Exame modelo de Elementos de Matemática II

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

Junho de 2003

Nome: ____

Número de identificação: ____________________ Curso: ____________________

Observações:

- Desligue o telemóvel.
- A prova tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra ou número que a identifica. Salvo indicação em contrário, esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas. A realização da última questão é opcional para os alunos que fizeram o mini-teste.
- À primeira questão deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. As respostas às restantes questões devem ser cuidadosamente justificadas.

. . . .

A. (7 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 1 valor; cada resposta errada vale -0,3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. Sejam M e L matrizes quadradas de ordem 4 tais que $|M| = 2$ e $|L| = -1$. Seja

$$K = \left(\frac{2}{3}M\right)^{-1} \times \left(-\frac{1}{3}L\right)^{t} \times \left(M^2\right).$$

Então o determinante $|K|$ é

(i) $1/9$. (ii) $-1/8$. (iii) 1. (iv) $4/9$.

2. O conjunto de vectores $\{(0,-1,a),(2,2,0),(b,1,0)\}$ gera $\mathbb{R}^3$

(i) se $a = b = 0$. (ii) se $a^2 = b$.

(iii) quaisquer que sejam os números reais a e b. (iv) se $ab \neq a$.

(v.s.f.f.)

3. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4+a \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. O sistema homogéneo $AX = 0$

   (i) é impossível se $a = -1$.
   (ii) é impossível qualquer que seja o número real a.
   (iii) é possível e determinado qualquer que seja o número real a.
   (iv) é possível e indeterminado se $a = -1$.

4. Considere os determinantes $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix}$. Tem-se

   (i) $\Delta_1 = 2\Delta_2$. (ii) $\Delta_1 = \Delta_2$. (iii) $-\Delta_1 = \Delta_2$. (iv) $\Delta_1 = -2\Delta_2$.

5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear. Pode concluir que:

   (i) φ não é sobrejectiva. (ii) $\{(1,1),(0,-2)\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(\varphi)$.

   (iii) $\dim(\mathrm{N}(\varphi)) \neq \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. (iv) $2\dim(\mathrm{N}(\varphi)) \neq \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

6. Seja $F_a = \langle X - a, X^2 - X, X^2 + X \rangle$ um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_2[X]$. Tem-se que

   (i) $\dim(F_a) = 3$, qualquer que seja o número real a.
   (ii) $\dim(F_a) \neq 3$, qualquer que seja o número real a.
   (iii) $\dim(F_a) = 2$, qualquer que seja o número real a.
   (iv) nenhuma das restantes respostas é verdadeira.

7. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{N}(\varphi) = \langle (1,2,3) \rangle$. Então $\mathrm{Im}(\varphi)$ pode ser

   (i) $\langle (3,1,0) \rangle$. (ii) $\langle (3,1,0),(0,1,1) \rangle$. (iii) $\mathbb{R}^2$. (iv) $\mathbb{R}^3$.

Nome: ______________________________

B. (2 valores)

Considere o seguinte sistema de equações lineares sobre o corpo dos números reais:

$$\begin{cases} x+2y-4z & = & -1 \\ x-y+(a-2)z & = & b+2 \\ 2x+y-3z & = & 0 \end{cases}$$

1. Discuta o sistema em função dos parâmetros a e b.
2. Resolva o sistema para $a=2$ e $b=-1$.

. . . .

C. (4 valores) Seja $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a aplicação definida por $\varphi(x,y,z)=(x+y-z,x+2y+3z,x+y)$.

1. Mostre que φ é uma aplicação linear.
2. Determine $\mathrm{N}(\varphi)$ e diga se φ é injectiva.
3. Determine uma base para $\mathrm{Im}(\varphi)$ e diga se φ é sobrejectiva.
4. Determine a matriz que representa φ, considerando a base ordenada $(\,(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0)\,)$ no espaço de partida e a base canónica no espaço de chegada.
5. Partindo da matriz obtida na alínea anterior e usando matrizes de mudança de base, determine a matriz que representa φ considerando a base canónica tanto no espaço de partida como no espaço de chegada.

. . . .

D. (3 valores) Considere a matriz real $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Determine os valores próprios de A, assim como os vectores próprios associados a um deles.
2. Determine A^2+2A^t.
3. Diga se a matriz A é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

. . . .

E. (4 valores) **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 20 de Março de 2003.

Se realizou o mini-teste, indique se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no mini-teste . . . . **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva as alíneas seguintes:

1. Calcule o integral $\displaystyle\iint_D \frac{x(\ln y)^3}{y^2}\,dA$, sendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le y\le e,\ 0\le x\le\sqrt{y}\right\}$.
2. Determine os máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y)=y^3-x^2y+x^2-y^2.$$