



Grupos de permutações

Uma *permutação* de um conjunto A é uma função bijectiva de A em A .

Um *grupo de permutações* de um conjunto A é um conjunto de permutações de A que com a composição forma um grupo.

Vamos interessar-nos sobretudo pelo caso em que A é um conjunto finito, sendo em geral conveniente usar os primeiros inteiros positivos para denotar os seus elementos, isto é, tomar $A = \{1, 2, \dots, n\}$, para um inteiro positivo n .

Por exemplo, a permutação α do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ definida por $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 4$ e $\alpha(4) = 1$ representa-se de forma muito conveniente por:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com esta forma matricial de representar permutações, a composição faz-se de uma forma muito fácil, como ilustra o seguinte exemplo.



Exemplo (O grupo simétrico S_n)

Sendo $A = \{1, 2, \dots, n\}$, o conjunto das permutações de A com a composição é um grupo, o qual se diz o *grupo simétrico de grau n* e se denota por S_n .

Os elementos de S_n têm a forma

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

Note-se que para $\alpha(1)$ se têm n escolhas possíveis; para $\alpha(2)$ têm-se $n - 1$, etc. É assim fácil ver que $\text{ord } S_n = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Exemplo (O grupo simétrico S_3)

Vamos listar a seguir os elementos do grupo S_3 .



$$\begin{aligned}\epsilon &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \alpha^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \alpha\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \alpha^2\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

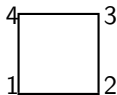
$$\text{Tem-se } \beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^2\beta.$$

Assim, por exemplo, usando o facto de α ter ordem 3, $\beta\alpha^2$ pode ser calculado sem recurso à representação matricial que usamos para as permutações: $\beta\alpha^2 = \alpha^2\beta\alpha = \alpha^2\alpha^2\beta = \alpha\beta$.



Exemplo

A cada elemento de D_4 , o grupo das simetrias do quadrado, podemos associar uma permutação do conjunto dos vértices. Numerando os vértices como já fizemos antes, isto é,



tem-se, com as notações também já usadas.

$$\rho_{90} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Note-se que D_4 é gerado por estas duas permutações. Resulta que D_4 pode ser visto como um subgrupo de S_4 .



Notação cíclica

A notação cíclica é provavelmente a melhor forma de representar permutações. Alguns exemplos ajudarão a percebê-la.

Exemplo

Consideremos a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

σ atribui a 1 o valor 5, a 5 o valor 2 e a 2 o valor 1. Fecha assim o ciclo que tinha começado em 1. O valor seguinte ainda não considerado é o 3, o qual é deixado invariante por σ . Depois temos o 4 que é enviado por σ em 6, o qual por sua vez é enviado em 4. Escreve-se então

$$\sigma = (1, 5, 2)(3)(4, 6).$$

Quando o domínio não contém números de mais que um algarismo, costumam-se omitir as vírgulas. É também costume não escrever os ciclos com uma só entrada. Assim, escrevemos: $\sigma = (152)(46)$.



A passagem da notação cíclica para a notação matricial pode também ser feita com facilidade.

Exemplo

Consideremos a permutação $\sigma = (14)(253)$. O ciclo (14) envia 1 em 4 e 4 em 1; (253) faz o seguinte: $2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$. Assim,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Como omitimos os ciclos com uma única entrada, a permutação $\alpha = (14)(53)$ de S_6 tem a seguinte representação matricial:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$



Um ciclo pode ser pensado como sendo uma permutação que fixa todos os elementos excepto os que aparecem no ciclo. Desta forma, a multiplicação de ciclos pode ser pensada como se da multiplicação de permutações na forma matricial se tratasse.

Nota

Compomos as permutações (e, portanto, multiplicamos os ciclos) da direita para a esquerda, como é habitual quando, em Análise, compomos funções. É, no entanto, comum em Álgebra os autores preferirem fazer a composição da esquerda para a direita. É o que acontece quando se multiplicam ciclos no GAP.

Exemplo

Sejam $\sigma = (1\ 3)(2\ 7)(4\ 5\ 6)$ e $\tau = (1\ 2\ 3\ 7)(6\ 4\ 8)$ elementos de S_8 . Vamos exprimir $\sigma\tau$ (isto é, $(1\ 3)(2\ 7)(4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 7)(6\ 4\ 8)$) como produto de ciclos disjuntos (isto é, sem entradas comuns).

$(6\ 4\ 8)$ fixa 1; $(1\ 2\ 3\ 7)$ envia 1 em 2; $(4\ 5\ 6)$ fixa 2; $(2\ 7)$ envia 2 em 7; $(1\ 3)$ fixa 7. Assim, podemos começar por escrever $\sigma\tau = (1\ 7\ \cdots)$. Agora repete-se o processo começando com o 7 e obtemos $\sigma\tau = (1\ 7\ 3\ \cdots)$. Continuando, acabamos por obter $\sigma\tau = (1\ 7\ 3\ 2)(4\ 8)(5\ 6)$.



O exemplo seguinte destina-se a chamar de novo a atenção para o facto de no GAP a composição de permutações ser feita da esquerda para a direita. (Comparar com o exemplo anterior.)

Exemplo

```
gap> s := (1,3)(2,7)(4,5,6);;  
gap> t := (1,2,3,7)(6,4,8);;  
gap> s*t;  
(1,7,3,2)(4,5)(6,8)  
gap> t*s;  
(1,7,3,2)(4,8)(5,6)
```

Um seminário “Os grupos e o cubo mágico” que se encontra em <http://www.fc.up.pt/cmup/mdelgado/cubo/seminario/> tem, em particular, um exemplo de um grupo de permutações. O tamanho desse grupo pode ser determinado usando o GAP...