

Geradores e relações

Recordamos a tabela de Cayley de D_4 (simetrias do quadrado):

	ρ_0	ρ_{90}	ρ_{180}	ρ_{270}	h	v	d_1	d_2
ρ_0	ρ_0	ρ_{90}	ρ_{180}	ρ_{270}	h	v	d_1	d_2
ρ_{90}	ρ_{90}	ρ_{180}	ρ_{270}	ρ_0	d_2	d_1	h	v
ρ_{180}	ρ_{180}	ρ_{270}	ρ_0	ρ_{90}	v	h	d_2	d_1
ρ_{270}	ρ_{270}	ρ_0	ρ_{90}	ρ_{180}	d_1	d_2	v	h
h	h	d_1	v	d_2	ρ_0	ρ_{180}	ρ_{90}	ρ_{270}
v	v	d_2	h	d_1	ρ_{180}	ρ_0	ρ_{270}	ρ_{90}
d_1	d_1	v	d_2	h	ρ_{270}	ρ_{90}	ρ_0	ρ_{180}
d_2	d_2	h	d_1	v	ρ_{90}	ρ_{270}	ρ_{180}	ρ_0

Note-se que temos as relações: $\rho_{90}^4 = h^2 = (\rho_{90}h)^2 = \rho_0$. Outras relações entre ρ_{90} e h podem ser deduzidas destas. (Deduz a, por exemplo, que $h\rho_{90} = \rho_{90}^3h$.)

Temos assim que D_4 é um grupo gerado por dois elementos a e b sujeitos às relações $a^4 = b^2 = (ab)^2 = e$ e que todas as outras relações entre a e b podem ser deduzidas destas.

A um conjunto $A = \{a, b, c, \dots\}$ de símbolos distintos (a que chamamos *alfabeto*) associamos um conjunto $A^{-1} = \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \dots\}$, que se obtém substituindo cada símbolo x de A por a^{-1} .

Denotamos por $W(A)$ o monóide livre sobre o conjunto $A \uplus A^{-1}$, isto é, o conjunto $(A \uplus A^{-1})^*$ das *palavras* da forma $a_1 a_2 a_3 \cdots a_k$, onde cada a_i pertence a $A \uplus A^{-1}$. Consideramos que a *palavra vazia*, isto é, a palavra sem letras, também pertence a $W(A)$. Denotamos a palavra vazia por ϵ .

Em $W(A)$ definimos uma multiplicação por justaposição, isto é, o produto da palavra $a_1 a_2 a_3 \cdots a_k$ com a palavra $b_1 b_2 b_3 \cdots b_\ell$ é a palavra $a_1 a_2 a_3 \cdots a_k b_1 b_2 b_3 \cdots b_\ell$.

Note-se que esta operação é associativa e que tem elemento neutro: a palavra vazia.

Definição

Dizemos que uma palavra $u \in W(A)$ está relacionada com uma palavra $v \in W(A)$ (e escrevemos $u \sim v$) se v poder ser obtida a partir de u inserindo ou apagando palavras da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, com $x \in A$, um número finito de vezes.

Exercício

Mostre que a relação antes definida é uma relação de equivalência.

Exemplo

Seja $A = \{a, b, c\}$. Então $abb^{-1}c \sim ac$; $aa^{-1}bcc^{-1}b^{-1} \sim \epsilon$. Note-se que $bab^{-1}c \not\sim ac$

Denotamos a classe de equivalência de uma palavra u por $\bar{u}$, isto é,

$$\bar{u} = \{v \in W(A) \mid u \sim v\}.$$

Proposição

O conjunto $F(A)$ de todas as classes de equivalência de elementos de $W(A)$ com a operação $\bar{u} \cdot \bar{v} = \overline{uv}$ é um grupo.

Exercício

Faça a demonstração da proposição anterior.

O grupo $F(A)$ diz-se o grupo livre sobre A .

A demonstração da proposição seguinte (que revela a grande importância que têm os grupos livres) pode encontrar-se na bibliografia.

Proposição (Propriedade universal)

Todo o grupo é imagem homomorfa de um grupo livre.

Como consequência do teorema fundamental do homomorfismo (para grupos) tem-se:

Corolário

Todo o grupo é isomorfo a um grupo quociente de um grupo livre.

Definição

Seja G um grupo gerado pelo conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e seja F o grupo livre sobre A . Seja $W = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ um subconjunto de F e seja N o mais pequeno subgrupo normal de F contendo W . Dizemos que G é dado pelos geradores $a_1, a_2, \dots, a_n$ e pelas relações $w_1 = w_2 = \dots = w_t = e$ se existir um homomorfismo sobrejectivo de F/N em G que envia $a_i N$ em a_i .

Nas condições da definição, a notação usada é

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid w_1 = w_2 = \cdots w_t = e \rangle.$$

Diz-se então que

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid w_1 = w_2 = \cdots w_t = e \rangle$$

é uma *apresentação* de G .

Na prática, não nos preocupamos em saber como é o subgrupo normal que contém as relações: manipulam-se os geradores e trata-se tudo o que está em N como sendo a identidade.

Exemplo

Tem-se $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$.

Exercício

Verifique que o grupo multiplicativo gerado pelas matrizes

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, onde $i = \sqrt{-1}$ tem oito elementos e satisfaz as relações $A^2 = B^2 = (AB)^2$.

O grupo do exercício anterior é conhecido por grupo dos quaterniões.

Exemplo (Quaterniões)

$$\mathcal{Q} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle.$$

Proposição

A menos de isomorfismo, existem exactamente 5 grupos de ordem 8:

$$\mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad D_4 \text{ e } \mathcal{Q}.$$

O teorema fundamental permite tratar o caso dos grupos abelianos. Para completar a demonstração basta mostrar que qualquer grupo não abeliano de ordem 8 satisfaz as relações que definem D_4 ou as relações que definem $\mathcal{Q}$. (Usa-se o facto (simples) de que se um grupo é tal que o quadrado de qualquer seu elemento é a identidade, então esse grupo é abeliano, para concluir que um grupo não abeliano de ordem 8 tem um elemento de ordem 4.)

Grafos de Cayley

Definição

Seja G um grupo e A um conjunto de geradores de G . O grafo de Cayley do grupo G com conjunto de geradores A é o grafo (dirigido) $\mathcal{C}(A : G)$ definido do seguinte modo:

1. Cada elemento de G é um vértice de $\mathcal{C}(A : G)$.
2. Para $x, y \in G$ existe uma aresta de x para y se e só se $xa = y$, para algum $a \in A$.

Nota

Usando os pacotes GAP automata e sgpviz é fácil visualizar grafos de Cayley de semigrupos.

Proposição

Sejam G um grupo abeliano e A um conjunto não vazio de geradores de G . Então $\mathcal{C}(A : G)$ tem um caminho hamiltoniano (i.e., um caminho que passa por todos os vértices exactamente uma vez).