

Exame de Análise Real II

(Curso de Matemática)

29 de Junho de 2002

Primeira parte

Nome: _____

Número de identificação: _____

.....

O exame consiste de duas partes e tem a duração total de 3 horas. À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

A cotação do exame é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra ou número que a identifica. Salvo indicação em contrário, esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas.

.....

- A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_0^3 \frac{1}{9+x^2} dx$ vale

- (i) $\frac{\pi}{12}$. (ii) -1 . (iii) 1 . (iv) $\arctg 3$.

2. O integral $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

- (i) diverge. (ii) converge para $2e$. (iii) converge para $\frac{1}{e^2}$.
(iv) converge para 1 .

3. A área da região limitada pelas curvas $y = x^3$, $y = -x$ e $x = 1$

- (i) é $\frac{3}{4}$. (ii) é $\frac{-1}{4}$. (iii) é $1 - \frac{2}{e}$. (iv) é $\frac{1}{e}$.

(v.s.f.f.)

4. O volume do sólido obtido por rotação da região limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$, o eixo dos xx e as rectas $x = 1$ e $x = 2$ em torno do eixo dos xx é

- (i) $\frac{\pi}{2}$. (ii) $\pi \log 2$. (iii) $\log 2$. (iv) $\frac{1}{2}$.

5. Sendo f a função definida por $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{\cos t}{t} dt$, a derivada $f'(x)$ é

- (i) $\frac{\cos x}{x}$. (ii) $3 \frac{\cos x^3}{x}$. (iii) $\frac{\cos^3 x}{x^2} - \sin x$. (iv) $\frac{\sin x^3}{x^3}$.

6. Considere as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ definidas por $a_n = (-1)^n$ e $b_n = 2^{-n}$. Então

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}$ converge. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2b_n$ diverge.
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ diverge. (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

7. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{3^n}$ é:

- (i) $[-4, 2]$. (ii) $] - 3, 3[$. (iii) $] - 4, 2]$. (iv) $] - 4, 2[$.

8. O raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

- (i) vale e . (ii) vale $\frac{1}{e}$. (iii) vale 1. (iv) vale $+\infty$.

9. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n} (n+1)$

- (i) é absolutamente convergente.
(ii) é condicionalmente convergente.
(iii) é divergente.
(iv) não satisfaz nenhuma das afirmações anteriores.

10. O limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

- (i) é 0. (ii) é 1. (iii) é $+\infty$. (iv) não existe.

Nome: _____

B. (4 valores) Calcule as seguintes **4** primitivas:

1. $\int x^2 \log x \, dx$.

2. $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} \, dx$.

(v.s.f.f.)

3. $\int \sqrt{4 - x^2} \, dx.$

4. $\int \sec^3 x \, dx.$

Exame de Análise Real II

29 de Junho de 2002

Segunda parte

Nome: _____

Todas as respostas devem ser cuidadosamente justificadas.

C. (4 valores) Em cada uma das alíneas desta questão é feita uma afirmação. Se ela for verdadeira, faça um círculo à volta da letra **V** que lhe corresponde. Se ela for falsa, faça o círculo à volta da letra **F**. Depois, utilize o espaço em branco imediatamente a seguir para dar uma justificação **sucinta** da sua resposta. As respostas sem justificação **não** são consideradas.

1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ então toda a primitiva de f é de classe C^∞ **V** **F**

2. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Então existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1$ **V** **F**

(v.s.f.f.)

3. Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ uma função contínua para a qual $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 1$.

Então o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ é convergente. **V** **F**

4. Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ então o raio de convergência

da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é igual a 1 **V** **F**

Nome: _____

D. (1.5 valores) Responda a uma e só uma das alíneas seguintes. (Se responder às duas, mesmo que com respostas incompletas, será apenas cotada a questão D. 1.)

1. Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$ e $y = \cos x$.
2. Mostre que não existe nenhum número real α tal que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha(\alpha+2)}$ converge.

(v.s.f.f.)

3. (1.5 valores) Determine a derivada de ordem 70 da função $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ no ponto 0.