

Exame final de Análise Real II

(Curso de Matemática)

12 de Junho de 2001

Primeira parte

Nome: _____

Curso: _____ Número de identificação: _____

.....

O exame consiste de duas partes e tem a duração total de 3 horas. À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

A cotação do exame é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra ou número que a identifica.

.....

- A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ vale

- (i) 1. (ii) -1. (iii) $-2 \left(\cos \frac{\pi^2}{4} - \cos \frac{\pi^2}{9} \right)$. (iv) $-\sqrt{2} + 1$.

2. O integral $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$

- (i) diverge. (ii) converge para $\frac{\pi}{4}$. (iii) converge para $\frac{\pi}{2}$.
(iv) converge para 1.

3. A área da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = \frac{1}{e}$ e $x = 0$

- (i) é 1. (ii) é 2. (iii) é $1 - \frac{2}{e}$. (iv) é $\frac{1}{e}$.

(v.s.f.f.)

4. O comprimento do gráfico de $f(x) = \int_2^x \sqrt{4t^2 - 1} dt$ entre $x = 2$ e $x = 4$ é

- (i) 8. (ii) $\frac{2}{3}$. (iii) 12. (iv) -1.

5. Sendo f definida por $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, a derivada $f'(x)$ é

- (i) $\frac{\sin x}{x}$. (ii) $2\frac{\sin x^2}{x} - \frac{\sin x}{x}$. (iii) $\frac{\sin^2 x}{x^2} - \sin x$. (iv) $\frac{\sin^2 x}{x^2}$.

6. Considere as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ definidas por $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$ e $b_n = e^{-n}$.
Então

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

7. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n}$ é:

- (i) $[-1, 3]$. (ii) $] - 2, 2[$. (iii) $] - 1, 3]$. (iv) $] - 1, 3[$.

8. O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ é

- (i) 0. (ii) 1. (iii) não existe. (iv) $+\infty$.

9. A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}}{n!}$ é

- (i) e^{-3} . (ii) $\sqrt[3]{e} - 1$. (iii) $\sqrt[3]{e}$. (iv) $-\log 3$.

10. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n} n!}{n^n}$

- (i) é absolutamente convergente.
(ii) é condicionalmente convergente.
(iii) é divergente.
(iv) não satisfaz nenhuma das afirmações anteriores.

Nome: _____

B. (4 valores) Calcule as seguintes **4** primitivas:

1. $\int x^3 e^{x^2} dx$.

2. $\int \frac{x+1}{x^4+x^2} dx$.

(v.s.f.f.)

$$3. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^{2x}+5}} dx \quad .$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}} \quad .$$

Exame final de Análise Real II

(Curso de Matemática)

12 de Junho de 2001

Segunda parte

Nome: _____Curso: _____

A cotação de cada questão está colocada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica e é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas. **Todas** as respostas devem ser cuidadosamente justificadas.

- C. (4 valores) Em cada uma das alíneas desta questão é feita uma afirmação. Se ela for verdadeira, faça um círculo à volta da letra **V** que lhe corresponde. Se ela for falsa, faça o círculo à volta da letra **F**. Depois, utilize o espaço em branco imediatamente a seguir para dar uma justificação **sucinta** da sua resposta. As respostas sem justificação **não** são consideradas.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Tem-se
 $f^{(26)}(0) = -26!$ **V** **F**

2. Toda a função limitada $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. **V** **F**

(v.s.f.f.)

3. Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. **V** **F**

4. A sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termo geral

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ não é primo} \\ 1 & \text{se } n \text{ é primo} \end{cases}$$

- é convergente. **V** **F**

Nome: _____

D. (1 valor) Responda a uma e só uma das alíneas seguintes. (Se responder às duas, mesmo que com respostas incompletas, será apenas cotada a questão D. 1.)

1. Determine o polinómio de Taylor de ordem 6 em 0 da função

$$F(x) = \int_0^x e^{t^3} \operatorname{sen} t \, dt .$$

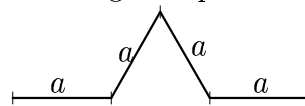
2. Usando polinómios de Taylor calcule o valor de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ com erro inferior a 10^{-3} .

Nome: _____

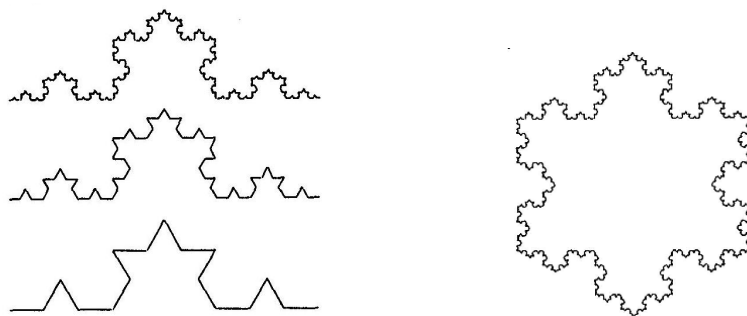
3. (2 valores) Considere a seguinte sucessão de curvas:

- o primeiro termo é um segmento de recta;
- o termo de ordem $n+1$ é obtido do termo de ordem n dividindo cada segmento de recta de comprimento $3a$ em 3 partes iguais e substituindo a do meio pelos dois restantes lados de um triângulo equilátero

construído sobre essa parte, como indicado na figura:



A figura seguinte indica mais alguns elementos desta sucessão, bem como a *curva de Von Koch* a qual se obtém como limite da construção acima aplicada a cada um dos lados de um triângulo equilátero (sendo que os triângulos pequenos são sempre construídos na parte exterior da região anterior). O *floco de neve de Von Koch* é a região do plano limitada por esta curva.



- Mostre, recorrendo a uma série numérica apropriada, que o comprimento das curvas da sucessão considerada acima não é limitado. Conclua que o comprimento da curva de Von Koch não é limitado.
- Mostre, recorrendo mais uma vez a uma série numérica, que a área do floco de neve de Von Koch é limitada.

Sugestão. Note que na construção do floco de neve a área de uma região se obtém da área da região anterior somando-lhe a área de alguns triângulos.