

Propriedades das permutações

O resultado seguinte não deve ser uma surpresa, sendo que a demonstração pode ser feita formalizando (o que pode não ser fácil...) o que dissemos antes.

Proposição (Produto de ciclos disjuntos)

Toda a permutação de um conjunto finito pode ser escrita como um ciclo ou um produto de ciclos disjuntos.

Proposição (Ciclos disjuntos comutam)

Se os ciclos $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ e $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ são disjuntos, então $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Exercício

Faça a demonstração da proposição anterior.

Exercício

Determine a ordem da permutação $(12)(345)$ de S_5 .



Proposição (Ordem de uma permutação)

A ordem de uma permutação de um conjunto finito escrita como produto de ciclos disjuntos é o mínimo múltiplo comum dos comprimentos dos ciclos.

Os ciclos de comprimento 2 designam-se por *transposições* (ou por 2-ciclos).

Proposição

Qualquer permutação de S_n , com $n > 1$, é um produto de transposições.

Demonstração. Note-se que a identidade se pode escrever na forma $(1\ 2)(1\ 2)$, logo como um produto de duas transposições. Um ciclo pode ser escrito como produto de transposições:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \cdots (a_1, a_2).$$

Agora basta usar o facto de qualquer permutação se poder escrever como produto de ciclos (disjuntos). □



O modo de escrever uma permutação como produto de transposições dado na demonstração da proposição anterior não é único. Nem mesmo o número de factores é único:

Exemplo

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (5\ 4)(5\ 2)(2\ 1)(2\ 5)(2\ 3)(1\ 3)$$

Poderíamos ainda obter outras decomposições (bastava multiplicar pela identidade). Há no entanto um aspecto que não varia:

Proposição (Sempre par ou sempre ímpar)

Se uma permutação α pode ser expressa como produto de um número par de transposições, então qualquer decomposição de α num produto de transposições tem um número par de factores.

Este resultado permite-nos dar a seguinte definição:

Definição

Uma permutação que pode ser expressa como produto de um número par de transposições diz-se uma permutação par.

Uma permutação que pode ser expressa como produto de um número ímpar de transposições diz-se uma permutação ímpar.