Exame modelo de Elementos de Matemática I

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

2003/2004

Nome: ______________________________

Número de identificação: ______________ Curso ______________

Observações.

- Desligue o telemóvel.
- A prova consiste de duas partes e tem a duração total de 3 horas.
- A cotação da prova é de 20 valores, estando a cotação de cada questão indicada entre parêntesis ao lado da letra que a identifica. Esta é distribuída equitativamente pelas respectivas alíneas, se as houver. A realização de qualquer das questões B, C e D é opcional para os alunos que fizeram os mini-testes correspondentes.
- O uso de calculadoras não ajuda na resolução da prova, sendo o uso de calculadoras gráficas proibido.

. . . .

Primeira parte

À primeira questão da primeira parte deve responder **sem** apresentar quaisquer cálculos. Note que a ausência de resposta é preferível a uma resposta errada. A resposta à segunda questão deve ser cuidadosamente justificada.

A. (9 valores, distribuídos do seguinte modo: cada resposta correcta vale 0.9 valores; cada resposta errada vale -0.3 valores. A classificação desta questão é o máximo entre a classificação nela obtida e 0 valores.)

Para cada uma das alíneas desta questão são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

1. O limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{7x^7+x}$

   (i) vale 2. (ii) vale 0. (iii) vale 1. (iv) não existe.

2. Uma primitiva da função $\dfrac{1}{3+3x^2}$ é

   (i) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)$. (ii) $6x(3+3x^2)^{-2}$. (iii) $\ln(3+3x^2)$. (iv) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x)$.

3. A área da região do plano limitada pelos gráficos das funções $y = \operatorname{tg} x$, $y = 1$ e pelo eixo dos yy é

   (i) $\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (ii) 0. (iii) $\dfrac{\pi}{4}+\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (iv) $\dfrac{\pi}{4}$

(v.s.f.f.)

4. Considere a função $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2+x-6)^{-1}$. Então

   (i) f não admite nenhum prolongamento contínuo a $[0,2[$.
   (ii) f admite um e um só prolongamento contínuo a $[0,2]$.
   (iii) f admite um e um só prolongamento contínuo a $[0,2[$.
   (iv) f admite exactamente dois prolongamentos contínuos a $[0,2]$.

5. O integral $\int_0^1 e^{2x}\, dx$

   (i) vale $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$. (ii) vale $\frac{e^2}{2}$. (iii) vale $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$. (iv) vale $\frac{1}{2}\ln 2$.

6. Seja f uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 3 em 1 é

$$P_{3,1,f}(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 + \frac{3}{7!}(x-1)^7$$

   e seja $g(x) = f(e^x)$. Então $g'(0)$

   (i) vale 3. (ii) vale 2. (iii) vale 5.
   (iv) não satisfaz nenhuma das opções anteriores.

7. Seja h a função definida por $h(x) = \ln(2x+1)$. Então o valor de $(h^{-1})'(0)$ é

   (i) $1/2$. (ii) 1. (iii) 0.
   (iv) impossível de calcular.

8. Sendo f a função definida por $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t}\, dt$, a derivada $f'(x)$ é

   (i) $\frac{\ln x}{x}$. (ii) $3\frac{\ln x^3}{x}$. (iii) $(\ln x)^3$. (iv) $\frac{\ln x^3}{x^3}$.

9. Considere as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Tem-se que

   (i) ambas as séries divergem.
   (ii) ambas as séries convergem.
   (iii) uma das séries diverge para $+\infty$ e a outra converge.
   (iv) uma das séries diverge para $-\infty$ e a outra converge.

10. O domínio de convergência da série de potências é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$

   (i) $]-3,-1[$. (ii) $[-3,-1]$. (iii) $\mathbb{R}$. (iv) $[-3,-1[$.

Nome: ______________________________

B. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 6 de Novembro de 2003.

Se realizou o 1^o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 1^o mini-teste .... **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva a questão seguinte:

Considere a função $f(x) = xe^x$.

1. (0.5 valores) Determine o domínio de f e as assíntotas ao gráfico de f.
2. (0.75 valores) Determine a derivada de f, assim como os pontos críticos e os intervalos de monotonia.
3. (0.75 valores) Determine a segunda derivada de f, assim como os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade/convexidade.
4. (0.5 valores) Esboce o gráfico de f.

Exame modelo de Elementos de Matemática I

(Cursos de BQ, CTA, EFQ, Q)

2003/2004 Segunda parte

Nome: ______________________________ Curso: ____________________

Nesta parte todas as respostas devem ser cuidadosamente justificadas.

C. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 2 de Dezembro de 2003.

Se realizou o 2^o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 2^o mini-teste . . . . **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva a questão seguinte: (5 valores)

1. (0,5 valores) Determine a primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$.
2. (1 valor) Determine a primitiva $\displaystyle\int x \ln x\,dx$.
3. (1 valor) Determine a primitiva $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x-3}{x^4+x^2}\,dx$.

Nome: ____

D. **Questão opcional** para os alunos que realizaram o mini-teste do dia 6 de Janeiro de 2004.

Se realizou o 3^o mini-teste, diga se pretende que a classificação relativa a esta questão seja a obtida no 3^o mini-teste .... **Sim** ☐ **Não** ☐

Caso tenha respondido "Não" ou não tenha realizado o mini-teste, resolva a questão seguinte:

1. (1 valor) Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$.
2. (0,5 valores) Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.
3. (1 valor) Determine o domínio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$.

Nome: ______________________________

E. (1 valor) Determine uma recta tangente ao gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ que seja paralela à recta de equação $x + 2y = 0$.

F. (2,5 valores) Seja $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ uma função contínua para a qual $\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 1$.

1. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente.
2. Conclua que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ também é convergente.