Exame de recurso de Análise Real II

(Curso de Matemática)

12 de Julho de 2004

Nome: ________________________________

Número de identificação: ____________________Curso ____________________

Observações.

- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver.
- Apenas pode ser usado material de escrita.
- Os telemóveis não podem estar ligados.

. . . .

Primeira parte

À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2\,dx$ vale

   (i) 1. (ii) $\pi/4$. (iii) $1/2$. (iv) $\pi/2$.

2. O integral $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

   (i) diverge. (ii) converge para 8. (iii) converge para 4. (iv) converge para 1.

3. O comprimento da curva $C : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ definida por $C(t) = (t, 1-\operatorname{sen} t, 1+\cos t)$ é:

   (i) $\sqrt{2}$. (ii) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$. (iii) π. (iv) $\pi/2$.

(v.s.f.f.)

4. A área da região limitada pelas curvas $y = \frac{1}{x}$, e $y = 1$ e $x = 2$ é

   (i) $1 - \log 2$. (ii) $\log 2$. (iii) 2. (iv) $2 + \log 2$.

5. Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \int_0^{3x} \sqrt{1+t^2}\, dt$, uma equação da recta tangente ao gráfico de F no ponto de abcissa 0 é:

   (i) $y = 3x$. (ii) $y = 3$. (iii) $y = 0$. (iv) $y = 3x + 3$.

6. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+n}$ é:

   (i) $\mathbb{R}$. (ii) $[1,3]$. (iii) $[1,3[$. (iv) $\{2\}$.

7. A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ é

   (i) $1/2$. (ii) $1/6$. (iii) 1. (iv) 0.

8. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^{2n}}$

   (i) é absolutamente convergente.
   (ii) é condicionalmente convergente.
   (iii) diverge para $+\infty$.
   (iv) não satisfaz nenhuma das afirmações anteriores.

9. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = y\,\mathrm{sen}(xz) + yz^2$. Então $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1)$ vale:

   (i) 0. (ii) 1. (iii) 3. (iv) 2.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy + 3x^2$. Então a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo o vector $(1,1)$ é:

    (i) 7. (ii) 1. (iii) 3. (iv) 2.

Nome: ____

B. 1. (0,5 valores) Calcule a derivada da função f definida por $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} \log t \, dt$, $x \in \mathbb{R}^+$.

2. (1 valor) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

3. (1 valor) Calcule ou mostre que diverge o seguinte integral: $\int_0^{+\infty} e^{-5x} \, dx$.

Nome: ____________________

C.

1. (0,5 valores) Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}+n}$.
2. (0,5 valores) Diga se a série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\log n}$ é condicionalmente convergente.
3. (0,5 valores) Mostre que se a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ é convergente.
4. (1 valor) Determine o domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

Nome: ____________________

D. 1. Considere a curva $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ definida por $C(t)=(2t,t^2,4t+1)$.

(a) (0,5 valores) Calcule a curvatura de C no ponto $t=2$.

(b) (1 valor) Determine a aceleração tangencial e a aceleração normal para $t=2$.

2. (a) (0,5 valores) Mostre que é contínua a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(b) (0,5 valores) Determine, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Nome: ____

E. (1 valor) Usando o facto de conhecer a série de Taylor em 0 da função $\frac{1}{1-x}$, determine a série de Taylor em 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$.

F. (1 valor) Suponha que f é uma função definida num intervalo fechado $[a,b]$ e que existe uma família de partições $\{P_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ de $[a,b]$ tal que

$$\inf\{\overline{\sum}(f,P_n) \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\underline{\sum}(f,P_n) \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Conclua que f é integrável.

G. (1,5 valores) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais positivos tal que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que o conjunto $\{\varphi(n) - n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ consiste de dois inteiros positivos. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ é convergente.