

Exame de Análise Real II
(Curso de Matemática)

21 de Junho de 2004

Nome: _____

Número de identificação: _____

Observações.

- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização de qualquer das questões B, C e D é opcional para os alunos que fizeram os mini-testes correspondentes.
- Apenas pode ser usado material de escrita; respostas a lápis não são consideradas.
- Os telemóveis não podem estar ligados.

.....
À primeira questão deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

- A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_{-1}^4 |2x - 4| dx$ vale

- (i) -5. (ii) 10. **(iii)** 13. (iv) -10.

2. O integral $\int_6^{+\infty} x e^{x^2} dx$

- (i)** diverge. (ii) converge para $6e$. (iii) converge para e^6 .
(iv) converge para $6e^6$.

3. Se $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a curva definida por $C(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, então

- (i)** $\vec{a}_T(0) = \vec{0}$. (ii) $\vec{a}_N(0) = \vec{0}$. (iii) $T(0) = \vec{0}$. (iv) $C''(0) = \vec{0}$.

(v.s.f.f.)

4. O volume do sólido obtido por rotação da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo dos xx e a recta $x = 2$ em torno do eixo dos xx é

(i) $\frac{32}{5}$. (ii) π . (iii) $\frac{8\pi}{3}$. (iv) $\frac{32\pi}{5}$.

5. O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1+t^4)dt}{3x}$ vale

(i) $+\infty$. (ii) $1/3$. (iii) 0 . (iv) 4 .

6. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$ é:

(i) $\mathbb{R}$. (ii) $] -1/3, 1/3[$. (iii) $[-1/3, 1/3[$. (iv) $\{0\}$.

7. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$

(i) diverge. (ii) tem soma $\frac{3}{2} + \frac{1}{e}$. (iii) tem soma $\frac{3}{2} + e$. (iv) tem soma 2.

8. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$

(i) é absolutamente convergente.
 (ii) é condicionalmente convergente.
 (iii) diverge para $+\infty$.
 (iv) não satisfaz nenhuma das afirmações anteriores.

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2y + xe^y$. Então $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ vale:

(i) 0 . (ii) 1 . (iii) e . (iv) $1+e$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = xze^y$. Então a derivada de f no ponto $(1,0,0)$ segundo o vector $(1,1,1)$ é:

(i) 0 . (ii) 1 . (iii) e . (iv) $1+e$.

Nome: _____

B. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o primeiro mini-teste.

Se realizou o 1º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 1º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. (0,5 valores) Averigue se a função f definida por $f(x) = \int_3^{\sin x} \frac{t^2 + 1}{1 + t^4} dt$ tem um máximo relativo em $x = 0$.
2. (1 valor) Determine a área da região do plano limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^3$.
3. (1 valor) Calcule ou mostre que diverge o seguinte integral impróprio: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$.

Nome: _____

C. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o segundo mini-teste.

Se realizou o 2º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 2º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. (1,5 valores) Estude a convergência de cada uma das seguintes séries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{1}{n}\right);$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3}{\sqrt[3]{n}};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

2. (1 valor) Determine o domínio de convergência da seguinte série de potências: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n x^n}{n^3 - 1}.$

Nome: _____

D. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o terceiro mini-teste.

Se realizou o 3º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 3º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. Considere a curva $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $C(t) = (\cos 3t, 3t, \sin 3t)$.
 - (a) (0,5 valores) Determine o seu comprimento.
 - (b) (1 valor) Determine a curvatura e o triedro de Frenet para $t = 0$.
2. (a) (0,5 valores) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y}{x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
 Calcule, ou mostre que não existe, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.
 (b) (0,5 valores) Determine, se existir, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

Nome: _____

- E. (1 valor) Seja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x$ e seja $n \in \mathbb{N}$. Indique uma partição P_n de $[0, 2]$ em n subintervalos tal que

$$\overline{\sum}(f, P_n) - \underline{\sum}(f, P_n) > 1.$$

- F. (1 valor) Seja $(a_n)_n$ uma sucessão tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 a_n = 1$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

- G. (1,5 valores) As letras m e n são usadas para representar números naturais. Para cada n considere a função f_n definida por

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (\cos(n! \pi x))^{2m}.$$

Justifique sucintamente que a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma função que não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.