

Exame de Elementos de Matemática II
(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

12 de Junho de 2003

Nome: _____

Número de identificação: _____ Curso: _____

Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização da última questão é opcional para os alunos que fizeram o mini-teste.
- À primeira questão deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

.....

A. (6 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 1 valor; cada resposta errada vale -0,3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 2 tais que $|A| = -2$ e $|B| = 2$.

Então $|A^t \cdot (2B)^{-1} \cdot (3A^{-1})|$ é:

- (i) $-3/4$. (ii) $9/8$. (iii) $3/2$. (iv) $-1/6$.

2. Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$, então $\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 \\ b+1 & 3 & 2 \\ c+1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ é

- (i) -6 . (ii) $-1/6$. (iii) 6 . (iv) 0 .

(v.s.f.f.)

3. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} k-2 & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. O sistema $AX = B$
- (i) tem uma e uma só solução qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.
 - (ii) não tem solução se $k = -1$.
 - (iii) tem mais do que uma solução se $k = 1$.
 - (iv) tem solução para todo o $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. Considere no espaço vectorial $\mathbb{R}_2[X]$ os vectores $\vec{u}_1 = 2X - 2$; $\vec{u}_2 = 3 - 3X$; $\vec{u}_3 = X^2 + 1$ e seja $E = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$. Então
- (i) $\dim(E) = 3$ (ii) $E = \mathbb{R}_2[X]$ (iii) $E = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ (iv) $E = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle$
5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear. Pode concluir que:
- (i) se φ é injectiva, então também é sobrejectiva.
 - (ii) φ não é sobrejectiva.
 - (iii) φ não é injectiva.
 - (iv) φ é injectiva.
6. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $N(\varphi) = \langle (1, 2, -1) \rangle$, $\varphi(0, 1, 0) = (-1, 2)$ e $\varphi(0, 0, 1) = (2, 1)$, então
- (i) $\varphi(2, 4, -2) = (1, 0)$. (ii) $\varphi(2, 4, -2) = (0, 1)$.
 - (iii) $\varphi(1, 1, 0) = (1, 3)$. (iv) $\varphi(1, 1, 0) = (3, -1)$.

.....

B. (1 valor)

Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $f : E \rightarrow E$ um endomorfismo. Suponha que $\vec{u}$ é um vector próprio de f associado ao valor próprio λ . Diga, justificando, se $\vec{u}$ é um vector próprio de $f \circ f$.

Nome: _____

C. (2 valores)

Considere o seguinte sistema de equações lineares sobre o corpo dos números reais:

$$\begin{cases} x + 7y - 5z = 2b \\ 5x - y - 7z = b \\ x + ay - 2z = 1 \end{cases}$$

1. Discuta-o em função dos parâmetros a e b .
2. Resolva-o para $a = 0$ e $b = 0$ usando a regra de Cramer.

Nome: _____

D. (4 valores) Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $\varphi(x,y,z) = (x+y,z)$.

1. Mostre que φ é uma aplicação linear.
2. Determine uma base para $\text{Im}(\varphi)$ e diga se φ é sobrejectiva.
3. Determine a matriz que representa φ relativamente às bases ordenadas $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$ e $((1, 1), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.
4. Partindo da matriz obtida na alínea anterior e usando matrizes de mudança de base, determine a matriz que representa φ considerando em $\mathbb{R}^3$ a base canónica e em $\mathbb{R}^2$ a base indicada na alínea anterior.

Nome: _____

E. (3 valores) Considere as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Determine $B \cdot A^t - 2A$.
2. Diga se a matriz B é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.
3. Diga se a matriz B representa, relativamente a alguma base de $\mathbb{R}^2$, um endomorfismo diagonalizável.

Nome: _____

F. (4 valores) **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 20 de Março de 2003.

Se realizou o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as alíneas seguintes:

1. Inverta a ordem de integração e calcule o integral $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin x^3 dx dy$.

2. Determine, se existirem, os extremos locais e os pontos de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 6xy - 39y + 18x + 20.$$