Descobrir Matemática com a Música

realizado na **Casa da Música** em Outubro 2007

O conceito principal deste workshop é o de simetria - a base de todos os padrões, na arte, na ciência, na natureza, e portanto também nos padrões musicais - e a sua realização matemática através da noção de grupo.

Nestas folhas poderás encontrar um resumo dos temas tratados no workshop, assim como uma série de tarefas que poderás realizar de modo a consolidar e aprofundar as noções matemáticas apresentadas. Podes encontrar o workshop no endereço http://www.fc.up.pt/cmup/matmusica/workshop/

*Estudar **Matemática** na FCUP*

convidamos-te a visitar o site:

http://www.fc.up.pt/mat

CMUP
Centro de **Matemática**
Universidade do Porto

Exemplo 1

Construir uma melodia usando apenas 3 notas com a mesma duração e satisfazendo as regras seguintes:

> ***R1*** na melodia têm que aparecer as 3 notas ordenadas de todas as formas possíveis
>
> ***R2*** cada uma das ordenações das 3 notas só pode aparecer uma única vez (chamaremos série a cada uma dessas ordenações)

Essa construção deverá ser feita de forma determinista, isto é, usando um conjunto de instruções bem definidas. E o menor número possível de instruções para que o processo não fique demasiado complicado.

Designemos as três notas por: X Y Z

Existem 6 modos distintos de ordenar estas 3 notas:

X	Y	Z	Y	Z	X
X	Z	Y	Z	X	Y
Y	X	Z	Z	Y	X

Construção de uma melodia de forma determinista

começar com X Y Z

instrução ***a***: trocar as posições das duas primeiras notas

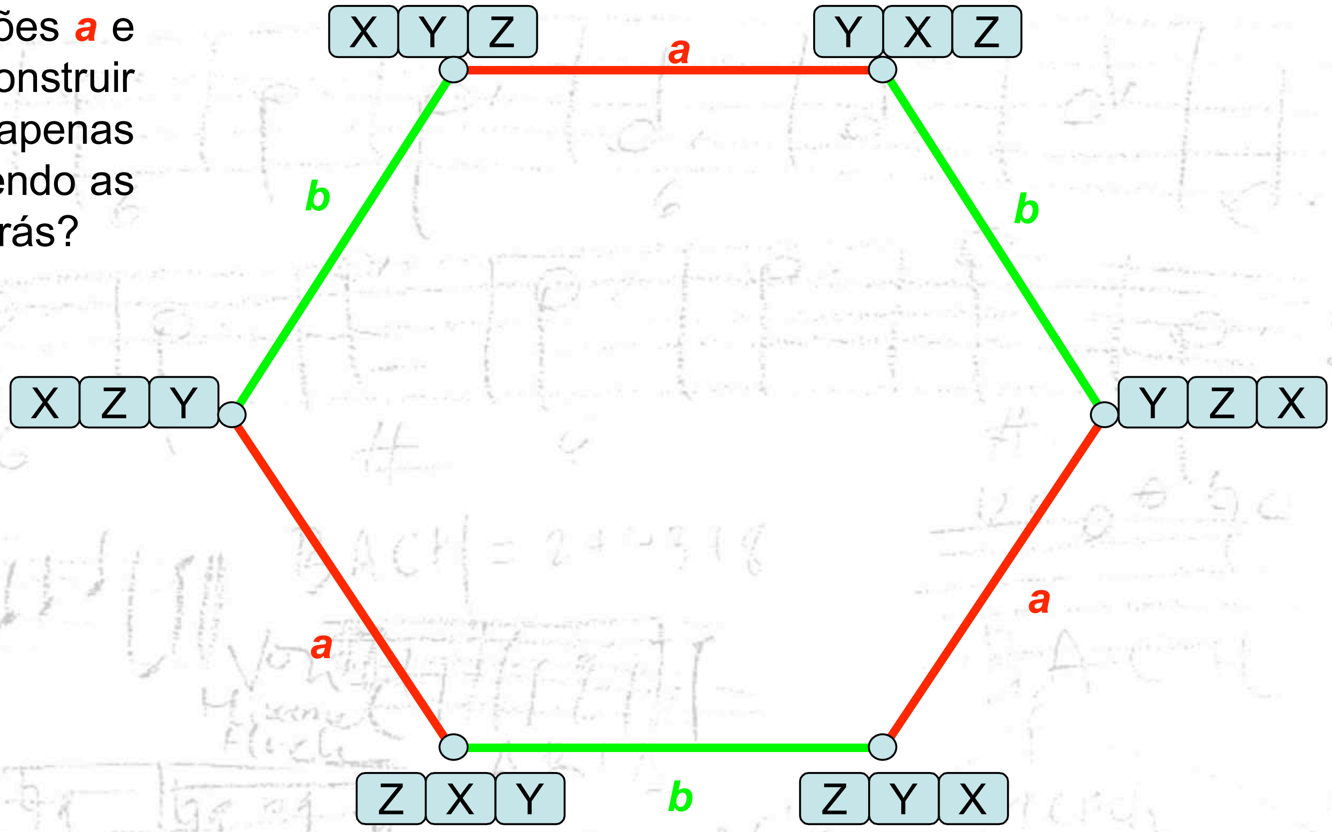
$$X\ Y\ Z \xrightarrow{a} Y\ X\ Z$$

instrução ***b***: trocar as posições das duas últimas notas

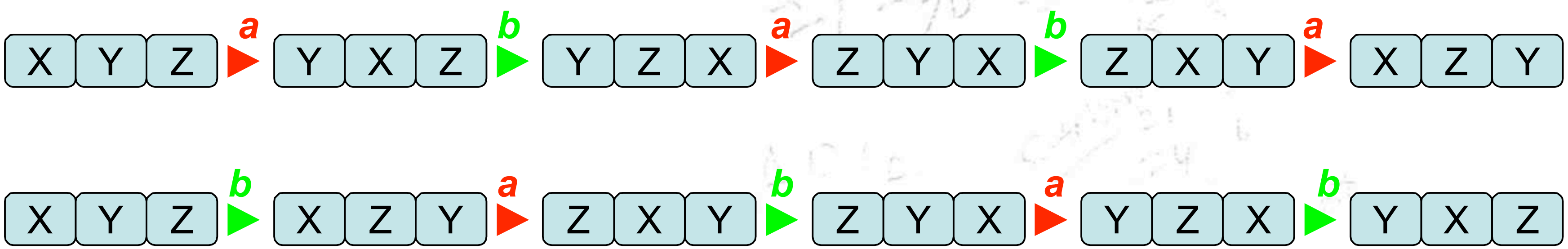
$$X\ Y\ Z \xrightarrow{b} X\ Z\ Y$$

Note-se que ***aa*** =***e*** e ***bb***=***e*** sendo a instrução *e*: não fazer nada

Usando as instruções ***a*** e ***b***, será possível construir uma melodia com apenas 3 notas e satisfazendo as regras descritas atrás?



Começando com a série XYZ, existem apenas 2 melodias nas condições anteriores:



Mas existem mais instruções que poderemos dar:

trocar a primeira com a última posição aba (ou bab)

trocar todas as posições ab e ba

Existem portanto 6 instruções distintas que podemos seguir para obtermos todas as séries de 3 notas: e a b aba ab ba. E qualquer combinação de duas
destas operações dá novamente uma delas:

	e	a	b	aba	ab	ba
e	e	a	b	aba	ab	ba
a	a	e	ab	ba	b	aba
b	b	ba	e	ab	aba	a
aba	aba	ab	ba	e	a	b
ab	ab	aba	a	b	ba	e
ba	ba	b	aba	a	e	ab

Esta “máquina” de instruções constitui aquilo a que os matemáticos chamam de ***grupo***.

Um ***grupo*** é um conjunto de objectos (neste caso instruções) que podem ser combinados entre si (através de uma operação •) de forma a obter novamente um elemento desse conjunto (neste caso a aplicação consecutiva de instruções) e satisfazendo 3 regras:

1. existência de um objecto especial, o “não faz nada” ***e*** $\quad e \bullet g = g \bullet e = g$

2. cada um dos objectos tem um “par” que combinado consigo conduz ao “não faz nada” $\quad g \bullet h = h \bullet g = e$

   ex: $a \bullet a = e \qquad b \bullet b = e \qquad (ab)\,(ba) = e$

3. a operação • é associativa (a ordem pela qual agrupamos as operações é irrelevante $\quad g \bullet (h \bullet i) = (g \bullet h) \bullet i$

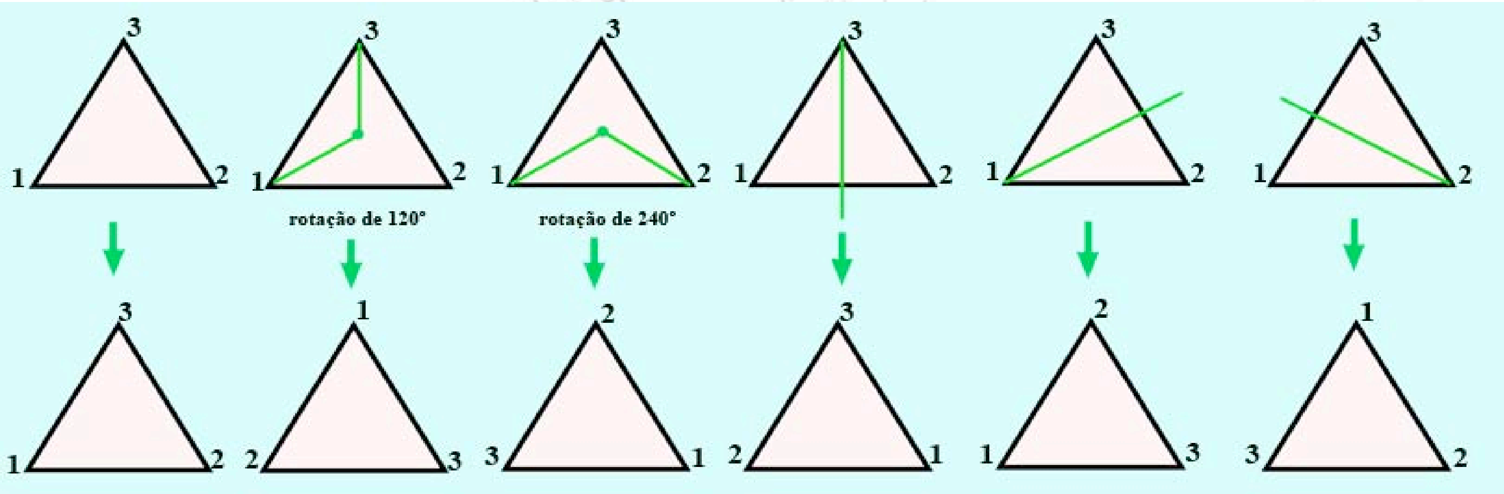
Tarefa 1: Usando a tabela da página anterior, verifica que cada uma das instruções tem um par nas condições de 2.

Geradores de um grupo: conjunto de objectos que podem ser usados para obter todos os outros elementos do grupo. ***a*** ***b***

O conjunto constituído pelas 6 instruções: *e* ***a*** ***b*** ***aba*** ***ab*** ***ba*** e pela operação • é um ***grupo***, onde *g•h* significa aplicar a instrução *h* e a seguir a instrução *g*.

Tarefa 2: Recorrendo à tabela da página 5, verifica a veracidade da afirmação acima.

Esse grupo (constituído pelas 6 instruções) é também o grupo das simetrias de um triângulo equilátero:



e ***ba*** ***ab*** ***a*** ***b*** ***aba***

Exemplo 2

Construir uma melodia usando 4 notas com a mesma duração e satisfazendo as regras seguintes:

R1 na melodia têm que aparecer as 4 notas ordenadas de todas as formas possíveis

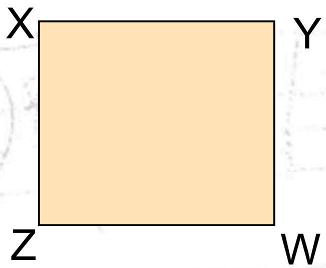
R2 cada uma das ordenações das 4 notas só pode aparecer uma única vez

Designemos as quatro notas por: X Y Z W

Existem 24 maneiras distintas de ordenar estas 4 notas e portanto a situação é mais complicada. Se pretendermos construir uma melodia de forma determinista como no caso anterior, poderemos colocar a seguinte questão:

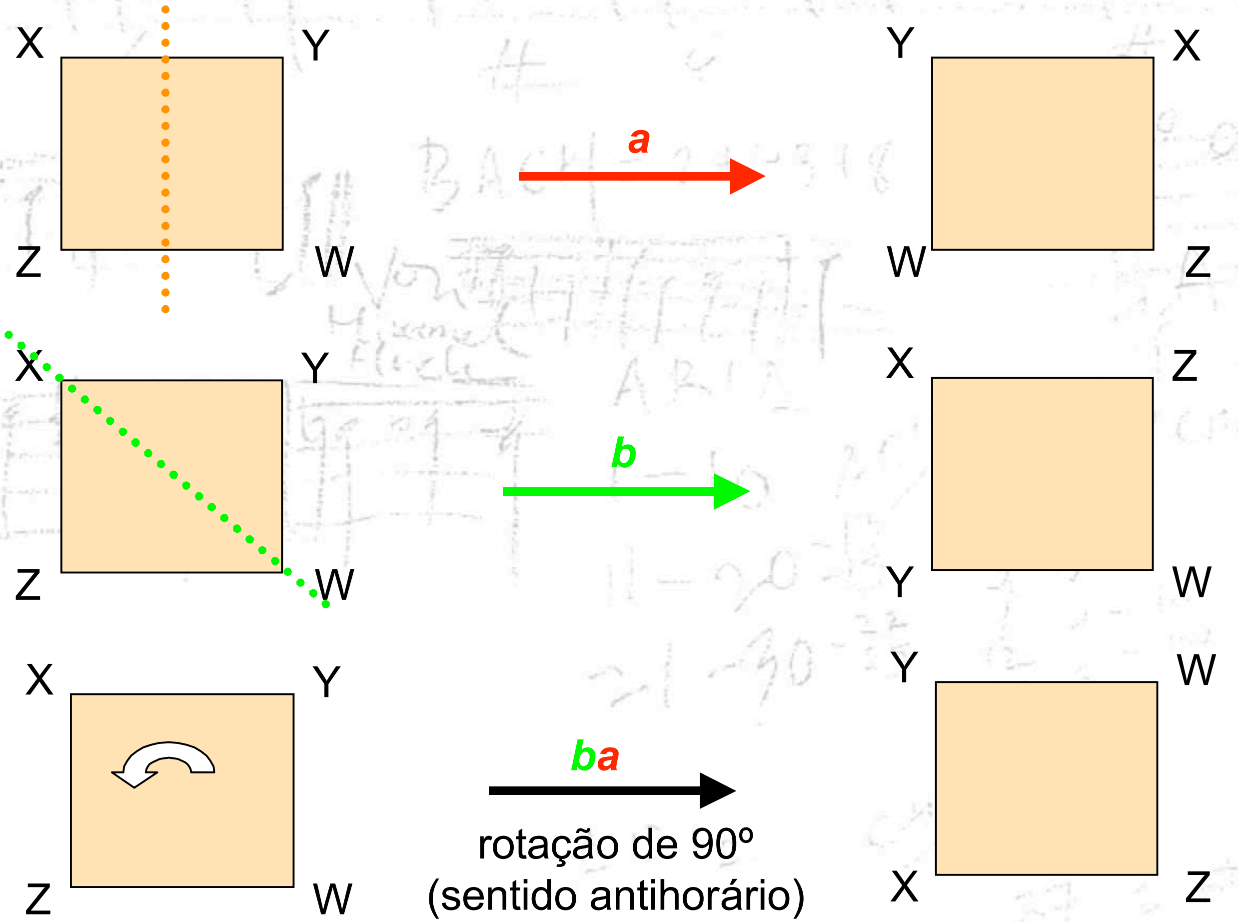
Qual o número mínimo de instruções necessárias para construir a melodia?

Temos agora 4 notas para ordenar. Inspirados no exemplo anterior iremos considerar essas 4 notas como os vértices de um quadrado.



O quadrado tem 8 simetrias, 4 de reflexão e 4 de rotação.

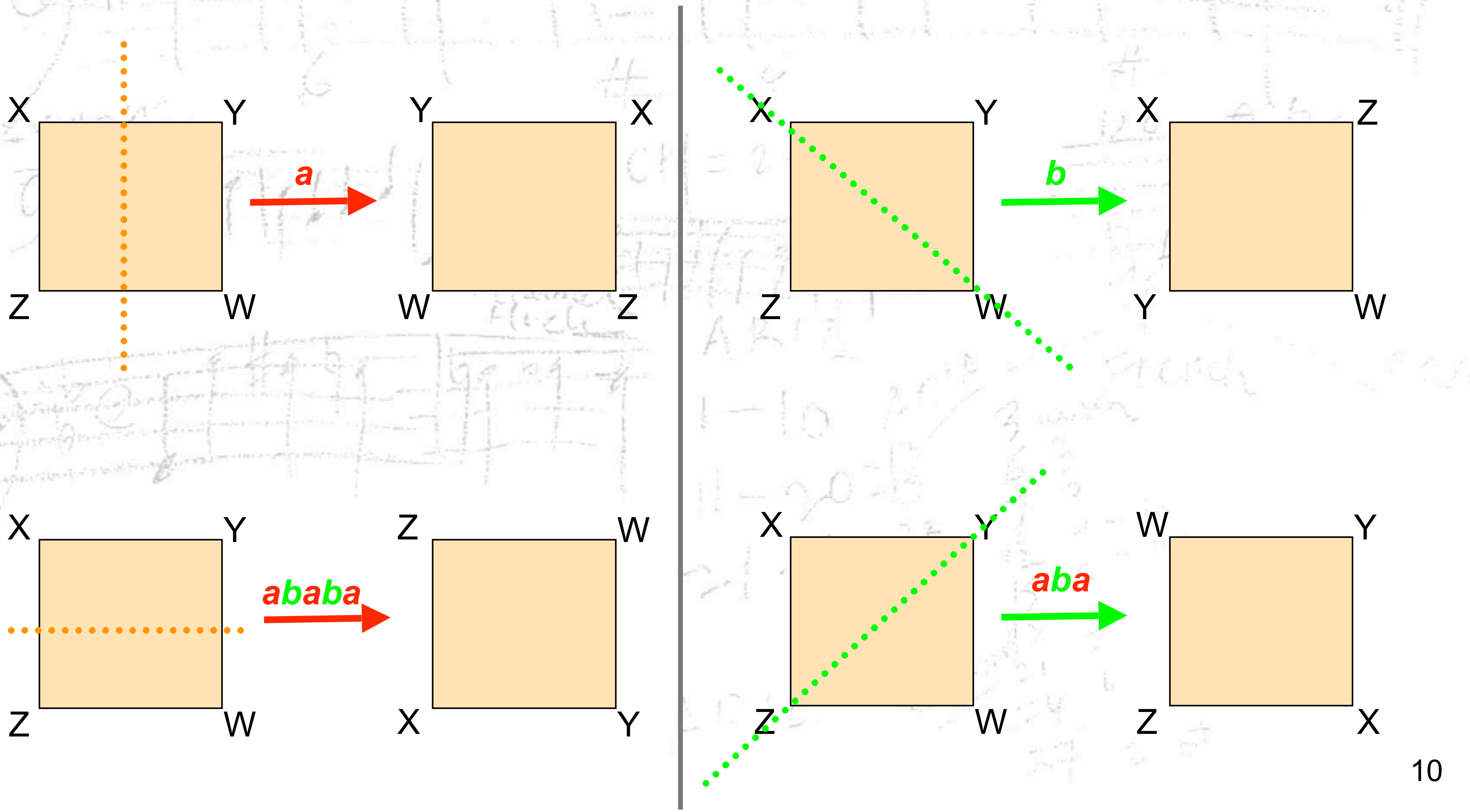
Consideremos as simetrias seguintes:



Combinando as simetrias *a* e *b* conseguimos obter todas as 8 simetrias do quadrado.

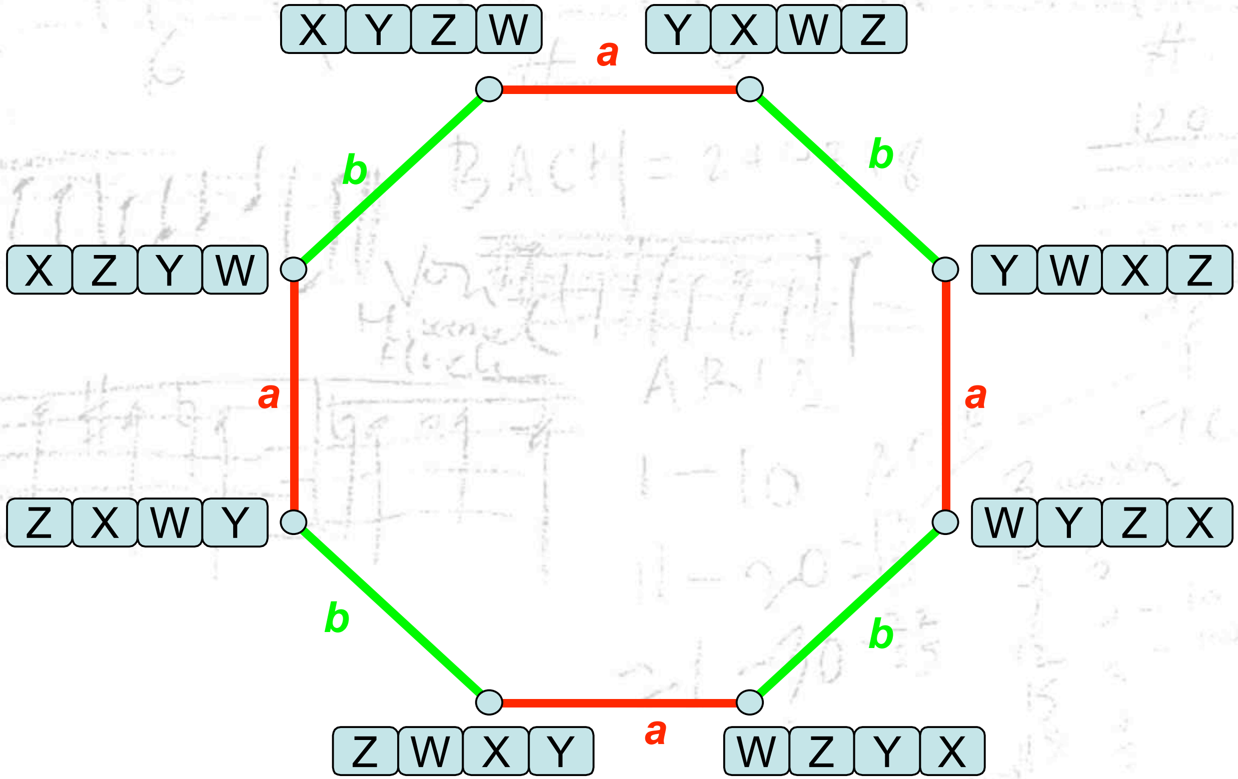
Rotações: de 90º: ***ba*** de 180º: ***baba*** de 270º: ***bababa*** de 360º: ***babababa*** =e

Reflexões:



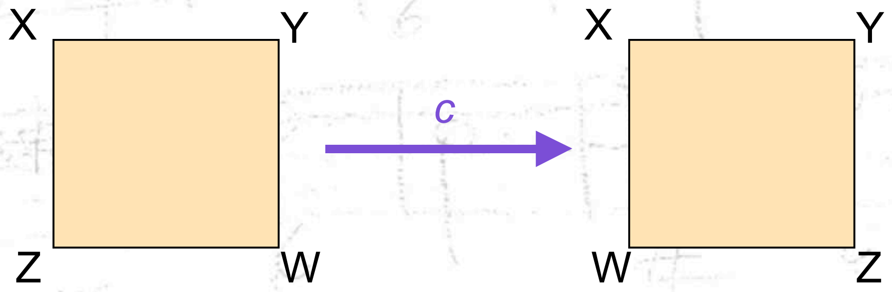
Tarefa 3: Constrói uma tabela análoga à da página 5 correspondente às 8 simetrias do quadrado. Verifica que se trata efectivamente de um grupo.

Note-se que ***aa*** =***e*** e ***bb*** =***e***. Assim para construir a melodia terá que se aplicar ***a*** e ***b*** alternadamente:



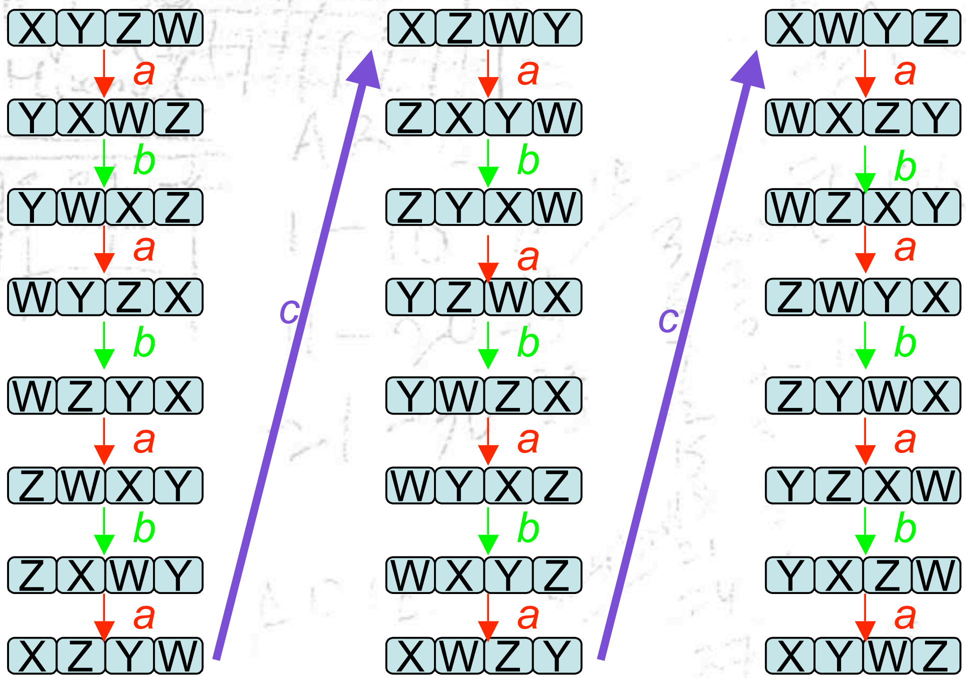
Não é possível construir a melodia com apenas estas duas instruções, pois não é possível obter as 24 séries de 4 notas.

Para construirmos a melodia necessitaremos de pelo menos mais uma instrução. E esta instrução não poderá corresponder a uma simetria do quadrado:



troca da 3ª e 4ª posições

Construção da melodia:



E poderemos avançar para exemplos mais complicados com um maior número de notas. Mas…Quanto tempo demoraria a tocar uma melodia com as regras propostas?

Supondo que tocamos 30 séries por minuto:

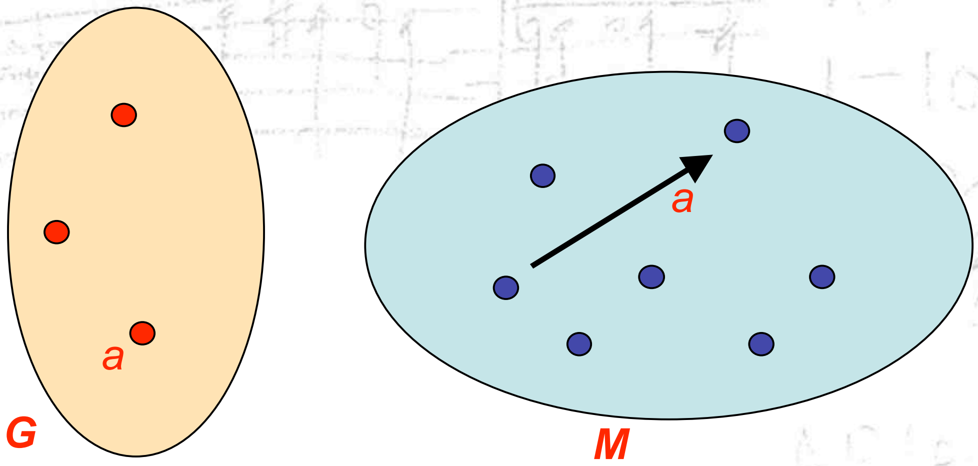
número de notas n	número de séries n!	duração aprox. da melodia
3	6	12 segundos
4	24	48 segundos
6	720	24 minutos
8	40 320	22 horas
10	3 628 800	84 dias
12	479 001 600	30 anos e meio
16	20 922 789 888 000	1 330 000 anos

Os matemáticos tentam generalizar as situações concretas que estudam de modo a colocá-las no âmbito de uma teoria mais geral que explique essas e outras situações aparentemente distintas. Nos dois exemplos anteriores o que há de essencial?

→ Um conjunto de séries de notas. Mas poderiam ser outros objectos musicais. Por exemplo células rítmicas, acordes, etc…

M={objectos musicais}

→ Um grupo G gerado por instruções a, b,… que actuam nos objectos musicais de M transformando-os uns nos outros.



Alguns exemplos ilustrativos →

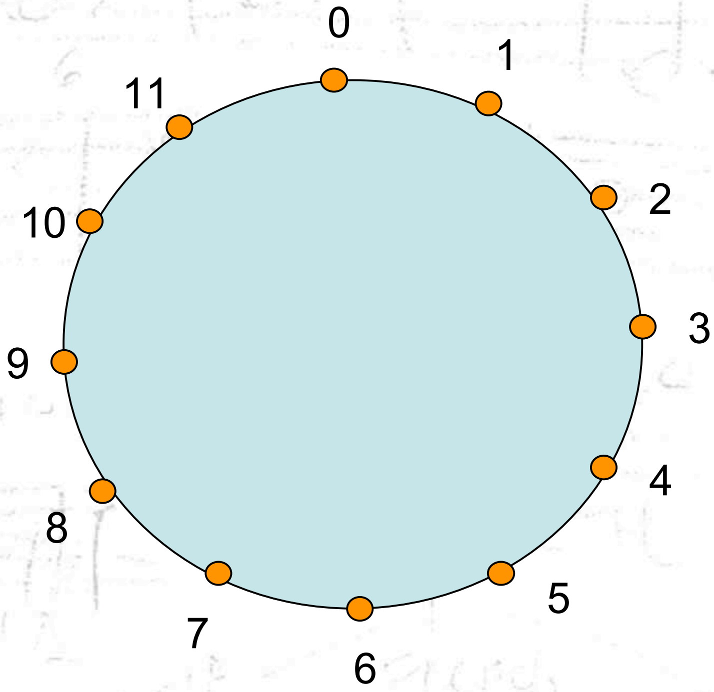
1. Círculo das quintas

Para apresentar *M* necessitaremos primeiro de um pouco de "*aritmética do relógio*".

Pensemos num relógio com 0 na posição das 12 horas:

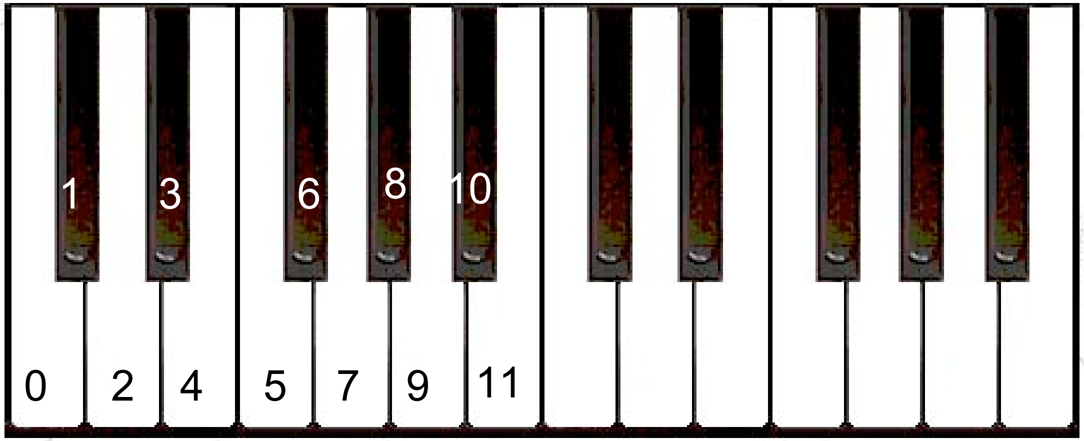
$1+2=3$	mod 12	$3-1=2$	mod 12
$11+1=0$	mod 12	$1-2=11$	mod 12
$11+2=1$	mod 12	$0-3=9$	mod 12

etc…



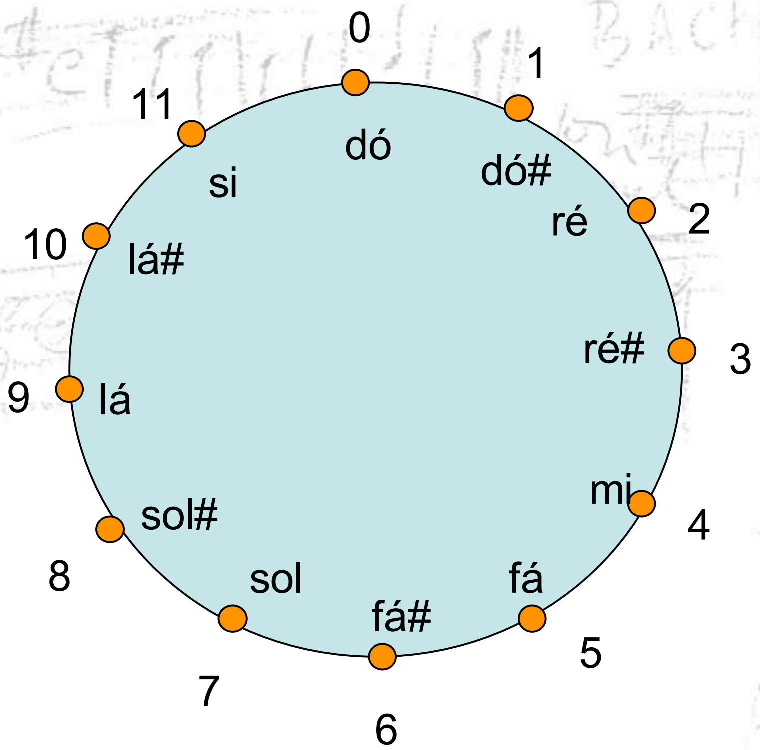
$\boldsymbol{Z}_{12}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ é chamado conjunto dos inteiros módulo 12.

Tarefa 4: Mostra que $\boldsymbol{Z}_{12}$ com a operação de adição módulo 12 é um grupo.



M

classes dos 12 (semi)tons cromáticos sob igual temperamento, obtidas através de equivalência por oitavas



modelo matemático

$\boldsymbol{M} = \mathbf{Z}_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

adição módulo 12

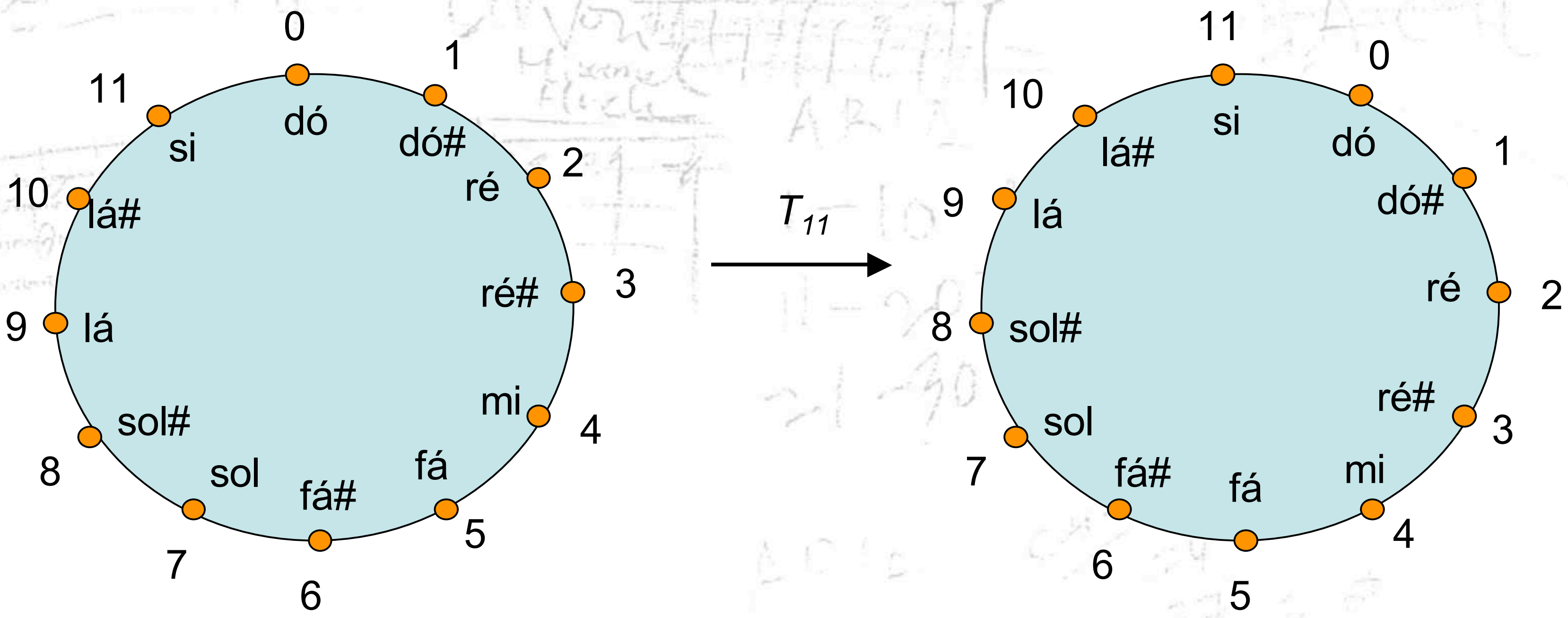
Que tipo de transformações se podem fazer em $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Z}_{12}$?

Transposições e ***Inversões*** são duas transformações muito utilizadas por músicos.

Transposição:

A função T_n: $\boldsymbol{Z}_{12} \longrightarrow \boldsymbol{Z}_{12}$ definida por $T_n(x)=x+n \mod 12$

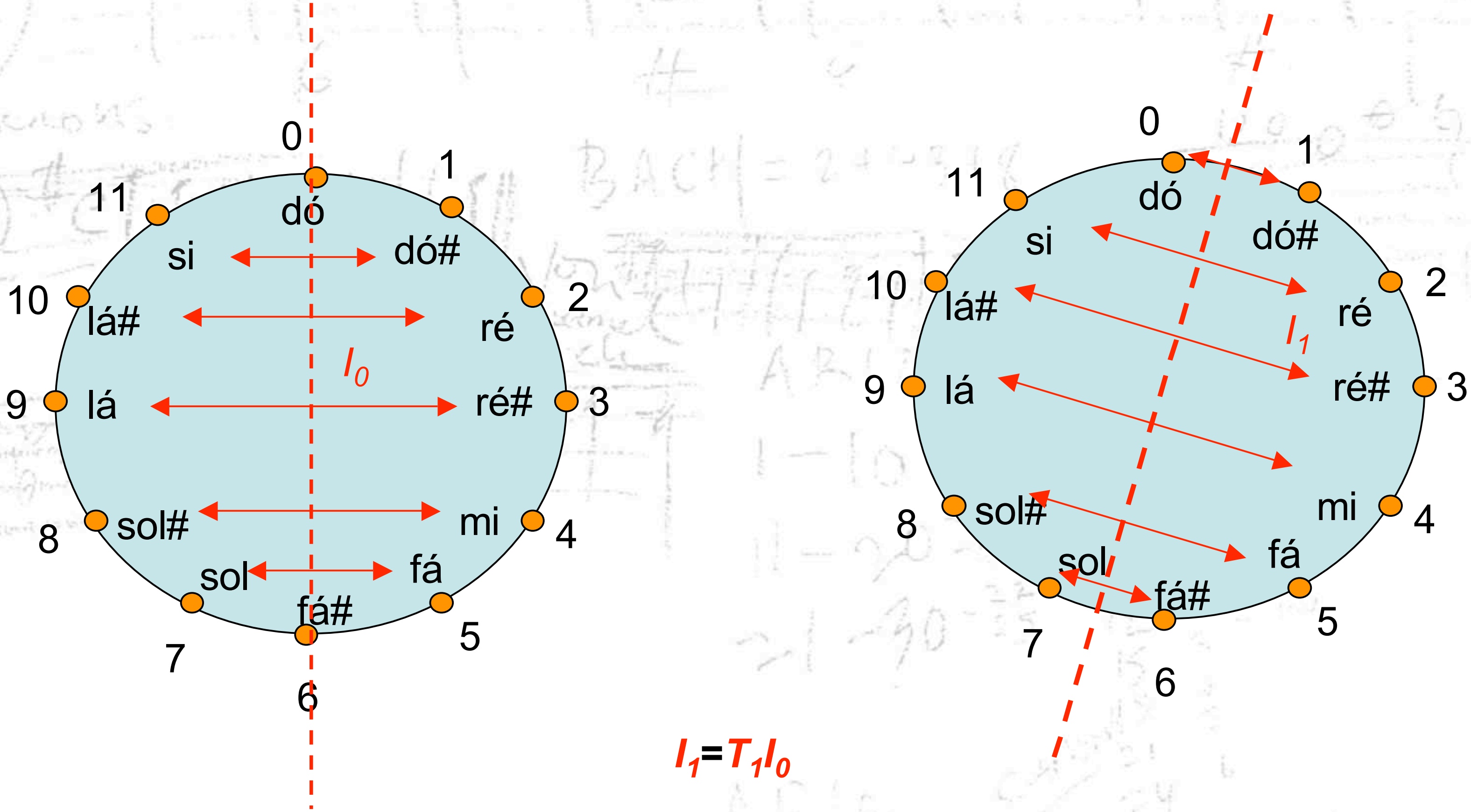
é chamada ***transposição*** pelos músicos e **translação** pelos matemáticos.



Inversão:

A função I_n: $\mathbf{Z}_{12} \longrightarrow \mathbf{Z}_{12}$ definida por $I_n(x) = -x+n \mod 12$

é chamada ***inversão*** pelos músicos e **reflexão** pelos matemáticos.



$I_1 = T_1 I_0$

Podemos encontrar transposições e inversões por exemplo em:

Fugue No.6 in D minor, The Well-Tempered Clavier Book I
de **Johann Sebastian Bach** (1685-1750)

Uma fuga começa usualmente com um tema principal que se repete várias vezes sob diferentes formas. Numa fuga podemos encontrar ocorrências de transposição e inversão.

tema: <ré,mi,fá,sol,mi,fá,ré,dó#,ré,lá#,sol,lá> = <2,4,5,7,4,5,2,1,2,10,7,9>

$T_7 P$ = <9,11,0,2,11,0,9,8,9,5,2,4> $I_6 P$ = <4,2,1,11,2,1,4,5,4,8,11,9>

De facto não é exactamente $I_6 P$ que podemos ouvir mas sim duas séries muito parecidas, diferindo apenas nas 3 últimas notas :

<4,2,1,11,2,1,4,5,4,9,0,10> e <4,2,1,11,2,1,4,5,4,7,10,9>

Explora em http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/bachindex.html

Tarefa 5: Usa o modelo $\boldsymbol{Z}_{12}$ para reescrever a seguinte melodia na "*Canção do Toreador*" no 2º acto da ópera *Carmen* de Bizet:

$$P= \langle \text{dó, ré, dó, lá, lá, lá, sol, lá, lá\#, lá, lá\#, sol, dó} \rangle$$

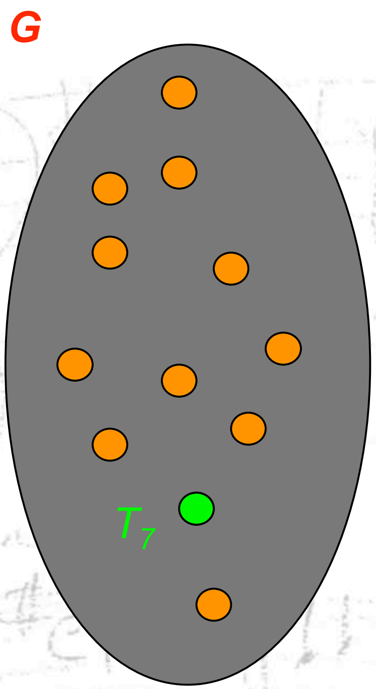
e calcula $I_6(P)$, e $T_4(P)$.

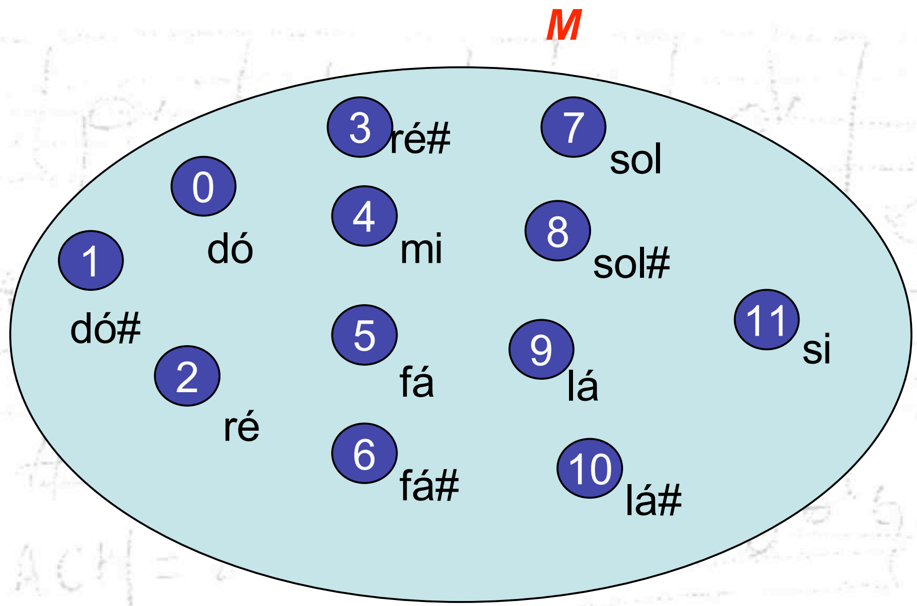
O conjunto $\boldsymbol{G}$ de todas as transposições em $\boldsymbol{Z}_{12}$ com a operação definida como na pág.7 constitui um grupo.

$$G=\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}\}$$

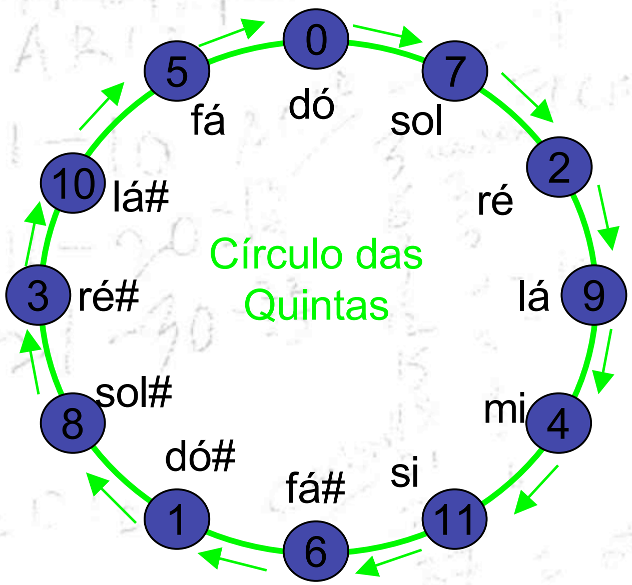
$\boldsymbol{T_7}$ é um gerador do grupo $\boldsymbol{G}$

Tarefa 6: Mostra que T_7 é de facto um gerador do grupo de todas as transposições em $\boldsymbol{Z}_{12}$.



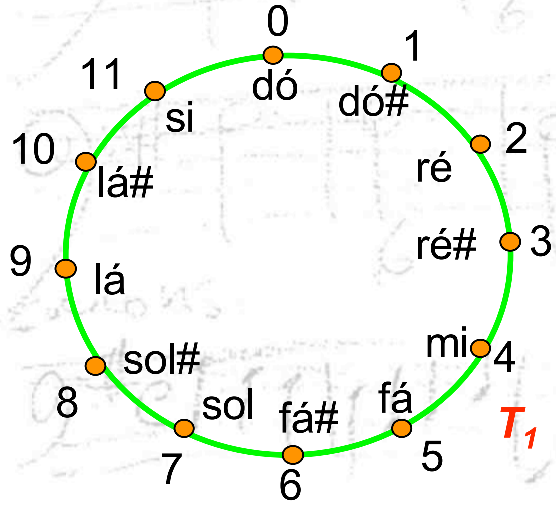


Começando com dó e aplicando
T_7 sucessivamente:

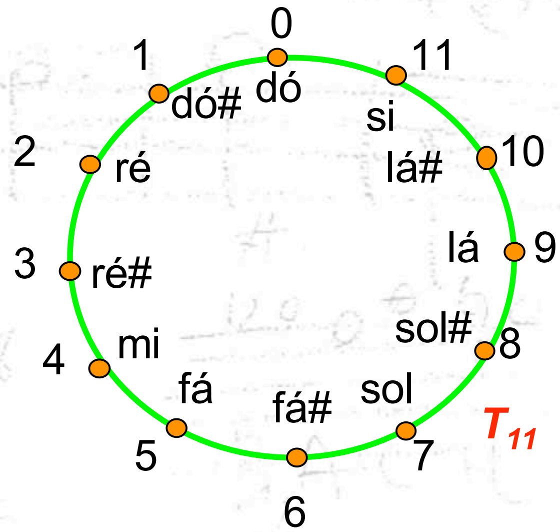


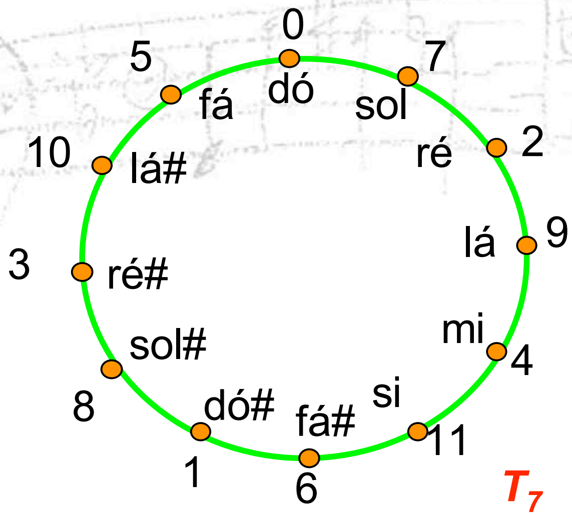
(uma *quinta justa* ou *quinta perfeita* é o intervalo entre duas notas musicais correspondente a um intervalo de 7 meios tons)

Existem apenas 4 maneiras distintas de dispôr as 12 notas de ***M*** sobre um círculo de tal modo que o intervalo entre duas notas consecutivas no círculo seja sempre o mesmo:

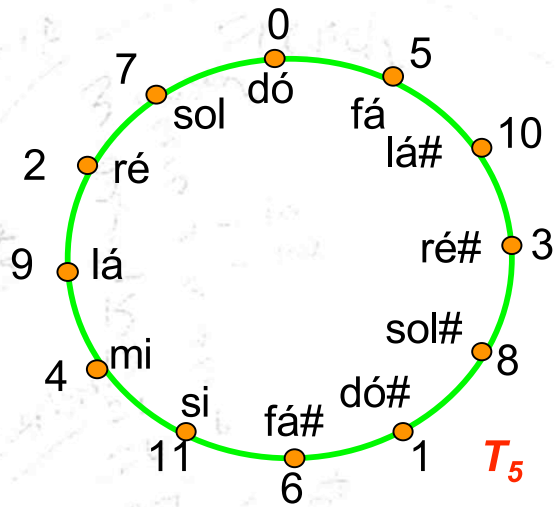


círculo dos semitons
ascendente e descendente





círculo das quintas
ascendente e descendente



Falámos em transposições e inversões. O conjunto constituído por todas as transposições de $\boldsymbol{Z}_{12}$ é um grupo, mas o conjunto constituído por todas as inversões de $\boldsymbol{Z}_{12}$ não é um grupo.

No entanto, o conjunto constituído por todas as transposições e inversões de $\boldsymbol{Z}_{12}$ é um grupo.

Tarefa 7: Mostra que o conjunto constituído por todas as inversões de $\boldsymbol{Z}_{12}$ não é um grupo e que o conjunto constituído por todas as transposições e inversões de $\boldsymbol{Z}_{12}$ é um grupo.

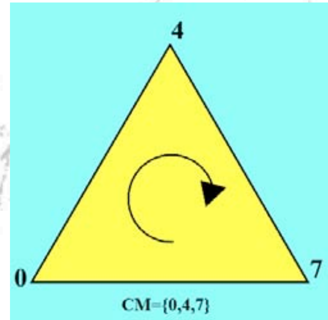
2. Acordes (escrita ou execução de três ou mais notas simultaneamente)

Tríade Maior

acorde de 3 semitons da forma

$\{k, k+4, k+7\}$

4 3

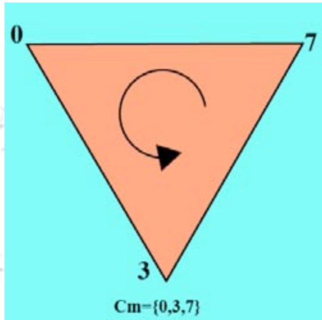


Tríade Menor

acorde de 3 semitons da forma

$\{k, k+3, k+7\}$

3 4



Existem 12 tríades maiores obtidas através do acorde de dó maior: *dóM*={*dó,mi,sol*}= ={0,4,7} por transposição: {0,4,7} {1,5,8} {2,6,9} {3,7,10} {4,8,11} {5,9,0} •••

Existem 12 tríades menores obtidas através do acorde de dó menor:*dóm*={*dó,ré#,sol*}= ={0,3,7} por transposição: {0,3,7} {1,4,8} {2,5,9} {3,6,10} {4,7,11} {5,8,0} •••

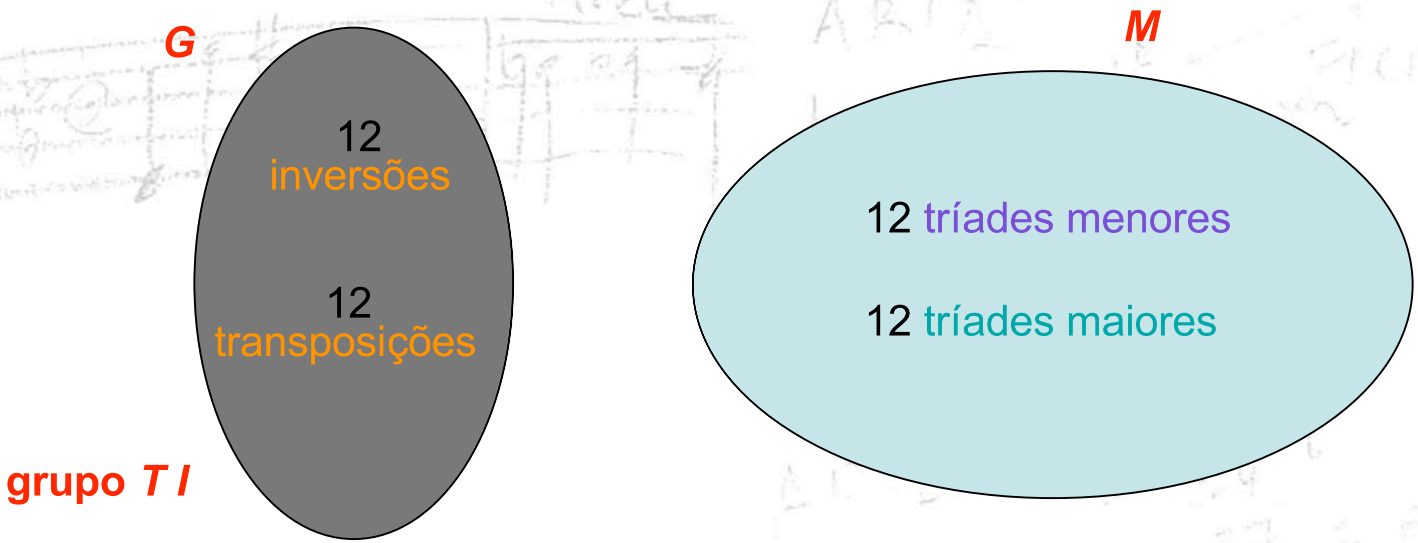
Podemos obter tríades menores a partir de tríades maiores através de inversões.

$\{0,4,7\} \xrightarrow{I_7} \{0,3,7\}$ $\qquad$ $\{0,4,7\} \xrightarrow{I_0} \{5,8,0\}$

Qualquer tríade menor pode ser obtida através de uma inversão adequada de qualquer tríade maior e vice-versa.

$$\{j,j+4,j+7\} \underset{I_m}{\overset{I_n}{\rightleftarrows}} \{k,k+3,k+7\}$$

Tarefa 8: Mostra que qualquer tríade menor pode ser obtida através de uma inversão adequada de qualquer tríade maior e vice-versa.



Na 9ª Sinfonia de L. Beethoven (1770-1827)(compassos 143-176 do 2º andamento) pode encontrar-se a seguinte sequência de acordes (usando o modelo $\boldsymbol{Z}_{12}$):

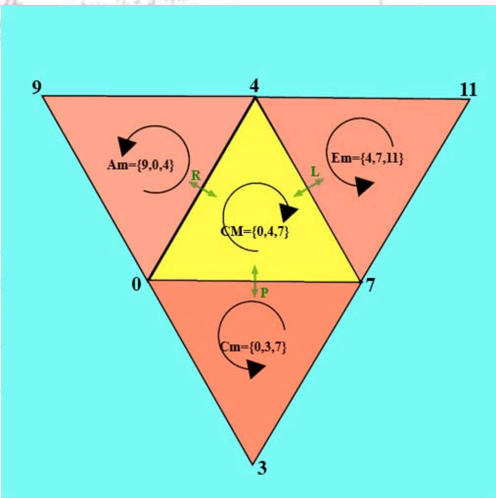
$$\{0,4,7\} \xrightarrow{I_4} \{9,0,4\} \xrightarrow{I_9} \{5,9,0\} \xrightarrow{I_2} \{2,5,9\} \xrightarrow{I_7} \{10,2,5\} \xrightarrow{I_0} \{7,10,2\} \xrightarrow{I_5}$$

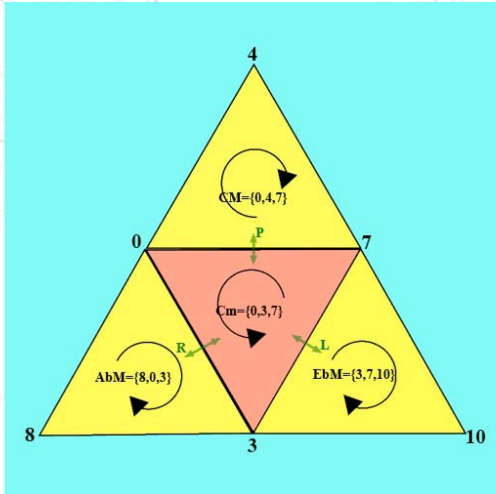
$$\{3,7,10\} \xrightarrow{I_{10}} \{0,3,7\} \xrightarrow{I_3} \{8,0,3\} \xrightarrow{I_8} \{5,8,0\} \xrightarrow{I_1} \{1,5,8\} \xrightarrow{I_6} \{10,1,5\} \xrightarrow{I_{11}}$$

$$\{6,10,1\} \xrightarrow{I_4} \{3,6,10\} \xrightarrow{I_9} \{11,3,6\} \xrightarrow{I_2} \{8,11,3\} \xrightarrow{I_7} \{4,8,11\} \xrightarrow{I_0} \{1,4,8\} \xrightarrow{I_5} \{9,1,4\}$$

A partir de uma tríade maior é possível obter 3 tríades menores, cada uma tendo 2 notas em comum com a tríade maior. E a partir de uma tríade menor é possível obter 3 tríades maiores, cada uma tendo 2 notas em comum com a tríade menor.

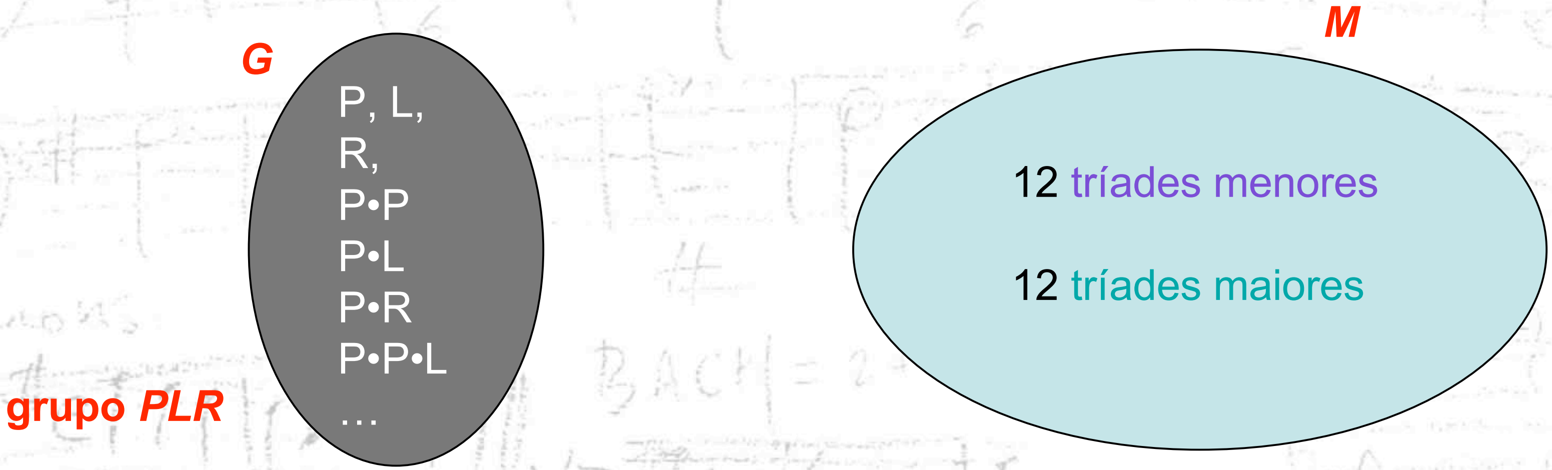
$$\begin{array}{ccc} & \{0,4,7\} & \\ \swarrow_P & \downarrow_L & \searrow_R \\ \{0,3,7\} & \{4,7,11\} & \{9,0,4\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \{0,3,7\} & \\ \swarrow_P & \downarrow_L & \searrow_R \\ \{0,4,7\} & \{3,7,10\} & \{8,0,3\} \end{array}$$





Tarefa 9: Aplica as instruções P, L e R aos acordes {sol#,si,ré#} e {lá#,ré,fá}.

A partir de uma definição rigorosa das instruções P L e R é possível mostrar que o conjunto gerado por estas três instruções é um grupo.



Tarefa 10: Verifica que as inversões da página 27 correspondem de facto às instruções L e R.

3. Música Serial Dodecafónica

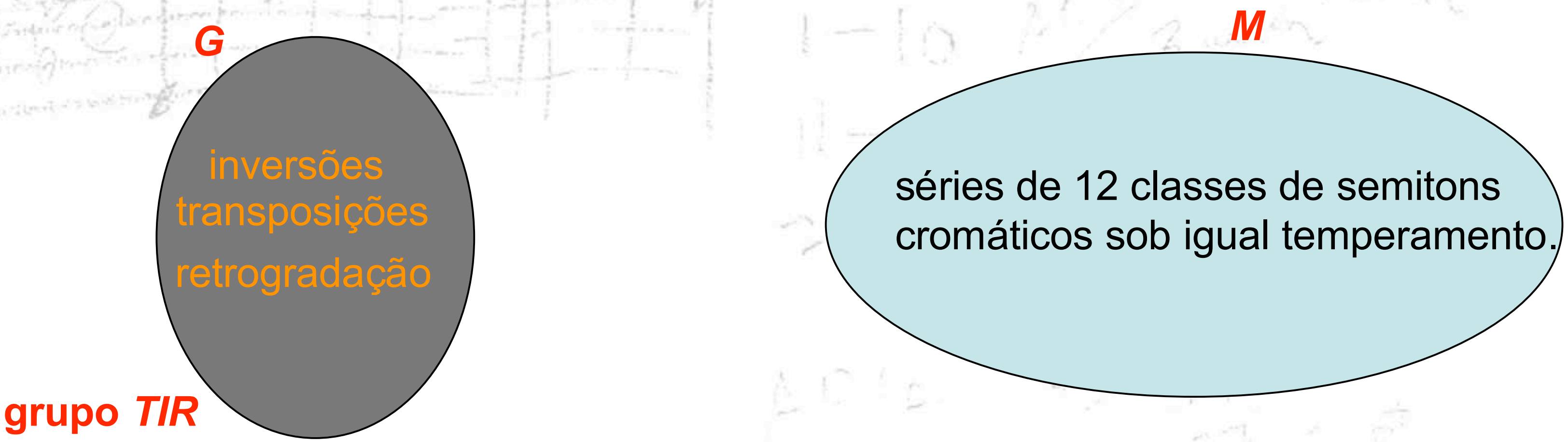
Neste exemplo ***M*** é o conjunto constituído por todas as séries de 12 classes de semitons cromáticos sob igual temperamento (séries de 12 elementos de $\boldsymbol{Z}_{12}$).

Tarefa 11: Calcula o número de elementos de ***M*****.**

Para apresentar o grupo G é necessário definir mais uma instrução:

Retrogradação (R): tocar a série do fim para o início.

$$\langle 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\rangle \xrightarrow{R} \langle 11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0\rangle$$



A música serial dodecafónica baseia-se no seguinte: Começa-se com uma série de ***M*** e aplicam-se sucessivamente várias instruções do grupo ***TIR***

série inicial	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	
	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0	R
	2	7	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	T_9
	8	3	10	5	0	7	2	9	4	11	6	1	I_{10}

Tarefa 12: Escolhe uma série inicial e “compõe” uma música serial…