Exame de Análise Real II

(Curso de Matemática)

21 de Junho de 2004

Nome: _____

Número de identificação: _____

Observações.

- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização de qualquer das questões B, C e D é opcional para os alunos que fizeram os mini-testes correspondentes.
- Apenas pode ser usado material de escrita; respostas a lápis não são consideradas.
- Os telemóveis não podem estar ligados.

. . . . . .

À primeira questão deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_{-1}^{4} |2x-4|\,dx$ vale

   (i) -5. (ii) 10. (iii) 13. (iv) -10.

2. O integral $\int_{6}^{+\infty} x e^{x^2}\,dx$

   (i) diverge. (ii) converge para $6e$. (iii) converge para e^6.
   (iv) converge para $6e^6$.

3. Se $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é a curva definida por $C(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, então

   (i) $\vec{a}_T(0) = \vec{0}$. (ii) $\vec{a}_N(0) = \vec{0}$. (iii) $T(0) = \vec{0}$. (iv) $C''(0) = \vec{0}$.

(v.s.f.f.)

4. O volume do sólido obtido por rotação da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo dos xx e a recta $x = 2$ em torno do eixo dos xx é

   (i) $\frac{32}{5}$. (ii) π. (iii) $\frac{8\pi}{3}$. (iv) $\frac{32\pi}{5}$.

5. O limite $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1+t^4)dt}{3x}$ vale

   (i) $+\infty$. (ii) $1/3$. (iii) 0. (iv) 4.

6. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$ é:

   (i) $\mathbb{R}$. (ii) $]-1/3, 1/3[$. (iii) $[-1/3, 1/3[$. (iv) $\{0\}$.

7. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$

   (i) diverge. (ii) tem soma $\frac{3}{2} + \frac{1}{e}$. (iii) tem soma $\frac{3}{2} + e$. (iv) tem soma 2.

8. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$

   (i) é absolutamente convergente.
   (ii) é condicionalmente convergente.
   (iii) diverge para $+\infty$.
   (iv) não satisfaz nenhuma das afirmações anteriores.

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 y + x e^y$. Então $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ vale:

   (i) 0. (ii) 1. (iii) e. (iv) $1+e$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = xz e^y$. Então a derivada de f no ponto $(1,0,0)$ segundo o vector $(1,1,1)$ é:

    (i) 0. (ii) 1. (iii) e. (iv) $1+e$.

Nome: _____

B. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o primeiro mini-teste.

Se realizou o 1^o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 1^o mini-teste ..... **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. (0,5 valores) Averigue se a função f definida por $f(x) = \int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{t^2+1}{1+t^4}\,dt$ tem um máximo relativo em $x = 0$.
2. (1 valor) Determine a área da região do plano limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^3$.
3. (1 valor) Calcule ou mostre que diverge o seguinte integral impróprio: $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$.

Nome: _____

C. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o segundo mini-teste.

Se realizou o 2^o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 2^o mini-teste .....**Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. (1,5 valores) Estude a convergência de cada uma das seguintes séries

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. (1 valor) Determine o domínio de convergência da seguinte série de potências: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,x^n}{n^3-1}$.

Nome: _____

D. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o terceiro mini-teste.

Se realizou o 3^o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 3^o mini-teste ..... **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. Considere a curva $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $C(t) = (\cos 3t, 3t, \operatorname{sen} 3t)$.
   (a) (0,5 valores) Determine o seu comprimento.
   (b) (1 valor) Determine a curvatura e o triedro de Frenet para $t = 0$.
2. (a) (0,5 valores) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y}{x^2+2y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
   Calcule, ou mostre que não existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
   (b) (0,5 valores) Determine, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Nome: _____

E. (1 valor) Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x$ e seja $n \in \mathbb{N}$. Indique uma partição P_n de $[0,2]$ em n subintervalos tal que

$$\overline{\sum}(f, P_n) - \underline{\sum}(f, P_n) > 1.$$

F. (1 valor) Seja $(a_n)_n$ uma sucessão tal que $\lim_{n\to+\infty} n^3 a_n = 1$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

G. (1,5 valores) As letras m e n são usadas para representar números naturais. Para cada n considere a função f_n definida por

$$f_n(x) = \lim_{m\to+\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}.$$

Justifique sucintamente que a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função que não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.