 2.2.9 (Medida produto). *Sejam $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ-finitos. Consideremos em $X_1 \times X_2$ a classe $\mathcal{S}$ de todos os elementos $A_1 \times A_2$ tais que $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \mathcal{A}_2$. É fácil verificar que a classe $\mathcal{S}$ assim descrita é uma semi-álgebra de subconjuntos de $X_1 \times X_2$. Se $A_1 \times A_2 \in \mathcal{S}$ definimos*
$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$
Segue imediatamente que $\mu_1 \otimes \mu_2 \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ é σ-aditiva e σ-finita. Assim, pela Proposição 2.2.4, pelo Teorema 2.2.7 e pelo Teorema 2.2.7 existe uma única extensão de $\mu_1 \otimes \mu_2$ a uma medida definida na σ-álgebra gerada por $\mathcal{S}$. Tal σ-álgebra é designada a **σ-álgebra produto** *de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ e a medida designada a* **medida produto** *de μ_1 e μ_2 que é costume continuar a denotar-se $\mu_1 \otimes \mu_2$. A medida produto pode definir-se de maneira análoga para uma família finita de espaços de medida σ-finitos.*

O exemplo abaixo dá-nos uma medida em $\mathbb{R}^n$ que generaliza, para uma classe bastante ampla de conjuntos, a noção intuitiva que temos de comprimento ($n = 1$), área ($n = 2$) ou volume ($n \geq 3$). Tal medida estará definida nos borelianos de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2.10 (Medida de Lebesgue). *Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{S}$ a semi-álgebra do Exemplo 2.2.2. Definimos, para $\prod_{i=1}^n I_i \in \mathcal{S}$,*

$$\mu\Big(\prod_{i=1}^{n} I_i\Big) = |I_1| \times \cdots \times |I_n|.$$

Resulta da definição de μ que esta é σ-aditiva e σ-finita (cf. Exercício 2.8.6). Dos Teoremas 2.2.4 e 2.2.7 concluímos que μ pode ser estendida a uma única medida λ definida em $\mathcal{B}$. Obtemos assim uma (única) medida $\lambda\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ tal que se $I_1, \ldots, I_n$ são intervalos de $\mathbb{R}$, então

$$\lambda\Big(\prod_{i=1}^{n} I_i\Big) = |I_1| \times \cdots \times |I_n|,$$

onde, para cada i, $|I_i|$ designa o comprimento de I_i. Esta medida λ é designada a **medida de Lebesgue** *(em $\mathbb{R}^n$).*

Resulta do modo como a medida de Lebesgue foi definida que esta é **invariante por isometria**: se A e B são borelianos de $\mathbb{R}^n$ tais que um pode ser obtido do outro por uma isometria de $\mathbb{R}^n$, então A e B têm a mesma medida de Lebesgue (cf. Exercício 2.8.8). Antes de encerrar esta secção, cabe perguntar se será possível estender a medida de Lebesgue a uma medida μ definida sobre *todos* os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, conservando a invariância por isometria. Restringir-nos-emos ao caso de $\mathbb{R}$ para ver que tal não é possível. Valem, contudo, resultados análogos para $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$. Mais precisamente, veremos que não há nenhuma função μ definida nas partes de $\mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades:

1. $\mu([0, 1]) = 1$ (ou alguma outra constante positiva);

2. μ é invariante por isometria;

3. μ é σ-aditiva.

Consideremos em $[0, 1]$ a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se e só se $x - y$ é racional. Como o conjunto dos racionais é numerável, cada classe de equivalência é um conjunto numerável. Sendo $[0, 1]$ não numerável, temos que ter uma infinidade não numerável de classes de equivalência. Seja $\{r_1, r_2, \ldots\}$ uma numeração dos racionais em $[0, 1]$ e C um conjunto obtido escolhendo um elemento em cada classe de equivalência. Definindo $C_n = C + r_n$ para cada n temos que os C_n são dois a dois disjuntos. Temos ainda

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset [0,2].$$

De 1 e 2 resulta

$$\mu([0,2]) = 2 \quad \text{e} \quad \mu(C_n) = \mu(C) \quad \text{para todo} \quad n \geq 1,$$

e de 3 resulta

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq 2.$$

Ou seja,

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C) \leq 2.$$

A primeira desigualdade implica que $\mu(C) > 0$ e a segunda implica que $\mu(C) = 0$, o que dá uma contradição.

2.3 Funções integráveis

Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Adoptaremos a designação de mensuráveis para os elementos de $\mathcal{A}$, não querendo com isso atribuir o significado de conjunto mensurável introduzido na Secção 2.2. Considerando $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, dizemos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma **função mensurável**, se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tivermos $f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{A}$.

Proposição 2.3.1. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. São equivalentes:*

1. *f é mensurável;*
2. *$f^{-1}(-\infty, \alpha] \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;*
3. *$f^{-1}(\alpha, +\infty) \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;*
4. *$f^{-1}[\alpha, +\infty) \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;*
5. *$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo boreliano B de $\mathbb{R}$.*

Prova. A equivalência de 1, 2, 3 e 4 é consequência de $\mathcal{A}$ ser uma σ-álgebra e cada um dos quatro tipos de intervalos poder ser obtido por passagem ao complementar, intersecção e união de intervalos de cada um dos outros tipos. É claro que 5 implica 1, 2, 3 e 4. Para ver que 1,2, 3 ou 4 implicam 5, basta atender ao facto da σ-álgebra dos borelianos em $\mathbb{R}$ ser a gerada pela semi-álgebra dos intervalos. $\square$

Exemplo 2.3.2. *As funções constantes e as funções características dos elementos de $\mathcal{A}$ são funções mensuráveis. Se X for um espaço topológico e $\mathcal{B}$ for a σ-álgebra de Borel, então as funções contínuas são mensuráveis.*

Para operações com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, além das convenções usuais, fazemos as seguintes convenções: $(\pm\infty)\cdot 0 = 0$ e $0\cdot(\pm\infty) = 0$. Não atribuiremos significado a $\infty - \infty$.

Proposição 2.3.3. *Se $c \in \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são funções mensuráveis, então $f + c$, cf, $f \pm g$ (sempre que façam sentido) e fg são também mensuráveis.*

Prova. Vejamos os casos $f + g$ e fg; atendendo a que as funções constantes são mensuráveis, os outros casos são consequência destes.

Seja $A = \{x : f(x) + g(x) > \alpha\}$. Se $x \in A$, então $s = f(x) + g(x) - \alpha > 0$. Isto implica que existe algum $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) - s < r < f(x)$. Mas, se $f(x) - s < r$, então $g(x) > \alpha - r$. Logo,

$$A \subset B = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \big(\{x : f(x) > r\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r\}\big)$$

que é obviamente um conjunto mensurável. Por outro lado, é claro que $B \subset A$, donde se conclui que $f + g$ é mensurável.

Para provar que o produto de funções mensuráveis é uma função mensurável, começamos por observar que

$$fg = \frac{1}{4}\big[(f + g)^2 - (f - g)^2\big],$$

e portanto é suficiente mostrar que o quadrado de uma função mensurável é uma função mensurável. Se $\alpha < 0$, temos $\{x : f(x)^2 > \alpha\} = \mathbb{R}$ mensurável. Se $\alpha \geq 0$, então

$$\{x : f(x)^2 > \alpha\} = \{x : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{\alpha}\},$$

que é também um conjunto mensurável. □

Proposição 2.3.4. *Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sucessão de funções mensuráveis, então são mensuráveis:*

1. $\sup_{n\geq 1} f_n$ *e* $\inf_{n\geq 1} f_n$;
2. $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *e* $\liminf_{n\to\infty} f_n$.

Prova. É imediato verificar que

1. $\{x : \sup_{n\geq 1} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n\geq 1}\{x : f_n(x) > \alpha\}$;

   $\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$.

2. $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1}(\sup_{i\geq n} f_i)$;

   $\liminf_{n\to\infty} = -\limsup_{n\to\infty}(-f_n)$.

Os itens da proposição resultam facilmente das igualdades acima. □

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma função φ mensurável não negativa é uma **função simples**, se pudermos escrever

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i},$$

onde $a_i \in \mathbb{R}_0^+$ e $\mathcal{X}_{A_i}$ representa a função característica de $A_i \in \mathcal{A}$, com os A_i's disjuntos dois a dois. Definimos o **integral de uma função simples** $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ como

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

(recordar que convencionámos $0 \cdot \infty = 0$). Este valor não depende da representação de φ como combinação linear de funções características. De facto, se

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i} = \sum_{i=1}^{l} b_i \mathcal{X}_{B_i}$$

os A_i's e os B_i's disjuntos dois a dois, então terá que ser $a_i = b_j$ em $A_i \cap B_j$. Segue que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} b_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{l} b_i \mu(B_i),$$

ficando assim demonstrado que o integral de uma função simples não depende da sua representação.

Vamos agora generalizar a noção de integral para funções não negativas. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e f uma função mensurável não negativa. Definimos o **integral** de f

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi : \varphi \text{ função simples e } \varphi \leq f\right\}.$$

É consequência imediata da definição apresentada que se f e g são funções mensuráveis não negativas, então

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$$

Se $A \in \mathcal{A}$, definimos o integral de f em A

$$\int_A f d\mu = \int f \mathcal{X}_A d\mu.$$

Proposição 2.3.5. *Seja f uma função mensurável não negativa. Então $\int f d\mu = 0$ se e somente se $f = 0$ qtp.*

Prova. Se $f = 0$ qtp e φ é uma função simples tal que $\varphi \leq f$, então claramente $\int \varphi d\mu = 0$. Da definição resulta que $\int f d\mu = 0$.

Suponhamos, por outro lado, que $\int f d\mu = 0$. Definindo $A_n = \big\{x : f(x) \geq 1/n\big\}$ temos $\big\{x : f(x) > 0\big\} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ e

$$\int f d\mu \geq \int \frac{1}{n} \mathcal{X}_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n).$$

Logo, $\mu(A_n) = 0$ para todo n, e portanto, $f = 0$ qtp. □

Lema 2.3.6. (Fatou) *Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções mensuráveis não negativas, então*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Prova. Se definirmos $f = \liminf f_n$ temos que f é uma função não negativa. Basta provar que se φ é uma função simples tal que $\varphi \leq f$ então $\int \varphi d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$. Definimos, para cada $k \geq 1$, a função mensurável

$$g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x).$$

Analisamos agora os dois casos possíveis:

1. Se $\int \varphi d\mu = \infty$, segue da definição de integral de uma função simples que deve existir um conjunto mensurável A com $\mu(A) = \infty$ e uma constante $a > 0$ tais que $\varphi \mid A = a$. Definindo, para cada $n \geq 1$, o conjunto mensurável

$$A_n = \{x : g_k(x) > a, \ \text{ para } k \geq n\},$$

temos $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Para cada x, a sucessão $\big(g_k(x)\big)_k$ é monótona crescente e $\lim_k g_k(x) = f(x) \geq \varphi$. Assim, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e, portanto, $\lim \mu(A_n) = \infty$. Resulta que para $n \geq 1$

$$\int f_n d\mu \geq \int g_n d\mu > a\mu(A_n),$$

donde se conclui que $\liminf \int f_n d\mu = \infty$.

2. Se $\int \varphi d\mu < \infty$, e definirmos $B = \{x : \varphi(x) > 0\}$, temos $\mu(B) < \infty$. Seja M um majorante para φ. Fixemos arbitrariamente $0 < \epsilon < 1$ e consideremos, para $n \geq 1$, o conjunto

$$B_n = \{x : g_k > (1-\epsilon)\varphi, \ \text{ para } k \geq n\}.$$

Temos que os conjuntos B_n são mensuráveis, $B_n \subset B_{n+1}$ para todo n e $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Então $(B \setminus B_n)_n$ é uma sucessão encaixada decrescente e $\bigcap_{n=1}^{\infty}(B \setminus B_n) = \emptyset$. Como $\mu(B) < \infty$, resulta da Proposição 2.1.5 que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B \setminus B_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Temos então para $n \geq N$

$$\begin{aligned}
\int g_n d\mu &\geq \int_{B_n} g_n d\mu \\
&\geq (1-\epsilon)\int_{B_n} \varphi d\mu \\
&= (1-\epsilon)\Big(\int_B \varphi d\mu - \int_{B\setminus B_n} \varphi d\mu\Big) \\
&\geq (1-\epsilon)\int \varphi d\mu - \int_{B\setminus B_n} \varphi d\mu \\
&\geq \int \varphi d\mu - \epsilon \int \varphi d\mu - \epsilon M.
\end{aligned}$$

Logo

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu \geq \int \varphi d\mu - \epsilon\Big(\int \varphi d\mu + M\Big)$$

e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos o resultado. $\square$

Não é lícito esperar que valha sempre a igualdade no Lema de Fatou. De facto, se consideramos em $\mathbb{R}$ a medida de Lebesgue λ e definirmos para $n \geq 1$

$$f_{2n} = \mathcal{X}_{[0,1]} \quad \text{e} \quad f_{2n-1} = \mathcal{X}_{(1,2]}$$

temos $\liminf f_n(x) = 0$ para todo x, mas $\int f_n d\lambda = 1$ para todo $n \geq 1$.

Teorema 2.3.7. (Convergência Monótona) *Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções mensuráveis não negativas tais que $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, então*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Prova. Seja $f = \lim f_n$. Pelo Lema de Fatou, temos

$$\int f d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{2.8}$$

Como $f \geq f_n$ para todo n, resulta que $\int f d\mu \geq \int f_n d\mu$ para todo n, e portanto

$$\int f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) deduzimos o resultado. □

O resultado a seguir dá uma maneira alternativa de definir o integral de uma função mensurável.

Teorema 2.3.8. *Se f é uma função mensurável não negativa, então existe uma sucessão crescente $(\varphi_n)_n$ de funções simples convergindo pontualmente para f com*

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu = \int f d\mu.$$

Prova. Consideremos para $n \geq 1$ e $k = 1, 2, \ldots, n2^n$ os conjuntos

$$A_{n,k} = \left\{ x : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\}$$

e

$$B_n = \{x : f(x) > n\}.$$

As funções

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathcal{X}_{A_{n,k}} + n\mathcal{X}_{B_n}$$

satisfazem as condições do teorema. □

Vamos agora generalizar a noção de integral para funções mensuráveis que podem tomar valores negativos e introduzir o conceito de função integrável. Dada uma função mensurável f, consideremos respectivamente a sua **parte positiva** e **parte negativa**,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

É imediato verificar que f^+ e f^- são funções não negativas e $f = f^+ - f^-$. Dizemos que uma função mensurável f é **integrável** se

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

No caso de algum destes dois integrais ser finito definimos o **integral** de f

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Observamos que $|f| = f^+ + f^-$ e, portanto, f é integrável se e só se $|f|$ é integrável. Dados um conjunto mensurável A e uma função mensurável f, dizemos que f é integrável em A se $f\mathcal{X}_A$ for integrável. Definimos o integral de f em A por

$$\int_A f d\mu = \int f\mathcal{X}_A d\mu.$$

Proposição 2.3.9. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e f, g funções integráveis.*

1. *αf é integrável e $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.*
2. *$f + g$ é integrável e $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.*
3. *Se $f \leq g$, então $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.*
4. *Se A e B são conjuntos mensuráveis disjuntos, então*
$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Prova. O resultado sai facilmente para o caso de f e g serem funções simples. Para o caso geral aplicar o Teorema 2.3.8 às partes positiva e negativa de cada uma das funções, tendo em atenção a igualdade do Exercício 2.8.11. □

Proposição 2.3.10. *Se f é uma função integrável, então*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu,$$

e temos a igualdade se e só se $f \geq 0$ qtp ou $f \leq 0$ qtp.

Prova. Como $f \leq |f|$ e $-|f| \leq f$, vem

$$\int f d\mu \leq \int |f| d\mu \quad \text{e} \quad -\int |f| d\mu \leq \int f d\mu.$$

Ou seja,

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu,$$

tendo assim provado a primeira parte.

É claro que $f \geq 0$ qtp ou $f \leq 0$ qtp é condição suficiente para que se tenha a igualdade. Vejamos a necessidade. Ora,

$$\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu \quad \Rightarrow \quad \int f d\mu = \int |f| d\mu \quad \text{ou} \quad \int f d\mu = -\int |f| d\mu.$$

No primeiro caso temos $\int (|f| - f) d\mu = 0$ e, pela Proposição 2.3.5 terá que ser $f = |f|$ qtp. No outro caso, analogamente se vê que $f = -|f|$ qtp. Em qualquer dos casos temos $f \geq 0$ qtp ou $f \leq 0$ qtp. □

Teorema 2.3.11. (Convergência Dominada) *Seja* $(f_n)_n$ *uma sucessão de funções mensuráveis convergindo qtp para* f *tais que* $|f_n| \leq g$*, onde* g *é integrável. Então* f *é integrável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Prova. Sendo $|f_n| \leq g$ para todo n, terá que ser $|f| \leq g$ qtp. Resulta do Exercício 13 que f e f_n são também integráveis. Temos então que $(g + f_n)_n$ é uma sucessão de funções não negativas integráveis. Pelo Lema de Fatou

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g + f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n)d\mu,$$

e então

$$\int g d\mu + \int f d\mu \leq \int g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Como $\int g d\mu$ é finito vem

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Por outro lado, $(g - f_n)_n$ é também uma sucessão de funções não negativas integráveis. Pelo Lema de Fatou

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g - f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)d\mu,$$

donde

$$\int g d\mu - \int f d\mu \leq \int g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

o que prova o resultado. □

Funções complexas. Terminamos esta secção com uma breve indicação de como a teoria apresentada anteriormente se estende a funções tomando valores complexos. Seja f uma função definida num espaço de medida e tomando valores em $\mathbb{C}$ e sejam $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ respectivamente a parte real e a parte imaginária de f, i.e. $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ com $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ tomando valores reais. Dizemos que f é mensurável se e só se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são mensuráveis e, similarmente, f é integrável se e só se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são integráveis. No caso da integrabilidade de f, definimos

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu.$$

Com estas definições, os resultados apresentados anteriormente aplicam-se (com algumas alterações óbvias) a funções tomando valores complexos.

2.4 Integrais de Riemann e Lebesgue

Vamos agora comparar a noção de integral de uma função real de variável real segundo Lebesgue (em relação à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ que denotaremos por λ) com a noção de função integrável segundo Riemann. Como veremos, a integrabilidade segundo Riemann é mais exigente do que a integrabilidade segundo Lebesgue, no sentido em que há funções que são integráveis segundo Lebesgue que não são integráveis segundo Riemann. Para simplificar apresentaremos os resultados para funções definidas em intervalos de $\mathbb{R}$. Temos naturalmente resultados análogos para funções definidas em rectângulos de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$.

Começamos por apresentar a noção de integrabilidade segundo Riemann. Seja $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dada $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ uma partição P de $[a, b]$, definimos a sua **soma superior**

$$S_P = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

onde para cada i tomamos $M_i = \sup(f|[x_{i-1}, x_i])$. Substituindo cada supremo M_i pelo respectivo ínfimo m_i, obtemos a **soma inferior** de P

$$s_P = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

É fácil verificar que se P_1 e P_2 são duas quaisquer partições de $[a, b]$ então $s_{P_1} \leq S_{P_2}$. Uma função diz-se **integrável segundo Riemann** se e somente se as suas somas superiores e inferiores puderem ficar arbitrariamente próximas; isto é, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P tal que $S_P - s_P < \epsilon$. Neste caso teremos $\inf_P S_P = \sup_P s_P$ e designamos este valor comum por $\int_a^b f dx$.

Teorema 2.4.1. *Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann, então f é integrável segundo Lebesgue e*

$$\int_a^b f dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Prova. Seja $(P_n)_n$ uma sucessão de partições tais que $S_{P_n} - s_{P_n} < 1/n$ para cada n. Se Φ_n e ϕ_n são as funções que em cada intervalo determinado pela partição P_n valem, respectivamente, o supremo e o ínfimo da restrição de f a esse intervalo, temos que Φ_n e ϕ_n são funções mensuráveis simples, $\phi_n \leq f \leq \Phi_n$ e

$$S_{P_n} = \int \Phi_n d\lambda \quad \text{e} \quad s_{P_n} = \int \phi_n d\lambda.$$

Definido $M = \inf_n \Phi_n$ e $m = \sup_n \phi_n$ temos que M e m são funções mensuráveis e vamos ver que $M = m$ qtp. Temos

$$\{x : M(x) - m(x) > 0\} = \bigcup_{k \geq 1} \{x : M(x) - m(x) > \frac{1}{k}\}.$$

Seja $\lambda\big(\{x : M(x) - m(x) > 1/k\}\big) = a_k$. Como $\phi_n \leq m$ e $\Phi_n \geq M$ para todo n, então temos

$$\int (\Phi_n - \phi_n) d\lambda \geq a_k/k.$$

Isto implica $a_k = 0$ para todo k e portanto $M = m$ qtp. Temos $m \leq f \leq M$, donde resulta que f é mensurável. Como f é limitada, temos que f é integrável e

$$\int \phi_n d\lambda \leq \int f d\lambda \leq \int \Phi_n d\lambda.$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos o resultado. □

O recíproco deste teorema não é válido. Se considerarmos no intervalo $[0, 1]$ a função $\mathcal{X}_I$, função característica dos irracionais, temos que $\mathcal{X}_I$ é mensurável, $\mathcal{X}_I = 1$ qtp (cf. Exercício 2.8.9) e portanto $\int \mathcal{X}_I d\lambda = 1$. Por outro lado, $S_P = 1$ e $s_P = 0$ qualquer que seja a partição P de $[0, 1]$, o que mostra que $\mathcal{X}_I$ não é integrável segundo Riemann.

O teorema abaixo dá uma caracterização das funções integráveis segundo Riemann.

Teorema 2.4.2. *Uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann se e somente se f é contínua em Lebesgue qtp.*

Prova. Suponhamos que f é integrável segundo Riemann. Tomemos $(P_n)_n$ uma sucessão de partições de $[a, b]$ tais que $S_{P_n} - s_{P_n} < 1/n$ para cada n. Seja C o conjunto dos pontos que estão em alguma das partições P_n. Como C é numerável, temos que C é um conjunto com medida nula. Definimos para $x \notin C$ as funções M e m como na prova do Teorema 2.4.1. Se $x \notin C$ é tal que $M(x) = m(x)$, então f é contínua em x. De facto, se existissem $\epsilon > 0$ e uma sucessão $(x_n)_n$ convergindo para x tal que $|f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon$, então teríamos $M(x) \geq m(x) + \epsilon$, o que não pode suceder. Da prova do Teorema 2.4.1 segue que $M(x) = m(x)$ para Lebesgue qtp, ficando assim demonstrado que f é contínua em Lebesgue qtp.

Reciprocamente, suponhamos que f é contínua em Lebesgue qtp. Tomemos $(P_n)_n$ uma sucessão de partições de $[a, b]$ com os diâmetros dos intervalos convergindo para zero quando $n \to \infty$ e tal que $P_n \subset P_{n+1}$ para todo n. Definindo ϕ_n e Φ_n como na prova do Teorema 2.4.1, temos $\phi_{n+1} \geq \phi_n$ e $\Phi_{n+1} \leq \Phi_n$ para todo n. Tomemos $m = \lim \phi_n$ e $M = \lim \Phi_n$. Se x é um ponto de continuidade de f, então dado

$\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sup(f|(x-\delta, x+\delta)) - \inf(f|(x-\delta, x+\delta)) < \epsilon$. Para n suficientemente grande, x pertence a algum intervalo da partição P_n que, por sua vez, está contido em $(x-\delta, x+\delta)$. Logo, $\Phi_n(x) - \phi_n(x) < \epsilon$. Como ϵ arbitrário, então $M(x) = m(x)$ e portanto $M = m$ em Lebesgue qtp. Pelo Teorema da Convergência Monótona e o Teorema 2.4.1, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int \Phi_n d\lambda = \int M d\lambda = \int m d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n d\lambda.$$

Como

$$S_{P_n} = \int \Phi_n d\lambda \quad \text{e} \quad s_{P_n} = \int \phi_n d\lambda,$$

concluímos que f é integrável segundo Riemann. $\square$

2.5 Espaços L^p

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\mu)$ como a classe das funções mensuráveis f tais que $|f|^p$ é integrável, com a identificação de duas funções que coincidam em quase todo ponto. Definimos

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos $L^\infty(\mu)$ como a classe das funções mensuráveis f tais que existe algum $M > 0$ para o qual $\mu\big(\{x : |f(x)| > M\}\big) = 0$, mais uma vez com a identificação de funções que coincidam em quase todo ponto. Definimos também

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ M > 0 \mid \mu(\{x : |f(x)| > M\}) = 0 \big\}.$$

Resulta do modo como definimos estes espaços que, para $1 \leq p \leq \infty$, qualquer $f \in L^p(\mu)$ está identificada com uma função mensurável que não toma nunca os valores $\pm\infty$. De facto, se $\|f\|_p < \infty$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então o conjunto dos pontos onde f toma os valores $\pm\infty$ terá que ter medida nula. Assim, dados $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(\mu)$, faz sentido falar de $f \pm g$, considerando, se necessário, representantes de f e g que não tomem nunca os valores $\pm\infty$.

Lema 2.5.1. (Desigualdade de Young) *Seja $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função contínua estritamente crescente tal que $\varphi(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, e seja $\psi = \varphi^{-1}$. Definindo, para $x \geq 0$,*

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(y) dy \quad e \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(y) dy,$$

temos $ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$ para todos $a, b \geq 0$, e a igualdade vale se e só se $\varphi(a) = b$.

Prova. Temos para $a \geq 0$

$$\int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^{\varphi(a)} \psi(x)dx = a\varphi(a);$$

ou seja

$$\Phi(a) + \Psi(\varphi(a)) = a\varphi(a).$$

Daqui resulta

$$\Phi(a) + \Psi(b) = a\varphi(a) + \Psi(b) - \Psi(\varphi(a)).$$

O resultado sai analisando os casos $\varphi(a) \leq b$ e $\varphi(a) > b$. □

Dado $p > 1$, dizemos que $q > 1$ é o **conjugado** de p se tivermos $1/p + 1/q = 1$ (note-se que existe um único número $q > 1$ nestas condições). Se $p = 1$ o seu conjugado é, por definição, $q = \infty$.

Corolário 2.5.2. *Sejam $a, b \geq 0$, $p > 1$ e $q > 1$ o conjugado de p. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

e a igualdade vale se e só se $a^p = b^q$.

Prova. Tomando $\varphi(x) = x^{p-1}$, temos que φ está nas condições da desigualdade de Young,

$$\Phi(a) = \frac{a^p}{p} \quad \text{e} \quad \Psi(b) = \frac{b^q}{q}.$$

Pela Desigualdade de Young temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

com a igualdade valendo se e só se $b = \varphi(a) = a^{p-1}$, ou seja, $b^q = a^{q(p-1)} = a^p$. □

Teorema 2.5.3. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e q o conjugado de p. Então $fg \in L^1(\mu)$ e*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Prova. Vejamos primeiro o caso $1 < p < \infty$. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ o resultado é imediato. Se tal não se verificar, temos pelo Corolário 2.5.2

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando, vem

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |fg|d\mu \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

o que dá o resultado neste caso.

Vejamos agora o caso $p = 1$ e $q = \infty$ (o caso $p = \infty$ e $q = 1$ resulta deste). Temos

$$|fg| \leq |f|\|g\|_\infty \quad \text{qtp.}$$

Daqui resulta que $fg \in L^1(\mu)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

obtendo assim o resultado. □

No caso em que $p = 2$ temos também $q = 2$. Se $f, g \in L^2(\mu)$, então

$$\int |fg|d\mu \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Esta é conhecida como a **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Teorema 2.5.4. (Desigualdade de Minkowski) *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(\mu)$, então $f+g \in L^p(\mu)$ e*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prova. Os casos $p = 1$ ou $p = \infty$ seguem directamente das definições. Seja $p > 1$ e $q > 1$ o seu conjugado. Começamos por mostrar que $f + g \in L^p(\mu)$. De facto, como

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\sup\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p),$$

temos $f + g \in L^p(\mu)$. Temos também

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p d\mu \\
&\leq \int |f|\,|f+g|^{p-1}d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1}d\mu \\
&\leq \|f\|_p\,\|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p\,\|(f+g)^{p-1}\|_q,
\end{aligned}$$

resultando esta última desigualdade do Teorema 2.5.3 e de se ter $(p-1)q = p$. Assim, $|f+g|^{p-1} \in L^q(\mu)$ e

$$\|(f+g)^{p-1}\|_q^q = \int (f+g)^{q(p-1)}d\mu = \int (f+g)^p d\mu = \|f+g\|_p^p.$$

Logo,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q} = (\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1},$$

donde se conclui o que pretendemos. □

Resulta em particular da desigualdade de Minkowski que, considerando a adição usual e o produto de um escalar por uma função, $L^p(\mu)$ é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Introduzimos agora a função

$$d_p : L^p(\mu) \times L^p(\mu) \to \mathbb{R}_0^+$$

dada por $d_p(f,g) = \|f - g\|_p$.

Corolário 2.5.5. *d_p é uma métrica em $L^p(\mu)$, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Prova. Temos claramente $d_p(f,g) \geq 0$ e $d_p(f,g) = d_p(g,f)$ para $f,g \in L^p(\mu)$. Da Proposição 2.3.5 resulta que $d_p(f,g) = 0$ se e só se $f = g$ qtp. A desigualdade triangular resulta da desigualdade de Minkowski.

Nota 2.5.6. Se na definição dos espaços $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, não identificarmos duas funções mensuráveis que coincidam qtp, poderemos ter $d_p(f,g) = 0$ sem que seja $f = g$.

Teorema 2.5.7. *$\big(L^p(\mu), d_p\big)$ é completo, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Prova. Começamos por ver o caso $1 \leq p < \infty$. Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de Cauchy em $L^p(\mu)$. Queremos ver que existe $f \in L^p(\mu)$ tal que $\|f_n - f\|_p$ converge para zero quando $n \to \infty$. Como a sucessão $(f_n)_n$ é de Cauchy, podemos, para cada $i \geq 1$, escolher $n_i \geq 1$ tal que $\|f_n - f_k\|_p < 1/2^i$ para $n, k \geq n_i$. Além disso, a sucessão $(n_i)_i$ pode ser tomada crescente, donde resulta em particular que para todo $i \geq 1$

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < 1/2^i.$$

Definindo

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

temos $g = \lim_k g_k$. Aplicando o Lema de Fatou à sucessão $(g_k^p)_k$ obtemos

$$\|g\|_p^p \leq \liminf_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \right)^p \leq 1.$$

Resulta que g é finita qtp, e portanto

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

é absolutamente convergente qtp. Seja f a soma desta série nos pontos onde ela converge e definida arbitrariamente nos outros pontos. Como

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

resulta que $\lim_i f_{n_i} = f$ qtp. Vejamos que $\|f_n - f\|_p$ converge para zero quando $n \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ para $n, m \geq N$. Pelo Lema de Fatou, temos para cada $m \geq N$

$$\int |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \leq \epsilon^p.$$

Concluímos que $f - f_m \in L^p(\mu)$, e portanto $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(\mu)$. Além disso, $\|f - f_m\|_p < \epsilon$ para $m \geq N$, o que prova o resultado.

Vejamos agora o caso $p = \infty$. Sejam, para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n,m} = \big\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\big\} \quad \text{e} \quad B_n = \big\{x : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\big\}.$$

Então, se

$$E = \big(\textstyle\bigcup_{n\neq m} A_{n,m}\big) \cup \big(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\big),$$

temos $\mu(E) = 0$. Para cada $x \in X \setminus E$ a sucessão $(f_n(x))_n$ é de Cauchy. Seja f definida como o limite desta sucessão se $x \notin E$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$ para $m, n \geq N$. Então, em $X \setminus E$

$$|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$$

e portanto, fazendo $n \to \infty$ obtemos $|f - f_m| \leq \epsilon$. Deduzimos que $|f| \leq |f_m| + \epsilon$ qtp e portanto $f \in L^\infty(\mu)$. Como $\mu(E) = 0$, concluímos que $\|f - f_m\|_\infty < \epsilon$ para $m \geq N$. $\square$

2.6 Continuidade absoluta

Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ, ν medidas em $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que ν é **absolutamente contínua** com respeito a μ, e escrevemos $\nu \ll \mu$, se $\nu(A) = 0$ sempre que $\mu(A) = 0$. As medidas dizem-se **equivalentes** se $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$.

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e f é uma função não negativa integrável, então

$$\nu : A \mapsto \int_A f d\mu$$

define uma medida finita em $(X, \mathcal{A})$ (cf. Exercício 2.8.12) que é absolutamente contínua com respeito a μ. De facto, se $A \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(A) = 0$, então $f\mathcal{X}_A = 0$ qtp e portanto $\nu(A) = 0$. Veremos que esta é a única maneira de obter medidas finitas absolutamente contínuas, começando por provar um lema auxiliar.

Lema 2.6.1. *Sejam ν, η medidas finitas num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e $E \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(E) > \eta(E)$. Existe $B \subset E$, com $\nu(B) > 0$, satisfazendo $\nu(A \cap B) \geq \eta(A \cap B)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Prova. Se $\nu(A \cap E) \geq \mu(A \cap E)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, então podemos tomar $B = E$. Caso contrário, existem $n \in \mathbb{N}$ e $C \in \mathcal{A}$ com $C \subset E$, tais que $\nu(C) + 1/n < \eta(C)$. Sejam n_1 o menor inteiro positivo e $C_1 \subset E$ mensurável tais que $\nu(C_1) + 1/n_1 < \eta(C_1)$. Indutivamente definimos n_k o menor inteiro positivo e $C_k \subset E$ mensurável

$$C_k \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \quad \text{tais que} \quad \nu(C_k) + 1/n_k < \eta(C_k). \tag{2.10}$$

Por construção temos $n_1 \leq n_2 \leq \cdots$ e os correspondentes $(C_k)_k$ dois a dois disjuntos satisfazendo (2.10) para todo k. Definimos N como sendo ∞ se o processo descrito acima não pára, isto é, se existem infinitos n_k, ou N igual ao máximo desses índices k, no caso de o processo parar. Tomemos

$$B = E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} C_k.$$

Vejamos que $\nu(B) > 0$, ou seja, $\nu\big(\bigcup_{k=1}^{N} C_k\big) < \nu(E)$. Tal verifica-se, pois

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} C_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} \nu(C_k) < \sum_{k=1}^{N} \eta(C_k) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n_k} \leq \eta(E) < \nu(E). \tag{2.11}$$

Passamos a provar a outra propriedade que pretendemos para B:

Se $N < \infty$, significa que não existem $n \in \mathbb{N}$ nem $C \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} C_i$ tais que $\nu(C) + 1/n < \eta(C)$. Necessariamente terá que ser $\nu(A \cap B) \geq \eta(A \cap B)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Se $N = \infty$, começamos por observar que, sendo as medidas ν e η finitas, de (2.11) resulta que $\sum_{k=1}^{N} 1/n_k < \infty$, e portanto, a sucessão $1/n_k$ converge para zero quando $k \to \infty$. Se $A \in \mathcal{A}$, então

$$\big(A \cap B\big) \subset \big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} C_i\big) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

e portanto

$$\nu(A \cap B) + \frac{1}{n_k - 1} \geq \eta(A \cap B) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Isto prova o resultado também neste caso. □

Teorema 2.6.2. (Radon-Nikodym) *Se μ, ν são medidas finitas num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ tais que $\nu \ll \mu$, então existe uma função $f \geq 0$ finita tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Além disso, f é única qtp.

Prova. Seja

$$\mathcal{H} = \left\{ g \geq 0 \,:\, g \text{ é mensurável e } \int_A g d\mu \leq \nu(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Temos que $0 \in \mathcal{H}$, e se $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{H}$ então $\sup\limits_{1 \leq i \leq k} g_i \in \mathcal{H}$. De facto, se definirmos

$$B_1 = \left\{ x \,:\, g_1(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} g_i(x) \right\},$$

e para cada $2 \leq j \leq k$

$$B_j = \left\{ x \,:\, g_j(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} g_i(x) \text{ e } g_j(x) > \sup_{1 \leq i \leq j-1} g_i(x) \right\},$$

temos que $B_1, \ldots, B_k$ são dois a dois disjuntos e $B_1 \cup \cdots \cup B_k = X$. Se $A \in \mathcal{A}$ temos

$$\int_A \sup_{1 \leq i \leq k} g_i \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} \int_{A \cap B_j} g_j \, d\mu \leq \sum_{j=1}^{k} \nu(A \cap B_j) = \nu(A),$$

provando assim que $\sup_{1 \leq i \leq k} g_i \in \mathcal{H}$. Usando o Teorema da Convergência Monótona, podemos estender este resultado para sucessões de funções, isto é, se $g_1, g_2, \dots \in \mathcal{H}$, então $\sup_n g_n \in \mathcal{H}$.

Seja agora $\alpha = \sup\{\int g d\mu : g \in \mathcal{H}\}$ e $(g_n)_n$ uma sucessão de funções em $\mathcal{H}$ tal que $\int g_n d\mu$ converge para α. Definindo $f = \sup_n g_n$ temos que $f \in \mathcal{H}$ e $\int f d\mu = \alpha$, donde resulta que $\alpha \leq \nu(X)$ e, portanto, f é integrável. Modificando f, se necessário, num conjunto de medida zero, podemos supor que f é finita. Vamos agora mostrar que esta f satisfaz o resultado do teorema. Sendo $f \in \mathcal{H}$, isto equivale a mostrar que a medida ν_0 definida por

$$\nu_0(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \geq 0 \quad \text{para} \quad A \in \mathcal{A}$$

é identicamente nula. Suponhamos, por contradição, que existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\nu_0(E) > 0$. Então, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos $\nu_0(E) > \epsilon\mu(E)$. Aplicando o Lema 2.6.1 a $\nu = \nu_0$ e $\eta = \epsilon\mu$, deduzimos que existe $B \subset E$ com $\nu_0(B) > 0$ tal que $\nu_0(A \cap B) \geq \epsilon\mu(A \cap B)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Ou seja,

$$\nu(A \cap B) \geq \int_{A \cap B} f d\mu + \epsilon\mu(A \cap B)$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. Como $f \in \mathcal{H}$ temos também

$$\nu(A \setminus B) \geq \int_{A \setminus B} f d\mu.$$

Somando ordenadamente obtemos

$$\nu(A) \geq \int_A f d\mu + \epsilon\mu(A \cap B) = \int_A f d\mu + \int_A \epsilon\mathcal{X}_B d\mu = \int_A (f + \epsilon\mathcal{X}_B) d\mu,$$

o que mostra que $f + \epsilon\mathcal{X}_B \in \mathcal{H}$. Mas

$$\int (f + \epsilon\mathcal{X}_B) d\mu = \int f d\mu + \epsilon\mu(B) = \alpha + \epsilon\mu(B). \tag{2.12}$$

Atendendo a que $\nu_0(B) > 0$ e $\nu_0 \ll \mu$ vem que $\mu(B) > 0$, o que, por (2.12), dá uma contradição com a escolha de $f \in \mathcal{H}$.

Para provar a unicidade qtp, observamos que se g é outra função satisfazendo a conclusão do teorema, então $\int_A (f - g) d\mu = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Tomando $A = \{x : f(x) > g(x)\}$ concluímos que $\mu(A) = 0$, e portanto $f \leq g$ qtp. Analogamente se vê que $f \geq g$ qtp, o que mostra a unicidade qtp. □

Corolário 2.6.3. *Se μ e ν são medidas σ-finitas num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ tais que $\nu \ll \mu$, então existe uma função $f \geq 0$ finita tal que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Além disso, f é única qtp.*

Prova. Se μ e ν são σ-finitas, então existe uma sucessão $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ de conjuntos dois a dois disjuntos tais que $X = \bigcup_n A_n$ com $\nu(A_n) < \infty$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Aplicando o Teorema de Radon-Nikodym às restrições de μ e ν a cada A_n, obtemos uma sucessão de funções $(f_n)_n$ tal que

$$\nu(A \cap A_n) = \int_{A \cap A_n} f_n d\mu$$

para todo $n \geq 1$ e todo $A \in \mathcal{A}$. É fácil verificar que a função

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathcal{X}_{A_n}$$

satisfaz o que pretendemos. □

Se μ e ν são medidas σ-finitas tais que $\nu \ll \mu$, a função dada pelo Corolário 2.6.3 é chamada a **derivada de Radon-Nikodym** de ν em relação a μ e denotada $d\nu/d\mu$.

2.7 Medidas em espaços métricos

Terminamos este capítulo provando algumas propriedades de medidas definidas sobre os borelianos de um espaço métrico. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos borelianos de X. Dizemos que uma medida μ definida em $\mathcal{B}$ é uma **medida regular** se, dados $A \in \mathcal{B}$ e $\epsilon > 0$, existem F_ϵ fechado de X e U_ϵ aberto de X com $F_\epsilon \subset A \subset U_\epsilon$ tais que $\mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$.

Teorema 2.7.1. *Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida finito, onde X é um espaço métrico e $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel, então μ é regular.*

Prova. Seja $\mathcal{A}$ a colecção de todos borelianos $A \in \mathcal{B}$ tais que para todo $\epsilon > 0$ existem U_ϵ aberto e F_ϵ fechado com $F_\epsilon \subset A \subset U_\epsilon$ e $\mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Começamos por provar que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra.

1. Claramente $X \in \mathcal{A}$.

2. Vejamos que se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Dado $\epsilon > 0$, existem U_ϵ aberto e F_ϵ fechado com $F_\epsilon \subset A \subset U_\epsilon$ e $\mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$. Então $(X \setminus U_\epsilon) \subset (X \setminus A) \subset (X \setminus F_\epsilon)$, sendo $X \setminus F_\epsilon$ aberto e $X \setminus U_\epsilon$ fechado. Como $(X \setminus F_\epsilon) \setminus (X \setminus U_\epsilon) = U_\epsilon \setminus F_\epsilon$, temos o pretendido.

3. Falta ver que $\mathcal{A}$ é fechado para uniões numeráveis. Sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ e $A = \bigcup_n A_n$. Dado $\epsilon > 0$, para cada $n \geq 1$ existem $U_{\epsilon,n}$ aberto e $F_{\epsilon,n}$ fechado com $F_{\epsilon,n} \subset A \subset U_{\epsilon,n}$ e $\mu(U_{\epsilon,n} \setminus F_{\epsilon,n}) < \epsilon/3^n$. Sejam $U_\epsilon = \bigcup_n U_{\epsilon,n}$ e $\tilde{F}_\epsilon = \bigcup_n F_{\epsilon,n}$. U_ϵ é aberto, mas $\tilde{F}_\epsilon$ não é necessariamente fechado. Tomamos $k \geq 1$ tal que $\mu\big(\tilde{F}_\epsilon \setminus \bigcup_{n=1}^k F_{\epsilon,n}\big) < \epsilon/3$ e definimos $F_\epsilon = \bigcup_{n=1}^k F_{\epsilon,n}$. Temos que F_ϵ é fechado e $F_\epsilon \subset A \subset U_\epsilon$. Além disso,
$$\begin{aligned} \mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) &\leq \mu(U_\epsilon \setminus \tilde{F}_\epsilon) + \mu(\tilde{F}_\epsilon \setminus F_\epsilon) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_{\epsilon,n} \setminus F_{\epsilon,n}) + \mu(\tilde{F}_\epsilon \setminus F_\epsilon) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3^n} + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Temos assim provado que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra. Para ver que $\mathcal{A}$ coincide com $\mathcal{B}$ basta mostrar que $\mathcal{A}$ contém os fechados. Seja F um conjunto fechado e $\epsilon > 0$. Definindo para cada $n \geq 1$ o conjunto $U_n = \{x \in X : d(x, F) < 1/n\}$ temos que U_n é aberto, $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ e $F = \bigcap_n U_n$. Escolhendo k tal que $\mu(U_k \setminus F) < \epsilon$, definimos $U_\epsilon = U_k$ e $F_\epsilon = F$. Temos provado que $F \in \mathcal{A}$. □

Corolário 2.7.2. *Se μ é uma medida definida na σ-álgebra de Borel de um espaço métrico, então temos para cada boreliano A*

1. $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fechado e } F \subset A\}$
2. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ aberto e } U \supset A\}$

Antes de prosseguirmos, apresentamos um lema de índole topológica.

Lema 2.7.3. *Seja X um espaço métrico. Se F_1 e F_2 são fechados de X tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, então existe alguma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|F_1 = 0$ e $f|F_2 = 1$.*

Prova. Definindo $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

temos que f está bem definida, é contínua e satisfaz o que pretendemos. □

O seguinte resultado mostra que uma medida definida nos borelianos de um espaço métrico fica completamente determinada sabendo como integra as funções contínuas.

Proposição 2.7.4. *Sejam μ e ν duas medidas finitas definidas nos borelianos do espaço métrico X. Se para toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tivermos $\int f d\mu = \int f d\nu$, então $\mu = \nu$.*

Prova. Pelo corolário acima, basta mostrar que $\mu(F) = \nu(F)$ para todo fechado $F \subset X$. Seja F um fechado e $\epsilon > 0$. Pela regularidade de μ, existe U um aberto contendo F tal que $\mu(U \setminus F) < \epsilon$. Tomando f a função dada pelo Lema 2.7.3 para os fechados F e $X \setminus U$ obtemos

$$\nu(F) \leq \int f d\nu = \int f d\mu \leq \mu(U) < \mu(F) + \epsilon.$$

Isto mostra que $\nu(F) \leq \mu(F)$. Por simetria mostramos a outra desigualdade. □

2.8 Exercícios

1. Mostrar que a σ-álgebra de Borel gerada pelos abertos da topologia usual de $\mathbb{R}^n$ coincide com a σ-álgebra gerada pela semi-álgebra descrita no Exemplo 2.2.2.

2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e A um elemento de $\mathcal{A}$.

   (a) Definindo $\mathcal{A} \mid A = \{B \subset A : A \cap B \in \mathcal{A}\}$, mostre que $\mathcal{A} \mid A$ é uma σ-álgebra de A.

   (b) Definindo $(\mu \mid A)(B) = \mu(A \cap B)$ para $B \in \mathcal{A} \mid A$, mostre que $\mu \mid A$ é uma medida em $\mathcal{A}$.

3. Seja X um conjunto e $\#$ a função definida no Exemplo 2.1.3. Mostre que

   (a) $\#$ é uma medida.

   (b) $\#$ é finita se e somente se X é finito.

   (c) $\#$ é σ-finita se e somente se X é numerável.

4. Sejam X o conjunto dos racionais no intervalo $(0, 1]$ e $\mathcal{S}$ a classe de subconjuntos A de X para o qual existem $a, b \in X$ com $a \leq b$ tais que $A = \{x \in X : a < x \leq b\}$.

   (a) Mostre que $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra.

   (b) Mostre que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{S}$ coincide com $\mathcal{P}(X)$, o conjunto das partes de X.

   (c) Seja μ_1 a medida de contagem em $\mathcal{P}(X)$ e defina $\mu_2 = 2\mu_1$. Mostre que μ_1 coincide com μ_2 na álgebra gerada por $\mathcal{S}$, mas $\mu_1 \neq \mu_2$.

5. Seja μ uma função σ-aditiva definida numa álgebra $\mathcal{A}$ de um conjunto X e sejam ν_1 e ν_2 medidas definidas na σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\mathcal{A}$ que estendem μ.

   (a) Assuma μ finita e defina $\mathcal{C}$ como a classe dos elementos $B \in \mathcal{B}$ que satisfazem $\nu_1(B) = \nu_2(B)$. Mostre que:

      i. $X \in \mathcal{C}$.

      ii. Se $A, B \in \mathcal{C}$ e $A \subset B$, então $B \setminus A \in \mathcal{C}$.

      iii. Se $A, B \in \mathcal{C}$ e $A \cap B = \emptyset$, então $B \cup A \in \mathcal{C}$.

      iv. Se $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ são de elementos de $\mathcal{C}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$.

   (b) Seja $\mathcal{D}$ a menor classe (no sentido da inclusão) de subconjuntos de X contendo $\mathcal{A}$ que satisfazem 5(a)i, 5(a)ii, 5(a)iii e 5(a)iv.

      i. Demonstre a existência de uma tal classe $\mathcal{D}$.

      ii. Definindo $\mathcal{E} = \{A \subset X : A \cap B \in \mathcal{D} \text{ para todo } B \in \mathcal{D}\}$, mostre que $\mathcal{E}$ satisfaz 5(a)i, 5(a)ii, 5(a)iii e 5(a)iv.

      iii. Dado $A \in \mathcal{A}$ defina $\mathcal{F}(A) = \{B \subset X : A \cap B \in \mathcal{D}\}$. Mostre que $\mathcal{F}(A)$ satisfaz 5(a)i, 5(a)ii, 5(a)iii e 5(a)iv.

      iv. Mostre que $\mathcal{E} \supset \mathcal{A}$.

v. Mostre que se $A, B \in \mathcal{D}$ então $A \cap B \in \mathcal{D}$.

vi. Mostre que $\mathcal{D}$ é uma σ-álgebra.

(c) Mostre que se μ é finita então $\nu_1 = \nu_2$.

(d) Mostre que se μ é σ-finita então $\nu_1 = \nu_2$.

6. Seja μ a função definida na semi-álgebra $\mathcal{S}$ dos rectângulos de $\mathbb{R}^n$ como

$$\mu\big(\prod_{i=1}^{n} I_i\big) = |I_1| \times \cdots \times |I_n|$$

para $\prod_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{S}$. Mostre que μ é σ-finita e σ-aditiva.

7. Mostre que a medida de Lebesgue λ em $\mathbb{R}^2$ coincide com a medida produto $\lambda_1 \otimes \lambda_1$, onde λ_1 designa a medida de Lesbesgue em $\mathbb{R}$. Generalize este resultado para $\mathbb{R}^n$.

8. Considere, em $\mathbb{R}$, a semi-álgebra $\mathcal{S}$ descrita no Exemplo 2.2.2, a σ-álgebra dos borelianos $\mathcal{B}$ e seja $\lambda : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ a "função comprimento". Dados $a, b \in \mathbb{R}$, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = ax + b$. Mostre que:

   (a) Se $A \in \mathcal{S}$, então $\varphi(A) \in \mathcal{S}$ e $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{S}$.

   (b) Se $A \in \mathcal{B}$, então $\varphi(A) \in \mathcal{B}$ e $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

   (c) Para todo $A \subset \mathbb{R}$ tem-se $\lambda^*(\varphi(A)) = |a|\lambda^*(A)$.

   (d) A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é invariante por isometria.

9. Seja λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) $\lambda(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.

   (b) $\lambda(A) = 0$ para todo conjunto numerável $A \subset X$.

10. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(A_n)_n$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Mostre que quase todo $x \in X$ pertence a um número finito de A_n's.

11. Mostre que $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$.

12. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f \geq 0$ uma função integrável. Mostre que

$$A \mapsto \int_A f d\mu$$

define uma medida em $(X, \mathcal{A})$.

13. Se $g \geq 0$ é uma função integrável e f é uma função mensurável tal que $|f| \leq g$, então f é integrável.

14. Seja μ a medida de contagem definida na σ-álgebra $\mathcal{A}$ das partes de $\mathbb{N}$. Mostre que:

    (a) Se $f \geq 0$, então $\displaystyle\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

    (b) f é integrável se e somente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$

    (c) Se f é integrável então $\displaystyle\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

15. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com μ finita. Mostre que se existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f^n d\mu$ e é finito, então o seu valor coincide com $\mu\{x \in X : f(x) = 1\}$.

16. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f > 0$ uma função integrável em $A \in \mathcal{A}$. Mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \int f^{1/n} d\mu = \mu(A).$$

17. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finito e $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

    (a) Mostre que $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.

    (b) Dê exemplo de um espaço em que se tenha $L^q(\mu)$ estritamente contido em $L^p(\mu)$ para todos p e q nas condições dadas.

    (c) Prove que se μ não é finita então $L^q(\mu)$ pode não estar contido em $L^p(\mu)$.

18. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o seu conjugado. Mostre que se f_n converge para f na métrica d_p e g_n converge para g na métrica d_q, então $f_n g_n$ converge para fg na métrica d_1.

19. Considere $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e λ a medida Lebesgue em $[a, b]$. Dado $1 \leq p < \infty$, mostre que:

    (a) Se A é um aberto de $[a, b]$, então existe uma sucessão de funções contínuas definidas em $[a, b]$ convergindo para $\mathcal{X}_A$ na métrica d_p.

    (b) Se B é um boreliano em de $[a, b]$, existe uma sucessão de funções características de abertos de $[a, b]$ convergindo para $\mathcal{X}_B$ na métrica d_p.
    Sugestão: use a regularidade de λ.

(c) $C([a,b])$ é denso em $L^p(\lambda)$.

20. Nas mesmas condições do exercício anterior, mostre que $C([a,b])$ não é denso em $L^\infty(\lambda)$.

21. Seja f uma função mensurável tomando valores em $\mathbb{C}$. Mostre que:

    (a) f é integrável se e só se $|f|$ é integrável.

    (b) Se f é integrável, então $|\int f d\mu| = \int |f| d\mu$ se e só se existe algum $\alpha \in \mathbb{C}$ com $|\alpha| = 1$ tal que $f = \alpha|f|$ qtp.

22. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ e ν duas medidas sobre $\mathcal{A}$. Mostre que são equivalentes:

    (a) ν é absolutamente contínua com respeito a μ.

    (b) Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) < \delta$, então $\nu(A) < \epsilon$.

Capítulo 3

Espaços normados

Neste capítulo estudaremos propriedades topológicas de certos espaços vectoriais. Consideraremos esses espaços com a estrutura usual de espaço vectorial sobre o corpo dos números reais ou complexos. Estaremos também interessados nas propriedades topológicas de transformações lineares entre tais espaços.

3.1 Espaços de Banach

Seja E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma **norma** em E é uma função $\| \ \| : E \to \mathbb{R}_0^+$ tal que

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todos $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$;
3. $\|x\| = 0$ implica $x = 0$.

A um espaço vectorial munido de uma norma chamamos **espaço normado**. Um **espaço de Banach** é um espaço normado que é completo com a métrica d dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ para $x, y \in E$.

Exemplo 3.1.1. *A função que a cada $x \in \mathbb{K}$ associa $|x| \in \mathbb{R}_0^+$ define uma norma em $\mathbb{K}$. Com esta norma, $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach.*

Exemplo 3.1.2. *Dado um espaço topológico compacto X, consideremos $C(X)$ o espaço vectorial das funções contínuas definidas em X e tomando valores em $\mathbb{K}$. A função*

$$f \in C(X) \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$$

define uma norma em $C(X)$ cuja métrica associada coincide com a da convergência uniforme. Temos então que $C(X)$ com esta norma é um espaço de Banach.

Exemplo 3.1.3. *Dos resultados obtidos na Secção 2.5 deduzimos facilmente* $\| \ \|_p$ *é uma norma em* $L^p(\mu)$, *para* $1 \le p \le \infty$, *e* $L^p(\mu)$ *com esta norma é um espaço de Banach.*

Exemplo 3.1.4. *Dado* $1 \le p < \infty$, *consideremos sobre* $\mathbb{K}^n$

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_p = \big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{1/p},$$
$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|.$$

$\| \ \|_p$ *define uma norma em* $\mathbb{K}^n$ *para todo* $1 \le p \le \infty$, *e* $\mathbb{K}^n$ *com qualquer uma dessas normas é um espaço de Banach. De facto, considerando sobre o conjunto* $I = \{1, \ldots, n\}$ *a medida de contagem* $\#$ *(cf. Exemplo 2.1.3), qualquer função de* I *em* $\mathbb{K}$ *é mensurável e, para cada* $1 \le p \le \infty$, *temos que* $\| \ \|_p$ *definida acima coincide com a norma* $\| \ \|_p$ *em* $L^p(\#)$.

Exemplo 3.1.5. *Nos exemplos abaixo consideramos* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ *uma sucessão tomando valores em* $\mathbb{K}$, *com* $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$. *Para* $1 \le p < \infty$, *definimos os espaços de sucessões*

$$\begin{aligned} \ell^p(\mathbb{I}) &= \big\{\, a \,:\, |a|_p \equiv \big(\sum_{n\in\mathbb{I}} |a_n|^p\big)^{1/p} < \infty \,\big\} \\ \ell^\infty(\mathbb{I}) &= \big\{\, a \,:\, |a|_\infty \equiv \sup_{n\in\mathbb{I}} |a_n| < \infty \,\big\}. \end{aligned}$$

Temos $\ell^p(\mathbb{I}) \subset \ell^\infty(\mathbb{I})$ *para* $1 \le p < \infty$ *e* $(\ell^p(\mathbb{I}), | \ |_p)$ *um espaço de Banach para todo* $1 \le p \le \infty$. *Na verdade,* $\ell^p(\mathbb{I})$ *coincide com* $L^p(\#)$, *onde* $\#$ *é a medida de contagem em* $\mathbb{I}$, *e* $| \ |_p$ *é precisamente a norma associada a essa medida (cf. Exercício 4).*

3.2 Aplicações lineares limitadas

Sejam E, F espaços normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Dizemos que T é uma **aplicação linear limitada**, se existir alguma constante $C \ge 0$ tal que

$$\|T(x)\| \le C\|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Notar que as normas em cada um dos lados da desigualdade acima não são necessariamente iguais, mesmo que E coincida com F. Contudo, sempre que não haja perigo de confusão usaremos a mesma notação para ambas as normas.

No caso em que $E = F$ diremos que T é um **operador linear**, e no caso em que $F = \mathbb{K}$ (com a estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$) diremos que T é um **funcional linear**.

Uma aplicação $T : E \to F$ entre espaços normados diz-se uma **isometria**, se T é um isomorfismo linear que **preserva normas**, i.e. $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.

Teorema 3.2.1. *Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear entre dois espaços normados. São equivalentes:*

1. *T é limitada.*

2. *T é contínua em 0.*

3. *T é contínua.*

Prova. É imediato verificar que 1 e 3 implicam 2. Vejamos que 1 e 3 resultam de 2.

Sendo T contínua em 0, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| < \delta$ então $\|T(x)\| < \epsilon$. Se $x \neq 0$, temos pela linearidade de T

$$\|T(x)\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta}\|x\|. \tag{3.1}$$

Como (3.1) também é válida para $x = 0$, temos provado que 2 implica 1.

Sejam $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Sendo T contínua em 0, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta$ implica $\|T(x)\| < \epsilon$. Temos então que $\|x - x_0\| < \delta$ implica

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| < \epsilon,$$

o que dá a continuidade de T em x_0 e portanto 2 também implica 3. □

Dados espaços normados E e F, definimos $L(E, F)$ o espaço vectorial das aplicações lineares limitadas de E em F. No caso em que $E = F$ denotaremos o espaço $L(E, E)$ simplesmente por $L(E)$. Dada $T \in L(E, F)$, definimos

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \tag{3.2}$$

Notar que existe este supremo, pois T é limitada. Usando a linearidade da aplicação é fácil verificar que valem as igualdades

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \tag{3.3}$$

para toda $T \in L(E, F)$, obtendo assim algumas maneiras alternativas de definir $\|T\|$ (cf. Exercício 3.5.8).

Proposição 3.2.2. *Sejam E e F espaços normados. A função*

$$T \in L(E, F) \mapsto \|T\|$$

define uma norma em $L(E, F)$.

Prova. Temos obviamente $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0$ se e somente se T for a aplicação nula. Provemos então a desigualdade triangular, isto é, se $T, U \in L(E, F)$ então $\|T + U\| \leq \|T\| + \|U\|$. Ora,

$$\|T + U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x) + U(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|U(x)\|}{\|x\|}$$

o que dá a desigualdade pretendida. □

Lema 3.2.3. *Se $T : E \to F$ é uma aplicação linear entre espaços normados, então*

$$\|T\| = \inf\{\, C > 0 \ : \ \|T(x)\| \leq C\|x\| \ \textit{para todo} \ x \in E \,\}.$$

Prova. Tomando $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq C \quad \text{para todo } x \in E \setminus \{0\},$$

donde se conclui que $\|T\| \leq C$. Resta ver que $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Supondo, por redução ao absurdo, que existe $x_0 \in E$ tal que $\|T(x_0)\| > \|T\| \, \|x_0\|$, obtemos

$$\frac{\|T(x_0)\|}{\|x_0\|} > \|T\|,$$

o que dá uma contradição com a definição de $\|T\|$. □

Teorema 3.2.4. *Se F é um espaço de Banach, então $L(E, F)$ é também um espaço de Banach.*

Prova. Atendendo à Proposição 3.2.2, basta mostrar que $L(E, F)$ com a métrica dada pela norma em (3.2) é um espaço completo. Seja $(T_n)_n$ uma sucessão de Cauchy em $L(E, F)$. Dados $x \in E$ e $n, m \geq 1$ temos, pelo lema anterior,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|.$$

Logo, fixado $x \in E$, a sucessão $(T_n(x))_n$ é de Cauchy em F. Como F é um espaço de Banach, existe algum $y \in F$ tal que $(T_n(x))_n$ converge para y. Definindo $T(x) = y$, da unicidade da convergência resulta que $T : E \to F$ é linear. Precisamos de ver que T é limitada e $T_n \to T$. Da desigualdade triangular obtemos

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|.$$

Logo, $(\|T_n\|)_n$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$, e portanto existe $C > 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$ para todo n. Assim, como $\| \ \|$ é contínua,

$$\|T(x)\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n(x)\| \leq \lim_{n \to \infty} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|$$

donde concluímos que T é limitada. Como

$$\|(T - T_n)(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)(x)\| \leq \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\| \, \|x\|,$$

temos

$$\|T - T_n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(T - T_n)(x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|,$$

que pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando n suficientemente grande. □

Corolário 3.2.5. *$L(E, \mathbb{K})$ é um espaço de Banach, qualquer que seja o espaço normado E.*

Prova. Basta notar que $\mathbb{K}$ munido da norma do módulo é um espaço completo. □

3.3 Funcionais lineares

Vamos nesta secção estudar espaços de funcionais lineares sobre certos espaços normados. Estaremos particularmente interessados nos espaços $C(X)$ e $L^p(\mu)$ dos exemplos 3.1.2 e 3.1.3.

Dizemos que um funcional linear Λ definido em $L^p(\mu)$ ou $C(X)$ é **não negativo** se $\Lambda(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$ qtp.

Proposição 3.3.1. *Se Λ é um funcional linear contínuo em $L^p(\mu)$, então podemos escrever $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$ onde Λ^+ e Λ^- são funcionais lineares contínuos não negativos.*

Prova. Seja $L^+ = \{f \in L^p(\mu) : f \geq 0\}$. Definimos para $f \in L^+$

$$\Lambda^+(f) = \sup\{\Lambda(h) : h \in L^p(\mu) \text{ e } 0 \leq h \leq f\}. \tag{3.4}$$

Como $|\Lambda(h)| \leq \|\Lambda\| \, \|h\|_p \leq \|\Lambda\| \, \|f\|_p$, o supremo em (3.4) existe e

$$|\Lambda^+(f)| \leq \|\Lambda\| \, \|f\|_p \quad \text{para todo } f \in L^+. \tag{3.5}$$

Temos $\Lambda^+(cf) = c\Lambda^+(f)$ para $c \geq 0$ e $\Lambda^+(f) \geq \Lambda(0) = 0$ para $f \in L^+$. Sejam $f, g \in L^+$. Temos

$$\Lambda^+(f + g) = \sup\{\, \Lambda(h) \,:\, 0 \leq h \leq f + g \,\}.$$

Observamos que se $h \in L^+$ é tal que $0 \leq h \leq f + g$, então existem $h_1, h_2 \in L^+$ tais que

$$0 \leq h_1 \leq f, \quad 0 \leq h_2 \leq g \quad \text{e} \quad h = h_1 + h_2.$$

De facto, tomando $h_1 = \min\{h, f\}$ e $h_2 = h - h_1$ temos $h_1 \leq f$. Além disso, se $h_1(x) = h(x)$ então $h_2(x) = 0 \leq g(x)$ e se $h_1(x) = f(x)$ então $h_2(x) = h(x) - f(x) \leq g(x)$. Resulta disto que

$$\begin{aligned} \Lambda^+(f+g) &= \sup\{\Lambda(h) : 0 \leq h \leq f+g\} \\ &= \sup\{\Lambda(h_1) + \Lambda(h_2) : 0 \leq h_1 \leq f,\ 0 \leq h_2 \leq g\} \\ &= \Lambda^+(f) + \Lambda^+(g). \end{aligned}$$

Para $f \in L^p(\mu)$, considerando $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$, temos $f = f^+ - f^-$. Definimos

$$\Lambda^+(f) = \Lambda^+(f^+) - \Lambda^+(f^-) \quad \text{e} \quad \Lambda^-(f) = \Lambda^+(f) - \Lambda(f).$$

Λ^+ e Λ^- assim definidos são lineares (cf. Exercício 3.5.11) e $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$. De (3.5) e da continuidade de Λ resulta também que Λ^+ e Λ^- são funcionais contínuos. Falta ver que Λ^+ e Λ^- são não negativos. Consideremos $f \geq 0$. Temos então $f^+ = f$, $f^- = 0$ e portanto $\Lambda^+(f) = \Lambda^+(f^+) \geq 0$. Além disso, resulta de (3.4) que $\Lambda^+(f) \geq \Lambda(f)$, e portanto $\Lambda^-(f) = \Lambda^+(f) - \Lambda(f) \geq 0$. Logo, Λ^+ e Λ^- são funcionais lineares não negativos. □

O Teorema 2.5.3 mostra que se fixarmos $f \in L^q(\mu)$ com $1 \leq q \leq \infty$ e tomarmos $1 \leq p \leq \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$, a aplicação

$$\Lambda : g \longmapsto \int g f d\mu$$

define um funcional linear contínuo em $L^p(\mu)$ com $\|\Lambda\| \leq \|f\|_q$. Assim, é natural colocar a questão de tentar saber se, além destes, existem outros funcionais lineares contínuos em $L^p(\mu)$. A resposta é de um modo geral afirmativa, com a única excepção do caso $p = \infty$.

Teorema 3.3.2. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com μ finita e $1 \leq p < \infty$. Dado um funcional linear contínuo Λ em $L^p(\mu)$, existe uma única $f \in L^q(\mu)$, onde q é o conjugado de p, tal que*

$$\Lambda(g) = \int g f d\mu$$

para toda $g \in L^p(\mu)$. Além disso, $\|\Lambda\| = \|f\|_q$.

Prova. Começamos por mostrar que se uma tal f existe, então é única. Se f_1 e f_2 são elementos distintos de $L^q(\mu)$, então existe algum mensurável $A \subset X$ com $\mu(A) > 0$ e $f_1 \mid A > f_2 \mid A$ ou $f_1 \mid A < f_2 \mid A$. Em qualquer dos casos temos, para $\mathcal{X}_A \in L^p(\mu)$,

$$\int \mathcal{X}_A f_1 d\mu \neq \int \mathcal{X}_A f_2 d\mu,$$

o que mostra unicidade.

Vamos agora provar a existência. Se Λ é um funcional em $L^p(\mu)$, temos pela Proposição 3.3.1 que existem Λ^+ e Λ^- funcionais não negativos em $L^p(\mu)$ tais que $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$. É suficiente mostrar que existem $f_+ \in L^q(\mu)$ e $f_- \in L^q(\mu)$ tais que para $g \in L^p(\mu)$ se tem

$$\Lambda^+(g) = \int g f_+ d\mu \quad \text{e} \quad \Lambda^-(g) = \int g f_- d\mu.$$

Provemos a existência de f_+ (a existência de f_- prova-se de modo análogo). Definimos para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\nu_+(A) = \Lambda^+(\mathcal{X}_A)$$

(Notar que $\mu(A) < +\infty$ implica $\mathcal{X}_A \in L^p(\mu)$). Como Λ^+ é um funcional não negativo, segue imediatamente que ν_+ é não negativa e $\nu_+(\emptyset) = 0$. Vejamos que ν_+ é σ-aditiva. Seja $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ com os A_n disjuntos dois a dois. Fazendo $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ temos

$$\|\mathcal{X}_A - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_{A_k}\|_p = \|\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_{B_n}\|_p = \big(\mu(A \setminus B_n)\big)^{1/p} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

(aqui usamos $p < \infty$). Resulta da continuidade de Λ^+ que

$$\nu_+(A) = \Lambda^+(\mathcal{X}_A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Lambda^+(\mathcal{X}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_+(A_k)$$

e portanto ν_+ é uma medida finita em $(X, \mathcal{A})$. Podemos assim aplicar o Teorema de Radon-Nikodym e concluir que existe uma função mensurável não negativa f_+ tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\Lambda^+(\mathcal{X}_A) = \nu_+(A) = \int_A f_+ d\mu = \int \mathcal{X}_A f_+ d\mu.$$

Ou seja, Λ^+ pode ser representado por um funcional do tipo pretendido no subconjunto das funções características. Da linearidade de Λ^+ segue facilmente que se g é uma função simples, então

$$\Lambda^+(g) = \int g f_+ d\mu.$$

Seja agora $g \in L^p(\mu)$ com $g \geq 0$. Pelo Teorema 2.3.8 existe uma sucessão crescente de funções simples $(g_n)_n$ convergindo para g. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada a $|g_n - g|^p$ deduzimos que $(g_n)_n$ converge para g na norma $\| \ \|_p$ (notar que $|g_n - g|^p \leq 2^p |g|^p \in L^1(\mu)$). Da continuidade de Λ^+ obtemos

$$\Lambda^+(g) = \lim_{n\to\infty} \Lambda^+(g_n) = \lim_{n\to\infty} \int g_n f_+ d\mu = \int g f_+ d\mu,$$

resultando esta última igualdade do Teorema da Convergência Monótona. No caso de não ser $g \geq 0$, aplicamos este mesmo raciocínio à parte positiva e à parte negativa de g e usamos a linearidade de Λ^+, obtendo assim f como se pretende.

Falta ver que $f \in L^q(\mu)$ e $\|\Lambda\| = \|f\|_q$. Como vimos anteriormente, resulta do Teorema 2.5.3 que $\|\Lambda\| \leq \|f\|_q$. Separaremos os casos $p = 1$ e $1 < p < \infty$ para provar a outra desigualdade.

Seja $p > 1$. Tomemos uma sucessão de funções simples não negativas $(f_n)_n$ convergindo monotonamente para $|f|$. Temos

$$\begin{aligned}
\int f_n^q d\mu &\leq \int |f| f_n^{q-1} d\mu = \int \text{sinal}(f) f f_n^{q-1} d\mu \\
&= \Lambda\big(\text{sinal}(f) f_n^{q-1}\big) \leq \|\Lambda\| \cdot \|\text{sinal}(f) f_n^{q-1}\|_p \\
&= \|\Lambda\| \Big(\int f_n^{(q-1)p} d\mu \Big)^{1/p} = \|\Lambda\| \Big(\int f_n^q d\mu \Big)^{1/p} \\
&= \|\Lambda\| \cdot \|f_n\|_q^{q/p} = \|\Lambda\| \cdot \|f_n\|_q^{q-1}.
\end{aligned}$$

Daqui resulta

$$\|f_n\|_q^q \leq \|\Lambda\| \cdot \|f_n\|_q^{q-1}$$

e portanto

$$\|f_n\|_q \leq \|\Lambda\|.$$

Temos então pelo Teorema da Convergência Monótona que

$$\|f\|_q \leq \|\Lambda\|.$$

Seja agora $p = 1$ (e portanto $q = \infty$). Queremos provar que $\|f\|_\infty \leq \|\Lambda\|$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que existe algum $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$ e $|f| \mid A > \|\Lambda\|$. Então

$$\Lambda\big(\text{sinal}(f)\mathcal{X}_A\big) = \int_A |f| d\mu > \|\Lambda\| \mu(A) = \|\Lambda\| \cdot \|\text{sinal}(f)\mathcal{X}_A\|_1,$$

o que dá uma contradição com a definição da norma de Λ. □

Corolário 3.3.3. *Vale o mesmo resultado do teorema anterior se* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *for um espaço de medida* σ*-finito.*

Prova. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é σ-finito então existe uma sucessão de conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, \ldots$ tais que $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. Modificando os A_n, se necessário, podemos supor que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Podemos aplicar o teorema anterior a cada um dos espaços $\big(A_n, \mathcal{A} \mid A_n, \mu \mid A_n\big)$ obtendo funções $f_n \in L^q(\mu \mid A_n)$ tais que para todo $g \in L^p(\mu)$

$$\Lambda\big(g\mathcal{X}_{A_n}\big) = \int g \mathcal{X}_{A_n} f_n d\mu.$$

Se $m \leq n$ temos, pela unicidade de f_m que $f_m = f_n \mid A_m$. Podemos então definir f em X pela fórmula

$$f(x) = f_n(x) \quad \text{se} \quad x \in A_n. \tag{3.6}$$

A função f satisfaz o que pretendemos (cf. Exercício 11). □

Examinaremos a seguir a relação entre funcionais lineares não negativos no espaço das funções contínuas de um espaço métrico compacto e o conjunto das probabilidades nos borelianos desse espaço métrico. Seja X um espaço métrico e μ uma medida de probabilidade nos borelianos de X. A aplicação

$$\Lambda : f \mapsto \int f d\mu$$

define um funcional linear não negativo em $C(X)$ tal que $\Lambda(1) = 1$. Como vimos na Proposição 2.7.4, medidas distintas dão necessariamente origem a funcionais distintos. Veremos que se o espaço X for compacto, então esta é essencialmente a única maneira de obter funcionais lineares não negativos em $C(X)$. Começamos com um lema simples sobre espaços métricos.

Lema 3.3.4. *Sejam $U_1, \ldots, U_n$ abertos de um espaço métrico compacto X. Se $K \subset X$ é um compacto tal que $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$, então existem funções contínuas $h_1, \ldots, h_n : X \to [0,1]$ tais que $h_i \leq \mathcal{X}_{U_i}$ para $1 \leq i \leq n$ e $h_1(x) + \cdots h_n(x) = 1$ para todo $x \in K$.*

Prova. Consideremos para cada $x \in K$ uma bola B_x centrada em x tal que a sua aderência $\overline{B}_x$ está contida em algum U_i. Como K é compacto, existem pontos $x_1, \ldots, x_k$ tais que $K \subset B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_k}$. Para $i = 1, \ldots, n$ seja H_i igual à união dos $\overline{B}_{x_j}$ que estão contidos em U_i. Pelo Lema 2.7.3 existem funções g_i contínuas tais que $\mathcal{X}_{H_i} \leq g_i \leq \mathcal{X}_{U_i}$. Definindo

$$\begin{aligned}
h_1 &= g_1 \\
h_2 &= (1 - g_1) g_2 \\
&\vdots \\
h_n &= (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{n-1}) g_n
\end{aligned}$$

temos h_i é contínua e $h_i \leq \mathcal{X}_{U_i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Indutivamente se verifica que

$$h_1 + \cdots h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n).$$

Como $K \subset H_1 \cup \cdots \cup H_n$, temos para cada $x \in K$ algum i para o qual $g_i(x) = 1$. Logo $h_1(x) + \cdots h_n(x) = 1$ para $x \in K$. □

Teorema 3.3.5. (Representação de Riesz) *Seja X um espaço métrico compacto. Se Λ é um funcional linear não negativo em $C(X)$ tal que $\Lambda(1) = 1$, então existe uma única probabilidade μ nos borelianos de X tal que*

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \quad \textit{para toda } f \in C(X).$$

Prova. A unicidade de μ resulta da Proposição 2.7.4. Para provar a existência, definimos, para um aberto U de X,

$$\mu(U) = \sup\{\Lambda(f) : 0 \leq f \leq \mathcal{X}_U\}. \tag{3.7}$$

É fácil verificar que se U_1 e U_2 são abertos de X tais que $U_1 \subset U_2$, então $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$. Logo, definindo para $A \subset X$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ aberto }\} \tag{3.8}$$

esta fórmula coincide com a anterior para os abertos e generaliza-a a todos subconjuntos de X. Seja $\mathcal{A}$ a classe dos borelianos $A \subset X$ tais que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto }\}. \tag{3.9}$$

Provemos algumas propriedades da classe $\mathcal{A}$ e da função μ:

(a) *Se $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Segue imediatamente da definição de μ.

(b) *Se U é um aberto de X, então $U \in \mathcal{A}$.*

Seja c um número real tal que $c < \mu(U)$. Então, por (3.7), existe $0 \leq f_c \leq \mathcal{X}_U$ tal que $c < \Lambda(f_c)$. Seja K_c o suporte de f_c. Se V é um aberto tal que $K_c \subset V$, então $0 \leq f_c \leq \mathcal{X}_V$ e, por (3.7), vem $\Lambda(f_c) \leq \mu(V)$. Temos então $\Lambda(f_c) \leq \mu(K_c)$. Logo, obtemos um compacto $K_c \subset U$ tal que $c < \mu(K_c)$. Como c é qualquer número menor que $\mu(U)$, temos provado que $U \in \mathcal{A}$.

(c) *Se $K \subset X$ é compacto, então $K \in \mathcal{A}$ e*

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda(f) : \mathcal{X}_K \leq f \leq 1\}.$$

De (a) resulta claramente que $K \in \mathcal{A}$.

Sejam $f \in C(X)$ com $\mathcal{X}_K \leq f \leq 1$ e $0 < c < 1$. Definindo $U_c = \{x : f(x) > c\}$ temos que $K \subset U_c$ e $cg \leq f$ para toda $g \in C(X)$ tal que $0 \leq g \leq \mathcal{X}_{U_c}$. Logo,

$$\mu(K) \leq \mu(U_c) = \sup\{\Lambda(g) : 0 \leq g \leq \mathcal{X}_{U_c}\} \leq c^{-1}\Lambda(f).$$

Fazendo $c \to 1$ temos $\mu(K) \le \Lambda(f)$.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Existe $U \supset K$ tal que $\mu(U) < \mu(K) + \epsilon$. Aplicando o Lema 2.7.3 aos fechados K e $M \setminus U$ obtemos $f \in C(X)$ tal que $\mathcal{X}_K \le f \le \mathcal{X}_U$. Assim,

$$\Lambda(f) \le \mu(U) < \mu(K) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos o resultado.

(d) *Se $A_1, A_2, \ldots$ são subconjuntos de X, então*

$$\mu\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \le \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Começamos por provar que se U_1 e U_2 são abertos de X, então

$$\mu(U_1 \cup U_2) \le \mu(U_1) + \mu(U_2). \tag{3.10}$$

Seja $g \in C(X)$ tal que $0 \le g \le \mathcal{X}_{U_1 \cup U_2}$. Pelo Lema 3.3.4, existem funções contínuas h_1, h_2 tais que $0 \le h_i \le \mathcal{X}_{U_i}$ para $i = 1, 2$, e $h_1(x) + h_2(x) = 1$ para todo x no suporte de g. Temos $0 \le h_i g \le \mathcal{X}_{U_i}$ para $i = 1, 2$ e $g = (h_1 + h_2)g$. Logo,

$$\Lambda(g) = \Lambda(h_1 g + h_2 g) = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \le \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Como isto ocorre para toda $g \in C(X)$ tal que $0 \le g \le \mathcal{X}_{U_1 \cup U_2}$ obtemos (3.10).

Sejam agora $A_1, A_2, \ldots$ subconjuntos arbitrários de X. Dado $\epsilon > 0$, existe para cada $i \ge 1$ um aberto $U_i \supset A_i$ tal que

$$\mu(U_i) < \mu(A_i) + \epsilon/2^i.$$

Sejam $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ e $f \in C(X)$ tais que $0 \le f \le \mathcal{X}_U$. Como o suporte de f é compacto, existem $U_1, \ldots, U_n$ tais que $0 \le f \le \mathcal{X}_{U_1 \cup \cdots \cup U_n}$. Aplicando (3.10) várias vezes obtemos

$$\Lambda(f) \le \mu(U_1 \cup \cdots \cup U_n) \le \mu(U_1) + \cdots + \mu(U_n) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon.$$

Como isto vale para toda $f \in C(X)$ tal que $0 \le f \le \mathcal{X}_U$ e $\bigcup A_{i=1}^{\infty} \subset U$, segue que

$$\mu\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \le \mu(U) \le \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon.$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, temos o que pretendíamos.

(e) *Se $A_1, A_2, \dots$ são elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ e*

$$\mu\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{3.11}$$

Começamos por provar que se K_1, K_2 são compactos disjuntos de X, então

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{3.12}$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $f \in C(X)$ dada pelo Lema 2.7.3 tal que $f \mid K_1 = 1$ e $f \mid K_2 = 0$. Da propriedade (c) resulta que existe $g \in C(X)$ tal que

$$\mathcal{X}_{K_1 \cup K_2} \le g \le 1 \quad \text{e} \quad \Lambda(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon.$$

Notando que

$$\mathcal{X}_{K_1} \le fg \le 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_{K_2} \le (1-f)g \le 1,$$

como Λ é linear vem

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \le \Lambda(fg) + \Lambda(g - fg) = \Lambda(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon.$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, (3.12) segue agora da propriedade (d).

Sejam $\epsilon > 0$ arbitrário e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Para cada $i \ge 1$ existe algum compacto $K_i \subset A_i$ tal que

$$\mu(K_i) > \mu(A_i) - \epsilon/2^i.$$

Fazendo $\widehat{K}_n = K_1 \cup \dots \cup K_n$ e usando (3.12) repetidas vezes, obtemos

$$\mu(A) \ge \mu(\widehat{K}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \epsilon. \tag{3.13}$$

Como isto vale para todo n e $\epsilon > 0$ é arbitrário, obtemos (3.11) atendendo à propriedade (d).

Falta ver que $A \in \mathcal{A}$. Se vale (3.11), então

$$\mu(A) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \epsilon$$

para algum $n \ge 1$, o que, conjuntamente com (3.13) dá

$$\mu(A) \le \mu(\widehat{K}_n) + 2\epsilon.$$

Logo $A \in \mathcal{A}$.

(f) *Se $A \in \mathcal{A}$ e $\epsilon > 0$, então existem K compacto e U aberto tais que $K \subset A \subset U$ e $\mu(U \setminus K) < \epsilon$.*

Resulta das definições que dado $A \in \mathcal{A}$ existem $K \subset A$ compacto e $U \supset A$ aberto tais que

$$\mu(U) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(A) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $U \setminus K$ é aberto, temos que $U \setminus K \in \mathcal{A}$. Da propriedade (e) deduzimos

$$\mu(K) + \mu(U \setminus K) = \mu(U) < \mu(K) + \epsilon,$$

e portanto $\mu\big(U \setminus K\big) < \epsilon$.

(g) *Se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ e $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

Vejamos que se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Dado $\epsilon > 0$, existem K_1, K_2 compactos e U_1, U_2 abertos com $K_1 \subset A \subset U_1$, $K_2 \subset B \subset U_2$ e $\mu(U_i \setminus K_i) < \epsilon$ para $i = 1, 2$. Como

$$A \setminus B \subset U_1 \setminus K_2 \subset (U_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus U_2) \cup (U_2 \setminus K_2),$$

pela propriedade (d) obtemos

$$\mu(A \setminus B) \leq \epsilon + \mu(K_1 \setminus U_2) + \epsilon.$$

Como $K_1 \setminus U_2$ é compacto, resulta que $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Como $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, resulta da propriedade (e) que $A \cup B \in \mathcal{A}$. Como $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ temos também $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Veremos agora que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, μ é uma medida em $\mathcal{A}$ e que μ representa Λ, i.e. $\Lambda(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$. Daqui deduzimos o resultado que pretendemos, pois, como $\mathcal{A}$ contém os abertos de X, $\mathcal{A}$ terá forçosamente que coincidir com a σ-álgebra dos borelianos.

$\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra:

1. $X \in \mathcal{A}$ pois X é compacto e se K é um compacto tal que $K \subset X$, então $\mu(K) \leq \mu(X)$.

2. Uma vez que $X \in \mathcal{A}$, resulta da propriedade (g) que se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

3. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ onde $A_n \in \mathcal{A}$ para todo n. Definimos $B_1 = A_1$ e para $n \geq 2$

$$B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \cdots B_{n-1}).$$

Temos que $(B_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Logo $A \in \mathcal{A}$.

μ **é uma medida de probabilidade:** Da definição de μ resulta facilmente que $\mu \geq 0$ e $\mu(\emptyset) = 0$. A propriedade (e) dá a σ-aditividade de μ. De (3.7) deduzimos que $\mu(X) = 1$.

μ **representa** Λ**:** Seja $f \in C(X)$ tal que $0 \leq f \leq 1$. Mostraremos primeiro que $\Lambda(f) \geq \int f d\mu$. Dado um inteiro positivo n, definimos para $0 \leq i \leq n$

$$K_i = \{x : f(x) \geq i/n\}.$$

Temos $X = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n$ e definimos $K_{n+1} = \emptyset$. Para $i = 1, \ldots, n$ seja φ_i uma função contínua em $[0, 1]$ que vale 0 em $[0, (i-1)/n]$, vale 1 em $[i/n, 1]$ e é afim em $[(i-1)/n, i/n]$. Seja $f_i = \varphi_i \circ f$ para $i = 1, \ldots, n$. Para $t \in [0, 1]$ temos $(1/n)\big(\varphi_1(t) + \cdots + \varphi_n(t)\big) = t$. Logo $(1/n)\big(f_1 + \cdots + f_n\big) = f$, e portanto $\Lambda(f) = (1/n)\sum_{i=1}^n \Lambda(f_i)$. Temos também $f_i \geq \mathcal{X}_{K_i}$ e, pela propriedade (c), $\Lambda(f_i) \geq \mu(K_i)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Lambda(f_i) \\
&\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu(K_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\mu(K_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\mu(K_i \setminus K_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n}\mu(K_i \setminus K_{i+1}) - \frac{1}{n}\mu(K_1) \\
&\geq \sum_{i=1}^n \int_{K_i \setminus K_{i+1}} f d\mu - \frac{1}{n}\mu(K_1) \\
&= \int_{K_1} f d\mu - \frac{1}{n}\mu(K_1) \\
&= \int_{K_0} f d\mu - \int_{K_0 \setminus K_1} f d\mu - \frac{1}{n}\mu(K_1) \\
&\geq \int f d\mu - \frac{1}{n}\mu(X).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\Lambda(f) \geq \int f d\mu.$$

Se $f \in C(X)$ é uma função não negativa, então existe alguma constante $c > 0$ tal que $0 \leq cf \leq 1$. Assim,

$$\Lambda(f) = \frac{1}{c}\Lambda(cf) \geq \frac{1}{c}\int cf d\mu = \int f d\mu.$$

Se f é uma função arbitrária em $C(X)$, então existe alguma constante c' tal que $f + c' \geq 0$, e portanto

$$\Lambda(f) = \Lambda(f + c') - c'\Lambda(1) \geq \int (f + c')d\mu - c' = \int f d\mu.$$

Temos assim que $\Lambda(f) \geq \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$. Então também $\Lambda(-f) \geq -\int f d\mu$, ou seja $\Lambda(f) \leq \int f d\mu$. Logo $\Lambda(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$. □

3.4 Espaços duais

Se E é um espaço normado, definimos E^*, o **dual** de E, como o espaço dos funcionais lineares contínuos em E; isto é, $E^* = L(E, \mathbb{K})$. Como vimos no Corolário 3.2.5, E^* é sempre um espaço de Banach, mesmo que E seja apenas um espaço normado.

Exemplo 3.4.1. *Resulta do Corolário 3.3.3 que se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finito, então para $1 \leq p < \infty$ e q o conjugado de p temos um isomorfismo isométrico*

$$\varphi : L^q(\mu) \to \big(L^p(\mu)\big)^*$$

definindo para cada $f \in L^q(\mu)$

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f): & L^p(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & \int fg d\mu \end{array}$$

Temos assim que a menos de isomorfismo isométrico $\big(L^p(\mu)\big)^* = L^q(\mu)$. Em geral não é verdade que $(L^\infty(\mu))^* = L^1(\mu)$.

Seja E um espaço normado e E^* o seu dual. Sendo E^* um espaço normado, podemos considerar também o seu dual $(E^*)^*$, que representamos simplesmente por E^{**}, e dizemos que E^{**} é o **bidual** de E.

Resulta do que vimos no Exemplo 3.4.1 que, para $1 < p < \infty$, o bidual de $L^p(\mu)$ coincide com $L^p(\mu)$. Contudo, nem sempre é verdade que o bidual de um espaço normado E coincida com E, como facilmente se depreende dos Exercícios 12 e 13b: $\ell^1(\mathbb{I})$ é o dual de $c^0(\mathbb{I})$ e $\ell^\infty(\mathbb{I})$ é o bidual de $c^0(\mathbb{I})$. Dizemos que um espaço normado E é **reflexivo** se for $E^{**} = E$.

Seja E um espaço normado. Definimos a **topologia fraca*** em E^* como sendo a topologia fraca associada à família de aplicações

$$\begin{array}{rccc} f_x: & E^* & \to & \mathbb{K} \\ & \lambda & \mapsto & \lambda(x) \end{array}$$

com $x \in E$. Ou seja, a topologia fraca* em E^* é a topologia mais fraca que torna contínuas as funções f_x para todo $x \in E$. Como sistema fundamental de vizinhanças de um elemento $\lambda_0 \in E^*$ na topologia fraca* podemos considerar os conjuntos do tipo

$$V(\lambda_0; x_1, \ldots, x_n, \epsilon) = \big\{ \lambda \in E^* : |\lambda(x_i) - \lambda_0(x_i)| < \epsilon \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n \big\},$$

com $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Resulta da definição da topologia fraca* que uma sucessão $(\lambda_n)_n$ de funcionais em E^* converge para $\lambda \in E^*$ na topologia fraca* se e somente se $\lambda_n(x)$ converge para $\lambda(x)$ para todo $x \in E$ (cf. Exercício 15).

Teorema 3.4.2. (Banach-Alaoglu) $D^* = \{\lambda \in E^* : \|\lambda\| \leq 1\}$ *é compacto na topologia fraca**.

Prova. Sejam $D = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ e P o conjunto das funções $f : D \to \Delta$, sendo Δ o disco unitário em $\mathbb{K}$. Podemos considerar

$$P = \prod_{x \in D} \Delta_x \quad \text{onde} \quad \Delta_x = \Delta$$

para todo $x \in D$. Considerando em P a topologia produto, temos pelo Teorema de Tychonoff que P é compacto. Se $\lambda \in D^*$ temos $\lambda(D) \subset \Delta$ e portanto, podemos considerar a inclusão

$$\iota : D^* \hookrightarrow P.$$

ι é claramente injectiva, e é contínua se considerarmos em D^* a topologia fraca*, pois esta é precisamente a topologia induzida da topologia produto em P. Se provarmos que $\iota(D^*)$ é fechado em P, temos provado o resultado. Se $f \in P \setminus \iota(D^*)$, então necessariamente verifica-se alguma das seguintes condições:

1. existem $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 + x_2 \in D$ tais que $f(x_1) + f(x_2) \neq f(x_1 + x_2)$;
2. existem $x \in D$ e $a \in \mathbb{K}$ com $ax \in D$ tais que $f(ax) \neq af(x)$.

Vejamos o caso em que se verifica 1 (o caso 2 trata-se de modo análogo). Seja

$$\epsilon = |f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)| > 0$$

e V a vizinhança de f em P definida como

$$V = \{g \in P : |g(x) - f(x)| < \epsilon/3, \quad \text{para} \quad x = x_1, x_2, x_1 + x_2\}$$

Se $g \in V$, então $g(x_1 + x_2) \neq g(x_1) + g(x_2)$ e portanto $g \in P \setminus \iota(D^*)$. Concluímos que $P \setminus \iota(D^*)$ é aberto e portanto $\iota(D^*)$ é compacto. $\square$

Proposição 3.4.3. *Se E é separável, então D^* com a topologia fraca* é um espaço metrizável.*

Prova. Seja $\{y_n\}_n$ um subconjunto denso em D. Definimos para $\lambda, \mu \in D^*$

$$d(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\lambda(y_i) - \mu(y_i)|.$$

Tendo em consideração a Proposição 1.2.4 é fácil ver que d define uma métrica em D^*. Vejamos que a que a topologia associada à métrica d coincide com a topologia fraca* em E^*.

Seja $V(\lambda_0; x_1, \ldots, x_n, \epsilon)$ uma vizinhança de λ_0 na topologia fraca*. Pretendemos mostrar que que existe alguma bola $B_\delta(\lambda_0)$ na métrica d, centrada em λ_0 e de raio $\delta > 0$, tal que $B_\delta(\lambda_0) \subset V(\lambda_0; x_1, \ldots, x_m, \epsilon)$. Como $\{y_n\}_n$ é denso, existe para cada $j = 1, \ldots, m$ algum n_j tal que $|y_{n_j} - x_j| < \epsilon/3$. Se δ é suficientemente pequeno,

$$\mu \in B_\delta(\lambda) \Rightarrow |\mu(y_{n_j}) - \lambda(y_{n_j})| < \epsilon/3$$

para $j = 1, \ldots, m$. Temos assim que se $\mu \in B_\delta(\lambda)$, então

$$|\lambda(x_j) - \lambda_0(x_j)| \leq |\lambda(x_j) - \lambda(y_{n_j})| + |\lambda(y_{n_j}) - \lambda_0(y_{n_j})| + |\lambda_0(y_{n_j}) - \lambda_0(x_j)| \leq \epsilon,$$

resultando esta última desigualdade do facto de se ter $\|\lambda_0\| \leq 1$ e $\|\lambda\| \leq 1$. Logo $B_\delta(\lambda_0) \subset V(\lambda_0; x_1, \ldots, x_m, \epsilon)$.

Seja agora $B_\delta(\lambda_0)$ uma bola centrada em λ_0 e de raio $\delta > 0$ na métrica d. Tomemos N suficientemente grande de modo a que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\delta}{2},$$

e consideremos $V(\lambda_0; y_1, \ldots, y_N, \delta/2)$ a vizinhança de λ_0 na topologia fraca*. Se $\lambda \in V(\lambda_0; y_1, \ldots, y_N, \delta)$ então

$$d(\lambda, \lambda_0) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^i} |\lambda(y_i) - \lambda_0(y_i)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \delta.$$

Logo $V(\lambda_0; y_1, \ldots, y_N, \delta/2) \subset B_\delta(\lambda_0)$. □

Corolário 3.4.4. *Se E é separável, então toda sucessão em D^* tem alguma subsucessão convergente na topologia fraca*.*

3.5 Exercícios

1. Seja E um espaço normado. Mostre que

$$\begin{array}{rccc} s: & E\times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} p: & \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

   são funções contínuas.

2. Mostre que num espaço normado todas as bolas abertas são homeomorfas e todas as bolas fechadas são homeomorfas.

3. Uma sucessão $(x_n)_n$ num espaço normado diz-se somável se $\sum_{j=1}^{n} x_j$ converge (quando $n \to \infty$) e diz-se absolutamente somável se $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$. Mostre que um espaço normado é completo se e só se toda sucessão absolutamente somável for somável.

4. Dado $1 \leq p \leq \infty$, seja $\ell^p(\mathbb{I})$ o espaço introduzido no Exemplo 3.1.5. Mostre que $\ell^p(\mathbb{I})$ coincide com $L^p(\#)$, onde $\#$ é a medida de contagem em $\mathbb{I}$, e $|a|_p = \|a\|_p$ para todo $a \in \ell^p(\mathbb{I})$, sendo $\|\ \|_p$ a norma em $L^p(\#)$.

5. Prove que se $p \neq q$, então as normas $\|\ \|_p$ e $\|\ \|_q$ não são equivalentes em $C([0,1])$.

6. Considere o espaço $c_0(\mathbb{I})$, das sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ em $\mathbb{K}$ tais que $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$, e o espaço $f(\mathbb{I})$, das sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ em $\mathbb{K}$ tais que $a_n = 0$ excepto para um número finito de índices $n \in \mathbb{I}$.

   (a) Mostre que $f(\mathbb{I}) \subset \ell^p(\mathbb{I}) \subset c_0(\mathbb{I}) \subset \ell^\infty(\mathbb{I})$ para $1 \leq p < \infty$.

   (b) Prove que $c_0(\mathbb{I})$ é um espaço de Banach com a norma $|\ |_\infty$.

   (c) Prove que $f(\mathbb{I})$ é denso em $c_0(\mathbb{I})$ e $\ell^p(\mathbb{I})$ para todo $1 \leq p < \infty$.

   (d) Conclua que $c_0(\mathbb{I})$ e $\ell^p(\mathbb{I})$ são separáveis.

7. Mostre que $\ell^\infty(\mathbb{I})$ não é separável.

8. Demonstre as igualdades em (3.3).

9. Sejam E e F espaços normados. Prove que uma aplicação linear $T : E \to F$ é limitada se e somente se $T^{-1}\{y \in F : \|y\| \leq 1\}$ tem interior não vazio.

10. Sejam (X,μ) um espaço de medida, $g \in L^\infty(\mu)$ e $1 \leq p \leq \infty$. Defina o operador linear $M_g\colon L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ por $M_g(f) = gf$. Mostre que:

   (a) M_g está bem definido e é limitado.

   (b) $M_{gh} = M_g \circ M_h$ para $g, h \in L^\infty(\mu)$.
   (c) $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

11. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com σ-finito e $(A_n)_n$ e $(f_n)_n$ como na prova do Corolário 3.3.3. Mostre que a função f definida em (3.6) pertence a $L^q(\mu)$ e $\Lambda(g) = \int fgd\mu$ para toda $g \in L^p(\mu)$.

12. Dado $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{I})$, seja para cada $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{I})$

$$\Lambda_c(a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n.$$

    Mostre que:

   (a) $\Lambda : c \mapsto \Lambda_c$ define uma aplicação linear $\Lambda : \ell^\infty(\mathbb{I}) \to (\ell^1(\mathbb{I}))^*$.
   (b) Λ é contínua com $\|\Lambda\| \le 1$.
   (c) Λ é injectiva.
   (d) Λ é sobrejectiva.
   (e) Os espaços $\ell^\infty(\mathbb{I})$ e $(\ell^1(\mathbb{I}))^*$ são isometricamente isomorfos.

13. Usando um esquema de prova análogo ao do exercício anterior, mostre que são isometricamente isomorfos:

   (a) $(\ell^p(\mathbb{I}))^*$ e $\ell^q(\mathbb{I})$, onde $p > 1$ e q é o conjugado de p.
   (b) $(c_0(\mathbb{I}))^*$ e $\ell^1(\mathbb{I})$.

14. Seja X um espaço compacto e $\Lambda \colon C(X) \to \mathbb{K}$ um funcional positivo. Mostre que Λ é contínuo e $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.

15. Uma sucessão $(\lambda_n)_n$ de funcionais em E^* converge para $\lambda \in E^*$ na topologia fraca* se e somente se $\lambda_n(x)$ converge para $\lambda(x)$ para todo $x \in E$.

Capítulo 4

Espaços com produto interno

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades de espaços normados cuja norma provém de um produto interno. Veremos que em certas circunstâncias (separabilidade) esses espaços têm representações bastante simples. Um exemplo interessante que será objecto do nosso estudo neste capítulo é o espaço das funções definidas em $[0,1]$ de quadrado (Lebesgue) integrável.

4.1 Espaços de Hilbert

Seja H um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{C}$. Um **produto interno** em H é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida em $H \times H$ e tomando valores em $\mathbb{C}$, satisfazendo as seguintes condições para todos $x, y, z \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se e só se $x = 0$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Um espaço vectorial munido de um produto interno diz-se um **espaço prehilbertiano**. Resulta das condições acima que num espaço prehilbertiano também

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \text{e} \quad \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

para todos $x, y, z \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposição 4.1.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja H um espaço prehilbertiano. Se $x, y \in H$, então*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Prova. Dados $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\lambda \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

Como isto vale para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ terá que ser

$$\big(\operatorname{Re}\langle x, y\rangle\big)^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Se $\langle x, y\rangle \geq 0$, temos provado o resultado. Caso contrário, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ com $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha\langle x, y\rangle \geq 0$. Substituindo x por αx no argumento acima obtemos

$$\big(\operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle\big)^2 \leq \langle \alpha x, \alpha x\rangle\langle y, y\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Como

$$|\langle x, y\rangle| = |\alpha\langle x, y\rangle| = \alpha\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle,$$

concluímos que $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. □

Proposição 4.1.2. *A função $x \in H \mapsto \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ define uma norma em H.*

Prova. Exceptuando desigualdade triangular, as outras propriedades são de verificação imediata. Vejamos que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para $x, y \in H$. Temos

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

ficando assim provado o que pretendíamos. □

Se o espaço prehilbertiano H com a métrica dada por esta norma é completo, dizemos que H é um **espaço de Hilbert**. Ou seja, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno.

Exemplo 4.1.3. *Em $\mathbb{C}^n$ podemos considerar o produto interno*

$$\langle (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i.$$

Este produto interno induz sobre $\mathbb{C}^n$ a norma usual. Temos assim que $\mathbb{C}^n$ com este produto interno é um espaço de Hilbert.

Exemplo 4.1.4. *Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, consideremos em $L^2(\mu)$ o produto interno*

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}d\mu.$$

Notar que este produto está bem definido, uma vez que se $g \in L^2(\mu)$ também $\overline{g} \in L^2(\mu)$ e portanto, pela desigualdade de Hölder, $f\overline{g} \in L^1(\mu)$. Este produto interno dá origem à norma $\| \ \|_2$ em $L^2(\mu)$, e portanto $L^2(\mu)$ é um espaço de Hilbert.

Exemplo 4.1.5. *Como caso particular do exemplo anterior (cf. Exemplo 3.1.5) temos o espaço $\ell^2(\mathbb{I})$ do conjunto das sucessões $a = (a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ tomando valores em $\mathbb{C}$. Dadas $a = (a_n)_{n\in\mathbb{I}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{I}}$ em $\ell^2(\mathbb{I})$,*

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n\in\mathbb{I}} a_n\overline{b}_n$$

define um produto interno cuja norma associada coincide com a norma do Exemplo 3.1.5. Assim, $\ell^2(\mathbb{I})$ com este produto interno é um espaço de Hilbert.

Exemplo 4.1.6. *Consideremos em $[0, 1]$ a medida de Lebesgue λ e $C([0, 1])$ o espaço das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{C}$. $C([0, 1])$ é um espaço prehilbertiano com o produto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}d\lambda.$$

para $f, g \in C([0, 1])$. No entanto, $C([0, 1])$ com este produto interno não é um espaço de Hilbert. $C([0, 1])$ é um subespaço denso de $L^2(\lambda)$ (cf. Exercício §2.19).

4.2 Ortogonalidade

Um vector x num espaço prehilbertiano H diz-se **ortogonal** a $y \in H$, e em tal caso escreve-se $x \perp y$, se $\langle x, y\rangle = 0$. Um subconjunto $S \subset H$ diz-se **ortonormal** se $\langle x, x\rangle = 1$ e $\langle x, y\rangle = 0$ para todos $x, y \in H$ com $x \neq y$.

Teorema 4.2.1. (Pitágoras) *Se $\{x_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto ortonormal num espaço prehilbertiano H, então para todo $x \in H$*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2 + \Big\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i\Big\|^2.$$

Prova. Escrevemos

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i + x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i.$$

Facilmente se pode verificar que os vectores

$$\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i \quad \text{e} \quad x-\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i$$

são ortogonais. Logo

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \Big\|\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i\Big\|^2+\Big\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i\Big\|^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}|\langle x, x_i\rangle|^2+\Big\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle x_i\Big\|^2,
\end{aligned}$$

ficando assim provado o resultado. □

Corolário 4.2.2. *Se $\{x_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto ortonormal num espaço prehilbertiano H, então para todo $x \in H$*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n}|\langle x, x_i\rangle|^2.$$

Dado um subconjunto S de um espaço prehilbertiano H, definimos o **ortogonal** de S como

$$S^\perp = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in S\}.$$

Lema 4.2.3. *Sejam H um espaço de Hilbert e F um subespaço vectorial fechado de H. Dado $x \in H$, existe um único elemento $z \in F$ tal que*

$$\|x-z\| = \min_{y\in F}\|x-y\|.$$

Prova. Sejam $d = \inf_{y\in F}\|x-y\|$ e $(y_n)_n$ uma sucessão de elementos em F com $\|x-y_n\|$ convergindo para d. Temos

$$\|y_m-y_n\|^2 = \|(y_m-x)+(x-y_n)\|^2.$$

Usando a regra do paralelogramo obtemos

$$\begin{aligned}
\|y_m-y_n\|^2 &= 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-\|-2x+y_m+y_n\|^2\\
&= 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4\Big\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\Big\|^2\\
&\leq 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4d^2.
\end{aligned}$$

Como esta última expressão converge para $2d^2+2d^2-4d^2=0$ quando $m,n\to\infty$, temos que $(y_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy. Sendo F fechado, $(y_n)_n$ converge para algum $z \in F$. Pela escolha da sucessão $(y_n)_n$ é claro que $\|x-z\| = d$.

Se z' é outro elemento de F tal que $\|x-z'\| = d$ então pela regra do paralelogramo

$$2\|x-z\|^2 + 2\|x-z'\|^2 = \|z-z'\|^2 + \|2x-z-z'\|^2.$$

Temos assim

$$2d^2 + 2d^2 = \|z-z'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(z+z')\|^2.$$

Como $\frac{1}{2}(z+z') \in F$, temos $\|x - \frac{1}{2}(z+z')\| \geq d$, e portanto $\|z-z'\| = 0$. □

Como facilmente se pode observar na prova do lema anterior, não é necessário exigir que F seja um subespaço vectorial de um espaço de Hilbert. De facto, basta que F seja um subconjunto convexo completo de um espaço prehilbertiano.

Teorema 4.2.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e F um subespaço fechado de H. Todo $x \in H$ pode ser escrito de maneira única como $x = z+w$ com $z \in F$ e $w \in F^\perp$.*

Prova. Seja $x \in H$. Pelo lema anterior existe $z \in F$ a distância mínima de x. Tomando $w = x - z$, temos claramente $x = z + w$. Fazendo $d = \|x - z\|$ temos para todo $y \in F$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$d^2 \leq \|x - (z + \lambda y)\|^2 = \|w - \lambda y\|^2 = d^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle w, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2.$$

Assim,

$$-2\lambda \operatorname{Re}\langle w, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Daqui resulta $\operatorname{Re}\langle w, y\rangle = 0$. Usando λi em vez de λ de modo análogo se mostra que $\operatorname{Im}\langle w, y\rangle = 0$, o que dá $\langle w, y\rangle = 0$. Ou seja, $w \in F^\perp$.

Se $z' \in F$ e $w' \in F^\perp$ são tais que $x = z' + w'$, então $z - z' = w' - w$. Como $z - z' \in F$ e $w - w' \in F^\perp$, terá que ser $z = z'$ e $w = w'$. □

Sejam H um espaço de Hilbert e F um subespaço fechado de H. O teorema anterior permite-nos definir a **projecção ortogonal** de H em F,

$$\begin{array}{rccc} P: & H & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & z \end{array}$$

onde z é o único elemento de F tal que $x = z+w$ com $w \in F^\perp$. Esta é uma aplicação linear contínua com $\|P\| = 1$ sempre que $F \neq \{0\}$ (cf. Exercício 8).

Dado um espaço de Hilbert H e $y \in H$, as propriedades do produto interno mostram que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, y\rangle: & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \langle x, y\rangle \end{array}$$

define um funcional linear em H. Além disso, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ e portanto $\langle \cdot, y\rangle \in H^*$, isto é, $\langle \cdot, y\rangle$ é um funcional linear contínuo. O próximo resultado mostra que estes são os únicos funcionais lineares contínuos em H.

Teorema 4.2.5. (Lema de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert e $\Lambda \in H^*$. Existe um único $y \in H$ tal que $\Lambda(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$. Além disso, $\|\Lambda\| = \|y\|$.*

Prova. Seja K o núcleo de Λ, i.e. o conjunto dos $x \in H$ tais que $\Lambda(x) = 0$. Pela continuidade de Λ temos que K é um subespaço fechado. Se $K = H$ temos $\Lambda(x) = \langle x, 0\rangle$ para todo $x \in H$ e temos o resultado. Se $K \neq H$, então pelo Teorema 4.2.4 existe algum $w \in K^\perp \setminus \{0\}$. Mostraremos que $y = \overline{\Lambda(w)}\|w\|^{-2}w$ tem as propriedades requeridas. Se $x \in K$ então

$$\Lambda(x) = 0 = \langle x, y\rangle.$$

Se $x = \alpha w$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$ então

$$\Lambda(x) = \Lambda(\alpha w) = \alpha\Lambda(w) = \langle \alpha w, \overline{\Lambda(w)}\|w\|^{-2}w\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Como os funcionais Λ e $\langle \cdot, y\rangle$ coincidem em K e w, devem coincidir no espaço gerado por K e w. Temos para todo $x \in H$

$$x = \left(x - \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(w)}w\right) + \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(w)}w, \quad \text{com} \quad x - \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(w)}w \in K.$$

Assim, $\Lambda(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$. Falta ver que $\|\Lambda\| = \|y\|$. Temos

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\Lambda(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, y\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|y\|\,\|x\| = \|y\|.$$

Por outro lado,

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\Lambda(x)| \geq \left|\Lambda\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y\right\rangle = \|y\|,$$

donde se conclui que terá de ser $\|\Lambda\| = \|y\|$. □

Nota 4.2.6. Para o espaço de Hilbert $L^2(\mu)$ (cf. Exemplo 4.1.4) o teorema anterior é um caso particular do resultado obtido no Teorema 3.3.2. De facto, dado $\Lambda \in \left(L^2(\mu)\right)^*$, pelo Lema de Riesz existe algum $g \in L^2(\mu)$ tal que

$$\Lambda(f) = \int f\,\overline{g}\,d\mu \quad \text{para todo} \quad f \in L^2(\mu).$$

Obtemos assim de novo o resultado do Teorema 3.3.2 para $p = 2$, uma vez que $g \in L^2(\mu)$ se e só se $\overline{g} \in L^2(\mu)$.

Nota 4.2.7. Uma vez que o Teorema 4.2.5 dá uma identificação entre um espaço de Hilbert H e o seu dual H^*, temos assim maneira de introduzir a topologia fraca* em H (cf. Secção 3.4). Resulta do modo como é feita a identificação de H com o seu dual que uma sucessão $(x_n)_n$ em H converge fracamente (na topologia fraca*) para $x \in H$ se e somente se $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ para todo $y \in H$ (cf. Exercício 3.15).

4.3 Bases ortonormais

Dado um espaço de Hilbert H, dizemos que um subconjunto S de H é uma **base ortonormal** de H se S é um conjunto ortonormal maximal para a inclusão; isto é, S não está estritamente contido em nenhum outro conjunto ortonormal de H.

Teorema 4.3.1. *Todo espaço de Hilbert tem alguma base ortonormal.*

Prova. Consideremos $\mathcal{O}$ a colecção de todos conjuntos ortonormais do espaço de Hilbert H, ordenado pela relação de inclusão. Assim, $\mathcal{O}$ é parcialmente ordenado e não vazio, uma vez que qualquer conjunto formado apenas por um vector unitário é um conjunto ortonormal. Se $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família totalmente ordenada de elementos de $\mathcal{O}$, então $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ é um conjunto ortonormal que é um majorante para $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Pelo Lema de Zorn concluímos que $\mathcal{O}$ tem algum elemento maximal. □

Lema 4.3.2. *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é um conjunto ortonormal, então para cada $x \in H$, existe no máximo uma infinidade numerável de índices $\alpha \in I$ tais que $\langle x, e_\alpha\rangle \neq 0$.*

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \left\{ e_\alpha : |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n} \right\}.$$

Pelo Corolário 4.2.2, cada S_n tem no máximo $n-1$ elementos. Como o conjunto dos e_α para os quais $\langle x, e_\alpha\rangle \neq 0$ é igual à união dos S_n, temos provado o resultado. □

Teorema 4.3.3. *Seja H um espaço de Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma base ortonormal. Então para cada $x \in H$,*

$$x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \quad e \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2,$$

sendo o valor destas somas independente da ordem das parcelas.

Prova. Sabemos pelo Lema 4.3.2 que $\langle x, e_\alpha\rangle \neq 0$ para no máximo uma infinidade numerável de valores de $\alpha \in I$, os quais ordenamos arbitrariamente por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Como $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_{\alpha_i}\rangle|^2$ é limitada, pelo Corolário 4.2.2 e monótona, então converge para algum número real quando $n \to \infty$. Tomando $x_n = \sum_{i=1}^n \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$, temos para $n > m$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \Big\| \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i} \Big\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\langle x, e_{\alpha_i}\rangle|^2. \tag{4.1}$$

Concluímos que $(x_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy e portanto converge para algum $x' \in H$. Temos para cada $j \geq 1$

$$\langle x - x', e_{\alpha_j}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}\rangle = \langle x, e_{\alpha_j}\rangle - \langle x, e_{\alpha_j}\rangle = 0$$

e se $\alpha \neq \alpha_j$ para todo $j \geq 1$, também temos

$$\langle x - x', e_{\alpha}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}, e_{\alpha}\rangle = 0$$

Temos assim que $x - x'$ e e_α são ortogonais para todo $\alpha \in I$. Como $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é um conjunto ortonormal maximal deverá ser $x - x' = 0$, ou seja

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$$

o que dá a primeira igualdade. Finalmente,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle \overline{\langle x, e_{\alpha_i}\rangle} \langle e_{\alpha_i}, e_{\alpha_i}\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_{\alpha_i}\rangle|^2 \end{aligned}$$

o que dá a igualdade da norma. □

Teorema 4.3.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ um conjunto ortonormal de elementos de H. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma base ortonormal de H.*
2. *As combinações lineares finitas de elementos de $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ são densas em H.*
3. *Se $x \in H$ é tal que $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$, então $x = 0$.*

Prova. Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma base ortonormal de H, então do Teorema 4.3.3 resulta que qualquer elemento de H pode ser aproximado por uma combinação linear finita de elementos de $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$, e portanto temos a segunda condição.

Suponhamos agora que vale a segunda condição. Seja F o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Se $x \in H$ é tal que $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$

para todo $\alpha \in I$, então também $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in F$. Da densidade de F e da continuidade do produto interno, resulta que $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in H$, e portanto $x = 0$.

Se vale a terceira condição, então é claro que $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é um conjunto ortonormal maximal e, por definição, uma base de H. □

Descrevemos a seguir o processo de **ortogonalização de Gram-Schmidt**, que permite a partir de um conjunto de vectores linearmente independentes construir um conjunto de vectores ortonormais que geram o mesmo espaço. Sejam $x_1, x_2, \ldots$ vectores linearmente independentes num espaço prehilbertiano. Definimos

$$\begin{array}{ll} y_1 = x_1 & z_1 = y_1/\|y_1\| \\ y_2 = x_2 - \langle z_1, x_2 \rangle z_1 & z_2 = y_2/\|y_2\| \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle z_k, x_n \rangle z_k & z_n = y_n/\|y_n\| \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{array}$$

O conjunto de vectores $\{z_n\}_n$ é um conjunto ortonormal com a propriedade adicional de para cada $n \in \mathbb{N}$ os vectores $z_1, \ldots, z_n$ gerarem o mesmo espaço que os vectores $x_1, \ldots, x_n$. Em particular, o conjunto das combinações lineares finitas de vectores de $\{z_n\}_n$ coincide com o conjunto das combinações lineares finitas de vectores de $\{x_n\}_n$.

Teorema 4.3.5. *Um espaço de Hilbert tem uma base ortonormal numerável se e somente se esse espaço é separável.*

Prova. Seja $\{x_n\}_n$ um subconjunto numerável denso no espaço de Hilbert H. Podemos a partir dos x_n's formar uma subcolecção de vectores linearmente independentes cujo conjunto das combinações lineares finitas coincide com o conjunto das combinações lineares finitas de todos x_n's. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a este conjunto de vectores linearmente independentes obtemos um conjunto ortonormal que, pelo Teorema 4.3.4, constitui uma base ortonormal de H.

Reciprocamente, se $\{e_n\}_n$ é uma base ortonormal numerável de H, o conjunto das combinações lineares finitas de vectores de $\{e_n\}_n$ com coordenadas em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é denso em H. Como este conjunto é numerável, H é separável. □

Teorema 4.3.6. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e N o cardinal de uma base ortonormal de H.*

1. *Se $N < \infty$, então H é isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}^N$.*

2. Se $N = \infty$, então H é isometricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Prova. Seja $\{e_n\}_{n=1}^N$ uma base ortonormal de H. Se $N = \infty$, consideremos a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} U: & H & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & (\langle x, e_n\rangle)_n \end{array}$$

Pelo Teorema 4.3.3, U está bem definida, é injectiva e preserva as normas. Falta ver a sobrejectividade de U. Dado $(a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ definimos $x_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Analogamente ao que fizemos em (4.1) podemos provar que $(x_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy. Se $x \in H$ é o limite da sucessão $(x_n)_n$, então para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\langle x, e_m\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n a_i e_i, e_m\rangle = a_m.$$

Ou seja, $U(x) = (a_n)_n$. Se $N < \infty$, de modo análogo se prova que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} U: & H & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ & x & \longmapsto & (\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_N\rangle) \end{array}$$

é um isomorfismo linear que preserva as normas. □

4.4 Séries de Fourier

Vamos agora concentrar-nos no espaço de Hilbert $L^2(\lambda)$ associado à medida de Lebesgue λ no intervalo $[0,1]$. É frequente escrever $L^2[0,1]$ em vez de $L^2(\lambda)$ e assim faremos de agora em diante. Uma primeira questão que colocamos é a de tentar descrever uma base ortonormal de $L^2[0,1]$. Consideremos a colecção de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em $L^2[0,1]$ definidas para cada $n \in \mathbb{Z}$ por

$$f_n(x) = e^{2\pi i n x}.$$

Um cálculo simples mostra que para $m, n \in \mathbb{Z}$ se tem

$$\langle f_m, f_n\rangle \equiv \int f_m \overline{f}_n d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases},$$

e portanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é um conjunto ortonormal. Dados $f \in L^2[0,1]$ e $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\hat{f}(n) = \langle f, f_n\rangle = \int f\,\overline{f}_n d\lambda.$$

Estes números são chamados os **coeficientes de Fourier** de $f \in L^2[0,1]$.

Lema 4.4.1. *Qualquer $f \in C([0,1])$ tal que $f(0) = f(1)$ pode ser aproximada, na norma $\| \ \|_\infty$, por uma combinação linear finita de funções da família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Prova. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrário. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função não negativa K_n definida para cada $x \in [0,1]$ por

$$K_n(x) = c_n \left(\frac{1+\cos 2\pi x}{2}\right)^n,$$

onde cada c_n é tal que $\int_0^1 K_n dx = 1$. Definimos

$$t_n(x) = \int_0^1 f(y)K_n(x-y)dy.$$

Atendendo a que

$$\cos 2\pi(x-y) = \frac{1}{2}\big(e^{2\pi i(x-y)} + e^{-2\pi i(x-y)}\big)$$

temos facilmente que t_n é uma combinação linear finita de funções da família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Temos para cada $x \in [0,1]$

$$f(x) - t_n(x) = \int_0^1 \big(f(x) - f(y)\big)K_n(x-y)dy. \tag{4.2}$$

Como $f(0) = f(1)$, podemos estender f continuamente a toda a recta, fazendo $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, podemos estender K_n continua e periodicamente a toda a recta. Em particular, o integral em (4.2) pode ser calculado em qualquer intervalo de comprimento um; escolhemos o intervalo $[x-1/2, x+1/2]$. Como f é uniformemente contínua, podemos escolher $\delta > 0$ (independente de x e menor do que $1/2$) tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |x-y| \le \delta.$$

Seja $M = \max\{|f|\}$. Tendo em atenção que K_n é uma função par não negativa obtemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - t_n(x)| &< \epsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} K_n(x-y)dy + 4M \int_{x+\delta}^{x+1/2} K_n(x-y)dy \\
&< \epsilon \int_{-1/2}^{1/2} K_n(u)du + 4M \int_{\delta}^{1/2} K_n(u)du \\
&< \epsilon + 4M\frac{1}{2} \max_{\delta \le u \le 1/2} K_n(u) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Temos

$$\max_{\delta \le u \le 1/2} K_n(u) = c_n \left(\frac{1+\cos 2\pi\delta}{2}\right)^n.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 1 &= 2c_n \int_0^{1/2} \left(\frac{1+\cos 2\pi u}{2} \right)^n du \\ &> 2c_n \int_0^{1/2} \left(\frac{1+\cos 2\pi u}{2} \right)^n \operatorname{sen} 2\pi u du \\ &= \frac{2c_n}{\pi(n+1)}, \end{aligned}$$

e portanto

$$c_n < \frac{\pi(n+1)}{2}.$$

Obtemos assim de (4.3)

$$|f(x) - t_n(x)| < \epsilon + M\pi(n+1) \left(\frac{1+\cos 2\pi\delta}{2} \right)^n.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário e

$$M\pi(n+1) \left(\frac{1+\cos 2\pi\delta}{2} \right)^n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

temos provado o resultado. □

Teorema 4.4.2. *A família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de $L^2[0,1]$.*

Prova. Pelo Teorema 4.3.4 basta mostrar que que o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é denso em $L^2[0,1]$. Tomemos $f \in L^2[0,1]$. Como $C[0,1]$ é denso em $L^2[0,1]$ (cf. Exercício 2.19), temos que f pode ser aproximada por uma função contínua. Esta, por sua vez, pode ainda ser aproximada, na norma de $L^2[0,1]$, por uma função contínua g satisfazendo $g(0) = g(1)$. Pelo Lema 4.4.1, e atendendo a que $\|f-g\|_2 \leq \|f-g\|_\infty$, concluímos que que o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é denso em $L^2[0,1]$. □

Corolário 4.4.3. *A transformação $U : L^2[0,1] \to \ell^2(\mathbb{Z})$ dada por $U(f) = (\hat{f}(n))_n$ é um isomorfismo isométrico.*

Prova. Consequência dos Teoremas 4.3.6 e 4.4.2. □

Corolário 4.4.4. *Se $f \in L^2[0,1]$, então $\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) f_k$ converge para f na norma de $L^2[0,1]$.*

Prova. Consequência dos Teoremas 4.3.3 e 4.4.2. □

A série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) f_n$ é chamada a **série de Fourier** de f. Temos assim pelo corolário anterior que a série de Fourier de f representa a função f no sentido da convergência em $L^2[0,1]$.

Nota 4.4.5. Os resultados anteriores nada provam quanto à convergência pontual da série de Fourier para a função f. Definindo $P[0,1]$ como o espaço das funções contínuas de período 1, passamos a enunciar alguns dos resultados mais relevantes neste assunto:

1. Existe alguma função em $P[0,1]$ cuja série de Fourier diverge numa infinidade não numerável de pontos (ver Rudin).

2. Existe alguma função em $L^1[0,1]$ cuja série de Fourier diverge em todo ponto (Kolmogorov).

3. Se $f \in L^2[0,1]$ então a série de Fourier de f converge pontualmente para f em quase todo ponto (Carleson).

4. Se $f \in P[0,1]$ é de classe C^1, então a sua série de Fourier converge uniformemente para f (ver Reed & Simon).

4.5 Operadores lineares contínuos

Nesta secção vamos obter alguns resultados para operadores limitados em espaços de Hilbert. Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$. Definimos o **operador adjunto** de T como o único operador $T^* \in L(H)$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \quad \text{para todos} \quad x, y \in H. \tag{4.4}$$

Precisamos de ver que um tal $T^* \in L(H)$ existe e é único. De facto, fixado $y \in H$, temos que $\langle T(\cdot), y\rangle$ define um funcional em H^* e portanto, pelo Lema de Riesz, existe um (único) vector em H, que denotamos por $T^*(y)$, satisfazendo (4.4). Da unicidade dada pelo Lema de Riesz resulta ainda que T^* é linear. A proposição seguinte mostra em particular que T^* é também um operador limitado.

Proposição 4.5.1. $\|T^*\| = \|T\|$.

Prova. Temos

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &= \sup_{\|y\|=1} \|T^*(y)\| \\
&= \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*(y)\rangle| \\
&= \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), y\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\
&= \|T\|
\end{aligned}$$

Para a segunda e quarta igualdades ver o Exercício 10. □

$T \in L(H)$ diz-se um **operador auto-adjunto** se $T = T^*$. O resultado abaixo dá uma caracterização dos operadores auto-adjuntos de um espaço de Hilbert.

Proposição 4.5.2. *Seja T um operador de um espaço de Hilbert H. São equivalentes:*

1. *T é auto-adjunto;*
2. *$\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.*

Prova. Se $T = T^*$, temos para todo $x \in H$

$$\langle T(x), x\rangle = \langle T^*(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}.$$

Logo, terá que ser $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, assumindo que $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$, definimos $B(x) = \langle T(x), x\rangle$ para $x \in H$. Temos para $x, y \in H$

$$B(x+y) = B(x) + B(y) + \langle T(y), x\rangle + \langle T(x), y\rangle$$

e

$$B(x+iy) = B(x) + B(y) + i\langle T(y), x\rangle - i\langle T(x), y\rangle.$$

Como B só toma valores reais, terão que existir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle T(y), x\rangle + \langle T(x), y\rangle = \alpha \quad \text{e} \quad \langle T(y), x\rangle - \langle T(x), y\rangle = i\beta.$$

Deduzimos assim que

$$2\langle T(y), x\rangle = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad 2\langle T(x), y\rangle = \alpha - i\beta,$$

e portanto,

$$\langle T(y), x\rangle = \overline{\langle T(x), y\rangle}.$$

Isto finalmente dá

$$\langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \langle x, T(y)\rangle$$

para todos $x, y \in H$, mostrando que $T = T^*$. □

Dado T, um operador num espaço de Hilbert H, consideremos o **núcleo** de T,

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in H : T(x) = 0\}$$

e a **imagem** de T

$$\mathrm{Im}(T) = \{y \in H \ : \ T(x) = y \ \text{ para algum } x \in H\}.$$

É imediato verificar que $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ são subespaços vectoriais de H, sendo $\mathrm{Ker}(T)$ um subespaço fechado ($\mathrm{Im}(T)$ nem sempre é fechado).

Proposição 4.5.3. *Se T é um operador num espaço de Hilbert, então* $\mathrm{Im}(T)^\perp = \mathrm{Ker}(T^*)$.

Prova. Observando que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(T^*) &\Leftrightarrow \langle y, T^*(x)\rangle = 0 \quad \forall\, y \in H \\ &\Leftrightarrow \langle T(y), x\rangle = 0 \quad \forall\, y \in H \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(T)^\perp \end{aligned}$$

temos provado o resultado. □

Provamos a seguir um resultado do qual obteremos uma aplicação interessante no Capítulo 5. Recordamos que uma isometria U num espaço de Hilbert é uma transformação que preserva normas. Tendo em conta a identidade de polarização, isto é o mesmo que dizer que $\langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in H$.

Teorema 4.5.4. (von Neumann) *Seja U uma isometria num espaço de Hilbert H. Se P é a projecção ortogonal em $\{x \in H : U(x) = x\}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(x) = P(x),$$

para todo $x \in H$.

Prova. Definindo $F = \{x \in H : U(x) = x\}$, temos $F = \mathrm{Ker}(U - I)$. Se $x \in F^\perp$ e $y \in F$, então

$$\langle U(x), y\rangle = \langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle = 0,$$

ou seja, $U(F^\perp) \subset F^\perp$. Assim, se $x \in H$ se escreve como $x = z + w$ com $z \in F$ e $w \in F^\perp$, temos para $j \geq 0$

$$U^j(x) = U^j(z) + U^j(w) = z + U^j(w) = P(x) + U^j(w).$$

Logo, o teorema reduz-se a provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(w) = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in F^\perp. \tag{4.5}$$

Definindo, para $n \geq 1$, o operador $S_n : F^\perp \to F^\perp$ como

$$S_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(w),$$

temos para todo $n \geq 1$ (cf. Exercício 17)

$$US_n^* S_n = \frac{1}{n} S_n^* U^n - \frac{1}{n} S_n^* + S_n^* S_n. \tag{4.6}$$

Atendendo a que U é uma isometria, facilmente se conclui que $\|U^n\|$, $\|S_n\|$ e $\|S_n^*\|$ têm norma igual a 1 para todo $n \geq 1$. Logo, $\big(S_n^* S_n(w)\big)_n$ é uma sucessão limitada para $w \in F^\perp$, e portanto, tem alguma subsucessão $\big(S_{n_j}^* S_{n_j}(w)\big)_j$ convergindo fracamente para algum $w_0 \in F^\perp$. De (4.6) e do facto dos operadores S_n, S_n^* e U_n terem normas uniformemente limitadas obtém-se que $U(w_0) = w_0$, ou seja, $w_0 \in F$. Como $w_0 \in F^\perp$, então terá que ser $w_0 = 0$, e portanto, $\big(S_n^* S_n(w)\big)_n$ converge fracamente para 0 para todo $w \in F^\perp$. Temos assim que

$$\|S_n(w)\|^2 = \langle S_n(w), S_n(w)\rangle = \langle S_n^* S_n(w), w\rangle \to 0$$

para todo $w \in F^\perp$. Ou seja, temos provado (4.5). □

Dizemos que um operador $U \in L(H)$ é **unitário** se U preserva normas e é invertível. Ou seja, os operadores unitários $U \in L(H)$ são precisamente os isomorfismos isométricos, isto é, os isomorfismos lineares $U : H \to H$ tais que $\langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in H$.

Proposição 4.5.5. *Se U é um operador unitário num espaço de Hilbert, então $U^* = U^{-1}$.*

Prova. Dados $x, y \in H$, temos

$$\langle x, y\rangle = \langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, U^*U(y)\rangle,$$

e portanto,

$$\langle x, y - U^*U(y)\rangle = 0.$$

Temos então $U^*U(y) = y$ para todo $y \in H$, ou seja, $U^*U = I$. Como uma transformação invertível tem um único inverso esquerdo, concluímos que $U = U^*$. □

4.6 Exercícios

1. Mostre que num espaço prehilbertiano o produto interno $\langle \lambda x, y\rangle$ depende continuamente do escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ e dos vectores x e y.

2. Sejam x e y vectores num espaço prehilbertiano.

   (a) Demonstre a regra do paralelogramo (porquê este nome?)

   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

   (b) Demonstre a identidade de polarização

   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

   (c) Mostre que uma norma provém de um produto interno se e só se satisfaz a regra do paralelogramo.

3. Mostre que $L^p(\mu)$ é um espaço de Hilbert se e somente se $p = 2$.

4. Mostre que $C([0,1])$ com a norma associada ao produto interno do Exemplo 4.1.6 não é um espaço completo.

5. Seja H um espaço prehilbertiano. Mostre que:

   (a) Se S é um subconjunto de H, então $S^\perp$ é um subespaço fechado de H.

   (b) Se F é um subespaço de H, então $F \cap F^\perp = \{0\}$.

6. Seja H um espaço de Hilbert e $U\colon H \to H$ um operador unitário.

   (a) Mostre que $\ker(U+I) \subset \ker(U-I)^\perp$.

   (b) Mostre que se $U^2 = I$, então $\ker(U+I) \supset \ker(U-I)^\perp$.

   (c) Sejam $H = L^2[-1,1]$ e $K = \{f \in H\colon f(x) = f(-x)\}$. Determine $K^\perp$.

7. Mostre que se H é um espaço de Hilbert, e F é um subespaço de H, então $F^{\perp\perp}$ coincide com a aderência de F.

8. Sejam H um espaço de Hilbert, F um subespaço fechado de H e $P : H \to F$ a projecção ortogonal em F. Prove que

   (a) $P \circ P = P$.

   (b) P é linear.

   (c) P é contínua.

(d) $\|P\| \leq 1$ e $\|P\| = 1$ se $F \neq 0$.

9. Seja H um espaço de Hilbert separável e $\{e_n\}_n$ uma base de H. Seja $\{y_n\}_n$ uma sucessão de elementos de H. Prove que são equivalentes:

   (a) $\langle x, y_n \rangle \to 0$ para todo $x \in H$.

   (b) $\langle e_m, y_n \rangle \to 0$ para todo $m \geq 1$ e $(\|y_n\|)_n$ é limitada.

10. Sejam H um espaço de Hilbert e $x \in H$. Mostre que

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|.$$

11. Sejam λ a medida de Lebesgue em $[0,1]$ e $(f_n)_n$ uma sucessão de funções em $L^2[0,1]$ (com a estrutura de espaço real) tal que $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Mostre que:

   (a) Se $f_n \to f$ na norma de L^2, então $f_n \to f$ fracamente (cf. Nota 4.2.7).

   (b) Se $f_n \to f$ fracamente, então $\|f\|_2 \leq \liminf \|f_n\|_2$.

   (c) $f_n \to f$ fracamente se e só se $\int_{[0,x]} f_n d\lambda \to \int_{[0,x]} f d\lambda$ para todo $x \in [0,1]$.

   (d) Se $f_n \to f$ fracamente e $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$, então $f_n \to f$ na norma de L^2.

12. Considere $L^2[0,1]$ com a estrutura usual de espaço de Hilbert.

   (a) Determine os coeficientes de Fourier de $f \in L^2[0,1]$ dada por $f(x) = x - 1/2$.

   (b) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

13. Considere $L^2[0,1]$ com a estrutura usual de espaço de Hilbert.

   (a) Determine os coeficientes de Fourier de $f \in L^2[0,1]$ dada por $f(x) = (2\pi x - \pi)^2$.

   (b) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$.

14. Considere $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ com a estrutura usual de espaço de Hilbert e defina o operador linear T em ℓ^2 por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3 \dots).$$

   (a) Mostre que o operador adjunto T^* de T é dado por

$$T^*(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

   (b) Calcule as normas de T e T^*.

(c) Mostre que $T^n(x) \to 0$, quando $n \to +\infty$, para todo $x \in \ell^2$.

(d) Diga se $(T^n)_n$ converge para o operador identicamente nulo na norma de $L(\ell^2, \ell^2)$.

15. Sejam S e T operadores num espaço de Hilbert. Mostre que

    (a) $(ST)^* = T^* S^*$.

    (b) $T^{**} = T$.

16. Mostre que se $T \in L(H)$ é tal que $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, então $T = 0$. (Sugestão: Mostre que T e iT são ambos auto-adjuntos).

17. Demonstre a igualdade (4.6).

Capítulo 5

Transformações que preservam medida

Neste capítulo faremos uma introdução à teoria ergódica, isto é, o estudo de sistemas dinâmicos sob uma perspectiva probabilística. Neste contexto, assume papel de primordial importância a existência de medidas invariantes por uma transformação (sistema dinâmico). Deduziremos a existência de tal tipo de medidas para uma classe bastante ampla de transformações (transformações contínuas) e provaremos algumas das propriedades fundamentais de sistemas que preservam medida.

5.1 Definição e exemplos

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida e $T\colon X \to Y$. Dizemos que T é uma **transformação mensurável** se $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{B}$ (no caso em que $Y = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra dos borelianos, temos pela Proposição 2.3.1 que esta definição generaliza a definição dada na Secção 2.3). Dizemos que T **preserva medida** se $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

Exemplo 5.1.1. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $T\colon X \to Y$ uma função mensurável. Sejam $p \in X$ e $q \in Y$ tais que $T(p) = q$. Se δ_p e δ_q são as medidas de Dirac em $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ associadas aos pontos p e q (cf. Exemplo 2.1.4), então T preserva medida.*

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida, $(Y, \mathcal{B})$ é um espaço mensurável e $T\colon X \to Y$ é uma função mensurável, consideremos

$$T_*\mu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$$

definindo $T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ para $B \in \mathcal{B}$. É fácil verificar que $T_*\mu$ é uma medida em $(Y, \mathcal{B})$ e, atendendo ao modo como $T_*\mu$ foi definida, se considerarmos esta medida no espaço de chegada, T preserva medida. Com esta notação, temos que uma transformação $T\colon X \to Y$ entre espaços de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ preserva medida se e só se $T_*\mu = \nu$.

Teorema 5.1.2. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e seja $T\colon X \to Y$ uma função mensurável. Se $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra que gera $\mathcal{B}$ e $\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{S}$, então T preserva medida.*

Prova. Seja $m = T_*\mu|\mathcal{S} = \nu|\mathcal{S}$. Temos que m é uma função σ-aditiva definida em $\mathcal{S}$ com extensões $T_*\mu$ e ν a $\mathcal{B}$. Tendo em conta os resultados da Proposição 2.2.4 e do Teorema 2.2.8, terá que ser $T_*\mu = \nu$. □

Estaremos particularmente interessados no caso em que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida e $T\colon X \to X$ é uma transformação mensurável. Neste caso, diremos que μ é **T-invariante** quando $T_*\mu = \mu$, isto é, quando T preserva μ.

Exemplo 5.1.3. *Consideremos λ a medida de Lebesgue definida nos borelianos de $[0, 1]$. A medida λ é T-invariante para a transformação $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $T(x) = 2x$ (mod 1). Tal resulta do Teorema 5.1.2 e do facto de T preservar o comprimento de intervalos.*

Exemplo 5.1.4. *Analogamente ao que fizemos para definir a medida de Lebesgue na recta, podemos definir a medida de Lebesgue no círculo*

$$S^1 = \{X \in \mathbb{R}^2 \colon \|X\| = 1\},$$

começando por defini-la na semi-álgebra dos sub-arcos de S^1 como o comprimento do arco. Se $R\colon S^1 \to S^1$ é uma rotação em S^1, então R preserva a medida de Lebesgue.

Exemplo 5.1.5. (Transformação de Gauss) *Consideremos no intervalo $[0, 1]$ a transformação*

$$\begin{array}{rccl} G\colon & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1/x - [1/x] & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

G preserva a medida μ definida para um boreliano $A \subset [0, 1]$ como

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{x+1}\, dx,$$

entendendo este como o integral de Lebesgue.

Exemplo 5.1.6. *Consideremos em* $[0,1]$ *com a* σ*-álgebra dos borelianos a transformação* $T\colon [0,1] \to [0,1]$ *definida por*

$$T(x) = \begin{cases} 1/2^{n+1} & \textit{se } x = 1/2^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ 1 & \textit{outros casos.} \end{cases}$$

T *é mensurável e não preserva nenhuma medida finita invariante.*

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então $f \circ T$ é também uma função mensurável. Podemos assim considerar uma aplicação linear U_T no espaço das funções mensuráveis, definindo $U_T(f) = f \circ T$. Resulta imediatamente da definição de U_T que se $f \geq 0$, então $U_T(f) \geq 0$, e portanto U_T é uma aplicação linear positiva.

Proposição 5.1.7. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $T\colon X \to X$ *uma transformação que preserva* μ*. Se* $f \in L^1(\mu)$*, então* $U_T(f) \in L^1(\mu)$ *e*

$$\int U_T(f) d\mu = \int f d\mu.$$

Prova. Se $f = \mathcal{X}_A$ para algum $A \in \mathcal{A}$, então

$$\int U_T(\mathcal{X}_A) d\mu = \int \mathcal{X}_A \circ T d\mu = \int \mathcal{X}_{T^{-1}(A)} d\mu = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = \int \mathcal{X}_A d\mu.$$

Da linearidade de U_T obtemos o resultado também para funções simples. Se f é não negativa, consideremos $(f_n)_n$ uma sucessão de funções simples convergindo monotonamente para f. Então $(U_T(f_n))_n$ é uma sucessão de funções simples convergindo monotonamente para $U_T(f)$ e portanto

$$\int U_T(f) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int U_T(f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

O caso geral obtém-se considerando as partes positiva e negativa de f. $\square$

Corolário 5.1.8. *Seja* $p \geq 1$*. Temos* $U_T\big(L^p(\mu)\big) \subset L^p(\mu)$ *e* $\|U_T(f)\|_p = \|f\|_p$ *para toda* $f \in L^p(\mu)$*.*

Prova. Seja $f \in L^p(\mu)$. Temos

$$\int |f \circ T|^p d\mu = \int |f|^p \circ T d\mu = \int |f|^p d\mu,$$

sendo esta última igualdade consequência do proposição anterior, pois $|f|^p \in L^1(\mu)$. Isto mostra que $U_T(f) \in L^p(\mu)$ e $\|U_T(f)\|_p = \|f\|_p$. $\square$

5.2 Recorrência

Vejamos algumas das propriedades que gozam as transformações que preservam medida. Começamos por introduzir alguma notação. Dada uma transformação $T\colon X \to X$ definimos

$$T^0 = \mathrm{id}_X \quad \text{e} \quad T^{n+1} = T \circ T^n \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Dado $x \in X$, definimos a **órbita** de x como sendo a sucessão $(T^n(x))_{n\geq 0}$.

Teorema 5.2.1. (Recorrência de Poincaré) *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Se $A \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(A) > 0$, então a órbita de quase todo ponto de A retorna infinitas vezes a A. Isto é, se*

$$A^r = \{x \in A\colon T^j(x) \in A \text{ para infinitos valores de } j\,\},$$

então $\mu(A^r) = \mu(A)$.

Prova. Para $k \geq 0$ definimos

$$B_k = \{x \in A\colon T^k(x) \in A \quad \text{e} \quad T^{n+k}(x) \notin A \quad \text{para } n \geq 1\}.$$

Como $A \setminus A^r = \bigcup_{k\geq 0} B_k$, basta provar que B_k é mensurável e $\mu(B_k) = 0$ para todo $k \geq 0$. Temos

$$B_k = A \cap T^{-k}(A) \cap T^{-(k+1)}(X \setminus A) \cap T^{-(k+2)}(X \setminus A) \cap \cdots$$

e portanto B_k é mensurável. Para $k \geq 0$ e $n \geq 1$ temos

$$T^{-n}(B_k) \cap B_k = \emptyset, \tag{5.1}$$

pois, se $x \in T^{-n}(B_k)$, então $T^{k+n}(x) \in A$, e portanto $x \notin B_k$. Resulta de (5.1) que

$$T^{-(n+m)}(B_k) \cap T^{-m}(B_k) = \emptyset$$

para $n \geq 1$ e $m \geq 0$, e portanto

$$T^{-n}(B_k) \cap T^{-m}(B_k) = \emptyset$$

se $n \neq m$. Assim temos

$$\mu\big(\textstyle\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(B_k)\big) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \mu\big(T^{-n}(B_k)\big) \leq 1.$$

Como T preserva μ, temos $\mu\big(T^{-n}(B_k)\big) = \mu(B_k)$ para todo n e portanto $\mu(B_k) = 0$ para todo k. $\square$

Seja X um espaço topológico e $T\colon X \to X$ uma transformação. Definimos $\omega(x)$, o **ω-limite** de um ponto $x \in X$, como o conjunto dos pontos $y \in X$ tais que para toda vizinhança V de y existem infinitos valores $n \in \mathbb{N}$ com $T^n(x) \in V$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto recorrente** se $x \in \omega(x)$.

Teorema 5.2.2. *Sejam X um espaço métrico separável, μ uma probabilidade sobre os borelianos de X e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Então quase todo ponto de X é recorrente.*

Prova. Seja (x_n) uma sucessão densa em X. Definimos

$$U_{n,m} = \{x \in X\colon d(x, x_n) < 1/m\}$$

e

$$U^r_{n,m} = \{x \in U_{n,m}\colon T^j(x) \in U_{n,m} \text{ para infinitos valores de } j\}.$$

Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, temos $\mu(U_{n,m} \setminus U^r_{n,m}) = 0$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Considerando $R = \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{m,n\geq k} U^r_{n,m}$, vamos ver que os pontos de R são recorrentes e $\mu(X \setminus R) = 0$.

Vejamos que se $x \in R$ então x é recorrente. Dado $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $N \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande tal que $T^N(x) \in B_\epsilon(x)$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 2/\epsilon$. Existem $m, n \geq k$ tais que $x \in U^r_{n,m} \subset U_{n,m}$. Pela escolha de k, temos que se $y \in U_{n,m}$, então

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < 1/m + 1/m \leq 2/k < \epsilon.$$

Logo, $U_{n,m} \subset B_\epsilon(x)$. Como $x \in U^r_{n,m}$, deduzimos que existem valores de $N \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grandes tais que $T^N(x) \in U_{n,m} \subset B_\epsilon(x)$.

Vejamos agora que $\mu(X \setminus R) = 0$. Como $(x_n)_n$ é denso em X, temos $X = \bigcup_{m,n\geq 1} U_{n,m}$ e portanto

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus R) &= \mu\big(X \setminus \textstyle\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{m,n\geq k} U^r_{n,m}\big)\\
&= \mu\big(\textstyle\bigcup_{k\geq 1}(X \setminus \bigcup_{m,n\geq k} U^r_{n,m})\big)\\
&= \mu\big(\textstyle\bigcup_{k\geq 1}(\bigcup_{m,n\geq 1} U_{n,m} \setminus \bigcup_{m,n\geq k} U^r_{n,m})\big)\\
&\leq \mu\big(\textstyle\bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{m,n\geq k}(U_{n,m} \setminus U^r_{n,m})\big)
\end{aligned}$$

Como $\mu(U_{n,m} \setminus U^r_{n,m}) = 0$ para todos $m, n \geq 1$, concluímos que $\mu(X \setminus R)$. □

5.3 Transformações contínuas

Veremos nesta secção que uma transformação contínua definida num espaço métrico compacto tem sempre alguma medida de probabilidade invariante definida nos borelianos. Para tal, usaremos o Teorema de Representação de Riesz que nos permitirá identificar o conjunto $\mathbb{P}(X)$, das medidas de probabilidade nos borelianos de X, com um subconjunto do espaço $C(X)^*$. Com esta identificação podemos introduzir uma topologia em $\mathbb{P}(X)$ – com a qual $\mathbb{P}(X)$ é um espaço compacto – e deduziremos a existência de medidas invariantes para T.

Proposição 5.3.1. *Se X é um espaço métrico compacto, então $C(X)$ é separável.*

Prova. Pela Proposição 1.4.5 é suficiente mostrar que $C(X)$ tem uma base numerável de abertos. Sendo X um espaço métrico compacto, pela Proposição 1.4.6 tem uma base numerável de abertos, e portanto $X \times \mathbb{R}$ também tem uma base numerável de abertos. Seja $\mathcal{U}$ uma base numerável de abertos de $X \times \mathbb{R}$. Definindo $\mathcal{F}$ como a família das uniões finitas de abertos de $\mathcal{U}$ temos que $\mathcal{F}$ é numerável. Dado $W \in \mathcal{F}$, seja

$$\Gamma(W) = \{f \in C(X) : \operatorname{graf}(f) \subset W\}.$$

É fácil verificar que $\Gamma(W)$ é um aberto de $C(X)$. Vejamos que $\big(\Gamma(W)\big)_{W\in\mathcal{F}}$ é uma base (numerável) de abertos de $C(X)$. Queremos ver que dados $f \in C(X)$ e $\delta > 0$ existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $\Gamma(W) \subset B_\delta(f)$. Seja

$$A_\delta = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \colon |y - f(x)| < \delta\}.$$

A_δ é um aberto de $X \times \mathbb{R}$ que contém graf(f), e se $g \in C(X)$ é tal que graf$(g) \subset A_\delta$, então $g \in B_\delta(f)$. Para cada $(x, f(x)) \in$ graf(f), existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $U_x \subset A_\delta$. Como graf(f) é compacto, existem $x_1, \dots, x_1 \in X$ tais que graf$(f) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Tomando $W = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ temos $\Gamma(W) \subset B_\delta(f)$. □

Vimos no Teorema de Representação de Riesz que $\mathbb{P}(X)$ pode ser identificado com um subconjunto de $C(X)^*$, associando a cada $\mu \in \mathbb{P}(X)$ o funcional

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_\mu\colon & C(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int f d\mu. \end{array}$$

Mais precisamente, $\mathbb{P}(X)$ pode ser identificado com um subconjunto de $D^* = \{f \in C(X) \colon \|f\|_0 \le 1\}$. De facto, se $f \in C(X)$ é tal que $\|f\|_0 \le 1$, então

$$|\Lambda_\mu(f)| = \left|\int f d\mu\right| \le \int 1 d\mu = 1$$

e portanto $\Lambda_\mu \in D^*$. De agora em diante pensaremos muitas vezes em $\mathbb{P}(X)$ como um subconjunto de D^*, não fazendo distinção entre $\mu \in \mathbb{P}(X)$ e o funcional Λ_μ em D^* que lhe está associado.

Proposição 5.3.2. *$\mathbb{P}(X)$ é fechado em D^* com a topologia fraca*.*

Prova. Resulta das Proposições 3.4.3 e 5.3.1 que D^* com a topologia fraca* é metrizável. Logo, basta ver que se $(\mu_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathbb{P}(X)$ convergindo para $\mu \in C(X)^*$ na topologia fraca*, então $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Seja $(\mu_n)_n$ uma sucessão em $\mathbb{P}(X)$ convergindo para $\mu \in C(X)^*$ na topologia fraca*. Temos para cada $f \in C(X)$

$$\mu_n(f) \to \mu(f), \quad \text{quando } n \to \infty$$

(cf. Exercício 5.5.4). Se $f \geq 0$, então $\mu_n(f) \geq 0$ para todo n, e portanto $\mu(f) \geq 0$. Claramente, também $\mu(1) = 1$. Logo, pelo Teorema de Representação de Riesz, $\mu \in \mathbb{P}(X)$. □

Seja $T\colon X \to X$ uma transformação definida no espaço métrico compacto X. Podemos considerar uma transformação $T_*\colon \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ que associa a cada $\mu \in \mathbb{P}(X)$ a medida $T_*\mu \in \mathbb{P}(X)$.

Lema 5.3.3. *Se $f \in C(X)$, então*

$$\int f dT_*\mu = \int f \circ T d\mu.$$

Prova. Resulta da definição de $T_*\mu$ que para todo boreliano A de X

$$\int \mathcal{X}_A dT_*\mu = \int \mathcal{X}_A \circ T d\mu. \tag{5.2}$$

O resto da demonstração segue como na Proposição 5.1.7, generalizando (5.2) sucessivamente para funções simples, funções não negativas e funções contínuas (que estão em $L^1(\mu)$ pois X é compacto e μ é finita). □

Lema 5.3.4. *A função $T_*\colon \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ é contínua.*

Prova. Se $\mu_n \to \mu$ em $\mathbb{P}(X)$, então para toda $f \in C(X)$,

$$\int f dT^*\mu_n = \int f \circ T d\mu_n \to \int f \circ T d\mu = \int f dT^*\mu.$$

Isto mostra que $T_*\mu_n$ converge para $T_*\mu$ na topologia fraca*, donde concluímos que T_* é contínua. □

Teorema 5.3.5. *Sejam X um espaço métrico compacto e $T\colon X \to X$ uma transformação contínua. Então existe alguma $\mu \in \mathbb{P}(X)$ que é T-invariante.*

Prova. Seja μ uma medida qualquer em $\mathbb{P}(X)$ (por exemplo uma medida de Dirac). Consideremos a sucessão $(\mu_n)_n$ em $\mathbb{P}(X)$

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T_*^j\mu.$$

Sabemos pela Proposição 5.3.2 que $\mathbb{P}(X)$ é um espaço métrico compacto, e portanto $(\mu_n)_n$ tem alguma subsucessão $(\mu_{n_k})_k$ convergindo para alguma $\mu_0 \in \mathbb{P}(X)$. Temos para todo k

$$T_*\mu_{n_k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^{j+1}\mu = \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j\mu - \frac{1}{n_k}\mu + \frac{1}{n_k}T_*^{n_k}\mu.$$

Como estas duas últimas parcelas convergem para o funcional nulo de $C(X)^*$ quando $k \to \infty$, obtemos pela continuidade de T_*

$$T_*\mu_0 = \lim_{k\to\infty} T_*\mu_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j \mu = \mu_0.$$

Isto mostra que μ_0 é T-invariante. □

5.4 Ergodicidade

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Um conjunto $A \in \mathcal{A}$ diz-se T-**invariante**, se satisfizer $T^{-1}(A) = A$. Dizemos que T é **ergódica** (com respeito a μ), ou μ é uma **medida ergódica** (com respeito a T), se e só se todo conjunto T-invariante tem medida igual a 0 ou 1.

A ergodicidade de uma transformação traduz-se na impossibilidade de decompor o sistema em partes mais simples com algum significado (medida positiva) em termos da medida invariante. De facto, se T não é ergódica, então existe algum mensurável $A \subset X$ com $0 < \mu(A) < 1$ e $T^{-1}(A) = A$. Sendo $T^{-1}(A) = A$, temos então que $T(A) \subset A$ e $T(A^c) \subset A^c$, onde $A^c = X \setminus A$. Isto em particular implica que a órbita de qualquer ponto de A está contida em A e a órbita de qualquer ponto de A^c está contida em A^c. Além disso, temos as transformações mensuráveis

$$T|A\colon A \to A \quad \text{e} \quad T|A^c\colon A^c \to A^c$$

que preservam respectivamente as probabilidades $\mu(A)^{-1}\big(\mu|A\big)$ e $\mu(A^c)^{-1}\big(\mu|A^c\big)$.

Teorema 5.4.1. *Sejam X um espaço métrico compacto e μ uma probabilidade nos borelianos de X tal que $\mu(U) > 0$ para todo aberto U de X. Se $T\colon X \to X$ preserva μ e é ergódica, então quase todo ponto de X tem órbita densa.*

Prova. Como X é um espaço métrico compacto, existe $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base numerável da topologia de X. Definimos para cada $n \geq 1$

$$A_n = \{x \in X\colon T^j(x) \in U_n \text{ para infinitos valores de } j\}$$

Temos para cada n que A_n é um mensurável T-invariante. Como T é ergódica, terá que ser $\mu(A_n) = 0$ ou $\mu(A_n) = 1$. Sabemos pelo Teorema de Recorrência de Poincaré que $\mu(A_n) \geq \mu(U_n)$. Como μ é positiva em abertos, terá que ser $\mu(A_n) = 1$ para todo n. O conjunto $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ é constituído por pontos cuja órbita é densa e satisfaz $\mu(A) = 1$. □

A ergodicidade de uma transformação pode ser formulada em termos da constância das funções em $L^p(\mu)$ cujo valor não varia ao longo de órbitas, conforme mostra a proposição abaixo.

Proposição 5.4.2. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ e $1 \leq p \leq \infty$. São equivalentes:*

1. *T é ergódica.*

2. *Se $f \in L^p(\mu)$ é tal que $f \circ T = f$, então f é constante qtp.*

Prova. Suponhamos que T é ergódica. Se $f \in L^p(\mu)$ é tal que $f \circ T = f$, então dado $c \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$A_c = \{x \in X \colon f(x) \leq c\}$$

é T-invariante. Como T é ergódica terá que ser $\mu(A_c) = 0$ ou $\mu(A_c) = 1$ para todo c. Isto implica que f é constante qtp.

Vejamos agora que se vale a segunda condição, então T é ergódica. Se $A \in \mathcal{A}$ é T-invariante, então $\mathcal{X}_A$ pertence a $L^p(\mu)$ e satisfaz $\mathcal{X}_A \circ T = \mathcal{X}_A$. Logo, terá que ser $\mathcal{X}_A$ constante qtp, ou seja, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. □

Para o resultado que apresentamos a seguir consideramos o círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a rotação de ângulo α

$$\begin{array}{rccc} R_\alpha \colon & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & x & \longmapsto & x + \alpha. \end{array}$$

Como já foi referido no Exemplo 5.1.4 estas transformações preservam a medida de Lebesgue em S^1 (cf. Exercício 5.5.2).

Teorema 5.4.3. *Seja R_α uma rotação de ângulo α em S^1. R_α é ergódica (com respeito à medida de Lebesgue) se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Prova. Considerando S^1 como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, temos

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1.$$

Começamos por mostrar que se $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, então R_α não é ergódica. Em tal caso $f(x) = e^{2\pi i q x}$ satisfaz $f \circ R_\alpha = f$ e, no entanto, f não é constante.

Suponhamos agora que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e seja $f \in L^2[0,1]$ tal que $f \circ R_\alpha = f$. Considerando a decomposição de f na sua série de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

temos

$$f(R_\alpha(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n (x+\alpha)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i n x}.$$

Isto implica

$$\hat{f}(n) e^{2\pi i n \alpha} = \hat{f}(n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Como para $n \neq 0$ temos $n\alpha \notin \mathbb{Q}$, terá que ser $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \neq 0$. Ou seja, f é constante. Pela Proposição 5.4.2 concluímos que T é ergódica. $\square$

Consideremos agora o operador U_T introduzido na Secção 5.1. Tendo em conta o Corolário 5.1.8, podemos considerar U_T como um operador em $L^2(\mu)$,

$$\begin{array}{rccc} U_T\colon & L^2(\mu) & \longrightarrow & L^2(\mu). \\ & f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Resulta da Proposição 5.1.7 que se $f, g \in L^2(\mu)$ então

$$\int U_T(f)\overline{U_T(g)}d\mu = \int U_T(f.\overline{g})d\mu = \int f\overline{g}d\mu.$$

Isto mostra que U_T é uma isometria no espaço de Hilbert $L^2(\mu)$.

Teorema 5.4.4. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Se $f \in L^2(\mu)$, então existe $f^* \in L^2(\mu)$ com $f^* \circ T = f^*$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j - f^* \Big\|_2 = 0.$$

Além disso, se T é ergódica, então $f^* = \int f d\mu$.

Prova. A existência de $f^* \in L^2(\mu)$ com as propriedades enunciadas é consequência de U_T ser uma isometria e do Teorema 4.5.4. Passemos à prova da segunda parte. Sendo T ergódica, e uma vez que $f^* \circ T = f^*$, terá que ser f^* constante, pela Proposição 5.4.2. Basta então ver que $\int f^* d\mu = \int f d\mu$. Definindo, para $n \geq 1$,

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j,$$

temos para todo $n \geq 1$

$$\int f_n d\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int f \circ T^j d\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int f d\mu = \int f d\mu.$$

Daqui resulta

$$\Big| \int f d\mu - \int f^* d\mu \Big| = \Big| \int f_n d\mu - \int f^* d\mu \Big| \leq \int |f_n - f^*| d\mu \leq \|f_n - f^*\|_2 \, \|1\|_2,$$

sendo esta última desigualdade consequência da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como isto vale para todo $n \geq 1$, temos demonstrado o que pretendemos. $\square$

Proposição 5.4.5. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. São equivalentes:*

1. *T é ergódica.*

2. *Se $A, B \in \mathcal{A}$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\big(T^{-j}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B)$.*

Prova. Suponhamos que T é ergódica. Aplicando o Teorema 5.4.4 a $\mathcal{X}_A$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_A \circ T^j = \int \mathcal{X}_A d\mu = \mu(A),$$

onde o limite é tomado no sentido da convergência em $L^2(\mu)$. Temos então

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \int \mu(A)\mathcal{X}_B d\mu \\ &= \int \big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_A \circ T^j\big)\mathcal{X}_B d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \mathcal{X}_A \circ T^j \mathcal{X}_B d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \mathcal{X}_{T^{-j}(A)} \mathcal{X}_B d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\big(T^{-j}(A) \cap B\big) \end{aligned}$$

Para a terceira igualdade na sequência acima, notar que $\mathcal{X}_B$ é uma função real e o produto interno em $L^2(\mu)$ é contínuo.

Suponhamos agora que vale a segunda condição, e seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A$. Temos então

$$\mu(A)\mu(A) = \lim \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\big(T^{-j}(A) \cap A\big) = \lim \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A) = \mu(A).$$

Logo, $\mu(A)^2 = \mu(A)$, o que implica $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. □

Damos a seguir um exemplo de interpretação do limite na na segunda condição da proposição anterior.

Exemplo 5.4.6. *Suponhamos que temos num recipiente X com água uma mancha de tinta azul numa certa região A e uma mancha de tinta branca numa outra região B. Consideremos em X uma transformação T que consiste em agitar o líquido no recipiente. Se $\mu(B) > 0$, dizer que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\big(T^{-j}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B)$$

é equivalente a dizer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mu\big(T^{-j}(A) \cap B\big)}{\mu(B)} = \mu(A). \tag{5.3}$$

O quociente

$$\frac{\mu\big(T^{-j}(A) \cap B\big)}{\mu(B)}$$

representa a proporção de tinta azul existente na região B depois de agitar j vezes. A igualdade (5.3) significa que, em média, a proporção de tinta azul na região B se aproxima da proporção que a região A ocupa no recipiente X.

Dadas $T\colon X \to X$, uma transformação que preserva uma probabilidade μ no espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$, e uma função $f \in L^2(\mu)$, o Teorema 5.4.4 mostra a convergência em $L^2(\mu)$ da média

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^n$$

para alguma função $f^* \in L^2(\mu)$. Contudo, fixado $x \in X$, o Teorema 5.4.4 nada diz sobre a convergência pontual da média

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^n(x).$$

De facto, pode-se provar um resultado mais geral que assegura também a existência da média assimptótica para quase todo ponto $x \in X$.

Teorema 5.4.7. (Ergódico de Birkhoff) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Se $f \in L^1(\mu)$, então existe $f^* \in L^1(\mu)$ com $f^* \circ T = f^*$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^n(x) = f^*(x) \tag{5.4}$$

para quase todo $x \in X$. Além disso, se T é ergódica, então $f^* = \int f d\mu$.

É imediato verificar que se o limite em (5.4) existe para algum ponto $x \in X$, então também existe para $T(x)$ e coincide com o limite para x, donde se deduz que $f^* \circ T = f^*$. A conclusão de que f^* coincide com a média de f, no caso da ergodicidade de T, vem assim como consequência da Proposição 5.4.2. Para a prova da existência do limite em quase todo ponto, sugerimos [8] ou [17].

Consideremos um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $T\colon X \to X$ uma transformação que preserva μ. Dados $A \in \mathcal{A}$ e $x \in X$, definimos o **tempo médio de estadia** de x em A como

$$\tau(x, A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \le j < n\colon T^j(x) \in A\}}{n}.$$

Pelo Teorema de Birkhoff este limite existe em quase todo ponto, pois

$$\frac{\#\{0 \le j < n\colon T^j(x) \in A\}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_A\big(T^j(x)\big)$$

e portanto

$$\tau(x, A) = \mathcal{X}_A^*(x).$$

Se adicionalmente supusermos que a transformação T é ergódica, então temos para todo $A \in \mathcal{A}$ e quase todo $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \le j < n\colon T^j(x) \in A\}}{n} = \mu(A).$$

Isto é, para uma transformação ergódica, a frequência de visitas da órbita de quase todo ponto $x \in X$ a um conjunto $A \in \mathcal{A}$ coincide com a medida de A. Na verdade isto é equivalente a dizer que a transformação T é ergódica: se $A \in \mathcal{A}$ é T-invariante, então temos $\tau(x, A) = 1$ para todo $x \in A$. Se $\mu(A) > 0$ então terá que ser $\mu(A) = 1$ e temos provada a ergodicidade de T.

Damos agora um resultado que ilustra como o Teorema Ergódico de Birkhoff pode ser aplicado à teoria dos números. Dizemos que um número $[0, 1]$ é **normal** na base 2, se a frequência de 0's e 1's na sua decomposição binária for igual a $1/2$.

Teorema 5.4.8. *Quase todo número em* $[0, 1]$ *é normal na base 2.*

Prova. Seja $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $T(x) = 2x \pmod 1$. Vimos no Exemplo 5.1.3 que T preserva λ, a medida de Lebesgue. Além disso, T é ergódica (cf. Exercício 5.5.9). Seja A o conjunto dos pontos que têm uma única expansão binária. Como o complementar de A é numerável, temos $\lambda(A) = 1$. Para um ponto

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots \quad \text{com} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

que tenha uma única expansão binária temos

$$T(x) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots .$$

Considerando $f = \mathcal{X}_{(1/2,1]}$, temos

$$f\big(T^j(x)\big) = f\left(\frac{a_{j+1}}{2} + \frac{a_{j+2}}{2^2} + \cdots\right) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a_{j+1} = 1 \\ 0 & \text{se} \quad a_{j+1} = 0 \end{cases}$$

Logo, para $x \in A$ vem

$$\#\{1 \leq j \leq n \colon a_j = 1\} = \sum_{j=0}^{n-1} f\big(T^j(x)\big).$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por n e aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff obtemos

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\big(T^j(x)\big) \to \int f d\lambda = \frac{1}{2} \quad \text{qtp.}$$

Isto dá o resultado. $\square$

5.5 Exercícios

1. Mostre que a transformação de Gauss preserva a medida μ definida no Exemplo 5.1.5. (Sugestão: comece por provar que $\mu\big(G^{-1}([0,a))\big) = \mu([0,a))$ para todo $a \in [0,1]$).

2. Explicite uma semi-álgebra que permita definir a medida de Lebesgue nos borelianos de S^1. Mostre que as rotações de S^1 preservam a medida de Lebesgue.

3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $T : X \to X$ uma transformação que preserva μ. Mostre que se $f \in L^\infty(\mu)$ então $U_T(f) \in L^\infty(\mu)$ e $\|U_T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$.

4. Sejam X um espaço compacto e $(\mu_n)_n$ uma sucessão em $\mathbb{P}(X)$. Mostre que $(\mu_n)_n$ converge para $\mu \in \mathbb{P}(X)$ na topologia fraca* se e só se $\mu_n(f)$ converge para $\mu(f)$, qualquer que seja $f \in C(X)$.

5. Seja $T : X \to X$ uma transformação do espaço métrico compacto X. Mostre que se $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{P}(X)$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, então

$$T_*(\alpha_1\mu_1 + \cdots + \alpha_n\mu_n) = \alpha_1 T_*(\mu_1) + \cdots + \alpha_n T_*(\mu_n).$$

6. Considere a transformação $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por $T(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $T(0) = 1$. Seja μ uma medida de probabilidade T-invariante. Mostre que:

   (a) $\mu(]0,1[) = 0$.

   (b) $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$.

   (c) Para todo $x \in [0,1]$ a sucessão de medidas $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x)}$ converge na topologia fraca* para μ.

7. Considere a transformação $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por $T(x) = x/2$ se $x \neq 0$ e $T(0) = 1/2$.

   (a) Mostre que T não preserva nenhuma medida finita.

   (b) Prove que para todo $x \in [0,1]$ a sucessão de medidas $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x)}$ converge para δ_0 na topologia fraca*.

8. Considere a transformação $T\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $T(x) = x/2 + 1/2$ e μ uma probabilidade T-invariante.

   (a) Mostre que $\mu\big([0,1[\big) = 0$.

   (b) Conclua que μ coincide com a medida de Dirac δ_1 concentrada no ponto 1.

   (c) Prove que para todo o $x \in [0,1]$ a sucessão de medidas $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x)}$ converge para δ_1 na topologia fraca*.

   (d) Diga se T é ergódica com respeito a μ.

9. Mostre que a transformação $T : [0,1] \to [0,1]$ definida por $T(x) = 2x \pmod 1$ é ergódica. (Sugestão: Use séries de Fourier).

10. Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por $T(x) = 10x \pmod 1$.

    (a) Mostre que a medida de Lebesgue λ em $[0,1]$ é T-invariante.

    (b) Mostre que λ é ergódica. (Sugestão: use séries de Fourier)

11. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva μ. Dizemos que T é *misturadora*, se para todos $A, B \in \mathcal{A}$ vale
$$\lim_{n\to+\infty} \mu\big(T^{-n}(A) \cap B\big) = \mu(A)\mu(B).$$
    Mostre que:

    (a) Toda a transformação misturadora é ergódica.

(b) As rotações do círculo não são misturadoras.

(c) T é misturadora se e somente se para todas $f, g \in L^2(\mu)$ tivermos

$$\lim_{n \to +\infty} \langle U_T^n(f), g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle.$$

Bibliografia

[1] G. de Barra, *Introduction to Measure Theory.*

[2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis.*

[3] B. Epstein, *Linear Functional Analysis*

[4] P. J. Fernandez, *Medida e Integração.*

[5] C. S. Hönig, *Aplicações da Topologia à Análise.*

[6] E. L. Lima, *Espaços Métricos.*

[7] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral.*

[8] R. Mañé, *Teoria Ergódica.*

[9] R. Meise & D. Vogt, *Introduction to Functional Analyis.*

[10] E. W. Packel, *Functional Analysis.*

[11] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces.*

[12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.*

[13] M. Reed & B. Simon, *Functional Analysis.*

[14] L. A. Steen & J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology.*

[15] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analyis.*

[16] J. Thayer, *Operadores Auto-adjuntos e Equações Diferenciais Parciais.*

[17] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory.*

[18] K. Yosida, *Functional Analysis.*

Índice