Exame modelo de Análise Real II

(Curso de Matemática)

Junho de 2004

Nome: _____

Número de identificação: _____ Curso _____

Observações.

- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização de qualquer das questões B, C e D é opcional para os alunos que fizeram os mini-testes correspondentes.
- Apenas pode ser usado material de escrita.
- Os telemóveis não podem estar ligados.

. . . . . .

Primeira parte

À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_{-1}^{3} |x|\,dx$ vale

   (i) 5. (ii) -1. (iii) 10. (iv) 4.

2. O integral $\int_{0}^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

   (i) diverge. (ii) converge para 8. (iii) converge para 4.
   (iv) converge para 1.

3. Se $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é a curva definida por $C(t) = (t\,\mathrm{sen}\,t, -\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, então uma equação da recta tangente a $C(\mathbb{R})$ no ponto $C(\pi/2)$ é:

   (i) $y = x - \pi/2$. (ii) $y = x + \pi/2$. (iii) $y = -x + \pi/2$. (iv) $y = -x - \pi/2$.

(v.s.f.f.)

4. O volume do sólido obtido por rotação da região limitada pela curva $y = \cos x + 1$, o eixo dos xx e as rectas $x = -\pi$ e $x = \pi$ em torno do eixo dos xx é

   (i) $3\pi^2$. (ii) π^2. (iii) $\frac{\pi^2}{3}$. (iv) $2\frac{\pi}{3}$.

5. A derivada da função $F(x) = 5x\int_{-2}^{x} t^2 dt$ é

   (i) $\frac{5x^3}{3} + 5x^3 + \frac{40}{3}$. (ii) $5\int_{-2}^{x} t^2 dt + 5x$. (iii) $(5x)^3$. (iv) $5x^2 + 5x^3$.

6. Considere as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ definidas por $a_n = \frac{1}{\log(\log(\log n))}$ e $b_n = 2^n$. Então

   (i) $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ converge. (ii) $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ converge.

   (iii) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. (iv) $\sum_{n=3}^{\infty} (a_n b_n)$ converge.

7. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n! - 7}$ é:

   (i) $\mathbb{R}$. (ii) $]-2,2[$. (iii) $[-2,2[$. (iv) $\{0\}$.

8. A soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ é

   (i) e^3. (ii) $e^3 + 1$. (iii) $\sqrt[3]{e}$. (iv) 3^e.

9. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = y^x$. Então $\frac{\partial f}{\partial x}(1,e)$ vale:

   (i) 0. (ii) 1. (iii) e. (iv) $1 + e$.

10. O limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$ é:

    (i) 0. (ii) e^2. (iii) e^{-2}. (iv) $+\infty$.