



Definição (Centro de um grupo)

O centro, $Z(G)$, de um grupo G é o subconjunto dos elementos de G que comutam com todos os elementos de G , isto é,

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}.$$

Proposição

O centro de um grupo é um subgrupo desse grupo.

Exercício

Demonstre a proposição anterior.

Exercício

Determine o centro de D_4 . (Veja a tabela de Cayley de D_4 apresentada a seguir.)



A tabela de Cayley de D_4 (trata-se da solução de um exercício proposto anteriormente):

	ρ_0	ρ_{90}	ρ_{180}	ρ_{270}	h	v	d_1	d_2
ρ_0	ρ_0	ρ_{90}	ρ_{180}	ρ_{270}	h	v	d_1	d_2
ρ_{90}	ρ_{90}	ρ_{180}	ρ_{270}	ρ_0	d_2	d_1	h	v
ρ_{180}	ρ_{180}	ρ_{270}	ρ_0	ρ_{90}	v	h	d_2	d_1
ρ_{270}	ρ_{270}	ρ_0	ρ_{90}	ρ_{180}	d_1	d_2	v	h
h	h	d_1	v	d_2	ρ_0	ρ_{180}	ρ_{90}	ρ_{270}
v	v	d_2	h	d_1	ρ_{180}	ρ_0	ρ_{270}	ρ_{90}
d_1	d_1	v	d_2	h	ρ_{270}	ρ_{90}	ρ_0	ρ_{180}
d_2	d_2	h	d_1	v	ρ_{90}	ρ_{270}	ρ_{180}	ρ_0



Definição (Centralizador de um elemento de um grupo)

Seja a um elemento de um grupo G . O centralizador de a em G , $C(a)$, é o subconjunto dos elementos de G que comutam com a , isto é,

$$C(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}.$$

Proposição

Para cada elemento a de um grupo G , o centralizador de a em G é um subgrupo de G .

Exercício

Demonstre a proposição anterior.

Exercício

Determine o centralizador de ρ_{90} em D_4 .

Grupos cíclicos

Dado um elemento a de um grupo G , usamos a notação:

$$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposição

Sejam G um grupo e a um elemento de G . Então $\langle a \rangle$ é um subgrupo de G .

Demonstração. Como $a \in \langle a \rangle$, tem-se que $\langle a \rangle$ é não vazio.

Sejam $a^n, a^m \in \langle a \rangle$. Então $a^n(a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$. □

O subgrupo $\langle a \rangle$ diz-se o *subgrupo cíclico de G gerado por a* . Se acontecer que $G = \langle a \rangle$, para algum $a \in G$, dizemos que G é *cíclico* e que a é um gerador de G . Claro que um grupo cíclico pode ter vários geradores distintos.

Nota

Como, para quaisquer inteiros i e j , $a^i a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j a^i$, tem-se que qualquer grupo cíclico é abeliano.

Exercício

Considere o grupo $U(8)$. Para cada um dos seus elementos, determine o subgrupo cíclico gerado por esse elemento e conclua que $U(8)$, embora seja abeliano, não é cíclico.

Exemplo

Em $\mathbb{Z}_{12}$, $\langle 3 \rangle = \{3, 6, 9, 0\}$. (Não esquecer que quando a operação é a adição, a^n tem o significado de na .)

Exemplo

Em D_4 , $\langle \rho_{90} \rangle = \{\rho_{90}, \rho_{180}, \rho_{270}, \rho_0\}$, $\langle \rho_{180} \rangle = \{\rho_{180}, \rho_0\}$ e $\langle h \rangle = \{h, \rho_0\}$.

Exemplo

O conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ com a adição usual é um grupo cíclico. Tanto 1 como -1 são geradores.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{Z}_n$ com a adição módulo n é um grupo cíclico. Tanto 1 como $n - 1$ são geradores.

Exercício

Determine todos os geradores de $\mathbb{Z}_8$.

Exercício

Mostre que $U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$ é cíclico e indique todos os seus geradores.

Seguidamente vamos ver algumas propriedades abstractas dos grupos cíclicos.