Teste Modelo de Elementos de Matemática I

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

21 de Novembro de 2002

Nome: ______________________________

Número de identificação: ______________ Curso ______________

Esta prova contempla apenas a matéria dada até à data em que é disponibilizada. O exame final terá um aspecto semelhante.

Sugere-se que o aluno procure resolver a prova numa situação o mais próxima possível de uma situação de exame. Deste modo poderá concluir se está a realizar o estudo adequado. Se for necessário, deve tentar adequá-lo.

. . . .

Observações.

- Desligue o telemóvel.
- A prova consiste de duas partes e tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra ou número que a identifica. Salvo indicação em contrário, esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas.
- O uso de calculadoras não ajuda na resolução da prova, sendo o uso de calculadoras gráficas proibido.

. . . .

Primeira parte

À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. A resposta à segunda questão deve ser cuidadosamente justificada.

A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)$

   (i) vale 0. (ii) vale $+\infty$. (iii) vale $\frac{1}{2}$. (iv) vale 2.

(v.s.f.f.)

2. O limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \operatorname{arcsen} t \, dt$

   (i) vale 0. (ii) vale $+\infty$. (iii) vale $1/2$. (iv) vale 1.

3. A tangente ao gráfico da função f dada por $f(x) = \log(4x - 3x^2)$ no ponto de abcissa 1 é a recta de equação

   (i) $y = 0$. (ii) $y = -2x + 2$. (iii) $y = -2x$. (iv) $y = -2x - 1$.

4. A derivada da função $\sqrt{1 + e^{2x}}$ é

   (i) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. (ii) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. (iii) $\frac{e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}$. (iv) nenhuma das anteriores.

5. Seja f uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 4 em -2 é

$$P_{4,-2,f}(x) = 1 + (x+2)^2 - 3(x+2)^3.$$

   Então $f'''(-2)$ é

   (i) -3. (ii) -18. (iii) 0. (iv) 1.

6. Uma primitiva da função $\frac{2}{x^2+2x+1}$ é

   (i) $\log(x^2 + x + 1)$. (ii) $\frac{-2}{x+1}$. (iii) $2 \operatorname{arctg}(x+1)$. (iv) $\frac{2}{x+1}$.

7. A área da região do plano limitada pelos gráficos das funções $y = 4x - x^2$ e $y = -x$ é

   (i) $\frac{5^4}{6}$. (ii) $\frac{5^3}{6}$. (iii) 0. (iv) 50.

8. O valor de $\int_2^4 |6 - 2x| \, dx$ é

   (i) 0. (ii) 16. (iii) 2. (iv) 1.

9. De uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabe-se que é duas vezes derivável, que $g'(4) = 0$ e $g''(4) = 1$. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = g(1 + 3e^{2x})$, então $f''(0)$ é

   (i) 6. (ii) 1. (iii) 36. (iv) 48.

10. Seja f a função dada por $f(x) = \sqrt{x+1}$. O valor de $(f^{-1})'(4)$ é

   (i) $2\sqrt{5}$. (ii) 8. (iii) $\sqrt{5}$. (iv) $\frac{1}{8}$.

Nome: ____________________

B. (3 valores) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

1. Determine o domínio de f e as assíntotas ao gráfico de f.
2. Determine as primeira e segunda derivadas de f.
3. Indique os pontos críticos e os intervalos de monotonia.
4. Indique os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade/convexidade.
5. Indique o contradomínio de f.
6. Esboce o gráfico de f.

Teste Modelo de Elementos de Matemática I

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

21 de Novembro de 2002 — Segunda parte

Nome: ______________________________ Curso: ________________

Nesta parte todas as respostas devem ser cuidadosamente justificadas.

C. (1 valor) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função derivável tal que $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$, então f', a derivada de f, é tal que $f'(x) = f'(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

D. (1 valor) Escreva uma equação de uma a recta de declive $\frac{1}{8}$ tangente ao gráfico da função f dada por $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Nome: ____

E. (3 valores) Resolva **três** das alíneas seguintes. No caso de resolver mais, apenas serão cotadas as primeiras três.

1. Determine $\int x \cos x \, dx$, usando integração por partes;
2. Determine $\displaystyle\int \frac{1}{5\sqrt{x}+2x}\,dx$, fazendo uma substituição adequada;
3. Determine $\int \cos^3 x \, dx$;
4. Determine $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x}\,dx$.

F. (1 valor) Determine a tangente no ponto $(0,0)$ à curva $y(x^2-1)-x^4=x$.

G. (1 valor) Determine $\int \frac{x^2+6x+14}{x^2+4x+13}\,dx$.

H. (1 valor) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável pelo menos 18 vezes. Suponha que se n é um inteiro tal que $1 \leq n \leq 18$, então $f(n) = 0$. Mostre que existe $x \in [1, 18]$ tal que $f^{(17)}(x) = 0$.