



Propriedades dos isomorfismos

Proposição

Seja φ um isomorfismo de um grupo G num grupo H e sejam $a, b \in G$. Então

- 1. φ envia a identidade de G na identidade de H ;*
- 2. para qualquer inteiro n , $\varphi(a^n) = (\varphi(a))^n$;*
- 3. a e b comutam se e só se $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ comutam;*
- 4. $\text{ord}(a) = \text{ord}(\varphi(a))$;*
- 5. dados um inteiro k e um elemento $g \in G$, a equação $x^k = g$ tem o mesmo número de soluções em G que a equação $x^k = \varphi(g)$ em H .*

Exercício

Faça a demonstração da proposição anterior.

Exemplo

Como $x^4 = 1$ tem quatro soluções em $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ e apenas duas em $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, temos que estes dois grupos não são isomorfos.

Proposição

Seja φ um isomorfismo de um grupo G num grupo H . Então

1. G é abeliano se e só se H é abeliano;
2. G é cíclico se e só se H é cíclico;
3. φ^{-1} é um isomorfismo de H em G ;
4. se K é um subgrupo de G , então $\varphi(K) = \{\varphi(k) \mid k \in K\}$ é um subgrupo de H .

Exercício

Faça a demonstração da proposição anterior.

Um isomorfismo de um grupo nele próprio diz-se um *automorfismo*.

Exercício

Seja G um grupo. Mostre que o conjunto $\text{Aut}(G)$ dos automorfismos de G é um grupo.

Exercício

Mostre que $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8) \simeq U(8)$.

Sugestão. Comece por observar que para definir um automorfismo φ de $\mathbb{Z}_8$ basta definir a imagem de 1. Recorde também que a ordem de 1 é a mesma que a de $\varphi(1)$.

Sejam G um grupo e $a \in G$. A função φ_a definida por $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ($x \in G$) diz-se o *automorfismo interno de G induzido por a* .

Exercício

Mostre que φ_a é de facto um automorfismo de G .

Exercício

Seja G um grupo. Mostre que o conjunto $\text{In}(G)$ dos automorfismos internos de G é um grupo.

Exercício

Descreva a acção do automorfismo interno de D_4 induzido por ρ_{90} nos elementos de D_4 .