

Exame modelo de Elementos de Matemática I

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

2003/2004

Nome: _____

Número de identificação: _____ Curso _____

Observações.

- Desligue o telemóvel.
- A prova consiste de duas partes e tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização de qualquer das questões B, C e D é opcional para os alunos que fizeram os mini-testes correspondentes.
- O uso de calculadoras não ajuda na resolução da prova, sendo o uso de calculadoras gráficas proibido.

.....

Primeira parte

À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. A resposta à segunda questão deve ser cuidadosamente justificada.

- A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{7x^7 + x}$

- (i) vale 2. (ii) vale 0. (iii) vale 1. (iv) não existe.

2. Uma primitiva da função $\frac{1}{3+3x^2}$ é

- (i) $\frac{1}{3} \arctg(\sqrt{3}x)$. (ii) $6x(3+3x^2)^{-2}$. (iii) $\ln(3+3x^2)$. (iv) $\frac{1}{3} \arctg(x)$.

3. A área da região do plano limitada pelos gráficos das funções $y = \operatorname{tg} x$, $y = 1$ e pelo eixo dos yy é

- (i) $\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. (ii) 0. (iii) $\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. (iv) $\frac{\pi}{4}$

(v.s.f.f.)

4. Considere a função $f :]0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + x - 6)^{-1}$. Então

- (i) f não admite nenhum prolongamento contínuo a $[0, 2[$.
- (ii) f admite um e um só prolongamento contínuo a $[0, 2]$.
- (iii) f admite um e um só prolongamento contínuo a $[0, 2[$.
- (iv) f admite exactamente dois prolongamentos contínuos a $[0, 2]$.

5. O integral $\int_0^1 e^{2x} dx$

- (i) vale $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$.
- (ii) vale $\frac{e^2}{2}$.
- (iii) vale $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}$.
- (iv) vale $\frac{1}{2} \ln 2$.

6. Seja f uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 3 em 1 é

$$P_{3,1,f}(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 + \frac{3}{7!}(x-1)^7$$

e seja $g(x) = f(e^x)$. Então $g'(0)$

- (i) vale 3.
- (ii) vale 2.
- (iii) vale 5.
- (iv) não satisfaz nenhuma das opções anteriores.

7. Seja h a função definida por $h(x) = \ln(2x+1)$. Então o valor de $(h^{-1})'(0)$ é

- (i) $1/2$.
- (ii) 1.
- (iii) 0.
- (iv) impossível de calcular.

8. Sendo f a função definida por $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t} dt$, a derivada $f'(x)$ é

- (i) $\frac{\ln x}{x}$.
- (ii) $3 \frac{\ln x^3}{x}$.
- (iii) $(\ln x)^3$.
- (iv) $\frac{\ln x^3}{x^3}$.

9. Considere as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Tem-se que

- (i) ambas as séries divergem.
- (ii) ambas as séries convergem.
- (iii) uma das séries diverge para $+\infty$ e a outra converge.
- (iv) uma das séries diverge para $-\infty$ e a outra converge.

10. O domínio de convergência da série de potências é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$

- (i) $] -3, -1[$.
- (ii) $[-3, -1]$.
- (iii) $\mathbb{R}$.
- (iv) $[-3, -1[$.

Nome: _____

B. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 6 de Novembro de 2003.

Se realizou o 1º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 1º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva a questão seguinte:

Considere a função $f(x) = xe^x$.

1. (0.5 valores) Determine o domínio de f e as assíntotas ao gráfico de f .
2. (0.75 valores) Determine a derivada de f , assim como os pontos críticos e os intervalos de monotonia.
3. (0.75 valores) Determine a segunda derivada de f , assim como os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade/convexidade.
4. (0.5 valores) Esboce o gráfico de f .

Exame modelo de Elementos de Matemática I

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

2003/2004

Segunda parte

Nome: _____ Curso: _____

Nesta parte todas as respostas devem ser cuidadosamente justificadas.

C. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 2 de Dezembro de 2003.

Se realizou o 2º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 2º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva a questão seguinte: (5 valores)

1. (0,5 valores) Determine a primitiva $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$.
2. (1 valor) Determine a primitiva $\int x \ln x dx$.
3. (1 valor) Determine a primitiva $\int \frac{2x^3 + 2x - 3}{x^4 + x^2} dx$.

Nome: _____

D. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 6 de Janeiro de 2004.

Se realizou o 3º mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 3º mini-teste **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido “Não” ou não tenha realizado o mini-teste, resolva a questão seguinte:

1. (1 valor) Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$.
2. (0,5 valores) Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.
3. (1 valor) Determine o domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$.

Nome: _____

E. (1 valor) Determine uma recta tangente ao gráfico da função $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ que seja paralela à recta de equação $x + 2y = 0$.

F. (2,5 valores) Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ uma função contínua para a qual $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 1$.

1. Mostre que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

2. Conclua que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ também é convergente.