

Exame modelo de Análise Real II

(Curso de Matemática)

Junho de 2004

Nome: _____

Número de identificação: _____ Curso _____

Observações.

- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização de qualquer das questões B, C e D é opcional para os alunos que fizeram os mini-testes correspondentes.
- Apenas pode ser usado material de escrita.
- Os telemóveis não podem estar ligados.

.....
Primeira parte

À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

- A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O integral $\int_{-1}^3 |x| dx$ vale

- (i) 5. (ii) -1. (iii) 10. (iv) 4.

2. O integral $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

- (i) diverge. (ii) converge para 8. (iii) converge para 4.
(iv) converge para 1.

3. Se $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a curva definida por $C(t) = (t \sin t, -\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, então uma equação da recta tangente a $C(\mathbb{R})$ no ponto $C(\pi/2)$ é:

- (i) $y = x - \pi/2$. (ii) $y = x + \pi/2$. (iii) $y = -x + \pi/2$. (iv) $y = -x - \pi/2$.

(v.s.f.f.)

4. O volume do sólido obtido por rotação da região limitada pela curva $y = \cos x + 1$, o eixo dos xx e as rectas $x = -\pi$ e $x = \pi$ em torno do eixo dos xx é

(i) $3\pi^2$. (ii) π^2 . (iii) $\frac{\pi^2}{3}$. (iv) $2\frac{\pi}{3}$.

5. A derivada da função $F(x) = 5x \int_{-2}^x t^2 dt$ é

(i) $\frac{5x^3}{3} + 5x^3 + \frac{40}{3}$. (ii) $5 \int_{-2}^x t^2 dt + 5x$. (iii) $(5x)^3$. (iv) $5x^2 + 5x^3$.

6. Considere as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ definidas por $a_n = \frac{1}{\log(\log(\log n))}$ e $b_n = 2^n$. Então

(i) $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ converge. (ii) $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ converge.

(iii) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. (iv) $\sum_{n=3}^{\infty} (a_n b_n)$ converge.

7. O domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n! - 7}$ é:

(i) $\mathbb{R}$. (ii) $] -2, 2[$. (iii) $[-2, 2[$. (iv) $\{0\}$.

8. A soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ é

(i) e^3 . (ii) $e^3 + 1$. (iii) $\sqrt[3]{e}$. (iv) 3^e .

9. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = y^x$. Então $\frac{\partial f}{\partial x}(1, e)$ vale:

(i) 0. (ii) 1. (iii) e . (iv) $1 + e$.

10. O limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$ é:

(i) 0. (ii) e^2 . (iii) e^{-2} . (iv) $+\infty$.

Nome: _____

B. Questão opcional para os alunos que realizaram o primeiro mini-teste.

Se realizou o 1º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 1º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. (0,5 valores) Calcule a derivada da função f definida por $f(x) = \int_{\pi}^{5x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$.
2. (1 valor) Determine a área da região do plano limitada pelas rectas $y = x + 2$, $y = x$ e $x = 1$ e pela curva de equação $y = x^2$.
3. (1 valor) Calcule ou mostre que diverge o seguinte integral impróprio: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$.

Nome: _____

C. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o segundo mini-teste.

Se realizou o 2º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 2º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

1. (1,5 valores) Estude a convergência de cada uma das seguintes séries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\log n};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{e}{3} \right)^n - \frac{1}{2^n} \right).$

2. (1 valor) Determine o domínio de convergência da seguinte série de potências: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}.$

Nome: _____

D. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o terceiro mini-teste.

Se realizou o 3º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 3º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as questões seguintes:

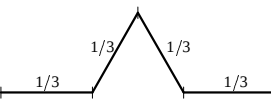
1. Considere a curva $C : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $C(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t)$.
 - (a) (0,5 valores) Verifique se a curva está parametrizada por comprimento de arco.
 - (b) (1 valor) Determine a aceleração tangencial, a aceleração normal e o triedro de Frenet para $t = \pi/2$.
2. (a) (0,5 valores) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
Averigue se existe algum número real k para o qual f é contínua.
 - (b) (0,5 valores) Determine, se existir, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Nome: _____

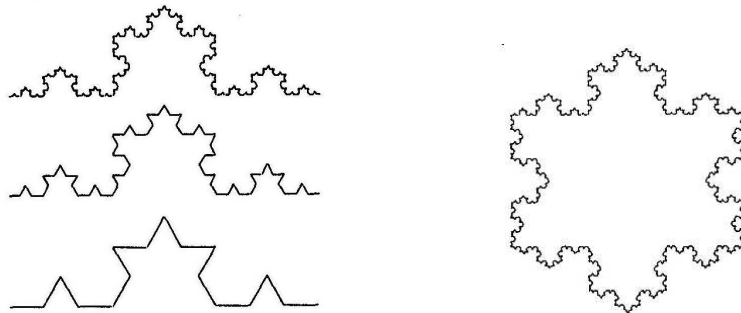
E. (1 valor) Determine a série de Taylor em 0 da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(1 + x^2)$.

F. Considere a sucessão $(C_n)_{n \geq 1}$ de curvas construída a seguir.

- C_1 é um segmento de recta de comprimento 1 (unidade de comprimento): _____
- C_{n+1} obtém-se a partir de C_n do seguinte modo:
 - * divide-se cada segmento de recta de C_n em 3 partes iguais;
 - * sobre a parte do meio constrói-se um triângulo equilátero, sendo essa parte eliminada de seguida.

Esta construção é ilustrada na figura seguinte a qual representa C_2 : 

Representam-se a seguir mais alguns elementos de $(C_n)_{n \geq 1}$, bem como o *floco de neve de Von Koch* o qual se obtém como limite da construção acima aplicada a cada um dos lados de um triângulo equilátero (sendo que os triângulos pequenos são sempre construídos na parte exterior da região de partida).



1. (0,5 valores) Encontre uma série numérica tal que, para $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima soma parcial s_n seja precisamente o comprimento de C_n , a n -ésima curva da sucessão.
2. (1 valor) Mostre que a sucessão $(s_n)_{n \geq 1}$ dos comprimentos das curvas C_n ($n = 1, 2, \dots$) não é limitada.
3. (1 valor) Mostre, recorrendo mais uma vez a uma série numérica, que a área do floco de neve de Von Koch é limitada.