Exame de Elementos de Matemática II

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

14 de Julho de 2003

Nome: ____

Número de identificação: ____________________ Curso: ____________________

Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização da última questão é opcional para os alunos que fizeram o mini-teste.
- À primeira questão deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

. . . .

A. (6 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 1 valor; cada resposta errada vale -0,3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. Se M e N matrizes quadradas de ordem 3 tais que $|M| = -1$ e $|N| = 9$, então $|\ (2M^t)^{-1} \cdot \left(3N^{-1}\right)\ |$ é:

   (i) $-3/8$. (ii) $-1/6$. (iii) $3/4$. (iv) $1/2$.

2. Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, então $\begin{vmatrix} a & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ b & 1 & 7 & 2 \\ c & -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ é

   (i) 3. (ii) 1. (iii) -3. (iv) -6.

(v.s.f.f.)

3. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. O sistema $AX = B$

   (i) é possível e determinado qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.
   (ii) é possível e determinado só se $k \neq \sqrt{2}$ e $k \neq -\sqrt{2}$.
   (iii) é possível e indeterminado se $k = -\sqrt{2}$.
   (iv) é impossível se $k = \sqrt{2}$.

4. Considere o subespaço vectorial $A = \{a + bX + cX^2 : a - b = 2c\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Então:

   (i) $X^2 + 3 \in A$. (ii) $A = \mathbb{R}_2[X]$. (iii) $\dim(A) = 1$. (iv) $(1 + X, 2 + X^2)$ é base de A.

5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por $\varphi(x,y) = (x + ay, (a-3)x + ay)$, com $a \in \mathbb{R}$. A aplicação φ é injectiva se e só se

   (i) $a = 0$. (ii) $a = 4$. (iii) $a = 0$ ou $a = 4$. (iv) $a \neq 0$ e $a \neq 4$.

6. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\varphi(1,1) = (1,-2,1)$ e $\varphi(0,1) = (0,2,3)$, então $\varphi(3,-1)$ é:

   (i) $(3,-14,-9)$. (ii) $(3,1,1)$. (iii) $(1,0,4)$. (iv) $(-1,2,0)$.

....

B. (1 valor) Seja A ma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 + A + I_n$ é a matriz nula. Determine, se existir, a inversa de A.

Nome: ____

C. (2 valores)

Considere o seguinte sistema de equações lineares sobre o corpo dos números reais:

$$\begin{cases} x+2z & = & 1 \\ 2x+y-az & = & 1 \\ ax+3y+7z & = & b \end{cases}$$

1. Discuta-o em função dos parâmetros a e b.
2. Resolva-o para $a=1$ e $b=-2$, usando a regra de Cramer.

Nome: ____

D. (4 valores)

Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $\varphi(x,y,z) = (x+y,z,z)$.

1. Determine uma base de $\mathrm{N}(\varphi)$.
2. Determine, se existir, um subespaço F de $\mathbb{R}^3$, diferente de $\mathbb{R}^3$, tal que $F + \mathrm{N}(\varphi) = \mathbb{R}^3$.
3. Determine a matriz que representa φ, considerando a base $(\ (3,1,1),(0,0,1),(0,1,0)\ )$ no espaço de partida e a base $(\ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\ )$ no espaço de chegada.
4. Partindo da matriz obtida na alínea anterior e usando matrizes de mudança de base, determine a matriz que representa φ considerando a base $(\ (0,0,3),(0,1,0),(3,1,1)\ )$ no espaço de partida e a base $(\ (1,2,0),(0,1,0),(0,0,1)\ )$ no espaço de chegada.

Nome: ____

E. (3 valores) Considere as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Determine k de modo que $(A+B)^t = A+B$.
2. Diga se a matriz B é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.
3. Determine os valores próprios de B, assim como os vectores próprios associados a um deles.

Nome: ____________________

F. (4 valores) **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 20 de Março de 2003.

Se realizou o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no mini-teste . . . . **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as alíneas seguintes:

1. Calcule o integral $\int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}}\, dy\, dx$.
2. Determine, se existirem, os extremos locais e os pontos de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y.$$