METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO – MATEMÁTICA

Caderno de Apoio

3.º Ciclo

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

Este Caderno de Apoio, organizado por ciclos de escolaridade, constitui um complemento ao documento *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Na elaboração das Metas Curriculares utilizou-se um formato preciso e sucinto, não tendo sido incluídos exemplos ilustrativos dos descritores. Neste documento apresentam-se várias sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores.

Procurou-se realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades atualmente menos trabalhados no Ensino Básico embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas. Estas escolhas não significam, porém, que se considerem menos relevantes os descritores não contemplados.

Longe de se tratar de uma lista de tarefas a cumprir, as atividades propostas têm um caráter indicativo, podendo os professores optar por alternativas que conduzam igualmente ao cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas.

Aos exemplos apresentados estão associados três níveis de desempenho. Os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores. Destinam-se a esclarecer questões de índole científica que fundamentam os conteúdos destes níveis de escolaridade e que poderão ajudar à seleção das metodologias mais adequadas à lecionação. Tanto no 2.º como no 3.º ciclo, relativamente ao domínio Geometria e Medida, reuniram-se estes textos num anexo designado por Texto Complementar de Geometria.

Nas Metas Curriculares, no domínio da Geometria e Medida, foi privilegiada uma notação tradicional do Ensino Básico e Secundário português e que os alunos devem conhecer. Contudo, poderão ser utilizadas outras notações em alternativa, desde que devidamente clarificadas e coerentes.

7.º ANO

Números e Operações NO7

Descritor	Texto de apoio
1.1	Ao concluírem o 2.º ciclo, os alunos deverão saber multiplicar e dividir dois quaisquer números racionais positivos. Neste domínio, a sequência de descritores apresentada pretende estender estas operações a todos os números racionais, dando cumprimento ao objetivo geral enunciado, o qual poderá ser trabalhado em conjunto com os descritores ALG7-1.1, 1.2, 1.3 e 1.7. Será uma boa oportunidade para se rever a introdução dos números relativos, iniciada no 2.º ciclo, incluindo as operações de adição e de subtração para números racionais quaisquer (*cf.* NO6, objetivos gerais 2, 3 e 4). Em particular importa recordar que a diferença de dois números racionais pode ser expressa como a soma do primeiro com o simétrico do segundo (*cf.* NO6-4.2); desta propriedade resulta que o simétrico de um número racional q, soma de zero com o simétrico de q, é igual à diferença $0-q$ (NO6-4.3), ou, por outras palavras, é o número racional cuja soma com q é igual a 0, o que, de alguma maneira, justifica a notação «$-q$». As duas igualdades apresentadas neste descritor são uma consequência imediata desta caracterização algébrica dos números simétricos (dois números racionais são simétricos quando, e apenas quando, a respetiva soma é nula) e das propriedades associativa e comutativa da operação de adição. **Exemplo** *Considera um número racional q.* *a. Mostra que o simétrico de $q-3$ é $3-q$.* *b. Calcula cada um dos números referidos na alínea anterior no caso em que $q=5$.* R.: a. Para mostrar que os números em causa são simétricos, vamos efetuar a respetiva soma: $(q-3)+(3-q)=\big(q+(-3)\big)+\big(3+(-q)\big)=q+\big((-3)+3\big)+(-q)=q+0+(-q)=0.$ Como a soma é nula, os números em causa são simétricos um do outro, ou seja $-(q-3)=(3-q).$ b. Considerando $q=5$, $q-3=5-3=2$ e $3-q=3-5=-2$. Os dois números são de facto simétricos, como já se sabia da alínea anterior. **Exemplo*** *Dados dois números racionais q e r, mostra que o simétrico de $q+r$ é $-q+(-r)$.* R.: Para mostrar que os números em causa são simétricos, determina-se a respetiva soma: $(q+r)+(-q+(-r))=(q+(-q))+(r+(-r))=0+0=0.$ Como a soma é nula, os números em causa são simétricos um do outro, ou seja $-(q+r)=-q+(-r).$

(Tendo em conta o descritor NO6-4.2, poderá optar-se por escrever, mais simplesmente, $-(q+r) = -q-r$.)

A igualdade $-(q-r) = -q+r$ pode ser deduzida de forma análoga. Se já estiver estabelecida a igualdade anterior, é igualmente possível, utilizando os descritores NO6-4.2 e NO6-4.4, argumentar da seguinte forma:

$$-(q-r) = -\big(q+(-r)\big) = -q+\big(-(-r)\big) = -q+r.$$

A igualdade que foi objeto do primeiro exemplo também poderia agora ser imediatamente deduzida desta última, notando apenas que $-q+r = r+(-q) = r-q$.

1.2 Neste descritor é definido o produto de um número natural por um número racional, estendendo-se a definição apresentada no descritor NO4-5.1.

A propriedade de sinal apresentada pode inicialmente ser observada em casos particulares. Por exemplo, tomando $n = 3$ e $q = -4$,

$$3\times(-4) = -4+(-4)+(-4) = -8-4 = -12 = -(3\times 4).$$

Utilizando o descritor anterior, a propriedade pode ser reconhecida de forma mais sistemática. Tomando $n = 4$ e $q = \frac{3}{2}$,

$$4\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right) = -\left(4\times\frac{3}{2}\right).$$

Exemplo*

Dado um número racional q, mostra que $5\times(-q) = -(5\times q)$.

R.:

$$\begin{aligned}5\times(-q) &= -q+(-q)+(-q)+(-q)+(-q) = -(q+q+q+q+q)\\ &= -(5\times q).\end{aligned}$$

1.3 Por extensão dos casos já estudados, define-se aqui o quociente de um número racional por um número natural (ver os descritores NO2-9.3 e NO4-5.3 que definem, respetivamente, o quociente entre números naturais e entre números racionais positivos). À imagem dos números racionais positivos (ALG5-1.4), o sinal de divisão «:» pode ser substituído por um traço de fração.

A propriedade de sinal é uma consequência direta dessa mesma definição, e pode ser reconhecida da seguinte forma: dado um inteiro natural n e um número racional q,

$n\times\left(-\frac{q}{n}\right) = -\left(n\times\frac{q}{n}\right) = -q$ (onde se utilizou o descritor anterior).

O produto de n por $-\frac{q}{n}$ é igual a $-q$, logo, por definição de quociente,

$$\frac{-q}{n} = (-q) : n = -\frac{q}{n}.$$

Exemplo*

Justifica que $(-3) : 5 = -\frac{3}{5}$ *(ou seja, que* $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ *).*

R.: Para justificar que $-\frac{3}{5}$ é igual ao quociente de -3 por 5, vamos verificar que o produto de $-\frac{3}{5}$ por 5 é igual a -3.

Tem-se $5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\left(5 \times \frac{3}{5}\right) = -3$ pelo que $(-3) : 5 = -\frac{3}{5}$.

Como «$\frac{-3}{5}$» é uma notação que designa o quociente $(-3) : 5$, tem-se $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$.

1.4

Neste descritor define-se o produto de um número racional q por um número racional positivo $r = \frac{a}{b}$. Tal como foi feito para o produto de dois números racionais positivos (NO5-1.6), a definição apresentada envolve apenas operações já conhecidas: o produto de um número natural por um número racional e a divisão de um número racional por um número natural:

$$r \times q = \frac{a}{b} \times q = (a \times q) : b.$$

Na prática, o produto de dois números racionais poderá depois (*cf.* 1.7 adiante) ser calculado utilizando as propriedades enunciadas nos descritores NO5-1.6 (ou utilizando o algoritmo da multiplicação no caso dos fatores estarem expressos em forma de dízima finita – NO4-6.6) e NO7-1.7. Esta definição pode no entanto ser trabalhada em casos simples, permitindo em particular reconhecer a propriedade de sinal

$$(-q) \times r = r \times (-q) = -(q \times r).$$

Para efetuar esse reconhecimento, poderá proceder-se como no seguinte exemplo:

Exemplo**

Calcula, utilizando a definição de produto de dois números racionais, $\frac{4}{3} \times \left(-\frac{5}{7}\right)$ *e verifica que é igual a* $-\left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{7}\right)$.

R.: $\frac{4}{3} \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \left(4 \times \left(-\frac{5}{7}\right)\right) : 3 = \left(-\left(4 \times \frac{5}{7}\right)\right) : 3 = \left(-\frac{4\times5}{7}\right) : 3 = -\left(\frac{4\times5}{7} : 3\right)$

$$= -\frac{4\times5}{3\times7} = -\left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{7}\right).$$

Note-se que neste cálculo apenas foram utilizadas propriedades já conhecidas. Começando pela própria definição de produto de um número racional por um número racional positivo, utilizaram-se sucessivamente as propriedades expressas no descritor 1.2, no descritor NO4-5.2, no descritor 1.3, no descritor NO4-5.5 e finalmente no descritor NO5-1.6.

1.5

O descritor anterior já estabelece que o produto de um número racional positivo r por (-1) é igual ao respetivo simétrico, já que $(-1) \times r = r \times (-1) = -(1 \times r) = -r$.

O presente descritor estende esta propriedade, por definição, a todos os racionais, estabelecendo que o produto de qualquer número racional por (-1) é igual ao respetivo simétrico, o que constitui um primeiro passo na definição do produto entre dois números negativos.

1.6	Neste descritor define-se o produto de dois números racionais negativos. Ainda que uma definição não careça de prova, é possível observar que, se quisermos obter no final uma operação de multiplicação associativa, a única possibilidade será, considerando q e r positivos, $-q \times (-r) = \big(q \times (-1)\big) \times (-r) = q \times \big((-1) \times (-r)\big) = q \times \big(-(-r)\big) = q \times r$.
1.8	Este descritor apresenta a definição do quociente de dois números racionais, estendendo-se também a este caso os conceitos apresentados nos descritores NO2-9.3, NO4-5.3 e NO7-1.3. Termina-se assim o proposto no objetivo geral *Multiplicar e dividir números racionais relativos*. A justificação da propriedade de sinal é imediata. Tendo em conta a definição de produto de dois números negativos, no caso de r e q serem positivos (1.6), e, nos restantes casos, a propriedade expressa no descritor 1.4, tem-se, de forma genérica $(-r) \times \left(-\frac{q}{r}\right) = r \times \frac{q}{r} = q$, de onde se conclui, pela definição do quociente de dois números racionais, que $\frac{q}{-r} = -\frac{q}{r}$. Da mesma forma, tem-se $r \times \left(-\frac{q}{r}\right) = -\left(r \times \frac{q}{r}\right) = -q$, de onde resulta $\frac{-q}{r} = -\frac{q}{r}$. Uma consequência importante desta definição (e consequente propriedade) é a generalização das identidades $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$ e $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$ ao caso em que a, b, c e d são números inteiros relativos ($b \neq 0$ e $d \neq 0$). A título de exemplo, se $a = -\alpha < 0$ e b, c, e d forem positivos, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{-\alpha}{b} - \frac{c}{d} = -\frac{\alpha}{b} - \frac{c}{d} = -\frac{\alpha \times d}{b \times d} - \frac{b \times c}{b \times d} = -\left(\frac{\alpha \times d}{b \times d} + \frac{b \times c}{b \times d}\right) = -\frac{\alpha \times d + c \times b}{b \times d} = \frac{-(\alpha \times d + c \times b)}{b \times d} = \frac{-\alpha \times d - c \times b}{b \times d} = \frac{(-\alpha) \times d - c \times b}{b \times d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$ Desta forma, os alunos poderão efetuar de forma mais expedita a soma e a diferença de dois números racionais. Poderão escrever, por exemplo $\frac{4}{5} - \frac{13}{6} = \frac{4 \times 6 - 13 \times 5}{5 \times 6} = \frac{-41}{30} = -\frac{41}{30}$.
1.7 1.9	Estes descritores, em conjunto com NO5-1.6 e NO5-1.7, apresentam um método prático para o cálculo do produto e do quociente de dois números racionais. Tendo em vista os descritores NO7-1.4 e NO7-1.8, torna-se relativamente fácil reconhecer estas propriedades em exemplos concretos. Por outro lado, é fundamental que os alunos adquiram destreza no manuseamento prático destas propriedades.

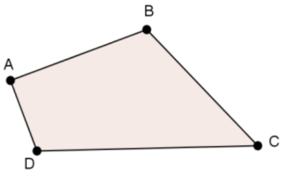
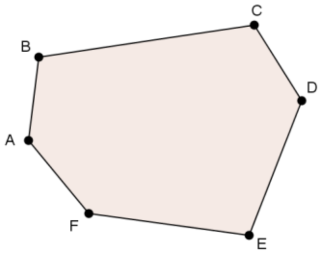
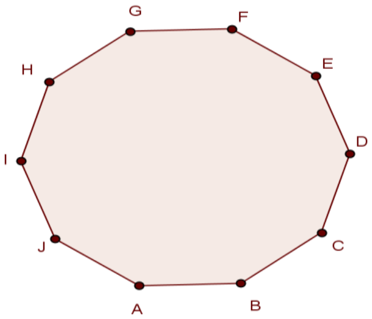
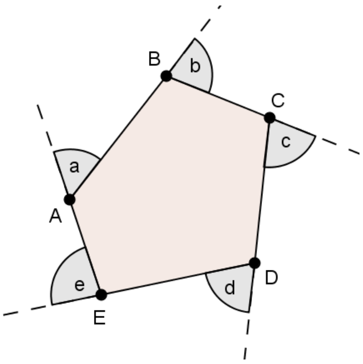
Exemplo

Calcula $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{5}{3}\right):\frac{4}{-7}$.

R.:

$$\left(\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{5}{3}\right):\frac{4}{-7}=\left(-\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}\right):\frac{4}{-7}=\left(-\frac{3\times5}{2\times3}\right):\frac{4}{-7}=\left(-\frac{15}{6}\right):\left(-\frac{4}{7}\right)=\left(\frac{15}{6}\right):\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$=\frac{15\times7}{6\times4}=\frac{105}{24}=\frac{35}{8}.$$

Descritor	Texto de apoio
2.1 a 2.11	Embora vários dos objetos e conceitos referidos nestes descritores já tenham sido abordados nos ciclos anteriores, são agora apresentadas definições precisas tendo em vista um estudo mais rigoroso da Geometria, que se pretende efetuar no 3.º ciclo (*cf.* Texto Complementar de Geometria - TCG - para uma análise mais pormenorizada desses conceitos e alguns complementos).
2.12	**Exemplo** *Considera o quadrilátero $[ABCD]$ representado na figura.* a. *Decompõe o quadrilátero em dois triângulos cujos vértices sejam também vértices do quadrilátero.* b. *Indica a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos.* c. *Justifica que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a um ângulo giro.* 
2.13	**Exemplo*** *Considera os polígonos convexos representados nas seguintes figuras:*   a. *Decompõe o hexágono em triângulos, traçando as diagonais com um dos extremos em A. Quantos triângulos obtiveste?* b. *Indica qual a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos dos triângulos obtidos na alínea anterior e conclui qual a soma das medidas, em graus, das amplitudes dos ângulos internos do hexágono.* c. *Por um raciocínio análogo ao utilizado nas duas alíneas anteriores, determina a soma das medidas, em graus, das amplitudes dos ângulos internos do decágono.* **Exemplo*** *Considera o pentágono $[ABCDE]$ representado na figura.* a. *Quantos ângulos rasos se formam unindo cada ângulo interno a um externo adjacente?* b. *Deduz da alínea anterior qual a soma das medidas, em graus, das amplitudes dos ângulos externos representados na figura, tendo em conta o valor já conhecido da soma das medidas, em graus, das amplitudes dos ângulos internos.* 

2.15

Exemplo

Considera um quadrilátero $[ABCD]$.

a. *Quantos segmentos é possível definir tendo como extremos dois vértices desta figura? Indica-os.*

b. *Quantos desses segmentos são diagonais do quadrilátero?*

2.16

Exemplo**

Considera um quadrilátero $[ABCD]$.

a. *Prova, resolvendo as seguintes alíneas, que se* $[ABCD]$ *for um paralelogramo então as diagonais bissetam-se:*

a_1. *Traça as diagonais* $[AC]$ *e* $[BD]$ *designando por* E *o respetivo ponto interseção.*

a_2. *Justifica que os triângulos* $[ABE]$ *e* $[DCE]$ *são iguais.*

a_3. *Justifica que* $\overline{DE} = \overline{EB}$ *e que* $\overline{AE} = \overline{CE}$.

b. *Prova, resolvendo as seguintes alíneas, que se as diagonais de um quadrilátero* $[ABCD]$ *se bissetarem então este é um paralelogramo:*

b_1. *Traça as diagonais* $[AC]$ *e* $[BD]$ *designando por* E *o respetivo ponto interseção.*

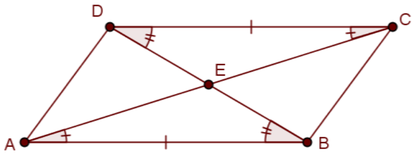
b_2. *Na reflexão central de centro* E*, qual a imagem de cada um dos vértices?*

b_3. *Justifica que os ângulos* ABD *e* CDB *são iguais.*

b_4. *Justifica que os ângulos* DAC *e* BCA *são iguais.*

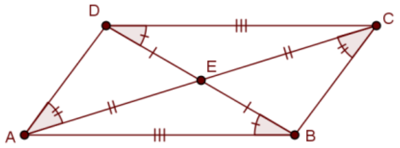
b_5. *Justifica que o quadrilátero* $[ABCD]$ *é um paralelogramo.*

R.:



a_2.Como [ABCD] é um paralelogramo, os lados opostos são paralelos e iguais. Logo, $\overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{AB}}$ e, como DC é paralela a AB, os ângulos alternos internos DCA e BAC são iguais, assim como os ângulos CDB e ABD.
Então, pelo critério ALA de igualdade de triângulos, os triângulos [DEC] e [BEA] são iguais.

a_3. Os segmentos de reta [CE] e [AE] são iguais uma vez que se opõem a ângulos iguais de triângulos iguais, pelo que E é ponto médio de $[AC]$. Da mesma forma se conclui que também é o ponto médio de $[DB]$.



b_2. Como $[ABCD]$ é um quadrilátero cujas diagonais se bissetam, ou seja, tal que $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{EB}}$ e $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{EC}}$, então, na reflexão de centro E, os pontos A e C são imagens um do outro bem como os pontos B e D.

b_3. Tendo em conta a alínea anterior e sabendo que numa reflexão central as amplitudes dos ângulos são conservadas, podemos concluir que os ângulos ABD *e* CDB são iguais.

b_4. O mesmo argumento de conservação das amplitudes permite afirmar que *os* ângulos DAC e BCA são iguais.

b_5. Como os ângulos alternos internos determinados em cada par de lados opostos por uma secante são iguais, os lados opostos do quadrilátero são paralelos, pelo que $[ABCD]$ é um paralelogramo.

2.17

Exemplo*

Considera o retângulo $[PQRS]$ e as respetivas diagonais $[PR]$ e $[QS]$.

- *a. Justifica que os triângulos $[SPQ]$ e $[PSR]$ são iguais.*
- *b. Deduz da alínea anterior que as diagonais do retângulo são iguais.*

Exemplo*

Considera um paralelogramo $[EFGH]$ tal que as diagonais $[EG]$ e $[FH]$ têm o mesmo comprimento.

- *a. Justifica que os triângulos $[EGH]$ e $[FGH]$ são iguais.*
- *b. Conclui, da alínea anterior, que os ângulos EHG e FGH são iguais.*
- *c. Relembrando que dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares e que os ângulos opostos são iguais, conclui que o paralelogramo $[EFGH]$ é um retângulo.*

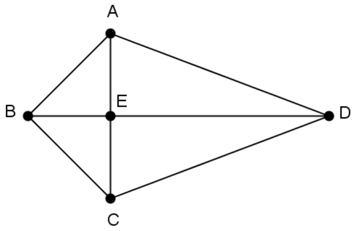
2.18
2.19
2.20

Exemplo**

- *a. Considera um papagaio $[ABCD]$ em que $\overline{BA} = \overline{BC}$.*
  - *a_1. Justifica que a reta BD é a mediatriz do segmento de reta $[AC]$.*
  - *a_2. Justifica que as diagonais $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares.*
  - *a_3. Justifica que as diagonais de um qualquer losango são perpendiculares.*
- *b. Considera um paralelogramo $[PQRS]$ que tem as diagonais perpendiculares.*
  - *b_1. Justifica que as diagonais $[PR]$ e $[QS]$ se bissetam.*
  - *b_2. Justifica que a reta QS é a mediatriz de $[PR]$.*
  - *b_3. Justifica que $[PQRS]$ é um losango.*

R.:

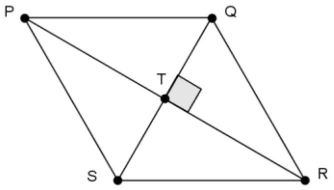
a_1. Um papagaio é um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos iguais; como, por hipótese, $\overline{BA} = \overline{BC}$, também se tem $\overline{DA} = \overline{DC}$. Assim, os pontos B e D são ambos equidistantes dos pontos A e C, pelo que pertencem à mediatriz do segmento $[AC]$. Logo a reta BD é a mediatriz do segmento de reta $[AC]$.



a_2. $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares pois a mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular a esse segmento de reta.

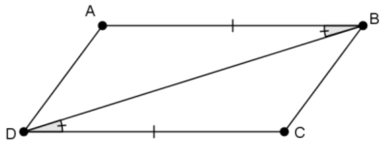
a_3. Basta observar que um losango é, em particular, um papagaio.

b_1. Como $[PQRS]$ é um paralelogramo as diagonais bissetam-se.



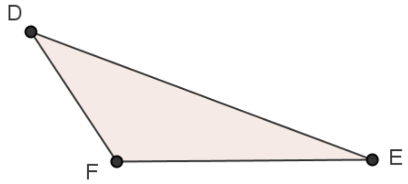
b_2. QS é a mediatriz de $[PR]$ pois é perpendicular a $[PR]$ no seu ponto médio T.

b_3. Sabe-se que lados opostos de um paralelogramo são iguais, ou seja, que $\overline{PQ} = \overline{SR}$ e que $\overline{SP} = \overline{RQ}$.
Como QS é a mediatriz de $[PR]$ então $\overline{PQ} = \overline{QR}$ logo os quatro lados do paralelogramo são iguais pelo que este é um losango.

2.21 2.22 2.23 2.24	**Exemplo**** a. *Explica porque é que todos os paralelogramos são trapézios.* b. *Mostra que um trapézio com bases iguais é um paralelogramo, começando por traçar uma diagonal e justificando que são iguais os ângulos alternos internos determinados por essa diagonal nos lados que não foram tomados como bases.* R.: a. Para que um quadrilátero seja trapézio basta que tenha dois lados paralelos. Ora, um paralelogramo tem dois pares de lados paralelos logo é um trapézio. b. Um trapézio tem dois lados paralelos designados por bases. Sejam $[AB]$ e $[CD]$ as bases iguais. Traçando a diagonal $[\mathrm{DB}]$, prova-se que os triângulos $[ADB]$ e $[CBD]$ são iguais (caso LAL) pelo que os ângulos CBD e ADB são iguais porque se opõem a lados iguais em triângulos iguais. Logo $[AD]$ é paralelo a $[BC]$ pelo que o trapézio é um paralelogramo. 
3.1	**Exemplo*** *Justifica que os quadrados são os paralelogramos que têm as diagonais perpendiculares e iguais.* R.: Se um paralelogramo tem as diagonais iguais então é um retângulo (2.17), ou seja, os ângulos internos são retos; como as diagonais são perpendiculares então é um losango (2.18), ou seja, tem os lados iguais. Então tem-se um paralelogramo com os lados iguais e os ângulos retos logo é um quadrado. Inversamente, um quadrado é um losango, logo tem as diagonais perpendiculares. Como é também um retângulo, as diagonais são iguais. **Exemplo*** *Justifica que os quadrados são os quadriláteros com diagonais perpendiculares, iguais e que se bissetam.* **Exemplo**** *Justifica que, num losango, cada diagonal bisseta os ângulos internos que têm vértice nos seus extremos.* **Exemplo** *Justifica que um paralelogramo com um ângulo reto é um retângulo.* **Exemplo** *Num quadrilátero convexo $[PQRS]$, os ângulos opostos são iguais e o ângulo interno de vértice em P mede 110^{o} de amplitude. Determina a amplitude dos restantes ângulos internos e classifica o quadrilátero.* **Exemplo** *Num losango uma das diagonais mede $6\ cm$ e forma com um dos lados um ângulo de 40^{o}de amplitude. Constrói esse losango justificando a construção.*

Exemplo

Considera um triângulo qualquer como, por exemplo, o triângulo $[DEF]$ representado na figura.



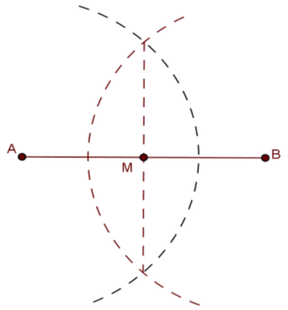
a. Constrói o ponto médio do lado $[DE]$ e designa-o por M.
b. Determina o transformado do triângulo pela reflexão central de centro M designando por G a imagem de F.
c. Justifica que o quadrilátero $[DFEG]$ é um paralelogramo.

Exemplo

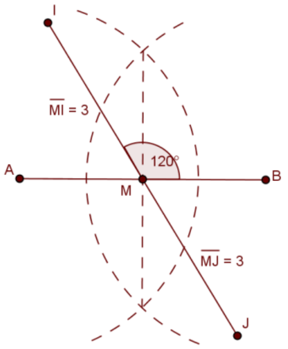
Constrói um paralelogramo cujas diagonais medem $4\ cm$ e $6\ cm$ e em que um dos ângulos por elas formados mede 120^o de amplitude.

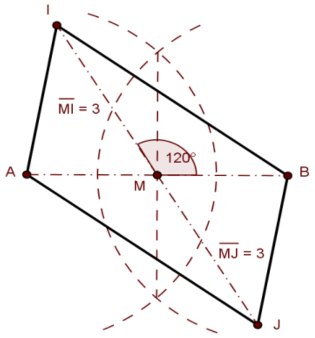
R.: Traça-se um segmento de reta $[AB]$ com 4 cm de comprimento e determina-se o respetivo ponto médio M.

Uma vez que as diagonais de um paralelogramo se bissetam, o ponto médio determinado é o vértice do ângulo de 120^o de amplitude que deve ser representado.



Utilizando um transferidor, constrói-se um ângulo de vértice em M, em que um dos lados é $\dot{M}B$ e o outro é $\dot{M}I$ tal como está representado na figura, escolhendo I e J (J na semirreta oposta a $\dot{M}I$) tais que $\overline{MI} = \overline{MJ} = 3\ cm$, dado que a segunda diagonal deve medir 6 cm.

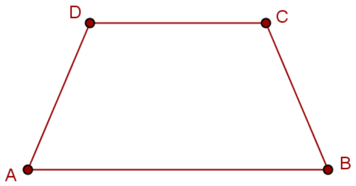




Basta agora traçar os lados do paralelogramo $[AIBJ]$.

Exemplo

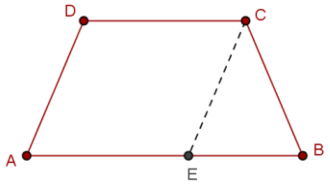
Considera o trapézio isósceles $[ABCD]$ de bases $[AB]$ e $[DC]$, com $\overline{AB} > \overline{DC}$.
Prova que:



a. O triângulo $[CEB]$ é isósceles, onde E designa a interseção de $[AB]$ com a reta paralela a AD que passa por C.
b. Os ângulos definidos pela base maior e por cada um dos lados não paralelos são iguais.

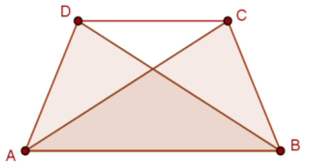
c. Os triângulos $[ADB]$ e $[ACB]$ são iguais.
d. As diagonais $[AC]$ e $[BD]$ são iguais.

R.: a. $[AECD]$ é um paralelogramo pelo que $\overline{AD} = \overline{EC}$. Como $\overline{CB} = \overline{AD}$ (o trapézio é isósceles) então também $\overline{BC} = \overline{EC}$, ou seja, o triângulo $[ECB]$ é isósceles.



b. Como o triângulo $[ECB]$ é isósceles conclui-se que $C\hat{E}B = C\hat{B}E$ uma vez que, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais. Como $C\hat{E}B = D\hat{A}E$ pois são ângulos correspondentes determinados pela secante AB em retas paralelas, então $D\hat{A}E = C\hat{B}E$.

c. Podemos concluir que os triângulos [ADB] e [ACB] são iguais utilizando o caso LAL de igualdade de triângulos pois $[AB]$ é um lado comum aos dois triângulos, $\overline{AD} = \overline{BC}$ pois o trapézio é isósceles e $D\hat{A}E = C\hat{B}E$ tal como provámos na alínea anterior.



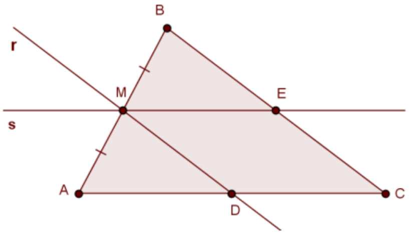
d. $\overline{DB} = \overline{AC}$ porque, em triângulos iguais, a ângulos iguais opõem-se lados iguais.

4.5

Exemplo

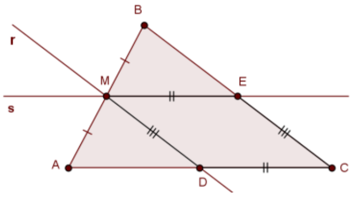
Considera um triângulo $[ABC]$ e duas retas r e s que passam por M, ponto médio do lado $[AB]$, respetivamente paralelas a $[BC]$ e a $[AC]$.
Considera ainda o ponto D, interseção de r e $[AC]$ e o ponto E, interseção de s e $[BC]$.
Mostra que:

a. $\overline{ME} = \overline{DC}$ e $\overline{MD} = \overline{EC}$.
b. os triângulos $[AMD]$ e $[MBE]$ são iguais.
c. D é o ponto médio de $[AC]$, E é o ponto médio de $[BC]$.

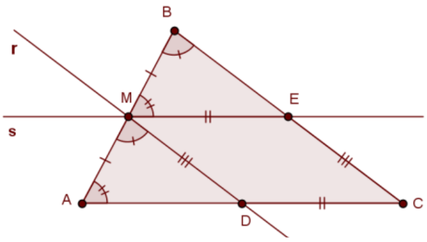


R.:

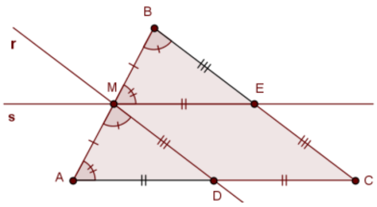
a. Por construção, o quadrilátero [MECD] é um paralelogramo (tem os lados opostos paralelos). Logo, os lados opostos são iguais (cf. GM5-2.16).



b. Atendendo a que r é paralela a $[BC]$ então $A\widehat{M}D = M\hat{B}E$ e como s é paralela a $[AC]$, logo $B\widehat{M}E = M\hat{A}D$. Por outro lado $\overline{AM} = \overline{MB}$, pois M é o ponto médio de $[AB]$, pelo que, aplicando o caso ALA, os triângulos $[AMD]$ e $[MBE]$ são iguais.



c. Tendo em conta a alínea anterior, $\overline{ME} = \overline{AD}$ (comprimentos de lados que se opõem a ângulos iguais em triângulos iguais). Como $\overline{ME} = \overline{DC}$, podemos concluir que $\overline{AD} = \overline{DC}$, ou seja, D é o ponto médio de $[AC]$.

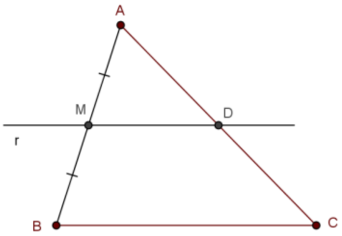


Analogamente, $\overline{MD} = \overline{BE}$, $\overline{MD} = \overline{EC}$, e portanto $\overline{BE} = \overline{EC}$ pelo que E é o ponto médio de $[BC]$.

4.6

Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$ e uma reta r que interseta $[AB]$ no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D.



a. Mostra que:
- a$_1$. *Se r for paralela a $[BC]$ então $\overline{AD} = \overline{DC}$.*
- *a$_2$.** Se $\overline{AD} = \overline{DC}$ então r é paralela a $[BC]$.*

b. Se alguma das propriedades equivalentes anteriores se verificar, mostra que $\overline{BC} = 2\overline{MD}$.

R.:

a$_1$. Sabe-se pelo descritor 4.5 que a reta r bisseta o lado $[AC]$, pelo que $\overline{AD} = \overline{DC}$.

a$_2$. Considerando a reta r' que passa por M e é paralela a [BC], sabemos pela alínea a$_1$. que r'interseta [AC] no ponto médio D. Assim, as retas r e r' têm dois pontos em comum (M e D) logo coincidem. Conclui-se então que r' é paralela a $[BC]$.

b. Supondo que r é paralela a $[BC]$ e considerando-se a reta s paralela a $[AC]$ que passa por M, designando o ponto de interseção de s com $[BC]$ por E, sabemos por 4.5 que $\overline{BE} = \overline{EC}$. Por outro lado, como $[EMDC]$ é um paralelogramo, $\overline{MD} = \overline{EC}$, de onde se conclui que $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = 2\overline{EC} = 2\overline{MD}$.

Observação: Neste exemplo e em outras situações que se seguirão utilizam-se igualdades envolvendo operações com comprimentos (igualdade entre um comprimento e a soma de outros dois, ou entre um comprimento e "o dobro" de outro, por exemplo), quando, em rigor, apenas sabemos operar com as respetivas medidas, fixada uma unidade de comprimento. No entanto, como se verá no texto de apoio mais à frente, relativo ao objetivo geral 7, os referidos resultados não dependem da unidade de medida comum fixada. Esta questão é examinada com mais pormenor no TCG a propósito dos descritores 4.1 a 4.4 e do objetivo geral 7.

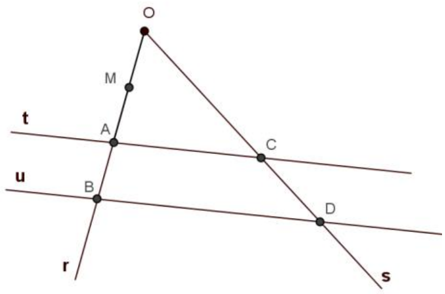
4.7

O Teorema de Tales estabelece a existência de proporcionalidade entre os comprimentos de segmentos de reta determinados em duas retas concorrentes por um par de retas paralelas situadas no mesmo plano.
O descritor anterior corresponde ao caso particular do Teorema de Tales em que a constante de proporcionalidade é igual a 2.

Os exemplos apresentados em seguida correspondem a outros casos particulares do Teorema de Tales, no primeiro caso com uma constante de proporcionalidade igual a $\frac{3}{2}$. O processo sugerido para a respetiva demonstração é uma simples generalização do processo utilizado nos descritores 4.5 e 4.6, podendo ser aplicado em qualquer outra situação em que as constantes de proporcionalidade são racionais.

Exemplo*

Considera duas retas r e s que se intersetam no ponto O e outras duas retas t e u, paralelas, que intersetam r em A e B e s em C e D, respetivamente e tais que $\overline{OA} = 2\overline{AB}$. Considera ainda o ponto M como ponto médio de $[OA]$.



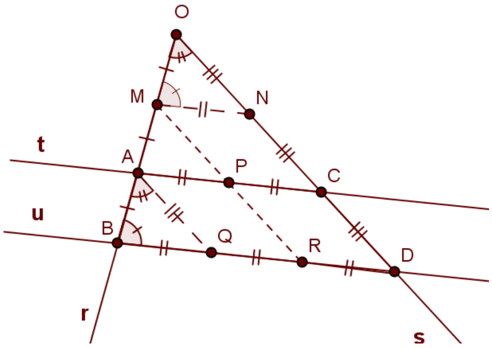
Prova que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$ *percorrendo os seguintes passos apresentados em alíneas.*

- a. *Traça uma reta paralela a t que passa no ponto M e que interseta $[OC]$ no ponto N. Tendo em conta o caso particular, já conhecido, do Teorema de Tales com constante de proporcionalidade igual a 2 completa as seguintes proporções:*
  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{\ }} = \frac{\overline{\ }}{\overline{MN}} = 2.$
- b. *Traça uma reta paralela a s que passe por A, designando o ponto de interseção com $[BD]$ por Q.*
- c. *Justifica que os triângulos $[ABQ]$ e $[OMN]$ são iguais e deduz que $\overline{BQ} = \overline{MN}$ e $\overline{AQ} = \overline{ON}$.*
- d. *Justifica que $[ACDQ]$ é um paralelogramo e deduz que $\overline{QD} = \overline{AC}$ e $\overline{CD} = \overline{AQ} = \overline{ON}$.*
- e. *Justifica que $\overline{BD} = 3\overline{MN}$ e $\overline{OD} = 3\overline{ON}$.*
- f. *Justifica que $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$.*

R.:

a. Sabemos que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = 2$. Por outro lado, sabendo que as retas MN e t são paralelas, atendendo ao Teorema de Tales, já conhecido para este caso particular, tem-se $\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MN}} = 2$.

b. Construção ao lado.



c. Por construção $\overline{OM} = \overline{AB}$. Sabe-se que MN e u são paralelas logo os ângulos OMN e ABQ são iguais. Por outro lado, as retas s e AQ são paralelas logo os ângulos BAQ e MON são iguais. Utilizando o critério ALA podemos então concluir que os triângulos $[ABQ]$ e $[OMN]$ são iguais.
Consequentemente, $\overline{BQ} = \overline{MN}$ e $\overline{AQ} = \overline{ON}$ (igualdades de comprimentos de lados opostos a ângulos iguais em triângulos iguais).

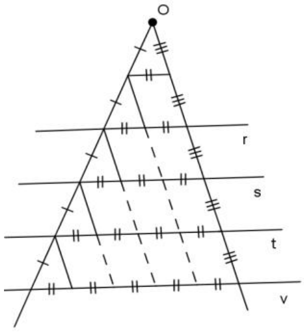
d. $[ACDQ]$ é um paralelogramo porque os lados opostos são paralelos. Desta forma, os lados opostos $[QD]$ e $[AC]$ são iguais, bem como os lados opostos $[CD]$ e $[AQ]$; como, pela alínea anterior, $\overline{AQ} = \overline{ON}$, também se tem $\overline{CD} = \overline{ON}$.

e. $\overline{BD} = \overline{BQ} + \overline{QD} = \overline{MN} + \overline{AC} = \overline{MN} + 2\overline{MN} = 3\overline{MN}$ e, analogamente, $\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = 2\overline{ON} + \overline{ON} = 3\overline{ON}$, atendendo às alíneas c. e d. e às proporções estabelecidas na alínea a.

f. Como $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{3\overline{ON}}{2\overline{ON}} = \frac{3}{2}$, $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{3\overline{OM}}{2\overline{OM}} = \frac{3}{2}$ *e* $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{3\overline{MN}}{2\overline{MN}} = \frac{3}{2}$, *podemos concluir que* $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$.

Observação: Na figura, optou-se por representar os pontos médios dos segmentos de reta $[AC]$ e $[QD]$, designados respetivamente por P e R. Como $\overline{AC} = 2\overline{MN}$, tem-se $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{MN}$. Também, como $\overline{BD} = 3\overline{MN}$ e $\overline{MN} = \overline{BQ}$, tem-se igualmente $\overline{QR} = \overline{RD} = \overline{MN}$.

Na sequência deste exercício, os alunos poderão reconhecer que se podem ir acrescentando, passo a passo, retas paralelas de modo a ir formando triângulos e paralelogramos que são respetivamente iguais aos anteriores.



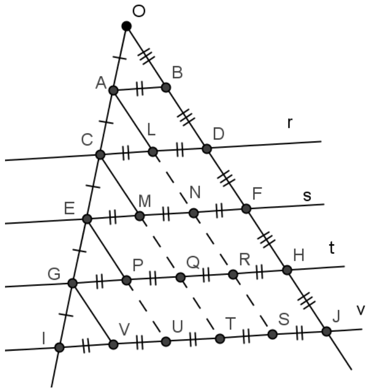
Exemplo

Na figura estão representadas as retas r, s, t e v paralelas e intersetadas por duas semirretas de origem O.

a. Utilizando as igualdades entre comprimentos de segmentos indicadas na figura, mostra que:

a₁. $\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$

a₂. $\frac{\overline{OG}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$



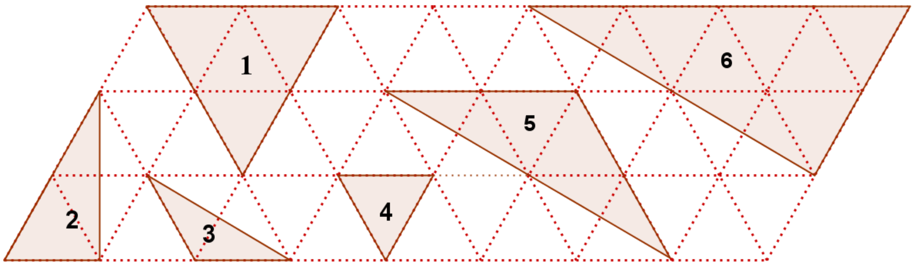
b. Completa as proporções $\frac{\overline{OI}}{\quad} = \frac{\quad}{\overline{OD}} = \frac{\overline{IJ}}{\quad}$ *utilizando medidas de comprimento de segmentos da figura.*

Em alternativa, o Teorema de Tales pode ser reconhecido utilizando áreas de triângulos (*cf.* TCG-4.7).

4.4
4.8

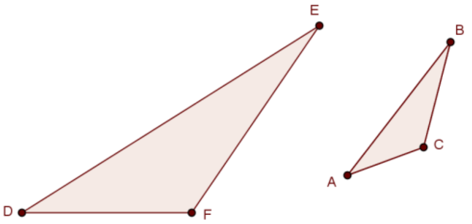
Tendo em conta o descritor 4.4, é imediato que dois triângulos de lados correspondentes proporcionais são semelhantes uma vez que não existem diagonais.

Exemplo
Na grelha de triângulos equiláteros estão representados vários triângulos. Tendo em conta unicamente a medida do comprimento dos lados, identifica, justificando, os pares de triângulos semelhantes e indica, em cada caso, a razão de semelhança.



4.9

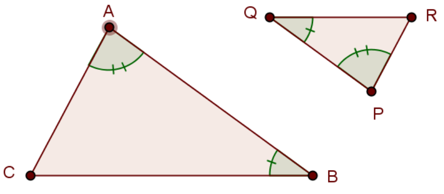
Exemplo*
Acerca dos dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ representados sabe-se que $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ e que $\frac{\overline{ED}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$. Prova que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes respondendo às seguintes questões.



a. *No triângulo $[DEF]$ marca dois pontos P e Q que pertencem respetivamente aos lados $[ED]$ e $[EF]$ e tais que $\overline{EP} = \overline{BA}$ e $\overline{EQ} = \overline{BC}$.*
b. *Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[PEQ]$ são iguais.*
c. *Atendendo à alínea anterior, completa a proporção $\frac{\overline{ED}}{-} = \frac{\overline{EF}}{-}$ com comprimentos de lados do triângulo $[PEQ]$.*
d. *Justifica que $[PQ]$ é paralelo a $[DF]$.*
e. *Completa as igualdades seguintes utilizando o Teorema de Tales:*
$\frac{\overline{ED}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{DF}}{-}$ *e* $\frac{\overline{EF}}{\overline{EQ}} = \frac{\overline{DF}}{-}$ *pelo que* $\frac{\overline{ED}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DF}}{-}$ *e* $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{-}$.
f. *De acordo com o critério LLL de semelhança de triângulos o que podes concluir?*

4.10

Exemplo*
Na figura estão representados dois triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ tais que os ângulos ABC e PQR são iguais bem como os ângulos BAC e QPR.

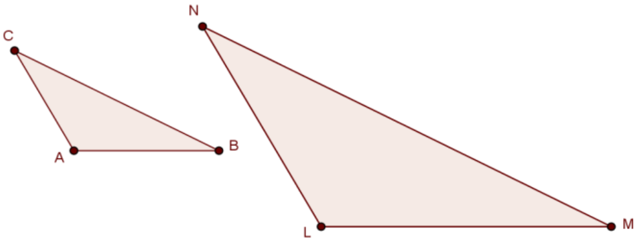


a. *No triângulo $[ABC]$ marca dois pontos M e N que pertencem respetivamente aos lados $[AB]$ e $[AC]$ e tais que $\overline{AM} = \overline{PQ}$ e $\overline{AN} = \overline{PR}$. Justifica que:*
   a_1. os triângulos $[PQR]$ e $[AMN]$ são iguais.
   a_2. as retas MN e BC são paralelas.
b. *O que é que o teorema de Tales te permite concluir acerca da proporcionalidade entre os comprimentos dos lados correspondentes (opostos a ângulos iguais) nos dois triângulos $[AMN]$ e $[ABC]$?*
c. *Justifica a semelhança dos dois triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$.*

4.11

Exemplo*

Na figura estão representados dois triângulos $[ABC]$ e $[LMN]$ semelhantes e tais que $\frac{\overline{LN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}$.



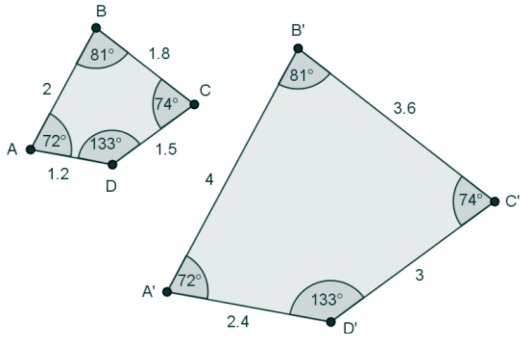
- a. *No triângulo $[LMN]$ marca dois pontos P e Q que pertencem respetivamente aos lados $[LM]$ e $[LN]$ e tais que $\overline{LP} = \overline{AB}$ e $\overline{LQ} = \overline{AC}$.*
- b. *Atendendo às proporções do enunciado, completa a proporção $\frac{\overline{LN}}{\dots} = \frac{\overline{LM}}{\dots}$ com comprimentos de lados do triângulo $[LPQ]$.*
- c. *Utiliza o Teorema de Tales (parte recíproca) para justificar que $[PQ]$ é paralelo a $[MN]$.*
- d. *Utiliza o Teorema de Tales (parte direta) para completar a proporção $\frac{\overline{LM}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{MN}}{}$*
- e. *Observando que pela hipótese do enunciado $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}$ e que por construção $\overline{AB} = \overline{LP}$, deduz da alínea anterior que $\overline{BC} = \overline{PQ}$.*
- f. *Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[PLQ]$ são iguais.*
- g. *Identifica os pares de ângulos correspondentes (opostos a lados proporcionais) nos triângulos $[ABC]$ e $[LMN]$ e justifica que são iguais.*

4.13

Neste descritor pretende-se que os alunos reconheçam a propriedade unicamente em casos concretos e utilizando triangulações.

Exemplo

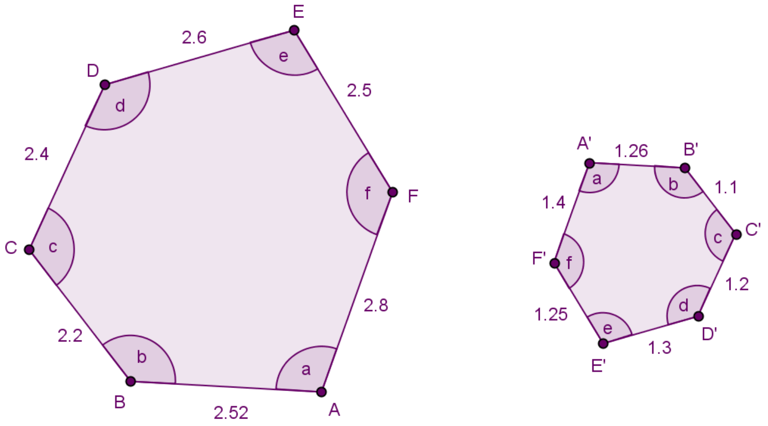
Considera os quadriláteros $[ABCD]$ e $[A'B'C'D']$ representados na figura em que se indicam as medidas dos comprimentos dos respetivos lados bem como as medidas de amplitude dos ângulos. Prova que os dois polígonos são semelhantes respondendo às seguintes questões:



- a. *Tendo em conta as condições expressas na figura, mostra que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes.*
- b. *Justifica que as diagonais $[AC]$ e $[A'C']$ estão na mesma proporção que os pares de lados correspondentes nos dois polígonos.*
- c. *Utilizando um raciocínio análogo ao efetuado nas alíneas anteriores, justifica que as diagonais $[BD]$ e $[B'D']$ estão na mesma proporção que os pares de lados correspondentes nos dois polígonos.*
- d. *Conclui das alíneas anteriores que os quadriláteros são semelhantes.*

Exemplo**

Considera os hexágonos $[ABCDEF]$ *e* $[A'B'C'D'E'F']$ *representados na figura, em que se indicam as medidas dos comprimentos dos respetivos lados bem como as medidas de amplitude dos ângulos. Prova que os dois polígonos são semelhantes recorrendo ao critério de semelhança de polígonos que faz apenas intervir a proporcionalidade dos comprimentos dos lados e diagonais, tal como é sugerido nas alíneas seguintes.*



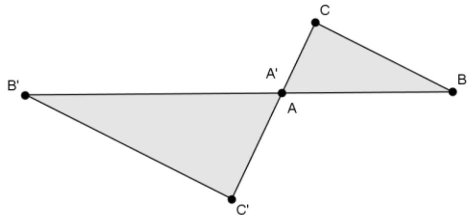
a. *Tendo em conta as condições expressas na figura, mostra que os triângulos* $[ABC]$ *e* $[A'B'C']$ *são semelhantes.*
b. *Justifica que as diagonais* $[AC]$ *e* $[A'C']$ *estão na mesma proporção que os restantes lados correspondentes dos triângulos.*
c. *Justifica que os ângulos* DCA *e* $D'C'A'$ *são iguais bem como os ângulos* CAD *e* $C'A'D'$ *e que por isso os triângulos* $[DCA]$ *e* $[D'C'A']$ *são semelhantes.*
d. *Justifica que as diagonais* $[AD]$ *e* $[A'D']$ *estão na mesma proporção que os restantes lados correspondentes dos triângulos.*
e. *Como justificas que* $[AE]$ *e* $[A'E']$ *estão na mesma proporção que os restantes lados correspondentes dos triângulos definidos anteriormente?*
f. *Se decompuséssemos os hexágonos em triângulos com um vértice comum diferente, respetivamente, o vértice* B *e o vértice* B' *o que que concluiríamos?*
g. *Conclui das alíneas anteriores que os hexágonos são semelhantes.*

5.4 Neste descritor pretende-se que o aluno apresente uma justificação da propriedade referida em casos concretos, tal como se exemplifica.

Exemplo

Considera três pontos não colineares A, B *e* C *e os respetivos transformados pela homotetia de centro* A *e razão* $-\frac{3}{2}$, A', B' *e* C'.

Justifica que o triângulo $[ABC]$ *é semelhante ao triângulo* $[A'B'C']$ *e indica a respetiva razão de semelhança.*

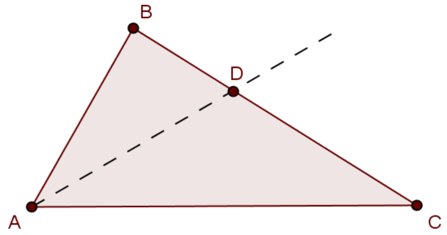


Observação: Note-se que, tal como é referido no TCG-5.4, este exemplo mostra, em particular, que uma homotetia multiplica as distâncias entre pontos pelo módulo da respetiva razão. Assim, torna-se imediato que duas figuras homotéticas são semelhantes, de razão de semelhança igual ao módulo da razão da homotetia.

6.1

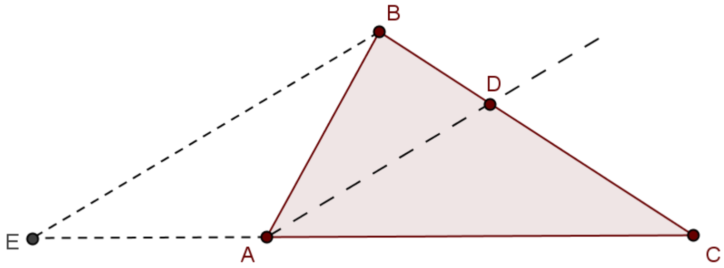
Exemplo *(4.7)

Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ e o ponto D, interseção da bissetriz do ângulo BAC com o lado $[AB]$.



O objetivo deste exercício é o de relacionar de forma simples a razão entre os comprimentos de $[BD]$ e $[CD]$ com os comprimentos dos lados do triângulo.

Para o efeito, começamos por traçar uma semirreta com origem em B e paralela a DA, prolongando o lado AC de forma que intersete essa semirreta num ponto designado por E, tal como ilustra a figura seguinte:



a. Utilizando o teorema de Tales, completa a igualdade: $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CA}}{\dots\dots}$.

b. Justifica que:
   b$_1$.os ângulos CAD e DAB são iguais.
   b$_2$.os ângulos EBA e DAB são iguais.
   b$_3$.os lados $[AE]$ e $[AB]$ do triângulo $[ABE]$ são iguais.

c. Conclui a proporção $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$.

d. Em que caso particular se poderá ter $\overline{CD} = \overline{BD}$?

Exemplo (4.8)

Dois triângulos $[ABC]$ e $[RST]$ são tais que

$\overline{AB} = 48\ mm$, $\overline{BC} = 6{,}4\ cm$ e $\overline{CA} = 88\ mm$

$\overline{RS} = 9{,}6\ cm$, $\overline{ST} = 132\ mm$ e $\overline{TR} = 72\ mm$

a. Justifica que os triângulos são semelhantes.

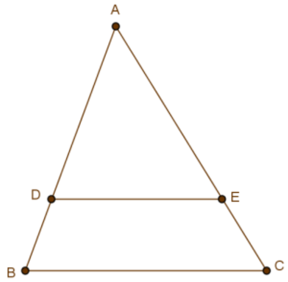
b. Identifica para cada ângulo do triângulo $[ABC]$, o ângulo igual do triângulo $[RST]$.

Exemplo (4.9)

Na figura representada tem-se que:

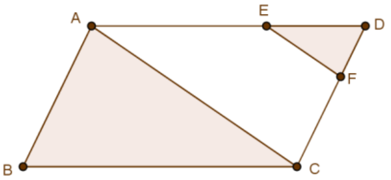
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

Justifica que os triângulos $[ADE]$ e $[ABC]$ são semelhantes.



Exemplo (4.10)

Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$, a diagonal $[AC]$ e um segmento $[EF]$ paralelo a $[AC]$. Justifica que os triângulos $[DEF]$ e $[BAC]$ são semelhantes.



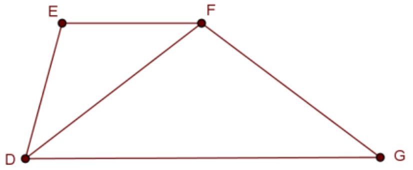
Exemplo (4.10)

No trapézio $[DEFG]$ tem-se que $\overline{DE} = \overline{EF}$ e $\overline{DF} = \overline{FG}$.

Justifica que:

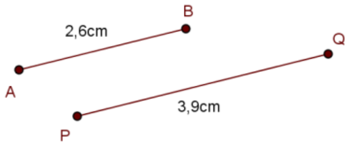
a. Os ângulos GDF e EFD são iguais.

b. Os triângulos $[DFG]$ e $[DEF]$ são semelhantes.



Exemplo* (5.1 e 5.2)

Considera os segmentos de reta paralelos $[AB]$ e $[PQ]$ representados na figura. Determina uma homotetia que transforma $[AB]$ em $[PQ]$ e a respectiva razão.

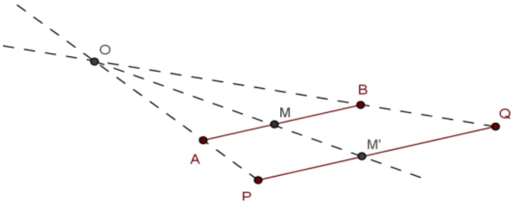


R.:

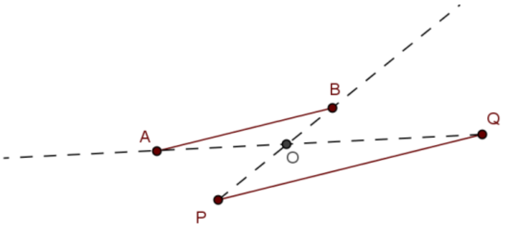
Considerando o ponto O interseção das retas AP e BQ, a homotetia de centro O e razão $r = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$ transforma o segmento de reta [AB] no segmento de reta [PQ].

De facto, considerando uma semirreta entre $\dot{O}P$ e $\dot{O}Q$ e os respetivos pontos de interseção M e M' com $[AB]$ e $[PQ]$, a imagem de M pela homotetia é o ponto M'. Basta observar que M' pertence à semirreta OM e que, pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = r$.

Note-se que, pelo Teorema de Tales, $r = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$.



Observação 1: Também se poderia ter considerado como centro da homotetia a interseção dos segmentos de reta $[AQ]$ e $[BP]$ e a razão $r = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = -\frac{3}{2}$.



Observação 2: Estabeleceu-se, neste exemplo, uma bijeção entre os pontos de dois segmentos de reta de comprimentos distintos. Isto significa que, num certo sentido, os segmentos “têm o mesmo número de pontos”, o que não será intuitivo à partida, uma vez que o maior contém estritamente um segmento igual ao menor.

7.1
7.2

Exemplo

Considera uma reta onde se representaram onze pontos de tal forma que a distância entre dois pontos consecutivos é constante.

a. *Calcula o quociente das medidas do comprimento de* $[AB]$ e $[CE]$ *tomando* $[EF]$ *por unidade.*
b. *Calcula o quociente das medidas do comprimento de* $[AB]$ e $[CE]$ *tomando* $[DF]$ *por unidade.*
c. *Calcula o quociente das medidas do comprimento de* $[AB]$ *e* $[CE]$ *tomando* $[BD]$ *por unidade e compara-o com os quocientes obtidos nas alíneas anteriores.*

Observe-se que as propriedades expressas nestes descritores permitem-nos definir, sem qualquer ambiguidade, o que se entende pelo quociente de dois comprimentos, utilizando as respetivas medidas em qualquer unidade, bem como o produto de um comprimento por um número racional positivo (*cf.* TCG-7.1 a 7.6).

Exemplo**

A medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta $[AB]$ *e* $[CD]$*, numa dada unidade* u *é igual respetivamente a* $m = \frac{5}{3}$ *e* $m' = \frac{p}{q}$ *(p e q números naturais).*
Para determinares a medida do comprimento de $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade resolve a seguintes alíneas:*

a. *Decompondo a unidade* u *em* $3q$ *segmentos de reta iguais, quantos segmentos iguais a um destes é necessário justapor para se obter um segmento igual* $[AB]$*? E para se obter um segmento igual a* $[CD]$*?*
b. *Atendendo aos resultados da alínea anterior, exprime a medida do comprimento de* $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade através de uma fração de denominador* $5q$.
c. *Conclui da alínea anterior que a medida do comprimento de* $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade é igual a* $\frac{m\prime}{\frac{5}{3}} = \frac{m\prime}{m}$.

R.:

a. A medida de $[AB]$ na unidade u é igual a $m = \frac{5}{3} = \frac{5q}{3q}$, ou seja, para obter um segmento igual a $[AB]$ é necessário justapor $5q$ segmentos iguais aos que resultam de decompor a unidade em $3q$ partes iguais; analogamente para se obter um segmento igual a $[CD]$ é necessário justapor $3p$ segmentos iguais aos que resultam de decompor a unidade nas mesmas $3q$ partes iguais.
b. Atendendo à alínea anterior concluímos que o segmento $[CD]$ é igual à justaposição de $3p$ segmentos iguais aos que resultam de decompor o segmento $[AB]$ em $5q$ partes iguais; assim a medida do comprimento de $[CD]$ tomando $[AB]$ para unidade pode exprimir-se através da fração $\frac{3p}{5q}$.
c. Verificámos que essa medida é igual a $\frac{3p}{5q} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{5}{3}} = \frac{m\prime}{\frac{5}{3}} = \frac{m\prime}{m}$.

Exemplo*

A medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$, numa dada unidade u é igual respetivamente a m e m'.

- a. *Indica o valor do quociente $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$.*
- b. *Se tomares agora para unidade de medida um segmento de reta v cujo comprimento é metade do comprimento de u, então, nessa nova unidade, quais as medidas dos comprimentos de $[AB]$ e $[CD]$? E qual o valor do quociente $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$?*
- c. *Se considerares para unidade de medida um segmento de reta w com medida igual a $\frac{1}{3}$ tomando u para unidade, então, nessa nova unidade w, quais as medidas dos comprimentos de $[AB]$ e $[CD]$? E qual o valor do quociente $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$?*
- d. *Se considerares uma unidade de medida z cujo comprimento é quatro vezes maior do que o comprimento de u, então, nessa unidade, quais as medidas dos comprimentos de $[AB]$ e $[CD]$? E qual o valor do quociente $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$?*
- e. *Se tomares para unidade de medida um segmento x ~~é~~ com medida de comprimento k na unidade u, então, nessa nova unidade, quais as medidas dos comprimentos de $[AB]$ e $[CD]$? E qual o valor do quociente $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$?*

7.4
7.5
7.6

Qualquer um dos dois primeiros exemplos apresentados em seguida, relativos ao domínio Números e Operações, destina-se a preparar a resolução do terceiro.

Exemplo

Considera o número natural $b = 67500$, que se decompõe em fatores primos da seguinte forma: $b = 2^2.3^3.5^4$.

- a. *Decompõe em fatores primos o número b^2.*
- b. *Multiplica b^2 por 2, escreve o resultado na forma de produto de fatores primos e identifica, explicando, qual o expoente que é ímpar.*
- c. *Existirá um número natural a tal que $a^2 = 2b^2$? Porquê?*

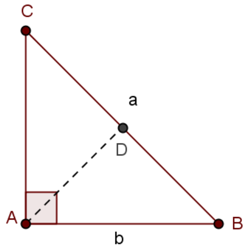
Exemplo*

Prova que não existem números naturais a e b tais que $a^2 = 2b^2$, resolvendo as seguintes alíneas:

- a. *Suponhamos que a e b são números naturais. Então, pelo teorema fundamental da aritmética aprendido no 6.º ano, é possível decompor de forma única esses números em fatores primos. Explica por que razão os expoentes da decomposição em fatores primos dos números naturais a^2 e b^2 são números pares.*
- b. *Se multiplicasses b^2 por 2, então o fator 2 ocorreria no produto com expoente par ou ímpar?*
- c. *Achas possível que $a^2 = 2b^2$? Porquê?*

Exemplo

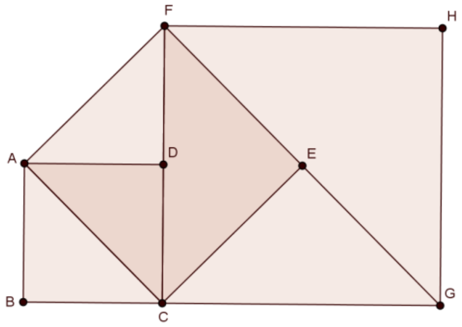
Na figura está representado um triângulo retângulo isósceles. Justifica que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis percorrendo os seguintes passos:



- *a. Prova que a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao vértice A divide o triângulo em dois triângulos retângulos isósceles iguais $[ABD]$ e $[ACD]$.*
- *b. Prova que quaisquer dois triângulos retângulos isósceles são semelhantes e conclui que os três triângulos $[ABC]$, $[ABD]$ e $[ACD]$ são semelhantes.*
- *c. Supondo que a hipotenusa e um cateto do triângulo $[ABC]$ são comensuráveis, numa dada unidade, as medidas de comprimento de $[BC]$ e $[AB]$ são dadas, respetivamente, pelos números naturais a e b. Utilizando a alínea anterior, completa a seguinte proporção: $\frac{a}{b} = \frac{b}{\ }$.*
- *d. Deduz que $a^2 = 2b^2$ e conclui que o cateto e a hipotenusa de um triângulo isósceles não são comensuráveis.*

Exemplo

Considera a figura junta onde estão representados três quadrados $[ABCD]$, $[ACEF]$ e $[FCGH]$.

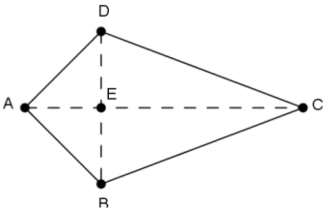


- *a. Tendo em conta a propriedade referida em 7.5 identifica segmentos de reta não comensuráveis.*
- *b. Na figura existem segmentos de reta comensuráveis que não têm o mesmo comprimento.*
  Tendo em conta as propriedades da figura, apresenta dois exemplos e justifica a tua escolha.

8.1 Dados dois pontos A e B, a notação «$\overline{AB}$» designa o comprimento do segmento de reta $[AB]$. No entanto, e sempre que não existir perigo de confusão, utilizaremos esta notação para designar também a medida desse comprimento, fixada uma unidade.

Exemplo*

Prova que a área de um papagaio, em unidades quadradas, é igual ao semiproduto das diagonais percorrendo os seguintes passos:



- *a. Considera um papagaio $[ABCD]$ em que $\overline{AB} = \overline{AD}$ e $\overline{BC} = \overline{CD}$.*
  Designando o ponto de interseção das diagonais por E, escreve uma expressão que permita determinar a área de cada um dos triângulos $[ACD]$ e $[ACB]$.
- *b. Completa as seguintes igualdades com medidas de comprimento de segmentos de reta:*

$$A_{[ACD]} + A_{[ACB]} = \frac{\ldots \times \overline{ED}}{2} + \frac{\ldots \times \overline{EB}}{2} = \frac{\ldots \times (\overline{ED} + \overline{EB})}{2} = \frac{\ldots \times \ldots}{2}$$

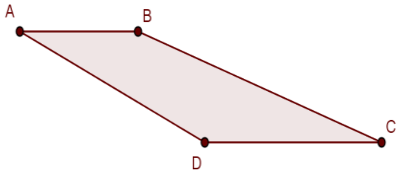
Observação: Embora na figura se tivesse considerado um papagaio convexo, a mesma construção e conclusão permanece válida para papagaios côncavos (*cf.* TCG-8.1). Por outro lado, é obviamente válida para losangos, já que os losangos são casos particulares de papagaios.

8.3

A fórmula encontra-se demonstrada para qualquer trapézio em TCG-8.3, onde se optou por decompor o trapézio num paralelogramo e num triângulo nas diferentes situações. O processo utilizado no exemplo seguinte também permite verificar em toda a generalidade a validade desta fórmula.

Exemplo

Na figura está representado um quadrilátero $[ABCD]$ *tal que* $[AB]$ *é paralelo a* $[CD]$.



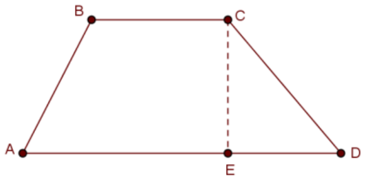
a. *Justifica que* $[ABCD]$ *é um trapézio.*
b. *Decompõe o trapézio em dois triângulos traçando a diagonal* $[DB]$ *e, designando por* h *a altura do trapézio relativa à base* $[CD]$, *obtém expressões para as áreas dos triângulos* $[ABD]$ *e* $[BDC]$ *envolvendo apenas* h *e, respetivamente,* $\overline{AB}$ *e* $\overline{DC}$.
c. *Utilizando as expressões obtidas em b., prova que a área do trapézio é igual ao produto da altura relativa a uma das bases pela semissoma das bases.*

No exemplo seguinte trata-se apenas o caso dos trapézios em que as alturas relativas a uma dada base a intersetam. Nesta situação é possível decompor o trapézio num paralelogramo e num triângulo traçando um segmento que fica contido no polígono. Nos restantes casos é possível utilizar um raciocínio análogo (*cf.* TCG-8.3).

Exemplo*

Considera o trapézio $[ABCD]$ *representado na figura, sendo* E *o pé da perpendicular traçada de* C *para* AD, *que supomos ficar situado entre os pontos* A *e* D.

Deduz uma expressão que permita calcular a área do trapézio, em unidades quadradas, percorrendo os seguintes passos:

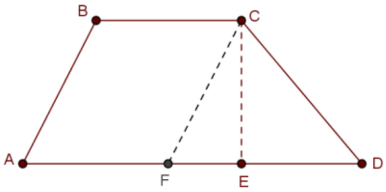


a. *Decompõe o trapézio num triângulo e num paralelogramo traçando um segmento* $[CF]$ *paralelo ao lado* $[AB]$, *com* $F \in [AD]$.
b. *Observando que* $[CE]$ *pode ser utilizado como altura para ambos os polígonos, escreve uma expressão para a área do paralelogramo e outra para a área do triângulo.*
c.** *Utilizando a alínea anterior, mostra que:*

$$A_{[ABCD]} = \frac{(\overline{BC} + \overline{AD})}{2} \times \overline{CE}.$$

R.:

a.



b. $A_{[ABCF]} = \overline{AF} \times \overline{CE}$

$$A_{[FCD]} = \frac{\overline{FD} \times \overline{CE}}{2}$$

c. $A_{[ABCD]} = A_{[ABCF]} + A_{[CFD]} = \overline{AF} \times \overline{CE} + \frac{\overline{FD} \times \overline{CE}}{2} = \frac{2\overline{AF} \times \overline{CE}}{2} + \frac{\overline{FD} \times \overline{CE}}{2} =$

$$= \frac{(2\overline{AF} + \overline{FD}) \times \overline{CE}}{2} = \frac{(\overline{BC} + \overline{AF} + \overline{FD}) \times \overline{CE}}{2} =$$

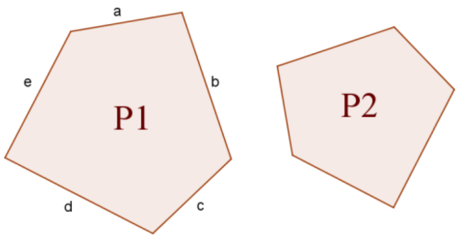
$$= \frac{(\overline{BC} + \overline{AD}) \times \overline{CE}}{2} = \frac{(\overline{BC} + \overline{AD})}{2} \times \overline{CE}.$$

9.1

No exemplo seguinte apresenta-se uma dedução para o caso particular dos pentágonos semelhantes mas é possível adaptá-la a qualquer polígono de n lados.

Exemplo*

Na figura estão representados dois pentágonos semelhantes P_1 e P_2 sendo a razão da semelhança que aplica o primeiro no segundo igual a r.



- *a.* *Tendo em conta as medidas dos comprimentos dos lados de P_1 indicadas na figura, escreve uma expressão que permita calcular o perímetro de P_1.*
- *b.* *Escreve uma expressão que permita calcular o perímetro de P_2 utilizando as medidas dos comprimentos dos lados do primeiro pentágono e a razão de semelhança.*
- *c.* *Calcula uma expressão simplificada de $\frac{perímetro\ de\ P_2}{perímetro\ de\ P_1}$.*
- *d.* *Completa a frase "O perímetro do segundo pentágono é igual ao perímetro do primeiro multiplicado por ...."*

R.: a. O perímetro do pentágono P_1 é igual a $a + b + c + d + e$.

b. Como o pentágono P_2 é semelhante, de razão r, ao pentágono P_1, então o perímetro do segundo pentágono é dado por $P_2 = ra + rb + rc + rd + re$, ou seja, $P_2 = r(a + b + c + d + e)$.

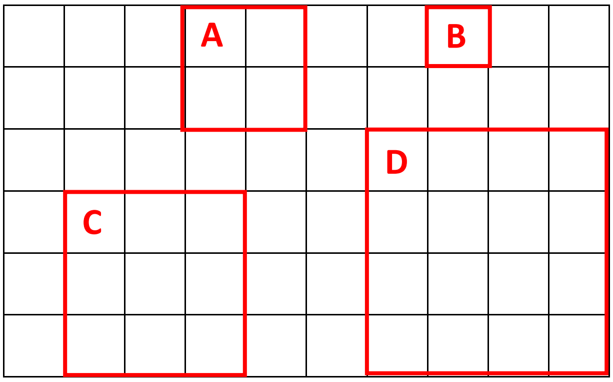
c. Como $P_2 = r\,P_1$ então $\frac{perímetro\ de\ P_2}{perímetro\ de\ P_1} = r$.

d. "(…) é igual ao perímetro do primeiro multiplicado por r."

9.2

Exemplo

Na seguinte grelha quadriculada estão identificados a vermelho quatro quadrados.

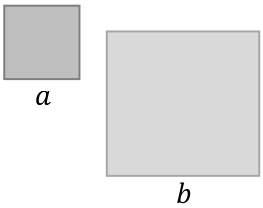


a. *Considerando como unidade de comprimento o lado da quadrícula, indica a medida do comprimento do lado de cada um dos quadrados.*
b. *Justifica porque é que os quatro quadrados são semelhantes e indica a razão de semelhança que transforma o quadrado assinalado com* A *em cada um dos outros quadrados.*
c. *Considerando como unidade de área, a área de uma quadrícula, indica a área de cada um dos quadrados assinalados com* A, B, C *e* D.
d. *Compara as áreas de cada um dos quadrados com a área do quadrado A e calcula os seguintes quocientes:*
$\frac{Área\ do\ quadrado\ B}{Área\ do\ quadrado\ A}$; $\frac{Área\ do\ quadrado\ C}{Área\ do\ quadrado\ A}$; $\frac{Área\ do\ quadrado\ D}{Área\ do\ quadrado\ A}$.
e. *Compara o valor das razões consideradas na alínea anterior com a razão de semelhança que transforma o quadrado* A *em cada um dos outros quadrados.*
f. *Indica a razão da semelhança que transforma o quadrado* C *no quadrado* D *e calcula a razão entre as respetivas áreas. Como relacionas a razão entre as áreas dos quadrados* D *e* C *com a razão de semelhança que transforma o quadrado* C *no quadrado* D*?*

Exemplo**

Considera um quadrado de lado a *e um quadrado de lado* b*, sendo* a *e* b *números racionais.*

a. *Justifica que os dois quadrados são semelhantes.*
b. *Indica a razão da semelhança que transforma o primeiro quadrado no segundo.*
c. *Escreve uma expressão da área do segundo quadrado utilizando a medida do lado do primeiro, ou seja,* a.
d. *Calcula o quociente entre as áreas do segundo e do primeiro quadrado.*
e. *Completa a frase: "Dois quadrados são sempre semelhantes sendo a razão entre as áreas igual ao ....da razão de semelhança."*



R.:

a. Os dois quadrados são semelhantes pois os ângulos internos de cada um são todos retos (logo iguais) e é sempre igual a $\frac{b}{a}$ qualquer quociente entre os comprimentos de dois lados, sendo o primeiro do quadrado de lado b e o segundo do quadrado de lado a.

b. $r = \frac{b}{a}$.

c. $b^2 = (r.a)^2 = r^2a^2$, onde se utilizou que $b = ra$ (definição da razão de semelhança).

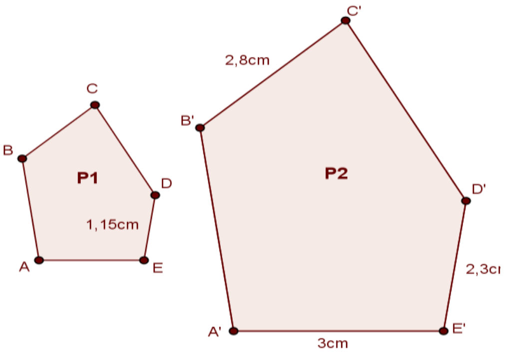
d. Da alínea anterior tem-se $A_2 = r^2A_1$ pelo que $\frac{A_2}{A_1} = r^2$.

e. Dois quadrados são sempre semelhantes sendo a razão entre as áreas igual ao quadrado da razão de semelhança.

10.1

Exemplo

Na figura estão representados dois pentágonos semelhantes, por uma semelhança que transforma um ponto designado por uma dada letra (por exemplo C) num ponto designado pela mesma letra afetada de uma plica (por exemplo C'). Tendo em conta os dados da figura e que $\overline{CD} = \overline{AB}$, responde às seguintes perguntas.



a. *Indica a razão de semelhança que transforma P_1 em P_2.*
b. **Sabendo que o perímetro do polígono P_1 é igual a $7{,}65\ cm$, determina o perímetro do polígono P_2 e a medida de $\overline{A'B'}$ e de $\overline{C'D'}$.*
c. *Sabendo que a área do polígono P_2 é igual a $14{,}7\ cm^2$ determina a área do polígono P_1.*

Exemplo

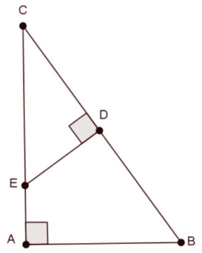
Um triângulo equilátero $[ABC]$ é semelhante a um triângulo $[PQR]$ sendo a razão de semelhança que transforma o primeiro no segundo igual a 3.

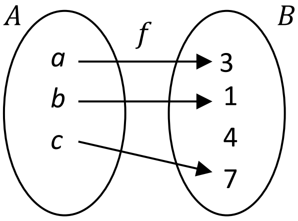
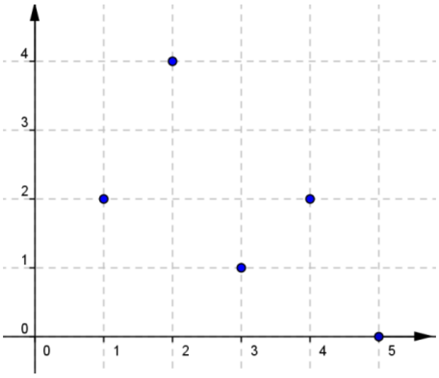
a. *Supondo que o triângulo $[PQR]$ tem de perímetro 30 cm, qual o perímetro do triângulo $[ABC]$ e qual a medida do comprimento de cada um dos lados?*
b. *Supondo que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $5\ cm^2$ qual a área do triângulo $[PQR]$?*
c. *Supondo que o perímetro de $[ABC]$ é igual a $12\ cm$, qual a medida do comprimento de cada um dos lados do triângulo $[PQR]$?*

Exemplo

Na figura estão representados dois triângulos retângulos escalenos $[ABC]$ e $[EDC]$.

a. *Justifica que os triângulos são semelhantes e identifica os lados correspondentes por uma semelhança que transforme um no outro.*
b. *Supondo que $\overline{CB} = 6cm$, $\overline{CE} = 2cm$ e que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $9\ cm^2$, indica qual a área do triângulo $[EDC]$.*

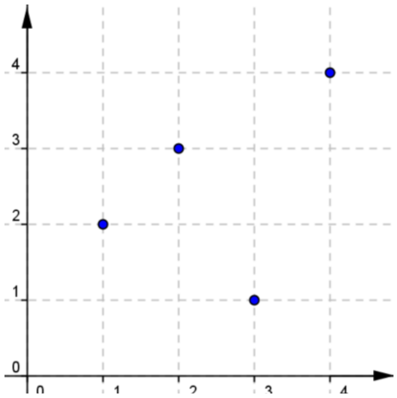


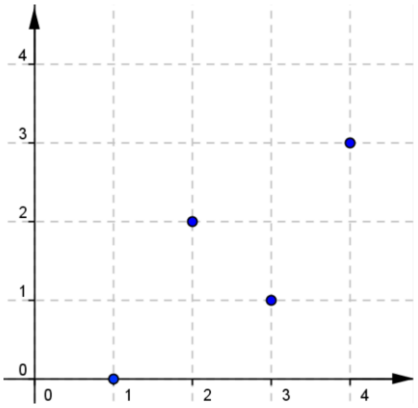
Descritor	Texto de apoio
1.1 1.2 1.3 1.4 1.7	**Exemplo** *Considera a função $f\colon A \to B$ definida pelo diagrama seguinte.* *Identifica o domínio, o contradomínio, o conjunto de chegada e o gráfico de f.*  **Exemplo** *Dados os conjuntos $A = \{2,3,5\}$ e $B = \{4,6,10,12\}$, a função $g\colon A \to B$ é definida pela expressão $g(x) = 2x$.* *a. Determina o contradomínio de g.* *b. Determina o gráfico de g.* **Exemplo** *Considera o gráfico de uma função h definido por G_h= $\{(1,4),(3,6),(5,8),(7,10)\}$.* *a. Identifica o domínio e o contradomínio de h.* *b. Representa a função h por um diagrama de setas supondo que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.* *c. Supõe que o contradomínio de h não coincide com o conjunto de chegada. Representa por um diagrama de setas um possível exemplo de h.* *d. Determina uma expressão algébrica que defina o valor de $h(x)$ para qualquer x no domínio de h.*
1.9	**Exemplo** *Considera a função f de domínio $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 4\right\}$ e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x + 2$.* *a. Determina o contradomínio de f.* *b. Representa o gráfico da função f num referencial cartesiano.*
1.10	**Exemplo** *Na figura está representado o gráfico de uma função g num referencial cartesiano.* *a. Indica o domínio de g.* *b. Completa as igualdades:* $g(3) = \cdots \qquad g(\ldots) = 4$ *c. Completa com um número por forma a obteres uma frase verdadeira:* *"…. é o objeto cuja imagem é 0."* *d. Indica se a seguinte frase é verdadeira ou falsa:* *"2 é imagem de um único objeto."* 

2.1
2.2

Exemplo

Considera os seguintes referenciais cartesianos, onde se representaram respetivamente os gráficos das funções f e g.





a. *Indica o domínio de f e de g.*
b. *Identifica o contradomínio de cada uma das funções.*
c. *Completa com números, por forma a obteres igualdades verdadeiras.*

$$(f+g)(2) = f(2) + g(\dots) = \cdots + \cdots \ = \cdots$$

d. *Preenche a seguinte tabela e indica o contradomínio da função $f+g$.*

x	1	2	3	4
$f(x)$				
$g(x)$				
$(f+g)(x)$				

e. *Representa num referencial cartesiano o gráfico da função $f+g$.*
f. *Identifica o domínio e determina o contradomínio das seguintes funções:* $f-g$, $f \times g$ *e* f^2.

Exemplo

A Carla, a Maria e o Gonçalo resolveram registar numa folha de cálculo as quantias, em euros, gastas no bar da escola e na papelaria durante uma semana.

	Carla		Maria		Gonçalo	
	Bar	Papelaria	Bar	Papelaria	Bar	Papelaria
2.ª feira	1,20	0,50	0,80	0,40	1,80	0,20
3.ª feira	0,80	0	1,25	0,60	2,15	0
4.ª feira	1,65	0,60	2,15	0	1,26	0
5.ª feira	1,05	0	0,65	0,60	0,65	0,80
6.ª feira	1,30	0,70	0,50	0	0,80	0

a. *Considera uma função b que a cada um dos jovens faz corresponder o total de gastos desse jovem no bar da escola durante essa semana e uma função p que a cada jovem faz corresponder o total de gastos desse jovem na papelaria durante essa semana.*
a_1. O que significa a expressão $b(Carla)$? Indica o respetivo valor.
a_2. Indica o domínio e determina o contradomínio da função b.
a_3. Traduz em linguagem comum a frase: «$(b+p)(Gonçalo)$ é maior do que $(b+p)(Maria)$» e indica, justificando, se esta frase é verdadeira ou falsa.

	b. **Considera funções* m, c *e* g *que, a cada dia da semana, fazem corresponder respetivamente o total de gastos da Maria, da Carla e do Gonçalo no bar e na papelaria da escola nesse dia da semana.* b_1. *Indica o valor de* $(m-g)(2.^{\text{a}}feira)$ *e interpreta o valor obtido no contexto do problema.* b_2. *Indica o domínio e determina o contradomínio da função* $(m+c+g)$.
2.4 2.6	Nestes descritores é por vezes necessário utilizar propriedades das operações algébricas referidas no descritor ALG7-1.1. **Exemplo** *1. Considera as funções lineares f e g definidas em* $\mathbb{Q}$ *por* $f(x)=2x$ *e* $g(x)=-5x$. *Justifica que* $f+g$ *é uma função linear e indica a respetiva forma canónica relacionando o coeficiente de* $f+g$ *com os coeficientes das funções* f *e* g. *2.* Considera dois números racionais* b *e* c *e as funções lineares definidas por* $f(x)=bx$ *e* $g(x)=cx$. *Justifica que* $f+g$ *é uma função linear, identificando o coeficiente.* **Exemplo*** *Considera dois números racionais* b *e* c *e as funções lineares definidas por* $f(x)=bx$ *e* $g(x)=cx$. *Justifica que* $f-g$ *é uma função linear, identificando o respetivo coeficiente.* **Exemplo**** *Dados dois números racionais* b *e* k, *seja* f *a função definida em* $\mathbb{Q}$ *por* $f(x)=bx$ *e* g *a função constante igual a* k. *Prova que a função* $g\times f$ *é linear e identifica o respetivo coeficiente.* R.: Temos, para cada x em $\mathbb{Q}$, $$(g\times f\ )(x)=g(x)\times f(x)=k\times(bx)=kb\times x.$$ A função $g\times f$ é linear de coeficiente $a=kb$ pois para todo o x em $\mathbb{Q}$ $$(g\times f)(x)=ax.$$
2.7	**Exemplo** *1. Considera as funções afins* f *e* g *definidas por* $f(x)=2x-5$ *e* $g(x)=-5x+1$. *Justifica que* $f-g$ *é uma função afim e indica a respetiva forma canónica, relacionando o coeficiente e o termo constante de* $f-g$ *com os coeficientes e termos independentes das funções* f *e* g. *2. * Considera as funções afins* f *e* g *definidas por* $f(x)=ax+b$ *e* $g(x)=cx+d$. *Justifica que* $f+g$ *é uma função afim e indica a respetiva forma canónica, relacionando o coeficiente e o termo independente de* $f+g$ *com os coeficientes e termos independentes das funções* f *e* g. ***Exemplo***** *Considera os números racionais* c, d, *e* k *e as funções afins definidas por* $f(x)=k$ *e* $g(x)=cx+d$. *Justifica que* $f\times g$ *é uma função afim e indica a respetiva forma canónica, relacionando o coeficiente e o termo independente de* $f\times g$ *com a constante* k *e o coeficiente e termo independente da função* g.

R.:

Temos, para cada x em $\mathbb{Q}$,

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = k(cx + d) = kcx + kd.$$

A função $f \times g$ é afim de coeficiente $a = kc$ e termo independente $b = kd$ pois, para todo o x em $\mathbb{Q}$, $(f \times g)(x) = ax + b$.

O coeficiente da função produto é igual ao produto da constante k pelo coeficiente de g e o termo independente é igual ao produto da constante k pelo termo independente da função g.

2.8

Exemplo

Para cada uma das funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas em cada uma das seguintes alíneas, indica se se trata de uma função afim, linear ou constante, apresentando a respetiva forma canónica.

a. $f(x) = 5 - 2(x + 3)$

b. $g(x) = -3x + 7 - (5 - 3x)$

c. $h(x) = \frac{2x+3}{4}$

d. $i(x) = 3(2x - 4) + 2(6 - 4x)$

e. $j(x) = 2 + x^2 - (7 + x + x^2)$;

*f.*** $k(x) = (2\sqrt[3]{x})^{3} - x$.

3.1

De acordo com ALG6-4.1, uma grandeza Y diz-se «diretamente proporcional» a outra X quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica também multiplicada por esse número. Se f é a função que associa a cada medida m de X a correspondente medida $f(m)$ de Y, então, se multiplicarmos por um número racional positivo x cada valor de m, a respetiva imagem $f(xm)$ será igual à imagem inicial multiplicada por x.

$\times x$

Medida de X (Objeto)	m	$x.m$
Medida de Y (Imagem por f)	$f(m)$	$x.f(m)$

$\times x$

Como $x.f(m)$ é imagem de $x.m$ por f, tem-se que $f(x.m) = x.f(m)$.
Fazendo $m = 1$, ficamos com $f(x) = x.f(1)$, ou seja, $f(x) = x.a = ax$ em que $a = f(1)$.
Então uma função f de proporcionalidade direta é igual, no seu domínio, a uma função linear de coeficiente $a = f(1)$. Note-se que por esta afirmação se entende, em rigor, que a função f é igual à restrição de uma função linear ao domínio de f.

Até agora, entenderam-se as medidas de grandezas como valores positivos, não fazendo sentido falar em grandezas de medida nula ou negativa. Assim, implicitamente, fica determinado que o domínio de uma função de proporcionalidade direta apenas contém números positivos. Caso se pretenda estender esta definição, considerando-se que se pode atribuir medida nula ou negativa a uma dada grandeza, há que adaptar em consonância o resultado expresso no descritor 3.3.

3.2	De acordo com ALG6-4.2, uma grandeza Y é diretamente proporcional a outra grandeza X da qual depende quando, fixadas unidades, o quociente entre a medida da primeira e a medida da segunda é constante, designando-se esta constante por constante de proporcionalidade. Assim, sendo f uma função de proporcionalidade direta e X e Y as grandezas diretamente proporcionais a que está associada, atendendo ao descritor anterior, tem-se que $cx = f(x)$ é a medida y da grandeza Y que corresponde à medida x da grandeza X , pelo que a constante de proporcionalidade direta é dada, para x não nulo, por $\frac{y}{x} = \frac{cx}{x} = c$.
3.3	**Exemplo**** *Prova que uma função numérica f definida para valores positivos é de proporcionalidade direta quando (e apenas quando) é constante o quociente entre $f(x)$ e x, para qualquer x pertencente ao domínio de f.* R.: Provar esta afirmação consiste em provar que se verificam simultaneamente as seguintes afirmações: 1.ª: Se f é uma função de proporcionalidade direta então $\frac{f(x)}{x}$ é constante. 2.ª: Se $\frac{f(x)}{x}$ é constante então f é uma função de proporcionalidade direta. 1.ª: Se f é uma função de proporcionalidade direta então existe um número a tal que $f(x) = ax$ (isto é $\frac{f(x)}{x} = a$) para qualquer x pertencente ao domínio de f, ou seja, $\frac{f(x)}{x}$ é constante. 2.ª: Se $\frac{f(x)}{x}$ é constante então, para certo a, $\frac{f(x)}{x} = a$, ou seja, $f(x) = ax$ para x pertencente ao domínio de f. Ora $y = ax$ e x podem ser considerados como medidas de grandezas diretamente proporcionais já que $\frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$, logo f é uma função de proporcionalidade direta. À imagem dos descritores ALG6-4.1 e ALG6-4.2, é possível utilizar o descritor 3.3 como definição de «função de proporcionalidade direta» no lugar do descritor 3.1. No entanto, a definição apresentada em 3.1 é a que justifica a designação dada a este tipo de funções, já que traduz na linguagem das funções a propriedade utilizada na definição original de grandezas diretamente proporcionais; no descritor 3.3 indica-se uma propriedade equivalente, e que pode, portanto, ser livremente utilizada para reconhecer que determinada função é de proporcionalidade direta.
4.1	**Exemplo** (3.1) *Considera duas grandezas X e Y diretamente proporcionais. Sabe-se que a uma medida igual a 1,2 de X corresponde a medida 6 de Y.* *Determina uma expressão algébrica para f, função de proporcionalidade direta associada.* **Exemplo** (3.1, 3.2 e 3.3) *Numa promoção associada ao 25.º aniversário, uma loja efetua descontos de 25% sobre o preço de venda.* *a. Determina uma expressão algébrica para uma função D que transforme o preço de venda v no respetivo preço com desconto $D(v)$.* *b. Justifica que D é uma função de proporcionalidade direta e identifica a respetiva constante de proporcionalidade direta.*

Exemplo* (3.1, 3.2 e 3.3)

Numa empresa os salários vão sofrer um acréscimo percentual de 1,5%.

a. *Determina uma expressão algébrica da função* A *que faz corresponder a cada valor* s *do salário anterior, o valor atualizado* $A(s)$.
b. *Justifica que* A *é uma função de proporcionalidade direta e indica a constante de proporcionalidade.*

Exemplo (3.1, 3.2 e 3.3)

Num hipermercado foi anunciada uma nova promoção a todos os detergentes. Os detergentes serão objeto de um desconto de tal forma que a quantia a pagar por cada embalagem marcada originalmente com o preço v*, em euros, é dada também em euros pela expressão* $P(v) = 0{,}78\,v$.

a. *Se cada embalagem de um dado detergente estiver marcada com o preço de* 5€ *e lhe for aplicado o desconto, qual o preço a pagar?*
b. *Podes afirmar que o preço a pagar (*$P(v)$ *euros) e o preço de venda marcado (*v *euros) são grandezas diretamente proporcionais? Justifica.*
c. *Qual a percentagem de desconto aplicada a cada embalagem de detergente?*
d. *Podes afirmar que o desconto e o preço de venda marcado são grandezas diretamente proporcionais? Justifica.*

Exemplo

Uma marca de iogurtes tem nas embalagens a frase "pague 6 leve 8".

a. *Qual a percentagem de desconto que estão a aplicar a este produto?*
b. *Escreve uma expressão algébrica que defina a função que ao valor* v *atual do produto faz corresponder o valor que o cliente terá de pagar quando não houver esta promoção.*

Exemplo

No parque de uma cidade existe um quiosque que aluga bicicletas e que tem a seguinte informação:

Preço a pagar pelo aluguer: 2 euros (taxa fixa) mais 50 cêntimos por hora.

a. *Quanto terias de pagar se o aluguer durasse 3 horas? E 4 horas?*
b. *O preço a pagar não é diretamente proporcional ao tempo do aluguer. Porquê?*
c. *Dá exemplo de um tarifário em que o preço fosse diretamente proporcional ao tempo do aluguer e indica a expressão na forma canónica da função que faz corresponder a cada valor* t *do tempo do aluguer o preço* p *a pagar.*

6.1

Exemplo (5.1)

O termo geral de uma sequência é dado pela expressão $a_n = \frac{n}{3} - \frac{5}{6}$.

a. *Determina os três primeiros termos da sequência.*
b. *Sabendo que o último termo da sequência é* $\frac{5}{2}$, *quantos termos tem a sequência?*

Exemplo (5.1)

Considera a seguinte sequência de pontuações obtidas pela Joana nas primeiras seis vezes em que jogou um determinado jogo: 65, 35, 25, 20, 17, 15.

a. *Verifica se alguma das expressões seguintes permite gerar esta sequência de números:*

(A) $95 - 30n$ *(B)* $\frac{5n+60}{2n-1}$ *(C)* $55 - 10n$ *(D)* $5 + \frac{60}{n}$

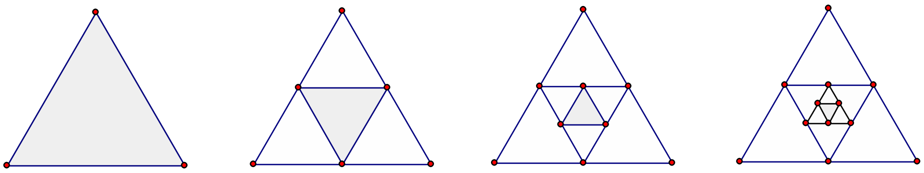
b. *Admitindo que a sequência foi gerada por uma das expressões indicadas na alínea anterior e se a Joana continuasse a jogar e as pontuações continuassem a seguir este mesmo modelo, que pontuação iria obter na 10.ª jogada?*

Exemplo (5.2)

O primeiro elemento de uma sucessão de figuras é um triângulo equilátero totalmente sombreado, com área igual a 4 unidades.

Constrói-se uma figura a partir da anterior marcando os pontos médios dos lados do triângulo a sombreado e mantendo o sombreado apenas no triângulo com estes vértices.

Considera a sucessão (A_n) *das áreas das partes sombreadas dessas figuras*.



a. *Indica os quatro primeiros termos desta sucessão.*

b. *Determina o sexto termo desta sucessão.*

Descritor — **Texto de apoio**

1.1

As propriedades da multiplicação e da adição, no contexto dos números racionais positivos, foram abordadas no 2.º ciclo. Algumas extensões destas propriedades ao corpo dos números racionais foram já estudadas, ainda que por vezes de forma incompleta, neste ou em anos anteriores. Pretende-se aqui apresentar estes resultados de forma mais sistemática.

A propriedade comutativa da adição pode ser reconhecida fazendo uso da definição geométrica da soma de dois números racionais, estudada no 6.º ano.

Exemplo*

a. Assinala na reta numérica dois números racionais positivos a *e* b. *Constrói geometricamente as somas* $a+b$ *e* $b+a$. *O que podes concluir?*

b. Repete este procedimento com dois números negativos e dois números de sinal contrário.

A propriedade comutativa da multiplicação é uma consequência imediata dos descritores NO7-1.4 (a definição foi dada por forma a que a operação seja comutativa, no caso de números de sinais contrários) e do descritor NO7-1.6 (relativo ao produto de dois números negativos).

Relativamente à distributividade:

A multiplicação de um número natural m por um número natural n corresponde, por definição, à soma de n parcelas iguais a m:

$$n \times m = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}}.$$

Desta forma, no caso do produto por um número natural, a distributividade resume-se simplesmente às propriedades associativa e comutativa da operação de adição e à definição da multiplicação: dados dois números naturais m e k e um número natural n,

$$n \times (m+k) = \underbrace{(m+k) + \cdots + (m+k)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}} + \underbrace{k + \cdots + k}_{n \text{ vezes}}$$

$$= n \times m + n \times k.$$

Da mesma forma, se $m \geq k$,

$$n \times (m-k) = \underbrace{(m-k) + \cdots + (m-k)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}} - (\underbrace{k + \cdots + k}_{n \text{ vezes}})$$

$$= n \times m - n \times k.$$

o que pode ser facilmente verificado , observando que

$$(m-k)+\cdots+(m-k)+(k+\cdots+k)=$$
$$=(m-k)+k+(m-k)+k+\cdots+(m-k)+k\ =m+m+\cdots+m,$$

e utilizando em seguida a definição da subtração:

$$(m-k)+\cdots+(m-k)=m+\cdots+m-(k+\cdots+k).$$

Dados agora três números racionais p, q e r, e considerando que já se obteve uma representação de q e r por frações com o mesmo denominador ($p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{a}{c}$ e $r=\frac{b}{c}$, onde m, a e b são números inteiros não negativos e n e c números naturais), tem-se:

$$p\times(q+r)=\frac{m}{n}\times\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=\frac{m}{n}\times\frac{a+b}{c}=\frac{m\times(a+b)}{n\times c}=\frac{m\times a+m\times b}{n\times c}$$
$$=\frac{m\times a}{n\times c}+\frac{m\times b}{n\times c}=\frac{m}{n}\times\frac{a}{c}+\frac{m}{n}\times\frac{b}{c}=p\times q+p\times r,$$

e, de modo análogo, se $q\geq r$ (e portanto $a\geq b$),

$$p\times(q-r)=\ p\times q-p\times r.$$

Fica assim concluída a verificação da distributividade da multiplicação em relação à adição e à subtração no quadro dos números racionais não negativos.

Para estender esta propriedade a quaisquer números racionais, devemos distinguir vários casos, que correspondem a afetar de sinal menos um ou mais dos números p, q ou r acima considerados.

Considerando por exemplo $(-p)\times(-q+r)$, com $q>r$, podemos escrever :

$$(-p)\times(-q+r)=(-p)\times(r-q)=(-p)\times(-(q-r)),$$

Onde utilizámos os descritores NO7-1.1 e NO7-1.5 e a associatividade da multiplicação.

Agora, por definição do produto de dois números racionais negativos (NO7-1.6) e do produto de um número positivo por um número negativo (NO7-1.4), utilizando a propriedade distributiva no quadro dos números racionais positivos:

$$(-p)\times\big(-(q-r)\big)=p\times(q-r)=p\times q-p\times r=(-p)\times(-q)+(-p)\times r,$$

concluindo-se assim que $(-p)\times(-q+r)=(-p)\times(-q)+(-p)\times r$, como se pretendia.

Os restantes casos podem ser justificados de forma análoga.

1.3	Os descritores NO7-1.7 e NO7-1.9 reduzem as operações de produto e quociente de dois quaisquer números racionais ao produto e quociente de números racionais positivos (os respetivos valores absolutos) e à utilização de uma regra de sinais. Desta forma, as propriedades referidas neste descritor resultam de forma imediata das correspondentes propriedades tratadas nos domínios ALG5, relativas a números racionais positivos.
1.5	**Exemplo** *a. Calcula* $(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4$ *e* $(-1)^5$. *O que podes conjeturar quanto ao valor de* $(-1)^{35}$ *e de* $(-1)^{232}$*?* *b.* Para obteres o valor de* $(-1)^n$ *para qualquer número natural* n*, resolve as duas seguintes alíneas:* b_1*. Considera que o número natural* n *é par (isto é, que* n *é múltiplo de* 2*:* $n = 2k, k \in \mathbb{N}$*) e utiliza as propriedades das potências para verificares que* $(-1)^n = 1$. b_2*. Estuda agora o caso em que* n *é ímpar.* *c. Dado um número natural* n*, calcula* $(-5)^n$ *começando por observar que* $-5 = (-1) \times 5$ *e utilizando as propriedades das potências.* R.: a. $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1;$ $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1;$ $(-1)^4 = (-1)^3 \times (-1) = (-1) \times (-1) = 1;$ $(-1)^5 = (-1)^4 \times (-1) = 1 \times (-1) = -1.$ Posso conjeturar que quando o expoente é par, o resultado é 1 e quando o expoente é ímpar, o resultado é -1, logo que $(-1)^{35} = -1$ e que $(-1)^{232} = 1$. b_1. Tem-se $(-1)^n = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$. Quando n é par, o resultado é 1, conforme conjeturado. b_2. O número natural n é ímpar quando é igual a um número par mais 1: $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}_0$. $$(-1)^n = (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1.$$ Quando n é impar, o resultado é -1, conforme conjeturado. c. $(-5)^n = ((-1) \times 5)^n = (-1)^n \times 5^n$. Se n é par, $(-5)^n = 1 \times 5^n = 5^n$; Se n é impar, $(-5)^n = (-1) \times 5^n = -5^n$;
1.6	As propriedades referidas neste descritor são uma consequência simples do descritor anterior. **Exemplo** *Determina, justificando, os sinais dos seguintes números:* 3^7; $(-3)^8$; $(-3)^{\,7}$.

R.:

- 3^7 é o produto de 7 fatores iguais a 3. Como o produto de números positivos é positivo, 3^7 é positivo;
- Como 8 é par, $(-3)^8 = 3^8 > 0$;
- Como 7 é impar, $(-3)^{\ 7} = -3^7 < 0$.

2.1

Neste descritor pretende-se que os alunos reconheçam uma importante propriedade de monotonia, em casos concretos e com recurso a uma construção geométrica.

Exemplo

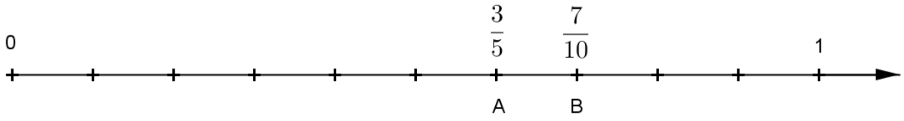
a. Assinala na reta numérica os pontos A e B de abcissas $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ respetivamente. Qual destes dois números é maior?

b. Constrói um quadrado que tenha por lado o segmento $[OA]$. Constrói um segundo quadrado que tenha por lado o segmento $[OB]$ prolongando também o outro lado de extremo O do primeiro quadrado.

c. Qual dos dois quadrados tem maior área? Deduz, sem efetuar cálculos, que $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

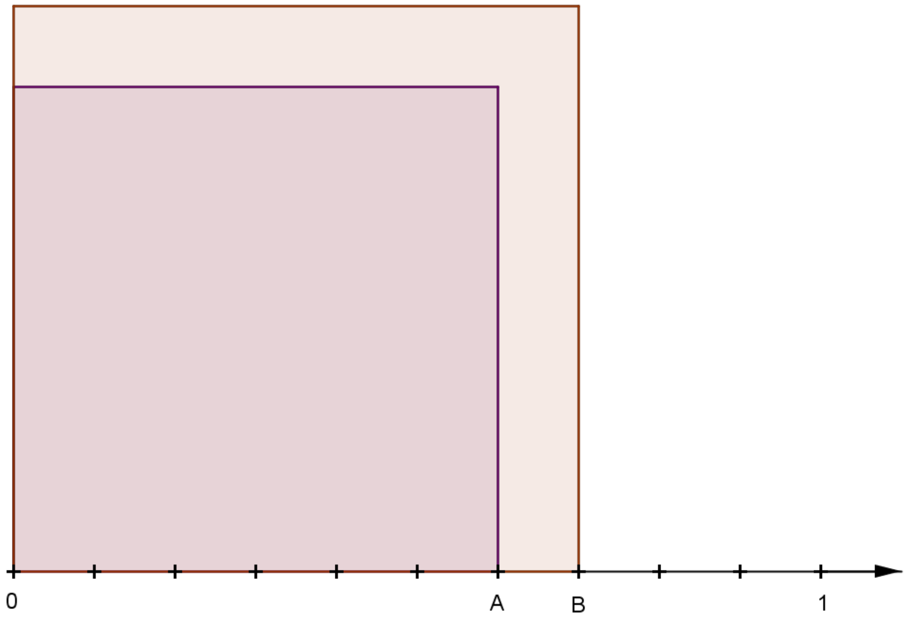
R.:

a.



$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{7}{10}$.

b.



c. O quadrado de lado $[OB]$ tem maior área do que quadrado de lado $[OA]$, uma vez que o contém no sentido estrito. Como estes quadrados têm respetivamente uma área de $\left(\frac{7}{10}\right)^2$ e $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ unidades quadradas, $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

2.3

Os alunos poderão por exemplo construir a seguinte tabela:

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
q^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Ainda que não se utilize aqui o formalismo das funções, uma tabela com estas características poderá permitir ao aluno visualizar de forma eficaz a relação entre quadrados, cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas, reconhecendo (nos racionais positivos) estas duas últimas operações como inversas das duas primeiras. Uma outra aplicação destas tabelas será explorada mais à frente, nos descritores 2.9, 2.10 e 2.11.

2.4

Neste descritor introduz-se a raiz quadrada do quociente (não nulo) de dois quadrados perfeitos como o único número racional positivo cujo quadrado é igual a esse mesmo quociente. Esta definição obriga a reconhecer a unicidade de um tal número. De salientar que a propriedade de monotonia referida no descritor 2.1 tem aqui um papel essencial. Pode naturalmente começar por estudar-se o caso dos quadrados perfeitos antes de se considerar, de forma mais geral, quocientes de quadrados perfeitos.

Exemplo

a. Calcula $\left(\frac{6}{5}\right)^2$.

b. Quantos números racionais positivos existem com o mesmo quadrado do que* $\frac{6}{5}$ *?*

c. Que relação existe entre o quadrado de um número racional positivo* q *e o quadrado do seu simétrico* $-q$ *?*

*d.** Quantos números racionais negativos existem com quadrado igual a* $\frac{36}{25}$ *?*

R.:

a. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2} = \frac{36}{25}$.

b. Os racionais positivos inferiores a $\frac{6}{5}$ têm quadrados inferiores a $\frac{36}{25}$ e os racionais positivos superiores a $\frac{6}{5}$ têm quadrados superiores a $\frac{36}{25}$.
Desta forma, $\frac{6}{5}$ é o único número racional positivo cujo quadrado é igual a $\frac{36}{25}$.

c. Tem-se $(-q)^2 = q^2$ porque o expoente 2 é um número par (*cf.* ALG7-1.5).Desta forma, um número e o seu simétrico têm o mesmo quadrado.

d. Se o quadrado de um número negativo for igual a $\frac{36}{25}$, o quadrado do seu simétrico, que é um número positivo, é também igual a $\frac{36}{25}$. Como sabemos que $\frac{6}{5}$ é o único número positivo nessas condições, o único número negativo cujo quadrado é igual a $\frac{36}{25}$ é $-\frac{6}{5}$.

2.6

A prova pedida é a seguinte:

Dados dois números racionais $q=\frac{a^2}{b^2}$ e $r=\frac{c^2}{d^2}$, onde a, b, c e d são números naturais ($b \neq 0 \; e \; d \neq 0$), tem-se

$$q \times r = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 \times c^2}{b^2 \times d^2} = \frac{(a \times c)^2}{(b \times d)^2} \text{ e, se } r \neq 0, \; \frac{q}{r} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{c^2}{d^2}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{d^2}{c^2} = \frac{(a \times d)^2}{(b \times c)^2}.$$

Assim, $q \times r$ e $\frac{q}{r}$ são igualmente quocientes de quadrados perfeitos.

Observação: Note-se que esta etapa é estritamente necessária antes de se poder considerar as expressões $\sqrt{q \times r} \; e \; \sqrt{\frac{q}{r}}$. De facto, não tendo ainda sido introduzidos os números reais (o que acontece no 8.º ano), a raiz quadrada apenas foi definida para números racionais quocientes de quadrados perfeitos (descritor 2.4). Estes cálculos podem ser substancialmente simplificados se se limitar este estudo ao caso dos quadrados perfeitos ($q=a^2$ e $r=c^2$).

Por outro lado,

$$(\sqrt{q} \times \sqrt{r})^2 = (\sqrt{q})^2 \times (\sqrt{r})^2 = q \times r.$$

Como $\sqrt{q} \times \sqrt{r}$ é um número positivo (ou nulo), é por definição igual à raiz quadrada de $q \times r$:

$$\sqrt{q \times r} = \sqrt{q} \times \sqrt{r}.$$

Da mesma forma, $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$ é positivo e $\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{q})^2}{(\sqrt{r})^2} = \frac{q}{r}$, pelo que, por definição de raiz quadrada, $\sqrt{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$.

2.7

O reconhecimento de que existe apenas um número racional cujo cubo é igual a um dado quociente de cubos perfeitos pode ser efetuado de forma análoga ao caso tratado no descritor 2.4:

Exemplo

a. Calcula $\left(\frac{4}{3}\right)^3$.

b. Quantos números racionais positivos existem com o mesmo cubo do que* $\frac{4}{3}$ *?*

c. Quantos números racionais negativos existem cujo cubo é igual a $\frac{64}{27}$ *?*

R.:

a. $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$.

b. Os racionais positivos inferiores a $\frac{4}{3}$ têm cubos inferiores a $\frac{64}{27}$ e os racionais positivos superiores a $\frac{4}{3}$ têm cubos superiores a $\frac{64}{27}$.

Conclui-se que $\frac{4}{3}$ é o único número racional positivo cujo cubo é igual a $\frac{64}{27}$.

c. O cubo de um número negativo é negativo, pelo que não existe nenhum número negativo cujo cubo seja igual a $\frac{64}{27}$.
Consequentemente, $\frac{4}{3}$ é o único número racional que elevado ao cubo é igual a $\frac{64}{27}$.

O caso dos simétricos de quocientes de cubos perfeitos pode ser tratado de forma semelhante.

2.8 Dados dois números racionais q e r quocientes (ou simétricos de quocientes) de dois cubos perfeitos, pode ser verificado, de forma análoga ao que foi sugerido a propósito do descritor 2.4, que também o são $q \times r$ e $\frac{q}{r}$ (se $r \neq 0$).

Observando que $(\sqrt[3]{q} \times \sqrt[3]{r})^3 = (\sqrt[3]{q})^3 \times (\sqrt[3]{r})^3 = q \times r$ e que $\left(\frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{r}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{q})^3}{(r)^3} = \frac{q}{r}$, resulta da definição de raiz cúbica que $\sqrt[3]{q \times r} = \sqrt[3]{q} \times \sqrt[3]{r}$ e que $\sqrt[3]{\frac{q}{r}} = \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{r}}$.

Finalmente, como $(-\sqrt[3]{q})^3 = -(\sqrt[3]{q})^3 = -q$ (*cf.* ALG7-1.5), $\sqrt[3]{-q} = -\sqrt[3]{q}$.

2.9 **Exemplo**
Exprime na forma de dízima $\sqrt[3]{-\frac{729}{125}}$.

R.:
Por consulta de uma tabela, por exemplo daquela que foi construída a propósito do descritor 2.3, $125 = 5^3$ e $729 = 9^3$.

Desta forma,

$$\sqrt[3]{-\frac{729}{125}} = -\sqrt[3]{\frac{729}{125}} = -\frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{9}{5} = -\frac{18}{10} = -1{,}8.$$

2.10 Deslocar a vírgula decimal duas (respetivamente três) casas para a direita corresponde a multiplicar por $100 = 10^2$ (respetivamente por $1000 = 10^3$). Se se obtiver desta forma um quadrado (respetivamente um cubo) perfeito, o número inicial é igual ao quociente de dois quadrados (respetivamente cubos). Facilmente se calcula então a raiz quadrada (respetivamente cúbica) do número inicial.

Exemplo
Exprime na forma de dízima $\sqrt[3]{0{,}027}$.

R.:
$0{,}027 = \frac{27}{1000} = \frac{3^3}{10^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^3$ pelo que $\sqrt[3]{0{,}027} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

2.11 **Exemplo**
Exprime na forma de dízima $\sqrt{0{,}000081}$.

R.:

$0{,}000081 = \frac{81}{1000000} = \frac{9^2}{10^6} = \frac{9^2}{10^{3\times 2}} = \left(\frac{9}{10^3}\right)^2$ de onde se conclui que

$$\sqrt{0{,}000081} = \frac{9}{10^3} = \frac{9}{1000} = 0{,}009.$$

3.1

O conceito de equação é aqui apresentado recorrendo ao formalismo das funções. De um ponto de vista metodológico, poderão ser efetuadas outras abordagens, sendo no entanto necessário que o aluno venha a interpretar uma equação como uma igualdade entre duas expressões, cada uma delas definindo uma função num certo domínio e para um certo conjunto de chegada.

Note-se que uma mesma expressão pode definir funções diferentes f_1 e f_2 (se se considerarem domínios ou conjuntos de chegada diferentes). Nesse caso, também serão distintas as equações $f_1(x) = g(x)$ e $f_2(x) = g(x)$, onde g é uma função dada, podendo mesmo ter conjuntos-solução diferentes no caso em que os domínios de f_1 e f_2 não coincidem.

Por exemplo, a equação $2x = 3$ tem, respetivamente, os conjuntos-solução $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ou o conjunto vazio $\{\ \}$, consoante se consideram os domínios $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{N}$; já no caso de se considerarem os domínios $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^+$ (o conjunto formado pelos números racionais positivos), os conjuntos-solução são ambos iguais a $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Dada uma equação $f(x) = g(x)$, indica-se frequentemente um domínio comum D para as duas funções utilizando a expressão «a equação $f(x) = g(x)$ em D».

3.3

É importante, neste descritor, relacionar a noção de equivalência com a noção de implicação. Pela definição dada, duas equações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto-solução. Assim, para se poder afirmar que duas equações são equivalentes, é necessário verificar que toda a solução da primeira é solução da segunda e vice-versa. Cada uma destas condições traduz uma implicação. Se apenas for verdadeira, por exemplo, a primeira (ser solução da primeira implica ser solução da segunda), as equações não são equivalentes.

Para se ilustrar estas situações poderão ser consideradas, por exemplo, as equações $x = 2$ e $x^2 = 4$ em $\mathbb{Q}$.

Por um lado, se $x = 2$, é verdade que $x^2 = 2^2 = 4$. Podemos pois afirmar que ser solução da primeira equação implica ser solução da segunda:

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4.$$

No entanto, como $(-2)^2 = 4$, -2 é solução da segunda equação mas não da primeira: a implicação inversa da apresentada é falsa e portanto as equações não são equivalentes.

Por outro lado, é correto afirmar que, em $\mathbb{Q}$, $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$, uma vez que são verdadeiras ambas as implicações $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ e $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$.

3.4

Pretende-se provar, dada uma equação numérica $f(x) = g(x)$ e um número racional q, que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ f(x) + q = g(x) + q.$$

Temos portanto de provar duas implicações.

Por um lado, é evidente que:

$$f(x) = g(x) \ \Rightarrow f(x) + q = g(x) + q.$$

De facto, se a for solução da equação $f(x) = g(x)$, os números $f(a)$ e $g(a)$ são iguais, pelo que também o são os números $f(a) + q$ e $g(a) + q$. O elemento a é portanto também solução da equação $f(x) + q = g(x) + q$.

Por outro lado, se a for solução da equação $f(x) + q = g(x) + q$, tem-se $f(a) + q = g(a) + q$. Ora:

$$f(a) + q = g(a) + q \Rightarrow f(a) + q + (-q) = g(a) + q + (-q).$$

Portanto,

$$f(a) = f(a) + q + (-q) = g(a) + q + (-q) = g(a).$$

Acabámos de verificar que:

$$f(x) + q = g(x) + q \ \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Fica assim provada a equivalência pretendida. Observando que subtrair q é o mesmo do que adicionar $-q$, obtém-se também a equivalência

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ f(x) - q = g(x) - q.$$

Relativamente ao produto de ambos os membros de uma equação numérica por um número racional q, teremos de forma análoga que:

$$f(x) = g(x) \ \Rightarrow q \times f(x) = q \times g(x).$$

Se $q \neq 0$, a implicação inversa é também verdadeira: se a for solução da equação $q \times f(x) = q \times g(x)$, temos $q \times f(a) = q \times g(a)$ e:

$$q \times f(a) = q \times g(a) \Rightarrow \ \frac{1}{q} \times q \times f(a) = \frac{1}{q} \times q \times g(a).$$

de onde se conclui que:

$$f(a) = \frac{1}{q} \times q \times f(a) = \frac{1}{q} \times q \times g(a) = g(a).$$

Fica assim provada, para $q \neq 0$, a equivalência

$$f(x) = g(x) \ \Leftrightarrow q \times f(x) = q \times g(x).$$

A equivalência (para $q \neq 0$)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{q} = \frac{g(x)}{q}$$

resulta facilmente desta última propriedade, bastando notar que dividir por q é o mesmo do que multiplicar pelo seu inverso.

Finalmente observemos que, em geral, a multiplicação por zero de uma dada equação não conduz a uma equação equivalente (apenas uma das implicações, tal como foi explicado, é sempre verdadeira).

Por exemplo, o conjunto-solução da equação $2x = 6$, em $\mathbb{Q}$, é o conjunto $\{3\}$; já o conjunto-solução da equação $0 \times 2x = 0 \times 6$, nesse mesmo domínio, é todo o conjunto $\mathbb{Q}$.

3.7 Existem várias redações possíveis para as provas pedidas. Utilizando por exemplo o formalismo das funções, podemos argumentar da seguinte forma:

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$

  A função definida nos racionais pela expressão $f(x) = ax$ é a função constante de valor 0 ($ax = 0x = 0$), não tomando portanto, para nenhum número racional, o mesmo valor do que a função constante de valor $b \neq 0$. Logo, a equação $ax = b$ não tem soluções.

- Se $a = 0$ e $b = 0$

  A função definida nos racionais pela expressão $f(x) = ax$ é a função constante de valor 0 ($ax = 0x = 0$), tomando assim, para qualquer número racional, o mesmo valor da função constante igual a 0. Logo, todo o número racional é solução da equação $ax = b$.

- Se $a \neq 0$

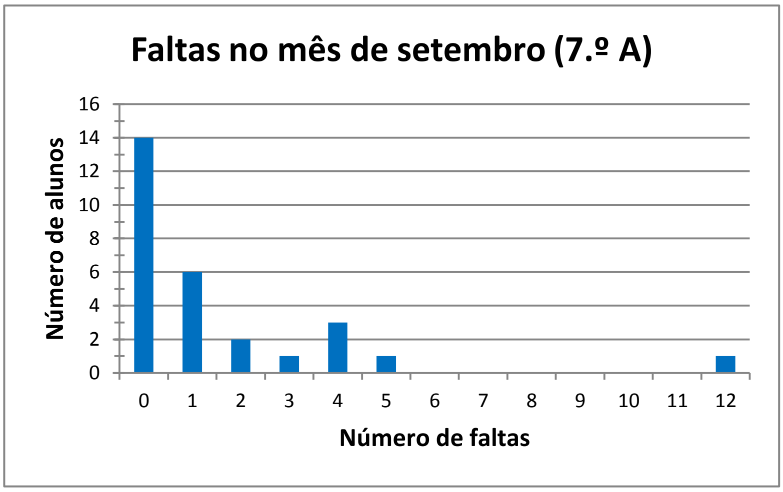
  Dividindo-se ambos os membros da equação $ax = b$ pelo número racional não nulo a obtém-se a equação equivalente $x = \frac{a}{b}$. Desta forma, $\frac{a}{b}$ é a única solução da equação $ax = b$.

Descritor	Texto de apoio
1.2	**Exemplo** *Determina a mediana do seguinte conjunto de dados:* *3, 4, 3, 2, 3, 5, 3, 4, 1, 4, 2, 2, 2, 3, 3.* R.: Dados ordenados: 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5. A mediana é 3.
1.3	**Exemplo** *Determina a mediana do seguinte conjunto de dados:* *10, 20, 10, 10, 15, 10, 20, 20, 10, 10, 10, 20, 10, 10, 10, 15.* R.: Dados ordenados: 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 20, 20, 20, 20. A mediana é $\frac{10+10}{2} = 10$. **Exemplo** *Determina a mediana do seguinte conjunto de dados:* *2, 8, 7, 15, 7, 8, 1, 2, 2, 2, 7, 2.* R.: Dados ordenados: 1, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 8, 8, 15. A mediana é $\frac{2+7}{2} = 4{,}5$.
1.4	**Exemplo**** *Na turma da Marta fizeram um estudo acerca do número de idas ao cinema dos alunos durante o primeiro período e concluíram que a mediana era 4. Sabe-se que a turma tem 27 alunos, que a Marta foi ao cinema só uma vez e a colega Ana foi 8 vezes.* *a. Qual o número mínimo e máximo de alunos que foi ao cinema:* *a_1. Mais do que 4 vezes?* *a_2. Menos do que 4 vezes?* *b. Sabendo que a média do conjunto de dados é 3, apresenta, justificando, um possível conjunto de dados correspondente a este estudo.*

2.1

Exemplo

Observa atentamente o gráfico de barras relativo às faltas dos alunos do 7.º ano, turma A, durante o mês de setembro. Determina a mediana do conjunto de dados e o número médio de faltas.



R.:

Dados ordenados:

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \underbrace{0, 1}_{\text{valores centrais}}, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 12.$$

Mediana: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

A mediana é 0,5 faltas.

Média: $\frac{14\times0+6\times1+2\times2+3+3\times4+5+12}{28} = \frac{42}{28} = \frac{3}{2}$.

O número médio é de 1,5 faltas.

8.º ANO

Números e Operações NO8

Descritor	Texto de apoio
1.1	No primeiro objetivo geral deste domínio analisa-se a representação em forma de dízima finita ou infinita periódica dos números racionais. O algoritmo da divisão constitui um instrumento extremamente pertinente na definição e justificação das propriedades deste tipo de representação, pelo que é amplamente utilizado nos descritores que seguem. É importante que os alunos adquiram destreza na conversão de frações em dízima e vice-versa, enriquecendo assim a compreensão conceptual do conjunto dos números racionais. O segundo objetivo geral é consagrado à apresentação dos números irracionais. Não é à partida intuitivo que existam pontos da reta numérica que não são representados por uma fração, tendo este assunto já sido aflorado no 7.º ano (ALG7-7) no contexto dos segmentos de reta incomensuráveis. Deverá ficar claro que é o facto de não se poderem medir todas as distâncias com números racionais, fixada uma unidade de comprimento, que motiva a introdução deste novo conjunto de números. Neste descritor retoma-se de forma mais sistemática a representação sob a forma de dízima dos números racionais que podem ser expressos como frações decimais, assunto que já foi abordado no 1.º ciclo para alguns casos particulares (*cf.* NO4-6.3 e NO4-6.4 e respetivos textos de apoio); é também uma boa oportunidade para recordar a estrutura do algoritmo da divisão inteira tal como foi analisada nos textos de apoio relativos aos descritores NO4- 2.1 a NO4-2.4 e aplicada à obtenção de uma representação em dízima dos referidos números racionais no descritor NO4-6.4. **Exemplo** *Considera os números racionais* $\frac{13}{2^2}$, $\frac{3}{5^3}$, $\frac{87}{2^3\times5}$ e $\frac{121}{40}$. *a. Obtém a respetiva representação em dízima começando por transformar cada uma das frações em frações decimais que lhes sejam equivalentes.* *b. Obtém novamente as representações em dízima das frações dadas recorrendo desta vez ao algoritmo da divisão.* R.: a. $\frac{13}{2^2}=\frac{13\times5^2}{2^2\times5^2}=\frac{325}{(2\times5)^2}=\frac{325}{100}=3{,}25$; $\frac{3}{5^3}=\frac{3\times2^3}{5^{3\times}2^3}=\frac{24}{(5\times2)^3}=\frac{24}{10^3}=\frac{24}{1000}=0{,}024$; $\frac{87}{2^3\times5}=\frac{87\times5^2}{2^3\times5\times5^2}=\frac{2175}{(5\times2)^3}=\frac{2175}{1000}=2{,}175$; Começando por decompor 40 em fatores primos vem $40=2^3\times5$. $\frac{121}{40}=\frac{121}{2^3\times5}=\frac{121\times5^2}{2^3\times5^3}=\frac{3025}{(2\times5)^3}=\frac{3025}{1000}=3{,}025$.

b.

$$\begin{array}{r|l}
13{,}00 & 4 \\ \cline{2-2}
10 & 3{,}25 \\
20 & \\
0 &
\end{array}
\qquad \frac{13}{4} = 3{,}25$$

$$\begin{array}{r|l}
3{,}000 & 125 \\ \cline{2-2}
0500 & 0{,}024 \\
000 &
\end{array}
\qquad \frac{3}{125} = 0{,}024$$

$$\begin{array}{r|l}
87{,}000 & 40 \\ \cline{2-2}
070 & 2{,}175 \\
500 & \\
200 & \\
00 &
\end{array}
\qquad \frac{87}{40} = 2{,}175$$

$$\begin{array}{r|l}
121{,}000 & 40 \\ \cline{2-2}
0100 & 3{,}025 \\
200 & \\
00 &
\end{array}
\qquad \frac{121}{40} = 3{,}025$$

Exemplo

Explica, de duas formas distintas, por que razão o número $\frac{11}{30}$ *não possui representação em dízima finita:*

a. Utilizando o algoritmo da divisão.

*b.** Mostrando que não pode ser dado por uma fração decimal.*

R.:

a. Utilizando o algoritmo da divisão inteira, por forma a obter aproximações na forma de dízima de $\frac{11}{30}$:

$$\begin{array}{r|l}
11{,}00 & 30 \\ \cline{2-2}
200 & 0{,}36 \\
20 &
\end{array}$$

O resto parcial 20 já foi obtido anteriormente, pelo que o procedimento se repetirá indefinidamente, enquanto continuarmos o algoritmo:

$$\begin{array}{r|l}
11{,}00000\ldots & 30 \\ \cline{2-2}
200 & 0{,}36666\ldots \\
200 & \\
200 & \\
200 & \\
20 &
\end{array}$$

b. Se a fração «$\frac{11}{30}$» fosse equivalente a uma fração decimal, ter-se-ia uma igualdade da forma $\frac{11}{30} = \frac{a}{10^n}$, onde a e n são números naturais, de onde resultaria que

$$11 \times 10^n = 30 \times a, \text{ ou seja, } 11 \times 2^n \times 5^n = 2 \times 3 \times 5 \times a.$$

Observando a igualdade anterior verifica-se que a decomposição em fatores primos de $11 \times 2^n \times 5^n$ é igual a uma decomposição que inclui o número 3, o que é absurdo pois a decomposição em fatores primos de um número é única.

Observação: Este raciocínio aplica-se de forma mais geral a qualquer fração irredutível cujo denominador apresente um divisor primo distinto de 2 e de 5. Assim se pode reconhecer que essas frações não admitem representação em dízima finita.

1.2
1.3
1.4
1.11

Informação Complementar para o professor

Uma dízima finita (não negativa e de comprimento N) é uma expressão da forma

$$a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N$$

onde a_0 é a representação decimal de um número natural ou nulo e, para $n = 1,2, \dots, N$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é um algarismo. Uma dízima finita representa um número racional, de acordo com a identidade

$$a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N = a_0 + a_1 \times \frac{1}{10^1} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + a_N \times \frac{1}{10^N}.$$

Neste ano letivo introduz-se a noção de «dízima infinita», uma expressão do tipo

$$a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$$

formada pela representação decimal a_0 de um número natural ou nulo e onde, após a vírgula, está representada uma sucessão (isto é, uma "sequência infinita") de algarismos $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, podendo ainda ser afetada de um sinal «–». Nesta Informação Complementar consideraremos apenas dízimas positivas.

Definir em que medida uma dízima infinita representa um número é um processo delicado. Uma primeira ideia consistiria em considerar que $a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$ representa uma "soma infinita" da forma

$$a_0 + a_1 \times \frac{1}{10^1} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + a_n \times \frac{1}{10^n} + \cdots$$

Contudo, adicionar uma infinidade de números corresponde matematicamente ao conceito de «série», fora do âmbito do programa do Ensino Básico e do Secundário. Trata-se, de facto, de uma noção difícil de definir e de manipular a este nível. Diga-se, a este propósito, que se não forem feitas certas hipóteses sobre os termos a adicionar, uma "soma infinita" pode até não gozar das propriedades mais elementares da adição, como a comutatividade ou a associatividade! Embora não seja o caso das séries associadas às dízimas infinitas, este facto dá ideia das dificuldades inerentes a esse novo conceito. Esta abordagem não pode, portanto, ser seguida.

Antes de definirmos de que forma se pode, de forma mais elementar, associar de facto uma dízima infinita a um número, recordemos alguns resultados já conhecidos desde o 1.º ciclo, envolvendo a aproximação de números racionais por dízimas, e que permitem motivar essa definição.

Utilizando o algoritmo da divisão para aproximar um número racional (*cf.* 1.1 e NO4-6.1 a NO4-6.5), as sucessivas aproximações podem nunca conduzir a um resultado exato.

Determina-se então por esse processo uma sucessão em que cada termo é uma dízima finita obtida da anterior acrescentando-lhe um algarismo à parte decimal. Ou seja, nesse caso, as aproximações constituem uma sucessão crescente (em sentido lato) da forma

$$a_0$$

$$a_0, a_1$$

$$a_0, a_1 a_2$$

$$\dots$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_N$$

$$\dots$$

A aproximação de comprimento N difere (por defeito) do número que se pretende aproximar menos que $\frac{1}{10^N}$, como veremos adiante .

Com esta motivação, diremos que a dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$ está associada a um dado número x se, para qualquer N, número inteiro não negativo, truncando a dízima após a ordem N (isto é, eliminando todos os algarismos da dízima infinita que se encontram após a_N), a dízima finita assim obtida aproxima x com um erro não superior a $\frac{1}{10^N}$:

$$0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N \leq \frac{1}{10^N}.$$

Ilustremos esta definição: a dízima infinita 0,333 … representa o número racional $x = \frac{1}{3}$ porque se tem

$0 \leq \frac{1}{3} - 0 \leq 1$; $\quad 0 \leq \frac{1}{3} - 0{,}3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30} \leq \frac{1}{10}$; $\quad 0 \leq \frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300} \leq \frac{1}{100}$;

$0 \leq \frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}$;…etc.,

podendo escrever-se desigualdades análogas independentemente da ordem da truncatura efetuada à dízima infinita 0,333 … .

É óbvio que este critério fica cumprido com uma dízima finita e o número que representa, se acrescentarmos uma sucessão constantemente igual a zero a essa dízima por forma a transformá-la numa dízima infinita.

É também fácil verificar que se uma dada dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ está associada tanto a x como a y, então, forçosamente $x = y$, ou seja, se uma dízima está associada a um número esse número fica determinado de maneira única, o que permite utilizar a própria dízima, sem qualquer ambiguidade, como uma nova forma de representação desse número. Diremos então, naturalmente, que a dízima *representa* o número, podendo escrever-se $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$.

Para efetuar essa verificação basta notar que, das desigualdades

$$0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N \leq \frac{1}{10^N} \ \ , \ \ 0 \leq y - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N \leq \frac{1}{10^N}$$

resulta, supondo que $x \leq y$ (se necessário trocando as designações dos números):

$$0 \leq y - x = y - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N\ - (x - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N) \leq y - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N \leq \frac{1}{10^N},$$

Então, se fosse $y - x > 0$, teríamos para todo o N, $10^N \leq \frac{1}{y-x}$, o que é absurdo, já que se teria então um majorante para o conjunto dos números naturais $\left(N < 10^N \leq \frac{1}{y-x}\right)$.

Mostremos então como o algoritmo da divisão, enquanto processo de obter aproximações de um número representado por uma fração $\frac{a}{b}$, permite justamente construir uma dízima que representa esse número. Para o efeito basta generalizar o argumento utilizado na Informação Complementar para o professor relativa a NO4-6.5, nesse caso apenas para uma aproximação até às centésimas. Para obter uma aproximação como dízima finita, com erro inferior a $\frac{1}{10^N}$, de um número racional representado por uma fração $\frac{a}{b}$, sendo q e r respetivamente o quociente e o resto da divisão inteira de $10^N \times a$ por b, comecemos por notar que:

$$\frac{a}{b} = \frac{10^N \times a}{b} \times \frac{1}{10^N} = \frac{b \times q + r}{b} \times \frac{1}{10^N} = \left(q + \frac{r}{b}\right) \times \frac{1}{10^N} = \left(q \times \frac{1}{10^N}\right) + \left(\frac{r}{b} \times \frac{1}{10^N}\right)$$

Como a fração $\frac{r}{b}$ é sempre própria (o resto é inferior ao divisor), a diferença entre $\frac{a}{b}$ e a aproximação obtida $q \times \frac{1}{10^N}$, dada por $\frac{r}{b} \times \frac{1}{10^N}$, é um número não negativo inferior a $\frac{1}{10^N}$. Ora os algarismos da representação decimal de $q \times \frac{1}{10^N}$ podem ser obtidos utilizando o algoritmo da divisão inteira de $10^N \times a$ por b, conduzindo a uma dízima finita da forma $a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N$, após o posicionamento da vírgula que resulta da divisão por 10^N. Como N é arbitrário, este processo conduz a uma sucessão de dízimas finitas, tendo a de ordem N exatamente N algarismos após a vírgula (parte decimal); além disso cada uma delas obtém-se por aplicação do algoritmo da divisão a um dividendo que difere do utilizado na ordem anterior apenas pelo acrescento de um zero à direita e mantendo o divisor. Sendo assim, a dízima na ordem N difere da anterior apenas pelo acrescento do algarismo dessa ordem após a vírgula, pelo que a sucessão de dízimas assim definida determina uma dízima ($a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N \dots$) finita ou infinita consoante o resto da divisão é ou não igual a zero em algum dos passos, verificando-se portanto para cada N

$$0 \le \frac{a}{b} - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N < \frac{1}{10^N}\ .$$

Tomando agora um número x representado na forma de uma dízima infinita, $x = a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$ os alunos poderão, em casos concretos (ver os Exemplos relativos ao descritor 1.5) efetuar as seguintes três manipulações algébricas, sem que se peça que as justifiquem:

1. Multiplicação e divisão por uma potência de 10

Fixado um número natural k e multiplicando, para cada $N \ge k$, todos os membros da cadeia de desigualdades $0 \le x - a_0, a_1 a_2 \dots\ a_N \le \frac{1}{10^N}$ por 10^k obtemos a cadeia equivalente de desigualdades (usando NO4-6.1):

$$0 \le 10^k \times x - a_0 a_1 a_2 \dots a_k, a_{k+1} \dots\ a_N \le \frac{1}{10^{N-k}}$$

A dízima finita $a_0 a_1 a_2 \dots a_k, a_{k+1} \dots\ a_N$ tem comprimento $N - k$, pelo que as desigualdades acima, verificadas para todos os valores de N não inferiores a k, significam que o número $10^k \times x$ é representado pela dízima infinita $a_0 a_1 a_2 \dots a_k, a_{k+1} \dots\ a_n \dots$

Assim, à multiplicação por 10^k corresponde um deslocamento de k casas para a direita da vírgula decimal:

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots\ \Rightarrow\ 10^k \times x = a_0 a_1 a_2 \dots a_k, a_{k+1} \dots\ a_n \dots$$

Ou seja, se um número racional x é representado por uma dízima $a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$ então a dízima $a_0 a_1 a_2 \dots a_k, a_{k+1} \dots\ a_n \dots$ representa o número racional $10^k \times x$. A recíproca também vale, já que acima foi estabelecida uma equivalência entre as cadeias de desigualdades; ou seja, à divisão por 10^k corresponde um deslocamento de k casas para a esquerda da vírgula decimal.

2. Separação de uma dízima infinita na soma de uma dízima finita com uma dízima infinita

Observando que $0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N} \Leftrightarrow 0 \leq (x - a_0) - 0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}$ podemos concluir que se o número x é representado pela dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ então o número $x - a_0$ é representado pela dízima infinita $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

Ou seja, $x - a_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ e portanto, como $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$,

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Raciocínio análogo permite observar que se pode "partir" uma dízima infinita em qualquer ordem:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 0{,}00 \dots 0 a_{k+1} a_{k+2} \dots$$

ou seja, se uma das dízimas $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ou $0{,}00 \dots 0 a_{k+1} a_{k+2} \dots$ representar um número racional então a outra também representa e vale a igualdade acima.

3. Subtração de dízimas

Como corolário da propriedade anterior, podemos concluir que partes decimais iguais a partir de certa ordem se anulam por subtração, obtendo-se assim uma dízima finita.

Dados dois números representados por dízimas infinitas iguais a partir de uma ordem k

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots \text{ e } y = b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k a_{k+1} \dots,$$

$$\begin{aligned} x - y &= a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots - b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} a_k a_{k+1} \dots \\ &= a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} + 0{,}00 \dots 0 a_k a_{k+1} \dots - (b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1} + 0{,}00 \dots 0 a_k a_{k+1} \dots) \\ &= a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} - b_0, b_1 b_2 \dots b_{k-1}. \end{aligned}$$

É relativamente fácil observar que o algoritmo da divisão apenas produz dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas. Com efeito, sabemos que, após cada divisão, o resto obtido é sempre inferior ao divisor. Assim, durante o cálculo da parte decimal do quociente e caso o algoritmo não termine (o algoritmo termina quando se obtém um resto nulo) ocorre obrigatoriamente a repetição de um resto parcial, ao fim de um número de iterações no máximo igual ao valor do divisor: a dízima obtida é periódica e o período tem um número de algarismos inferior ao divisor.

Inversamente, dada uma dízima infinita periódica, as manipulações algébricas efetuadas a propósito do descritor 1.5 (*cf.* Texto de Apoio, adiante), e que utilizam as três propriedades algébricas acima enunciadas, permitem obter sob a forma de fração um número racional que se verifica ser representado por essa dízima. Ou seja, qualquer dízima infinita periódica representa um número racional.

Desta forma, nesta fase, apenas podemos garantir que as dízimas finitas ou infinitas periódicas representam de facto números conhecidos (os números racionais) e que, inversamente, qualquer número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica.

Além disso, veremos em seguida que duas dízimas representando o mesmo número racional (com uma exceção que não afeta a conclusão seguinte) têm de ser constituídas por uma mesma parte inteira e iguais sucessões de algarismos após a vírgula (identificando as finitas com as infinitas de período «0»), pelo que dízimas infinitas não periódicas não podem representar números racionais. De facto, estes já admitem sempre uma representação como dízimas finitas ou infinitas periódicas, como acabámos de verificar. A interpretação das dízimas infinitas não periódicas como representações de números (de natureza distinta dos racionais) será tratada no segundo objetivo geral deste domínio.

Convém ainda salientar que a representação em dízima infinita periódica dos números racionais não é biunívoca (exceção atrás referida). Por exemplo, utilizando as operações algébricas justificadas acima e admitindo que $0,(9) = 0{,}999 \dots$ representa de facto um número racional (o que será justificado adiante, a propósito do descritor 1.5):

$$10 \times 0{,}999 \dots - 0{,}999 \dots = 9{,}99 \dots - 0{,}99 \dots = 9,$$

de onde se deduz que $9 \times 0{,}999 \dots = 9$ e portanto que $0{,}999 \dots = \frac{9}{9}$, ou seja

$$0{,}999 \dots = 1.$$

O mesmo processo permite mostrar que é possível representar qualquer dízima finita na forma de uma dízima infinita periódica de período 9 :

$$0{,}45 = 0{,}44(9) \ \ , \ 0{,}312 = 0{,}311(9) \ \ \dots\text{etc.}$$

Este é o único impedimento à unicidade da representação em dízima infinita periódica dos números racionais (identificando, como atrás foi referido, as dízimas finitas com as infinitas de período «0»). De facto, se k for a mais pequena ordem em que a representação de dois números x e y difere: $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots$ e $y = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k \dots$ $(a_k \neq b_k)$,

$x = y$
$\Leftrightarrow \ a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k \dots \Leftrightarrow a_k, a_{k+1} a_{k+2} \dots = b_k, b_{k+1} b_{k+2\dots}$

Denotando $z = a_k, a_{k+1} a_{k+2} \dots = b_k, b_{k+1} b_{k+2} \dots$, por definição da representação em dízima infinita, para qualquer número natural N:

$0 \leq z - a_k, a_{k+1} \dots a_{k+N} \leq \frac{1}{10^N}$ e $0 \leq z - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} \leq \frac{1}{10^N}$, de onde se deduz, supondo, sem perda de generalidade, que $a_k > b_k$:

$0 < a_k, a_{k+1} \dots a_{k+N} - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} =$

$$= z - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} - (z - a_k, a_{k+1} \dots a_{k+N}) \leq z - b_k, b_{k+1} \dots b_{k+N} \leq \frac{1}{10^N}$$

$$\Longrightarrow 0 < a_k a_{k+1} a_{k+1} \dots a_{k+N} - b_k b_{k+1} b_{k+1} \dots b_{k+N} \leq 1$$

$$\Longrightarrow a_k a_{k+1} a_{k+1} \dots a_{k+N} - b_k b_{k+1} b_{k+1} \dots b_{k+N} = 1$$

$$\Longrightarrow a_k a_{k+1} a_{k+1} \dots a_{k+N} = b_k b_{k+1} b_{k+1} \dots b_{k+N} + 1.$$

Esta última igualdade, uma vez que $a_k > b_k$, só é possível se $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = b_{k+N} = 9$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{k+N} = 0$ e $a_k = b_k + 1$ (veja-se a justificação adiante). A arbitrariedade de N garante então que $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ tem os algarismos todos nulos a partir da ordem $k+1$, ou seja, é equivalente à dízima finita $a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$ e $b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ é a dízima infinita periódica $a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k(9)$ onde $b_k = a_k - 1$, como pretendíamos provar. Ou seja, *quando duas dízimas representam o mesmo número racional e não têm os algarismos correspondentes todos respetivamente iguais então uma delas é uma dízima finita e a outra é a que se obtém diminuindo uma unidade ao último algarismo não nulo da dízima finita e fazendo seguir esse algarismo de uma sucessão de algarismos constantemente iguais a* 9.

Para verificarmos que da igualdade $a_k a_{k+1} a_{k+1} \dots a_{k+N} = b_k b_{k+1} b_{k+1} \dots b_{k+N} + 1$ com $a_k > b_k$ resulta, de facto, $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = b_{k+N} = 9$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{k+N} = 0$ e $b_k < 9$, $a_k = b_k + 1$, notemos que quando se adiciona uma unidade a um número natural, a respetiva representação decimal apenas se altera na ordem das unidades, a menos que o algarismo das unidades seja igual a «9», caso em que passa a ser «0» e, nesse caso, o da ordem seguinte é adicionado de uma unidade, se não for «9», e passa a «0» no caso contrário; repetindo este raciocínio tantas vezes quantas for necessário, conclui-se que o único caso em que há alteração no algarismo de maior ordem ocorre quando os restantes algarismos são todos iguais a nove e, nesse caso, passam todos a zero e o de maior ordem ou é adicionado de uma unidade, se não for «9», ou é substituído pelo grupo «10» se for «9». Esta última alternativa não pode ocorrer, com a hipótese feita, pois implicaria que uma das representações teria mais um algarismo que a outra.

Finalmente, pode observar-se que o algoritmo da divisão não produz dízimas infinitas de período «9». Com efeito, já referimos que tais dízimas representam sempre um número racional que pode ser alternativamente representado por uma dízima finita, ou seja, um número racional que pode ser representado por uma fração decimal. Ora, aplicando o algoritmo da divisão aos termos de uma fração equivalente a uma fração decimal, somos forçosamente conduzidos a um resto zero ao fim de um número finito de passos (*cf.* Informação Complementar para o professor, CA-1.º Ciclo, NO4-6.4); como seriam estes os únicos casos em que poderiam ocorrer dízimas de período «9», por aplicação do algoritmo da divisão, concluímos que tais dízimas nunca ocorrem nesse processo. Portanto, das duas alternativas para representação de um número racional por dízimas nos casos em que não há unicidade, o algoritmo da divisão conduz sempre à que não é infinita de período «9».

Exemplo

Considera os números racionais $\frac{12}{105}$ *e* $\frac{135}{300}$.

a. *Indica qual destes números admite uma representação em dízima finita.*
b. *Representa-os na forma de dízima finita ou infinita periódica.*

R.:

a. Em primeiro lugar vamos obter frações irredutíveis equivalentes às frações dadas:

$12 = 2^2 \times 3,\ \ 105 = 3 \times 5 \times 7$, logo $\frac{12}{105} = \frac{2^2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} = \frac{2^2}{5 \times 7}$.

O número racional $\frac{12}{105}$ não pode ser representado por uma dízima finita uma vez que o denominador da fração irredutível que o representa tem um divisor primo distinto de 2 e de 5 (o divisor 7).

$135 = 3^3 \times 5,\ \ 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, logo $\frac{135}{300} = \frac{3^3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 5^2} = \frac{3^2}{2^2 \times 5}$.

Nesta última fração, os únicos divisores primos do denominador são os números 2 e 5. A fração possui portanto uma representação em dízima finita.

b.

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
1 & 2, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\ 0\ 5 \\ \cline{10-10}
 & 1 & 5 & 0 & & & & & & 0,\ 1\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7 \\
 & 0 & 4 & 5 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & 3 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 9 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 6 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 7 & 5 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 1 & 5 &
\end{array}$$

Obteve-se o primeiro resto parcial repetido. O período mínimo é pois «142857»:
$\frac{12}{105} = 0{,}1(142857)$.

Relativamente à fração $\frac{135}{300}$, tem-se: $\frac{135}{300} = \frac{3^2}{2^2 \times 5} = \frac{3^2 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{45}{100} = 0{,}45$.

1.5 Para obter explicitamente uma fração equivalente a uma dada dízima infinita periódica pode começar por supor-se que esta representa, de facto, um número racional r, o que permite exprimir como dízima o produto de r por uma potência de 10 com expoente igual ao número de algarismos do período da dízima, subtraindo-se ao número assim obtido a dízima inicial; o resultado é uma dízima finita, que pode portanto ser expressa como fração. O número racional r pode agora também ser determinado sob a forma de fração, resolvendo a equação em r a que se chegou por este processo.

Como se supôs à partida que a dízima representa um número racional, o que não foi ainda provado, é necessário verificar que o número racional representado pela fração assim obtida é, de facto, representado pela dízima inicial, questão que será analisada na Informação Complementar para o professor mais adiante, neste mesmo texto de apoio. Este processo encontra-se ilustrado no exemplo seguinte. As operações aqui utilizadas estão justificadas na Informação Complementar para o professor relativa ao descritor anterior.

Exemplo

Representa na forma de fração os números racionais dados pelas seguintes dízimas periódicas:

a. $3,(4)$
b. $1,(45)$
c. $7{,}226(72)$
d. $0,(9)$

R.:

a. $10 \times 3,(4) - 3,(4) = 34{,}444\ldots - 3{,}444\ldots = 31.$

Mas $\quad 10 \times 3,(4) - 3,(4) = (10-1) \times 3,(4) = 9 \times 3,(4),$

pelo que $\quad 9 \times 3,(4) = 31$, ou seja, $3,(4) = \frac{31}{9}$.

b. $100 \times 1,(45) - 1,(45) = 145{,}4545\ldots - 1{,}4545\ldots = 144.$

$99 \times 1,(45) = 144$ ou seja, $1,(45) = \frac{144}{99}$.

c. $100 \times 7{,}226(72) - 7{,}226(72) = 722{,}6727272\ldots - 7{,}226727272\ldots =$
$= 722{,}672 - 7{,}226 = 715{,}446.$

$99 \times 7{,}226(72) = 715{,}446$ pelo que $7{,}226(72) = \frac{715{,}446}{99} = \frac{715446}{99000}$.

d. $10 \times 0,(9) - 0,(9) = 9{,}99\ldots - 0{,}99\ldots = 9.$

$9 \times 0,(9) = 9$ e $0,(9) = \frac{9}{9}$, ou seja, $0,(9) = 1$.

Informação Complementar para o professor

Como atrás foi referido, o processo utilizado para se obter explicitamente uma fração que representa o número racional que é também representado por uma dada dízima infinita periódica, parte do pressuposto de que um tal número existe. Assim, em rigor, tal processo apenas garante que se esse número existir tem de ser dado por determinada fração que se obtém de forma explícita. Ficou por provar que o número racional assim determinado é de facto representado pela dízima inicial, ou seja, que cumpre o critério para que a dízima infinita o represente. Para esse efeito comecemos por notar que basta analisar as dízimas infinitas periódicas da forma:

$$0,(a_1 \ldots a_k)$$

De facto, qualquer outra dízima periódica pode decompor-se na soma de uma dízima finita com o produto de uma dízima como esta por uma potência de $\frac{1}{10}$; então, as manipulações algébricas que foram justificadas na Informação Complementar para o professor relativa aos descritores 1.2 a 1.4 permitem concluir que se uma qualquer dízima da forma $0,(a_1 \dots\ a_k)$ representar um número racional, então qualquer dízima infinita periódica também o fará pois obtém-se de uma deste tipo utilizando as operações algébricas que acabámos de referir.

O processo que atrás utilizámos permite-nos concluir que o único número racional que poderá ser representado por $0,(a_1 \dots\ a_k)$ será:

$$\frac{a_1 \dots a_k}{10^k-1} = \frac{a_1 \dots a_k}{9 \dots 9}$$

(onde no denominador da segunda fração se representa uma sequência de k cópias do algarismo 9). Pretendemos assim mostrar que este número racional é, de facto, representado pela dízima $0,(a_1 \dots\ a_k)$; para o efeito temos de efetuar as estimativas adequadas para a diferença entre $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k-1}$ e as dízimas finitas que se obtêm de $0,(a_1 \dots\ a_k)$ por truncaturas de comprimentos sucessivamente maiores.

Comecemos com o caso da dízima $0,(9)$; para cada N, número inteiro não negativo, truncando $0,(9)$ depois da N-ésima casa decimal, obtém-se $0{,}9 \dots 9 = \frac{10^N-1}{10^N}$ (onde se pretende representar, no primeiro membro, a seguir à vírgula decimal, uma sequência de N cópias do algarismo 9). Então é fácil concluir que esta dízima representa de facto o número 1, pois:

$$1 - 0{,}9 \dots 9 = 1 - \frac{10^N - 1}{10^N} = \frac{1}{10^N}$$

Pelo que fica verificado o critério que justifica ter lugar essa representação.

Resta analisar os casos das dízimas $0,(a_1 \dots\ a_k)$ para as quais pelo menos um dos a_j ($j = 1, \dots, k$) é distinto do algarismo 9; nesse caso, em particular, $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k-1} < 1$ e podemos obter a representação de $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k-1}$ em dízima finita ou infinita periódica utilizando o algoritmo da divisão inteira (*cf.* Informação Complementar para o professor relativa aos descritores 1.2 a 1.4), começando por notar que o quociente da divisão inteira de $a_1 \dots\ a_k$ por $10^k - 1$ é, neste caso, 0 e o resto, evidentemente, $a_1 \dots\ a_k$, pelo que a representação em dízima será da forma $0, \dots$ e a determinação da parte decimal começa pela divisão inteira de $a_1 \dots\ a_k 0$ por $10^k - 1$. O que foi visto acerca deste algoritmo garante que multiplicando o numerador da fração por uma potência adequada de 10 de expoente não superior a k se obtém resto zero na correspondente divisão ou então há repetição de um resto parcial não nulo já obtido com um expoente menor e fica assim determinado o período dessa representação em dízima, que é nesse caso infinita periódica. Ora:

$$a_1 \dots\ a_k \times 10^k = a_1 \dots\ a_k \times (10^k - 1) + a_1 \dots\ a_k$$

sendo $a_1 \dots\ a_k < 10^k - 1$, atendendo à hipótese feita. A equação traduz portanto uma divisão inteira, cujo quociente e resto podem assim ser também obtidos aplicando o algoritmo da divisão a $\frac{a_1 \dots a_k \times 10^k}{10^k-1}$. Mas o resto agora obtido é igual ao dividendo inicial e portanto ao primeiro resto parcial (por se tratar de uma fração própria, como acima vimos) pelo que podemos parar o processo e concluir que os algarismos do quociente obtido nesta divisão se vão repetir indefinidamente na dízima que representa $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k-1}$, ou seja, $\frac{a_1 \dots a_k}{10^k-1} = 0,(a_1 \dots\ a_k)$ como pretendíamos.

1.6 Os procedimentos estudados permitem reconhecer que qualquer número racional não negativo pode ser representado por uma dízima não negativa finita ou infinita periódica e que, inversamente, qualquer dízima não negativa finita ou infinita periódica representa um número racional não negativo. Considerando também as dízimas afetadas de um sinal negativo, estes resultados estendem-se ao conjunto dos números racionais.

Este descritor diz essencialmente que se ignorarmos as dízimas de período «9», e se identificarmos as dízimas finitas com as infinitas cuja parte decimal é identicamente igual a zero a partir de certa ordem (ou seja, as de período «0»), esta correspondência é biunívoca. Uma justificação desta propriedade, ainda que informal, é no entanto difícil de obter neste nível de escolaridade, pelo que apenas pode ser exigido que os alunos conheçam o resultado (*cf.* Informação Complementar para o professor, 1.2, 1.3 e 1.4, para uma justificação completa).

1.7

Exemplo

Efetua a decomposição decimal do número racional $32{,}127$.

R.: $32{,}127 = 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}$.

1.12

Exemplo

Representa na reta numérica o número racional $1{,}1(6)$ *começando por representá-lo na forma de fração e em seguida como numeral misto.*

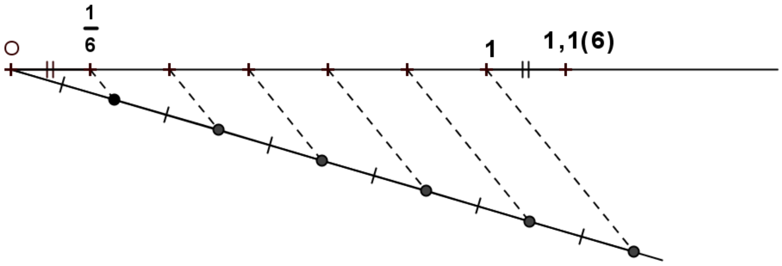
R.: Começamos por representar este número na forma de fração:

$$10 \times 1{,}1(6) - 1{,}1(6) = 11{,}666\ldots - 1{,}166\ldots = 11{,}6 - 1{,}1 = 10{,}5.$$

Desta forma, $9 \times 1{,}1(6) = 10{,}5$ pelo que $1{,}1(6) = \frac{10{,}5}{9} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$.

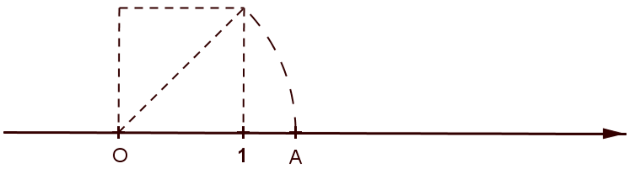
Representando a fração na forma de numeral misto, tem-se $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Para representar o ponto de abcissa $1{,}1(6)$ construímos então um segmento de reta de comprimento $\frac{1}{6}$ e justapomo-lo ao segmento de reta cujas extremidades são representadas pelos números 0 e 1 (ver GM7-4.14).



2.1

Neste descritor exibe-se pela primeira vez um ponto da reta numérica que não pode ser representado por um número racional, ilustrando-se assim uma limitação fundamental dos números racionais.



Considerando um ponto A da reta numérica tal que $\overline{OA}$ é igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, poderá utilizar-se a construção apresentada no descritor GM7-7.4 para argumentar que não existe nenhum número racional d igual à medida do comprimento de $[OA]$ (e, consequentemente, não existe um número racional que represente o ponto A na reta numérica). A igualdade $d^2 = 2$, que aí é explorada, poderá ser obtida de forma mais expedita caso já tenha sido estudado o Teorema de Pitágoras.

2.2
2.3
2.4
2.5

No primeiro objetivo geral deste domínio as dízimas infinitas periódicas foram interpretadas como representações de números racionais. É agora necessário explicar que sentido pode ser dado às dízimas infinitas não periódicas e em que medida representam também números.

É esse o intuito do presente descritor, que fornece uma interpretação geométrica de qualquer dízima, finita ou infinita, periódica ou não periódica. Pretende-se que esta construção seja feita em exemplos concretos:

Consideremos por exemplo o seguinte ponto A da semirreta numérica positiva:

Começamos por justapor, a partir da origem, segmentos de reta de medida de comprimento igual a $\frac{1}{10^0} = 1$ até que um deles contenha o ponto A.

Neste exemplo, o ponto A encontra-se entre os pontos de abcissa 2 e $2 + 1$, pelo que, com as notações do descritor, $a_0 = 2$.

Justapomos agora, a partir do ponto de abcissa 2, segmentos de reta de medida de comprimento igual a $\frac{1}{10} = 10^{-1}$.

O ponto A encontra-se situado entre os pontos de abcissa $2 + \frac{6}{10}$ e $2 + \frac{7}{10}$: tem-se $a_1 = 6$.

Repete-se este processo com segmentos de reta de medida de comprimento iguais a $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$ ...etc.
Vai-se assim construindo progressivamente uma dízima da forma $a_0, a_1 a_2$ ... No presente exemplo, esta dízima é igual a 2,6 ...

Esta dízima fica associada ao ponto A, podendo ocorrer uma de três possibilidades:

- O processo termina após um número finito de etapas, com a coincidência do ponto A com uma extremidade de um dos intervalos, obtendo-se portanto uma dízima finita. Neste caso, a dízima corresponde à fração decimal que representa o número racional abcissa de A.
- A dízima obtida é infinita periódica. Neste caso, a dízima representa o número racional abcissa de A.
- A dízima obtida é infinita não periódica. Neste caso A é um ponto irracional e a dízima deve ser interpretada como representação de um número, dito «número irracional», medida da distância entre a origem e A e que também designaremos por abcissa de A.

Para os pontos da semirreta negativa procederíamos de modo análogo, obtendo deste modo as abcissas de todos os pontos desta semirreta, representadas por dízimas finitas ou infinitas (periódicas ou não), afetadas de sinal «$-$», juntando-se assim os números irracionais negativos aos racionais negativos já nossos conhecidos. O próprio processo de construção da dízima associada a um ponto da reta numérica garante que pontos simétricos em relação à origem são representados por dízimas simétricas uma da outra (ou seja, que diferem apenas no sinal); em particular, o simétrico de um ponto irracional é um ponto irracional.

Informação Complementar para o professor

Também se prova, reciprocamente, que cada dízima, finita ou infinita, periódica ou não periódica, representa a abcissa de um ponto da reta numérica e que a correspondência assim estabelecida entre pontos da reta numérica e dízimas (afetadas ou não de sinal menos) é biunívoca, desde que se excluam as dízimas infinitas periódicas de período «9» e utilizando a interpretação acima referida das dízimas finitas como dízimas infinitas periódicas de período «0» (*cf.* texto de apoio ao descritor 1.6). Com efeito, no caso de uma dízima finita ou infinita periódica, sabemos construir geometricamente um ponto na reta numérica de abcissa igual ao número racional representado por essa dízima (1.12); se a dízima for infinita não periódica a respetiva truncatura de comprimento N é abcissa de um ponto P_N da reta, já que se trata de dízima finita. Obtemos assim uma sucessão $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de pontos na reta numérica tal que as distâncias entre P_m e P_n são números racionais que se tornam "tão pequenos quanto o desejarmos se n e m forem suficientemente grandes" (diz-se que a sucessão é «de Cauchy»). Qualquer axiomática adequada para a Geometria Euclidiana permite demonstrar que, em consequência, existe um ponto P na reta numérica para o qual os pontos P_N "convergem", no sentido em que as distâncias entre P_N e P se tornam "tão pequenas quanto o desejarmos desde que tomemos N suficientemente grande"; trata-se de propriedade estreitamente relacionada com o chamado «axioma de completude» que, em alguma das possíveis versões equivalentes, é essencial à caracterização do espaço da Geometria Euclidiana. Daí resulta facilmente que a abcissa de P é exactamente o número irracional representado pela dízima infinita não periódica dada, no sentido acima definido. Além disso, no quadro de uma tal axiomática, também é possível demonstrar que existe apenas um ponto da reta numérica com uma dada abcissa. Esta unicidade resulta da chamada «propriedade arquimediana» que pode formular-se dizendo que, fixada uma unidade de comprimento, qualquer segmento não degenerado (ou seja de extremos distintos) contém um segmento de medida de comprimento igual a $\frac{1}{n}$ para n suficientemente grande; daqui resulta, por exemplo, que, na reta numérica, o único ponto a uma distância da origem inferior a $\frac{1}{n}$ para todo o n é a própria origem, resultado que se estende a qualquer outro ponto da reta numérica. A propriedade arquimediana, em conjunto com a acima utilizada, que garante a existência do ponto P, limite da sucessão

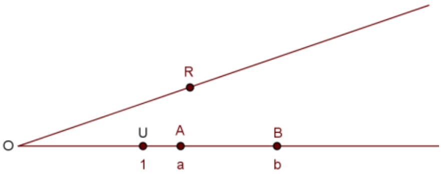
$(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ atrás construída, constitui uma das possíveis versões do referido axioma de completude.

2.7 Após se efetuarem as extensões mencionadas neste descritor, deverá notar-se que as funções lineares e afins, definidas no 7.º ano como funções de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, se estendem de forma natural a funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, já que apenas envolvem operações algébricas agora com sentido em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Neste exemplo ilustra-se um método geométrico para determinar o produto de dois números reais. Mais precisamente, dada uma reta numérica de origem O, e dois números reais positivos a e b, abcissas respetivamente de dois pontos A e B, pretende-se construir, nessa mesma reta, o ponto P de abcissa $a \times b$.

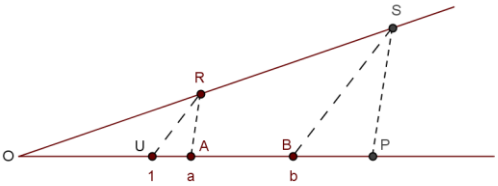
Com este fim, designemos por U o ponto de abcissa 1 e consideremos uma reta auxiliar OR distinta da reta numérica inicial.



a. Seja S a interseção de OR com a reta paralela a UR que passa por B. Mostra que $b = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$.

b. Seja P a interseção de OU com Mostra que $\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$.

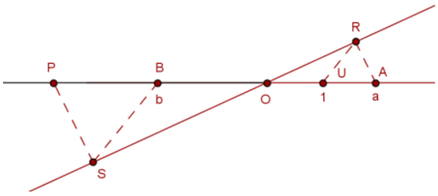
c. Deduz que $\overline{OP} = a \times b$.

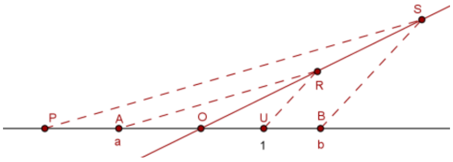


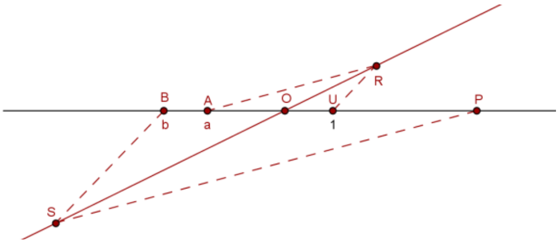
d. Utiliza este método geométrico para obter aproximadamente o valor do produto $3{,}8 \times 1{,}4$, começando por marcar, numa reta numérica com unidade igual a 1 centímetro, os pontos de abcissas $3{,}8$ e $1{,}4$ com o auxílio de uma régua graduada.

Observação

Na verdade, este método também é aplicável à situação em que a e b são dois quaisquer números reais, não necessariamente positivos, facto ilustrado nas três figuras seguintes.

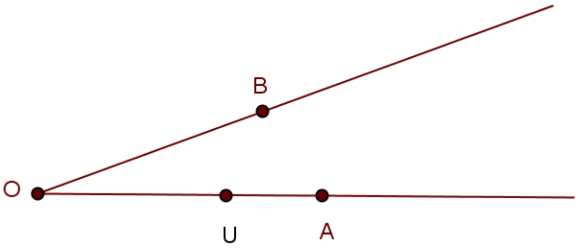




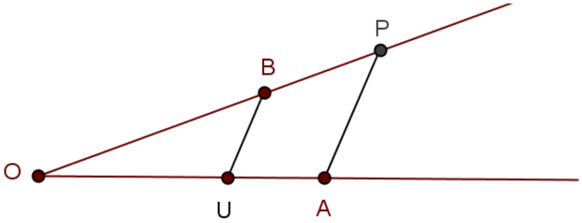


Exemplo

No livro A Geometria, Descartes preconiza um outro método para obter geometricamente o produto de dois números reais positivos a *e* b*. Com efeito, representa igualmente o ponto* A *de abcissa* a*, na reta numérica* OU *(em que* U *tem por abcissa* 1*) e* B*, de abcissa* b*, numa reta numérica distinta com a mesma origem* O *e a mesma unidade.*



Traçando agora a paralela a UB *que passa por* A*, o ponto de interseção desta reta c* OB*, designado por* P*, terá abcissa* $a \times b$*.*



Justifica este resultado.

2.8

Os alunos podem começar por recordar que na decomposição em fatores primos de um quadrado perfeito apenas figuram expoentes pares, o que terá sido visto no 7.º ano, a propósito do descritor GM7-7.4.

Exemplo

Considera os números naturais $n = 48$ *e* $m = 50$.

- *a.* *Decompõe* n *e* m *em fatores primos:*
- *b.* *Obtém a decomposição em fatores primos de* n^2 *e* m^2.

R.: a. $n = 48 = 2^4 \times 3$ e $m = 2 \times 5^2$

b. $48^2 = (2^4 \times 3)^2 = 2^{4\times2} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2$.

$50^2 = (2 \times 5^2)^2 = 2^2 \times 5^{2\times2} = 2^2 \times 5^4$.

Exemplo

Calcula a raiz quadrada dos seguintes números naturais começando por decompô-los em fatores primos:

- *a.* 2025;
- *b.* 32400.

R.:

a. $2025 = 3^4 \times 5^2 = (3^2 \times 5)^2 = 45^2$ logo $\sqrt{2025} = 45$.

b. $32400 = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 = (2^2 \times 3^2 \times 5)^2 = 180^2$ logo $\sqrt{32400} = 180$.

Exemplo*

Justifica que a decomposição em fatores primos de um quadrado perfeito apenas apresenta expoentes pares.

R.:
Um quadrado perfeito é um número da forma n^2, onde n é um número natural. Para o decompormos em fatores primos, podemos começar por decompor n em fatores primos e em seguida aplicar a regra de potências utilizada nos exemplos anteriores. Todos os expoentes serão multiplicados por 2, logo serão números pares.

Para reconhecer que $\sqrt{2}$ é um número irracional, podemos invocar o descritor GM7-7.4, já que o resultado a que se refere significa que não existem números naturais a e b tais que $\frac{a^2}{b^2} = 2$; ou seja, 2 não pode ser o quadrado de um número racional positivo. Como está expresso no descritor 2.7, existe um único número real positivo cujo quadrado é igual a 2 e que se designa por $\sqrt{2}$, mas, pelo que acabámos de ver, tal número não pode ser racional, ou seja, tem de ser irracional. Apresenta-se em seguida esse mesmo raciocínio aplicado à irracionalidade de $\sqrt{5}$.

Exemplo**

Mostra que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

R.: Se $\sqrt{5}$ fosse um número racional, ter-se-ia $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais. Desta forma, $5 \times b^2 = a^2$.
Todos os fatores primos de a^2 figuram com expoente par na respetiva decomposição. O mesmo acontece aos fatores primos de b^2. Assim, o expoente do fator primo 5 na decomposição de $5 \times b^2$ é um número impar, o que é absurdo, uma vez que $5 \times b^2 = a^2$. Daqui se conclui que $\sqrt{5}$ não pode ser escrito sob forma de fração, logo trata-se de um número irracional.

2.9

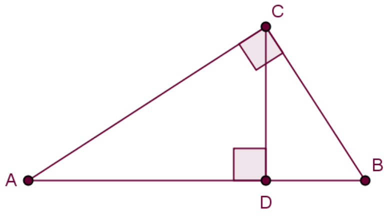
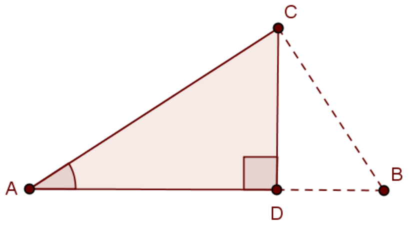
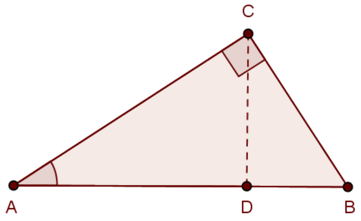
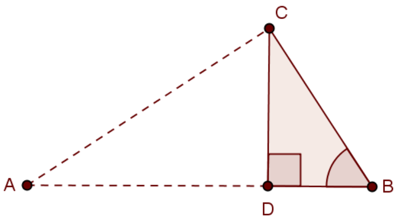
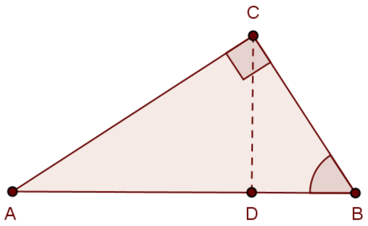
Exemplo*

Constrói um triângulo retângulo com um dos catetos coincidente com o segmento de extremos na origem O e no ponto R_1 de abcissa 1 de uma reta numérica e o outro cateto também unitário, e em seguida resolve as alíneas seguintes:

- a. *Utilizando um compasso, determina o ponto R_2 da reta numérica com abcissa igual à medida do comprimento da hipotenusa do triângulo.*
- b. *Constrói um triângulo retângulo com uma dos catetos coincidente com $[OR_2]$ e o outro unitário e, utilizando um compasso, determina o ponto R_3 da reta numérica com abcissa igual à medida do comprimento da hipotenusa do triângulo.*
- c. *Utiliza o processo que foi indicado nas alíneas anteriores para construires o ponto R_2 a partir de R_1 e o ponto R_3 a partir de R_2 por forma a obteres agora, sucessivamente, um ponto R_4 a partir de R_3 e um ponto R_5 a partir de R_4.*
- d. *Mostra que, para cada $n = 1,2,3,4,5$ o ponto R_n da reta numérica tem abcissa $\sqrt{n}$.*
- e. *Constrói numa reta numérica um ponto de abcissa $\sqrt{7}$.*

3.1	Tal como para os racionais, podemos agora dizer, estendendo a ordenação dos números a $\mathbb{R}$, que um número real x é maior do que um número real y ($x > y$) se o ponto de abcissa x pertencer à semirreta de sentido positivo com origem no ponto de abcissa y, ou, de maneira equivalente, se a semirreta de sentido positivo associada a x estiver contida na semirreta de sentido positivo associada a y. Desta caracterização resulta imediatamente que, se $x > y$ e $y > z$, então $x > z$ (propriedade transitiva), muito simplesmente pela transitividade da inclusão aplicada às semirretas de sentido positivo associadas aos referidos números. Além disso, dados números reais x e y, os pontos dos quais são abcissas, ou coincidem e, nesse caso, $x = y$, pelo que acima se viu (a abcissa de um ponto ficou bem definida), ou a semirreta de sentido positivo com origem num deles está contida na semirreta de sentido positivo com origem no outro, já que é essa a definição de semirretas com o mesmo sentido, quando têm a mesma reta suporte; mas isso significa que ou se tem $x > y$ ou $y > x$. Daqui resulta a chamada propriedade tricotómica: para quaisquer números reais x e y, ou $x = y$ ou $x > y$ ou $y > x$, podendo apenas ter lugar, em cada caso, uma destas relações.
3.2	A correspondência estabelecida entre números reais e pontos da reta numérica utilizando as representações em dízima revela que, dados dois números positivos, se tiverem partes inteiras distintas, é maior o que tem maior parte inteira e se tiverem partes inteiras iguais, é maior o que tiver maior o algarismo da maior ordem decimal em que as duas dízimas diferem (excluindo o caso das dízimas de período «9»), ou seja, em qualquer caso, para se compararem dois números reais dados através das respetivas representações em dízima e excluindo as representações em dízima de período «9» há que comparar sucessivamente os algarismos a partir do de maior ordem decimal até se encontrar uma ordem em que as dízimas difiram; então será maior o número para o qual o algarismo dessa ordem for maior. **Exemplo**** *Seja a o número real de parte inteira igual a 0 e parte decimal dada por uma sucessão envolvendo apenas os algarismos 1 e 0, começando por 1 e inserindo-se sucessivamente entre cada duas ocorrências do algarismo 1 um número de ocorrências do algarismo 0 começando em um e sucessivamente acrescentado de uma unidade (ou seja: $a = 0{,}101001000100001\ \ldots$).* *a. Será a um número racional? Porquê?* *b. Compara a com o número $b = 0{,}101001000100001(000001)$.* R.: a. A dízima que representa a não pode ser periódica; de facto suponhamos que o era e seja k o comprimento de um período. Pela definição do número a, na respectiva representação decimal, depois de certa ordem, que poderíamos escolher já posterior à primeira ocorrência do período, encontraríamos $2k$ zeros seguidos; mas isso obrigaria o período a ser constituído apenas pela repetição do algarismo zero k vezes, ou seja, a seria dado por uma dízima finita, o que manifestamente não acontece, já que o algarismo 1 ocorre na sucessão dos algarismos de a em ordens arbitrariamente grandes. Portanto a não é um número racional, ou seja, é um número irracional. b. Até ao algarismo anterior ao período da representação decimal de b esta coincide com a representação decimal de a; são também iguais, respetivamente,

	os algarismos que constituem a primeira ocorrência do período e os correspondentes da representação decimal de a, mas, na segunda ocorrência do período, o último algarismo é igual a 1, ao passo que os correspondentes algarismos da representação decimal de a são todos iguais a 0. Assim, $b > a$.

Descritor	Texto de apoio
1.1	Neste objetivo geral o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos são aplicados a uma partição do triângulo retângulo que por sua vez é utilizada para a demonstração do Teorema de Pitágoras. **Exemplo*** *O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e $[CD]$ é a altura do triângulo relativa à hipotenusa.* *a. Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ são semelhantes.* *b. Justifica que* $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$. *c. Justifica que* $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$  R.: a. Os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ são ambos retângulos, o primeiro por hipótese e o segundo porque $[CD]$ é a altura relativa a $[AB]$ e, por outro lado, o ângulo interno de vértice em A é comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos (GM7-4.10) pode concluir-se que os dois triângulos são semelhantes. b. A hipotenusa do triângulo $[ABC]$ corresponde à hipotenusa do triângulo $[ACD]$, ou seja, $[AB]$ corresponde a $[AC]$. O ângulo de vértice A é comum aos dois triângulos, logo os lados que se lhe opõem são correspondentes, ou seja, $[BC]$ corresponde a $[CD]$. Finalmente $[AC]$ corresponde a $[AD]$. Como, em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, tem-se que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$.   c. Os triângulos $[ABC]$ e $[CBD]$ são ambos retângulos, o primeiro por hipótese e o segundo porque $[CD]$ é a altura relativa a $[AB]$ e, por outro lado, o ângulo interno de vértice em B é comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos (GM7-4.10), os dois triângulos são semelhantes.  

A hipotenusa do triângulo $[ABC]$ corresponde à hipotenusa do triângulo $[CBD]$, isto é, $[AB]$ corresponde a $[BC]$. O ângulo de vértice B é comum aos dois triângulos, logo os lados que se lhe opõem são correspondentes, ou seja, $[AC]$ corresponde a $[CD]$. Finalmente $[BC]$ corresponde a $[BD]$. Como, em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, tem-se que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$.

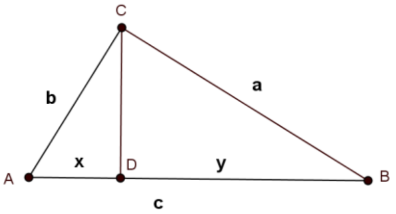
1.2

Apresenta-se neste descritor uma sugestão para a demonstração do Teorema de Pitágoras a partir da semelhança dos triângulos determinados pela altura relativa à hipotenusa. No Texto Complementar de Geometria indica-se a razão pela qual se optou por encarar o Teorema de Pitágoras como uma consequência do Teorema de Tales.

Esta demonstração deve ser trabalhada tendo presentes os resultados expressos no descritor anterior.

Exemplo*

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e $[CD]$ é a altura do triângulo relativa à hipotenusa. Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AD}$ e $y = \overline{DB}$.



a. Justifica que $b^2 = xc$.
b. Justifica que $a^2 = yc$.
c. Prova que $a^2 + b^2 = c^2$ tendo em conta as conclusões tiradas em a. e b. e as condições da figura.

R.:

a. Nesta situação geométrica sabemos que (descritor 1.1) $\frac{b}{c} = \frac{x}{b}$, de onde se conclui que $b^2 = xc$.

b. Analogamente, $\frac{a}{c} = \frac{y}{a}$, pelo que podemos concluir que $a^2 = yc$.

c. Uma vez que $a^2 = yc$ e $b^2 = xc$ então $a^2 + b^2 = yc + xc = (y + x) \times c = c \times c = c^2$, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$.

Observação: No exemplo acima, partiu-se do princípio de que o pé da perpendicular auxiliar considerado ficava situado no lado do triângulo, sendo distinto dos vértices; podemos facilmente justificar essa propriedade notando que outras posições para o pé da perpendicular conduziriam a um triângulo retângulo com um ângulo interno obtuso ou com um segundo ângulo interno reto, o que, como sabemos, é impossível.

1.3

É importante que os alunos saibam e reconheçam que também é válido o recíproco do Teorema de Pitágoras, ou seja, que se as medidas a, b e c dos lados de um triângulo verificarem a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$ então o triângulo é retângulo no vértice oposto ao lado de medida c. Considera-se que, neste ciclo, é oportuno explorar a diferença entre este resultado e o Teorema de Pitágoras.

Exemplo

Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\overline{AB} = 3\ cm$, $\overline{AC} = 4\ cm$ e $\overline{BC} = 5\ cm$. Mostra que $[ABC]$ é retângulo em A respondendo às seguintes alíneas.

a. Considera um triângulo $[A'B'C']$ retângulo em A' e tal que $\overline{A'B'} = 3\ cm$ e $\overline{A'C'} = 4\ cm$. Calcula $\overline{B'C'}$.

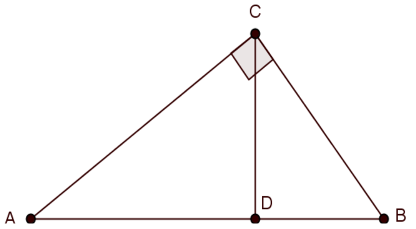
b. Justifica que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são iguais.
c. Conclui que $[ABC]$ é retângulo em A.

2.1

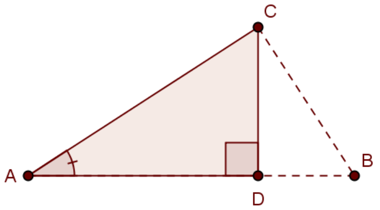
Exemplo*

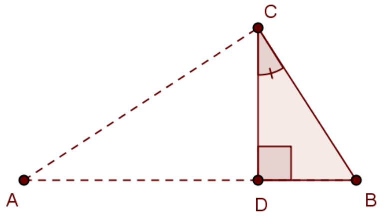
Dados dois números positivos a e c, designa-se por «meio proporcional entre a e c» o número positivo b tal que $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

Considera o triângulo $[ABC]$ retângulo em C. Prova que a altura $[CD]$ relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que nela determina ($[AD]$ e $[DB]$).



R.: Os triângulos $[ACD]$ e $[CBD]$ são ambos retângulos em D porque $[CD]$ é a altura relativa a $[AB]$. Por outro lado, $D\hat{A}C = D\hat{C}B$ pois são ângulos agudos de lados perpendiculares dois a dois (GM5-1.16). Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos (GM7-4.10), os dois triângulos são semelhantes e aos lados $[BD]$ e $[CD]$ do triângulo $[BCD]$ correspondem respetivamente os lados $[CD]$ e $[AD]$ do triângulo $[ACD]$.





Assim, $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ pelo que $\overline{CD}$ é o meio proporcional entre $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$.

Observação:

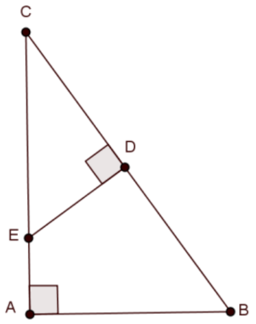
Na proporção $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ o número positivo b diz-se «meio proporcional» porque ocupa as posições designados por «meios» da proporção, ocupando a e c as posições designados por «extremos» .

Se a, b e c são números positivos tais que $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, tem-se que b é igual a $\sqrt{ac}$, expressão cujo valor também se designa por «média geométrica de a e c».

Exemplo

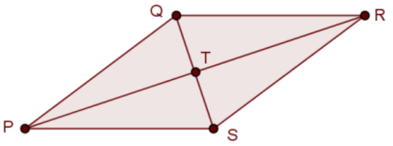
Na figura estão representados dois triângulos $[ABC]$ e $[EDC]$ retângulos respetivamente em A e em D, sendo E e D pontos respetivamente dos segmentos $[AC]$ e $[BC]$.

c. Justifica que os triângulos são semelhantes.
d. Supondo que $\overline{CB}=10cm$, $\overline{CE}=5cm$ e que $\overline{DE}=3cm$, determina:
  b_1. a razão de semelhança que aplica o triângulo $[CDE]$ no triângulo $[CAB]$.
  b_2. a medida de $\overline{CD}$.
  b_3. as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



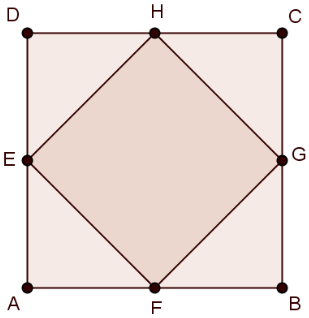
Exemplo

Considera um losango $[PQRS]$ de perímetro igual a $1\,m$ cujas diagonais se intersetam no ponto T. Sabendo que $[PT]$ tem $24\,cm$ de comprimento, determina a área do losango.



Exemplo*

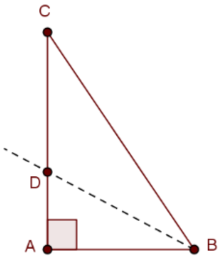
Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ e E, F, G e H, pontos médios respetivamente dos lados $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$.



a. *Mostra que $[EFGH]$ é um losango, começando por justificar a igualdade dos triângulos $[DEH]$, $[CHG]$, $[BGF]$ e $[AFE]$.*
b. *Mostra que $[EFGH]$ é um quadrado, começando por calcular a amplitude do ângulo EHG.*
c. *Decompõe o quadrado $[EFGH]$ através do traçado das respetivas diagonais e deduz o valor do quociente entre as áreas dos quadrados $[ABCD]$ e $[EFGH]$.*
d. *Supondo que o lado do quadrado $[ABCD]$ mede a cm, determina uma expressão para a medida de $\overline{EF}$ por dois métodos distintos:*
    d_1. utilizando a alínea c;
    d_2. aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[AEF]$.

Exemplo

Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A e a bissetriz $\dot{B}D$ do ângulo ABC.



a. *Supondo que $\overline{AB} = 8mm$ e $\overline{BC} = 10mm$, determina $\overline{AC}$.*
b. *Determina $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ utilizando a proporção $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, ou seja, que os segmentos que a bissetriz de um ângulo determina no lado oposto estão na mesma razão dos outros dois lados do triângulo.*

Observação: A Propriedade mencionada na alínea b foi provada, utilizando o Teorema de Tales, no Caderno de Apoio do 7.º ano (*cf.* GM7-6.1).

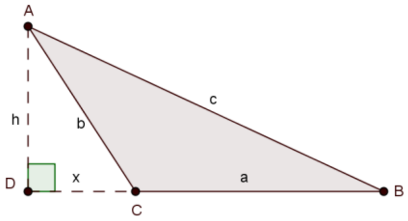
Dado um triângulo $[ABC]$, com lados de dimensões $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, o Teorema de Pitágoras e respetivo recíproco estabelecem uma equivalência entre o ângulo de vértice em C ser reto e a, b e c verificarem a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$. No exemplo seguinte mostra-se que, se o ângulo de vértice em C é obtuso (respetivamente agudo) tem-se $a^2 + b^2 < c^2$ (respetivamente $a^2 + b^2 > c^2$).
Afastada a situação em que o ângulo de vértice em C é reto ($a^2 + b^2 = c^2$), apenas existem duas possibilidades para o ângulo de vértice em C: ser agudo ou obtuso. Por esta razão, as implicações referidas têm como consequência também as implicações recíprocas, ou seja, obtêm-se equivalências.

Exemplo*

1. Considera um triângulo $[ABC]$ e sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Já se sabe que o ângulo de vértice em C é reto quando e apenas quando $a^2 + b^2 = c^2$. Se o ângulo de vértice em C for obtuso (respetivamente agudo), poderá deduzir-se qual dos números $a^2 + b^2$ e c^2 é maior?

Vais explorar os casos possíveis em cada uma das seguintes situações, considerando primeiro o caso em que o ângulo de vértice em C é obtuso e depois o caso em que é agudo.

1.1. Supõe que o ângulo de vértice em C é obtuso e traça a altura relativa a $[BC]$ que interseta o prolongamento desse lado no ponto D obtendo-se assim dois triângulos retângulos, $[ACD]$ e $[ABD]$. Considera $x = \overline{DC}$ e $h = \overline{AD}$.



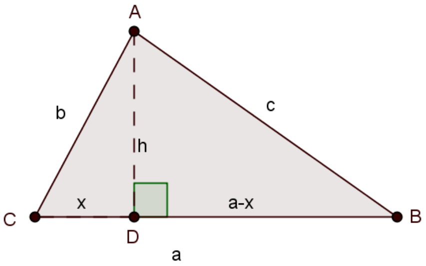
a. Tendo em conta o Teorema de Pitágoras, completa a igualdade $b^2 = \ldots$ e utiliza-a para obter uma expressão de $a^2 + b^2$ que apenas envolva a, h e x.

b. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABD]$ mostra que

$$c^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$$

c. Tendo em conta as igualdades obtidas nas alíneas anteriores, mostra que $c^2 > a^2 + b^2$.

1.2. Supondo que o ângulo de vértice em C é agudo, considera o ponto D, pé da perpendicular traçada de A para $[BC]$, e $x = \overline{CD}$.



a. Tendo em conta o Teorema de Pitágoras, completa a igualdade $b^2 = \ldots$ e utiliza-a para obter uma expressão de $a^2 + b^2$ que apenas envolva a, h e x.

b. Mostra, utilizando o Teorema de Pitágoras, que

$$c^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2.$$

c. Tendo em conta as igualdades obtidas nas alíneas anteriores, mostra que $c^2 < a^2 + b^2$.

R.:

1.1.

a. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ACD]$, $b^2 = x^2 + h^2$. Logo, $a^2 + b^2 = a^2 + x^2 + h^2$.

b. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se c^2= $(a + x)^2 + h^2 = a^2 + 2ax + x^2 + h^2$.

c. Comparando as expressões obtidas para $a^2 + b^2$ e c^2, como $2ax > 0$, conclui-se que $c^2 > a^2 + b^2$.

1.2.

a. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ACD]$, $b^2 = x^2 + h^2$. Logo, $a^2 + b^2 = a^2 + x^2 + h^2$.

b. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[ABD]$ tem-se

$$c^2 = (a - x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2.$$

c. Comparando as expressões obtidas para $a^2 + b^2$ e c^2, como $2ax > 0$, conclui-se que $c^2 < a^2 + b^2$.

Observações:

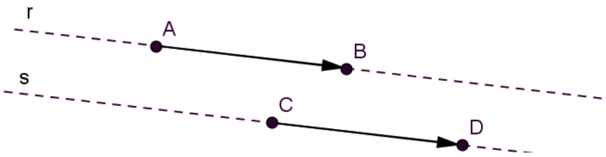
1. No exemplo acima, partiu-se do princípio de que o pé da perpendicular auxiliar considerado ficava, no primeiro caso, situado fora do lado do triângulo e no último no lado do triângulo, sendo distinto dos vértices; podemos facilmente justificar essa propriedade notando que outras posições para o pé da perpendicular conduziriam a um triângulo retângulo com um ângulo interno obtuso, o que, como sabemos, é impossível.
2. No exemplo anterior, alínea 1.2, no caso em que o ângulo de vértice em A é maior do que o ângulo de vértice em C (o que acontece, por exemplo, sempre que o ângulo em A é obtuso), o lado de comprimento a, que se lhe opõe, é maior do que o lado de comprimento c (GM5-2.15). Pode então obter-se de forma mais simples que $a > c$, o que implica que $a^2 > c^2$ (ALG7-2.1) e portanto que $a^2 + b^2 > c^2$.

3.5

Neste ano, após a introdução da noção de vetor, estudam-se finalmente os dois tipos de isometrias do plano sem ponto fixo, as translações e as reflexões deslizantes.

Exemplo

Considera duas retas distintas r e s e dois segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$ tais que $[AB]$ está contido em r e $[CD]$ está contido em s.

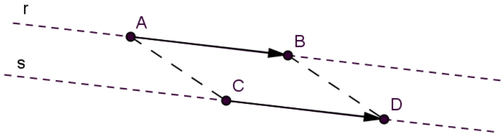


a. Justifica que se $[A,B]$ e $[C,D]$ forem equipolentes então $[ABDC]$ é um paralelogramo.

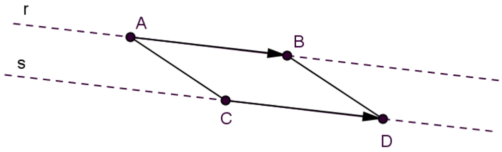
b. Justifica que se $[ABDC]$ é um paralelogramo então $[A,B]$ e $[C,D]$ são equipolentes.

R.: a. Se os segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$ forem equipolentes, então têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Como têm a mesma direção, o quadrilátero $[ABDC]$ tem os lados $[AB]$ e $[CD]$ paralelos; como têm o mesmo sentido, o quadrilátero $[ABDC]$ é simples, uma vez que os pontos B e D pertencem a um mesmo semiplano de fronteira AC, pelo que $[BD]$ não interseta $[AC]$. Assim, $[ABDC]$ é um trapézio. Finalmente, como $\overline{AB} = \overline{CD}$, $[ABDC]$ é um paralelogramo (GM7-2.24).



b. Dado que $[ABDC]$ é um paralelogramo então $[A,B]$ e $[C,D]$ têm a mesma direção e o mesmo comprimento já que são lados opostos de um paralelogramo.



Como AC e BD são paralelas, não se intersetam, pelo que B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC, ou seja, as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ têm o mesmo sentido, logo $[A,B]$ e $[C,D]$ são segmentos orientados com a mesma direção e o mesmo sentido.

Concluímos assim que os segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$ são equipolentes.

3.10

Exemplo*

Considera um ponto P e um vetor $\overrightarrow{AB}$. Prova que existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$, considerando os seguintes três casos possíveis:

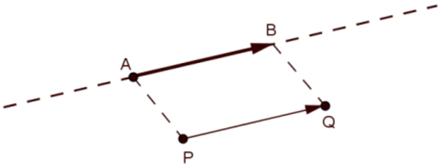
- *a. A e B não coincidentes e P não pertence à reta AB.*
- *b. A e B não coincidentes e P pertence à reta AB.*
- *c. A e B coincidentes.*

R.:

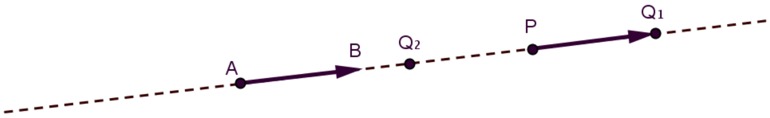
a. Dado que os pontos A, B e P não são colineares, a reta que passa por P e é paralela a AB interseta a reta que passa por B e é paralela a AP. Designando por Q o ponto interseção destas duas retas, $[ABQP]$ é por construção um paralelogramo e portanto $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

Reciprocamente, se $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$, $[ABQP]$ é um paralelogramo pelo que Q tem de coincidir com a interseção das retas acima referidas.

Logo, existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



b. Existem dois (e apenas dois) pontos Q_1 e Q_2 tais que $\overline{PQ_1} = \overline{PQ_2} = \overline{AB}$, um em cada semirreta de reta suporte AB e origem em P. Apenas para um deles (designemo-lo por Q) as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{P}Q$ têm o mesmo sentido, obtendo-se portanto que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



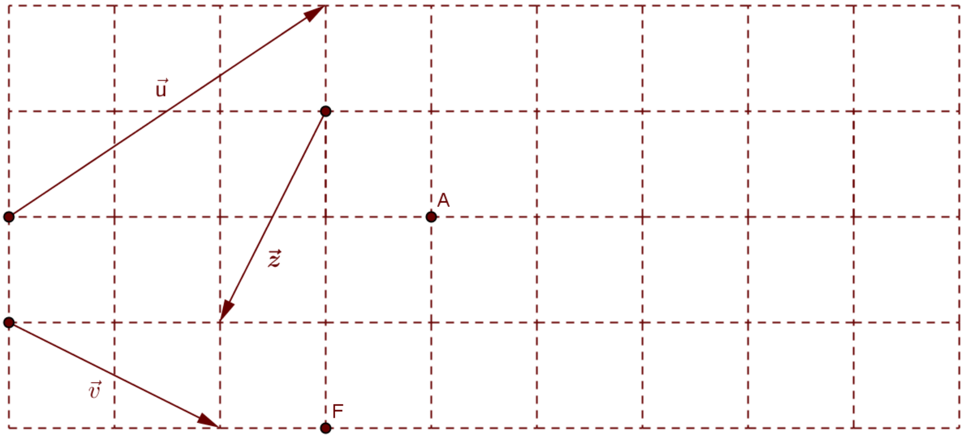
c. Se A e B são coincidentes, $\overrightarrow{AB}$ é o vetor nulo. O único ponto Q para o qual $\overrightarrow{PQ}$ é igualmente o vetor nulo, por definição, é o próprio ponto P.

Observação: O caso contemplado na alínea b. do exemplo anterior também poderia ter sido tratado recorrendo à alínea anterior, começando por considerar um ponto auxiliar P' fora da reta AB e utilizando duas vezes o resultado de a. (*cf.* TCG-3.10).

3.12
3.13
3.14

Exemplo

Na figura estão representados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$, através de segmentos orientados inscritos numa grelha quadriculada e dois vértices A e F dessa grelha.

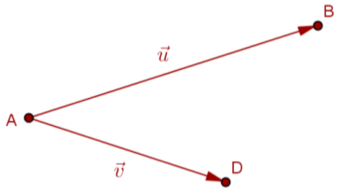


- *a.* *Determina o transformado de A pela translação de vetor $\vec{u}$ e designa-o por B.*
- *b.* *Determina o transformado de B pela translação de vetor $\vec{v}$ e designa-o por C.*
- *c.* *Qual o transformado de A pela composição das translações $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$?*
- *d.* *Representa o ponto G, transformado de F por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.*
- *e.* *Compara os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{FG}$ e identifica um vetor $\vec{w}$ tal que $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{w}}$.*
- *f.* *Representa o vetor $\vec{u} + \vec{z}$, associado à translação $T_{\vec{z}} \circ T_{\vec{u}}$.*

3.15
3.17

Exemplo

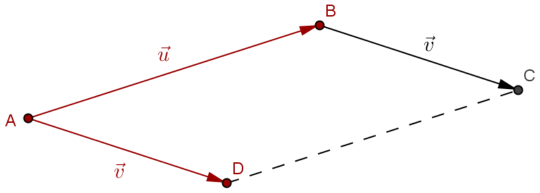
Na figura estão representados dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, através de segmentos orientados com a mesma origem.



- *a.* *Representa o ponto C, transformado de A pela translação de vetor $\vec{u} + \vec{v}$.*
- *b.* *Classifica o quadrilátero $[ABCD]$.*
- *c.* *Qual a imagem do ponto A pela translação de vetor $\vec{v} + \vec{u}$?*
- *d.* *Compara os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v} + \vec{u}$.*

R.:

a.

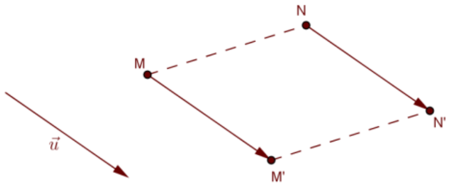


b. Sabemos que o ponto C é obtido como a extremidade do segmento orientado de origem B que representa o vetor $\vec{v}$, ou seja, que é equipolente ao segmento orientado $[A, D]$, pelo que $[ABCD]$ é um paralelogramo (3.5).

c. Por argumentos análogos aos da alínea anterior, designando por C' a imagem de A por $\vec{v}+\vec{u}$, $[ABC'D]$ é um paralelogramo. C' é pois a interseção da reta paralela a AD que passa por B com a reta paralela a AB que passa por D, ou seja, coincide com o ponto C.
d. Como as imagens de A pelas translações de vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{v}+\vec{u}$ coincidem, conclui-se que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, já que têm um representante comum de origem A.

3.18

A demonstração pedida é a seguinte:



Seja $\vec{u}$ um vetor e M e N dois pontos. Considerando M' e N' os transformados de M e N pela translação de vetor $\vec{u}$, sabemos que $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$. Logo $[MM'N'N]$ é um paralelogramo. Assim, $[M,N]$ e $[M',N']$ são equipolentes.

Do que precede, concluímos que a translação de vetor $\vec{u}$ é uma isometria ($\overline{MN}=\overline{M'N'}$) que preserva a direção e o sentido dos segmentos orientados.

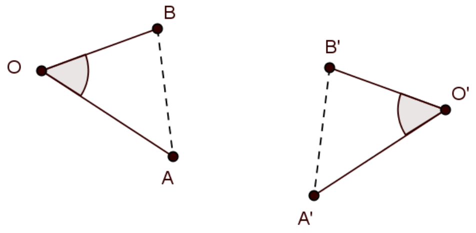
Observação 1: A prova apresentada, em rigor, não se aplica ao caso em que os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{MN}$ têm a mesma direção. Nessa situação, seria necessário argumentar de forma diferente. Supondo que $\vec{u}$ e $\overrightarrow{MN}$ têm a mesma direção, podemos considerar um qualquer vetor $\vec{v}$ não nulo com outra direção e observar que os transformados de M e N pela translação de vetor $\vec{u}$ podem obter-se pela aplicação sucessiva respectivamente a M e N das translações de vetores $\vec{v}, \vec{u}$ e $-\vec{v}$; aplicando a conclusão anterior às translações de vetor $\vec{v}+\vec{u}$ e $-\vec{v}$, concluímos que $[M,N]$ e o respetivo transformado pela translação de vetor $\vec{u}$ são ambos equipolentes a um mesmo segmento orientado e portanto são equipolentes entre si.

Observação 2: Com a definição dada no 6.º ano de segmento orientado, em rigor, deveríamos mostrar também que as translações transformam segmentos de reta em segmentos de reta, transformando extremos em extremos; tal propriedade é geral para as isometrias, como foi demonstrado no Texto Complementar de Geometria relativo ao 6º ano (observação final ao descritor 9.21), mas pode ser verificada de forma mais simples para translações, utilizando paralelogramos.

3.22

A justificação pedida é a seguinte:

Dado um ângulo AOB e os transformados A', O' e B' respetivamente dos pontos A, O e B por uma isometria, sabemos que $\overline{AO}=\overline{A'O'}$, $\overline{OB}=\overline{O'B'}$ e $\overline{AB}=\overline{A'B'}$. Pelo critério de igualdade de ângulos, os ângulos AOB e $A'O'B'$ têm a mesma amplitude.

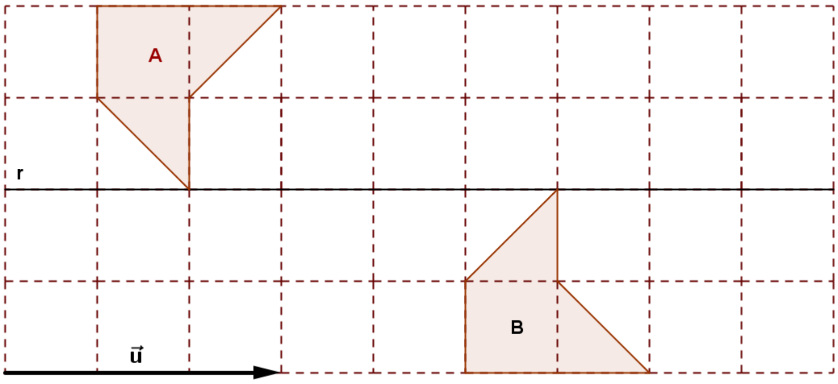


Note-se que este mesmo argumento já foi utilizado, no 2.º Ciclo, para mostrar esta mesma propriedade no caso particular das isometrias então estudadas (reflexões axiais, reflexões centrais e, mais geralmente, rotações).

4.1
4.2

Exemplo

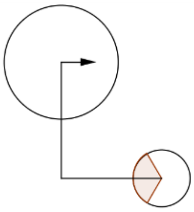
Na figura está representada uma grelha quadriculada onde foram desenhados dois pentágonos iguais A e B, uma reta r e um vetor $\vec{u}$ com a mesma direção da reta r.

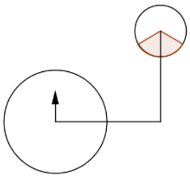


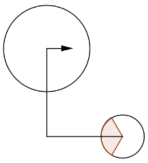
a. *Determina a imagem A' do pentágono A pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{u}$ e depois determina a imagem A'' do pentágono A' pela mesma reflexão deslizante.*
b. *Identifica uma isometria (reflexão, rotação, translação ou reflexão deslizante) que transforme o pentágono A em A''.*
c. *O pentágono B é o transformado de A pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{v}$. Identifica o vetor $\vec{v}$.*

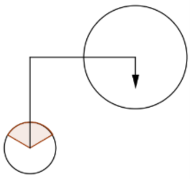
Exemplo

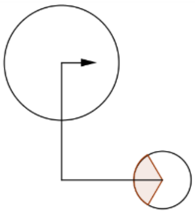
Considera, num mesmo plano, as seguintes 5 figuras

E


A


B


C


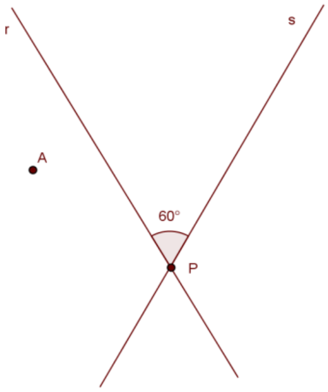
D


Qual das figuras A, B, C ou D pode ser a transformada de E por uma translação? Justifica a tua escolha.

Sabe-se que a composta de duas translações é uma translação (3.13) e pode provar-se que a composta de duas rotações com o mesmo centro é também uma rotação com o mesmo centro mas a composta de duas reflexões axiais não é uma reflexão axial, sendo uma translação no caso em que os eixos de reflexão são paralelos e uma rotação no caso em que os eixos se intersetam num ponto, que é o centro dessa rotação. Embora a demonstração destes teoremas esteja fora do âmbito desta abordagem elementar das isometrias feita no 8.º ano, podemos verificar em exemplos concretos estes factos tal como se sugere nos exemplos seguintes.

Exemplo

Na figura está representado um ponto A e duas retas r e s concorrentes em P, formando um ângulo de $60°$.



a. *Constrói o transformado do ponto A pela reflexão axial de eixo r e designa-o por A'.*

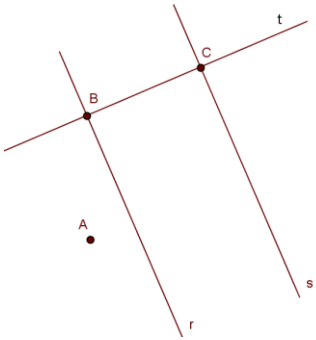
b. *Constrói o transformado do ponto A' pela reflexão axial de eixo s e designa-o por A''.*

c. *Justifica que $\overline{PA} = \overline{PA''}$ e que $A\hat{P}A'' = 120^0$.*

d. *Justifica que A'' é o transformado de A pela rotação de centro P, sentido negativo e amplitude 120^0.*

Exemplo

Na figura está representado um ponto A, duas retas paralelas r e s, uma reta t que lhes é perpendicular e que as interseta respetivamente em B e em C.



a. *Constrói o transformado do ponto A pela reflexão axial de eixo r e designa-o por A'.*

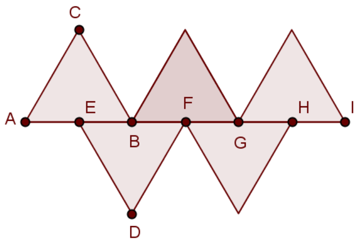
b. *Constrói o transformado do ponto A' pela reflexão axial de eixo s e designa-o por A''.*

c. *Justifica que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{BC}$.*

d.** *Mostra que o resultado da alínea anterior permanece válido seja qual for a localização do ponto A relativamente às retas r e s e identifica uma reflexão, rotação, translação ou reflexão deslizante que transforme qualquer ponto P do plano em que se situam as retas r e s no ponto P'' transformado de P pela aplicação sucessiva das reflexões axiais de eixos r e s .*

Exemplo

Na figura está representada uma figura composta por triângulos equiláteros iguais. Tem-se ainda que o ponto E é o ponto médio de $[AB]$ e os pontos A, B, F, G, H e I estão alinhados.

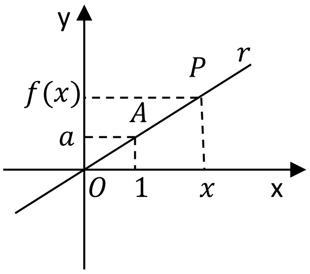
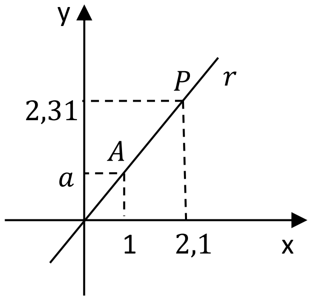


a. *Existe uma reflexão deslizante que transforma o triângulo $[ABC]$ no triângulo $[DEF]$. Identifica o eixo e o vetor associados a uma tal isometria.*

b. *Identifica uma reflexão deslizante que transforma o triângulo de lado $[AB]$ no triângulo de lado $[FH]$.*

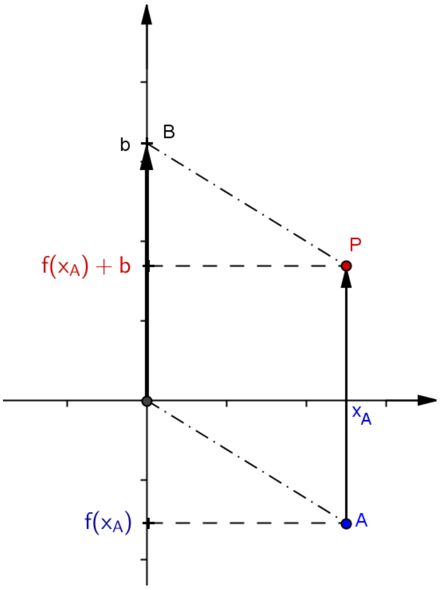
c. *Identifica o vetor que determina uma translação que transforma o triângulo de lado $[AB]$ no triângulo de lado $[GI]$.*

d. *Identificas algum eixo de simetria nesta figura? Justifica.*

Descritor	Texto de apoio
1.1	Apresenta-se em seguida a demonstração solicitada neste descritor. Por comodidade, poderá começar-se por tratar apenas o caso dos pontos do primeiro quadrante de uma reta de declive positivo o que dispensa a utilização do módulo. Consideremos um referencial cartesiano num plano e uma reta r não vertical que passa na origem do referencial. Por não ser vertical, r não é paralela a nenhuma reta vertical, pelo que interseta qualquer uma dessas retas em exatamente um ponto. Assim, para cada x em $\mathbb{R}$ existe um único ponto da reta r que tem x por abcissa. A reta r é portanto o gráfico de uma função f que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ a ordenada y do ponto de r de abcissa x.  Seja $a = f(1)$: Se $a = 0$, a reta r passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ do eixo das abcissas logo coincide com esse eixo e f é a função nula (função linear de coeficiente igual a $0 = f(1)$). Se $a \neq 0$, seja P um ponto qualquer da reta r, de coordenadas $\left(x, f(x)\right)$. Pelo Teorema de Tales, podemos afirmar que $\frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert a\rvert} = \frac{\lvert x\rvert}{1}$, o que é equivalente a $\lvert f(x)\rvert = \lvert a\rvert.\lvert x\rvert$. Assim, para cada x em $\mathbb{R}$, apenas existem duas possibilidades: $f(x) = ax$ ou $f(x) = -ax$. Se $a > 0$, a reta r passa na origem e por um ponto do primeiro quadrante, pelo que está contida nos primeiro e terceiro quadrantes (que são dois ângulos verticalmente opostos de vértice em O), pelo que x e $f(x)$ têm o mesmo sinal. Neste caso, $f(x) = ax$, para qualquer x em $\mathbb{R}$. Se $a < 0$, analogamente, a reta r está contida nos segundo e quarto quadrantes, pelo que x e $f(x)$ têm sinais contrários. Tem-se também nesta situação $f(x) = ax$. Desta forma, $f(x) = ax$, ou seja f é uma função linear sendo portanto o coeficiente $a = f(1)$ a constante de proporcionalidade entre a ordenada e a abcissa dos pontos da reta. Reciprocamente, dada uma função f linear, da forma $f(x) = ax$, acabámos de verificar que a reta determinada pelos pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(1, a)$, ou seja, a reta de declive a que passa pela origem, é o gráfico de f, pelo que o gráfico de f é de facto uma reta não vertical que passa pela origem. **Exemplo** *No referencial cartesiano da figura está representada uma reta r não vertical que passa na origem do referencial e no ponto P(2,1;2,31). Determina uma equação da reta* r utilizando o Teorema de Tales. 

1.2

Considerando as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ e tais que para todo x, $g(x) = f(x) + b$, onde b é um dado número real, vamos provar que o gráfico da função g se obtém do gráfico da função f por translação associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$ onde O é a origem do referencial, ou seja, o ponto de coordenadas $(0{,}0)$, e B é o ponto de coordenadas $(0, b)$.



Considerando um ponto A do gráfico de f de coordenadas $(x_A, f(x_A))$ então a imagem de A pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$ é o ponto $P = A + \overrightarrow{OB}$ de coordenadas (x_P, y_P) tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB}$. Em particular a reta AP é paralela à reta OB, ou seja, ao eixo dos yy, ou com ele coincidente, pelo que P e A têm a mesma abcissa: $x_P = x_A$. Por outro lado, as ordenadas y_A e y_P dos pontos A e P são os números que no eixo dos yy, considerado como reta numérica, estão associados aos pontos interseção deste eixo com as retas paralelas ao eixo dos xx que passam respectivamente pelos pontos A e P. Pela regra do paralelogramo, o segmento orientado de origem no primeiro destes pontos do eixo dos yy e extremidade no segundo é equipolente a $[A, P]$ e portanto a $[O, B]$. Atendendo agora à definição de soma de dois números racionais (NO6-3.3), estendida posteriormente aos números reais, e utilizando o eixo dos yy como reta numérica, $y_p = f(x_A) + b = f(x_P) + b = g(x_P)$ o que significa que P pertence ao gráfico de g.

Reciprocamente, observando que $f(x) = g(x) - b$, o resultado que acabámos de demonstrar permite concluir que se P for um ponto do gráfico de g então $A = P + \left(-\overrightarrow{OB}\right)$ é um ponto do gráfico de f, já que o vetor $\overrightarrow{OB'}$ onde B' é o ponto de coordenadas $(0, -b)$ é o simétrico de $\overrightarrow{OB}$ (têm o mesmo comprimento, a mesma direção e sentidos opostos). Então $P = P + \left(-\overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OB} = A + \overrightarrow{OB}$, de onde qualquer ponto do gráfico de g pode ser obtido por translação de vetor $\overrightarrow{OB}$ de um ponto do gráfico de f.

1.3

O gráfico de uma função linear definida por $f(x) = ax$ é uma reta r que passa na origem (1.1), logo o gráfico de uma função afim da forma $g(x) = ax + b = f(x) + b$ obtém-se a partir da reta r por uma translação (1.2), ou seja, é uma reta paralela a r cuja equação é portanto $y = ax + b$ (consequência imediata do resultado expresso no descritor GM8-3.19).

Reciprocamente, dada uma reta r não vertical que interseta o eixo das ordenadas no ponto $B(0, b)$, a reta imagem de r pela translação de vetor $\overrightarrow{BO}$ passa pela origem (já que a imagem do ponto B é por definição o ponto O). Trata-se pois do gráfico de uma função linear f, dada portanto por uma expressão da forma $f(x) = ax$. Observando que a reta original r se obtém do gráfico de f por translação de vetor $\overrightarrow{OB}$, o resultado mencionado no descritor 1.2 garante que r é o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x) + b = ax + b$, que é uma função afim.

1.4

Exemplo**

Considera duas retas r e s não verticais que, num referencial cartesiano, têm equação respetivamente $y = ax + b$ e $y = cx + d$. Prova que r e s são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

R.: Para provar esta propriedade, teremos de provar duas afirmações.

- Se as retas não verticais r e s têm o mesmo declive então são paralelas.
- Se as retas não verticais r e s são paralelas então têm o mesmo declive.

Para provar a primeira afirmação, suponhamos que as retas têm o mesmo declive, ou seja, $a = c$. Então, de acordo com 1.2, estas retas podem obter-se por translação de uma mesma reta de equação $y = ax$, pelo que são paralelas. Em alternativa, podemos observar que a reta s se obtém da reta r por translação de vetor $\overrightarrow{OC}$, onde $C(0, d-b)$, já que $ax + b + (d - b) = ax + d$.

Para provar a segunda afirmação basta considerar as funções f e g dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. De acordo com 1.2, o gráfico da função f obtém-se por translação do gráfico da função $h(x) = ax$ e o gráfico de g obtém-se por translação do gráfico da função j definida por $j(x) = cx$. Como as retas r e s são paralelas então também as retas de equação $y = ax$ e $y = cx$ o são e como têm um ponto em comum (a origem) são coincidentes, pelo que $a = c$, o que quer dizer que as retas r e s têm o mesmo declive.

1.5
1.6

Dado um plano munido de um referencial cartesiano, uma reta vertical é por definição uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Uma tal reta é constituída pelos pontos com uma mesma abcissa (pela própria definição de abcissa).

Exemplo**

Considera uma reta definida pelos pontos A e B de coordenadas respetivamente (x_A, y_A) e (x_B, y_B).

a. *Prova que a reta AB é não vertical quando e apenas quando $x_B \neq x_A$.*
b. *Justifica que se uma reta é não vertical então o seu declive é igual a $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.*

R.:

a. Se $x_A \neq x_B$, a reta AB tem pontos com abcissas distintas, logo não é vertical. Por outro lado, se $x_A = x_B$, a reta AB tem dois pontos em comum com a reta vertical formada pelos pontos de abcissa x_A, coincidindo portanto com essa reta.

b. Por 1.3, a reta não vertical AB tem uma equação da forma $y = ax + b$, onde a e b são números reais. Em particular, $y_A = ax_A + b$ e $y_B = ax_B + b$, de onde se conclui que $y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$. Então podemos dividir ambos os membros da igualdade pela expressão $x_B - x_A \neq 0$ (já que $x_B \neq x_A$) obtendo-se $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ sendo a o declive da reta AB.

Exemplo* (1.5)

Considera os pontos $A(2,4)$ e $B(6,7)$. Justifica que determinam uma reta não vertical e calcula o declive da reta AB.

R.: A reta AB não é vertical pois passa por dois pontos com diferentes abcissas, não sendo portanto paralela ao eixo dos yy, pelo que tem equação da forma $y = ax + b$, sendo o declive dado pelo valor de a. Como o ponto A pertence à reta AB então as suas coordenadas satisfazem a equação da reta logo $4 = a.2 + b$ e como B também pertence à reta então $7 = a.6 + b$.

Subtraindo as duas equações membro a membro, obtém-se:

$$7 - 4 = \ a.6 - \ \mathrm{a}.2 = \mathrm{a}(6-2) \Leftrightarrow a = \frac{7-4}{6-2} = \frac{3}{4}.$$

Outro processo para determinar o declive consistiria em resolver ambas as equações em ordem a b, tendo-se então:

$$4 - 2a = b \text{ e } 7 - 6a = b$$

logo

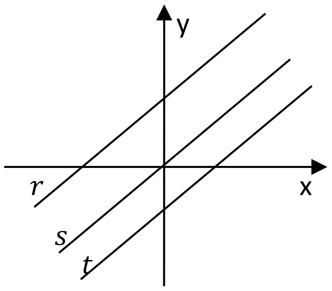
$$4 - 2a = 7 - 6a \Leftrightarrow -2a + 6a = 7 - 4 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

2.3

Exemplo (1.2)

Na figura estão representadas três retas paralelas r, s e t que representam graficamente três funções respetivamente f, g e h.

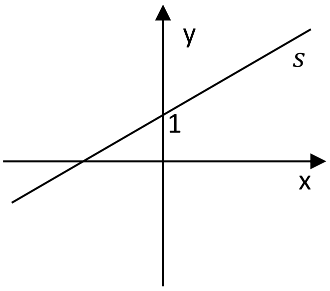
Sabendo que a função g se define algebricamente por $g(x) = 0{,}8x$, que a reta r passa no ponto $R(0; 1{,}2)$ e que a reta t passa no ponto $T(0; -0{,}6)$, indica uma expressão algébrica para cada uma das funções f e h.



Exemplo (1.3)

Na figura está representada uma reta s, gráfico da função f, com declive $\frac{1}{2}$ e que interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0{,}1)$.

Indica uma expressão algébrica para a função f.



Exemplo (1.4)

Considera as seguintes retas dadas pelas respetivas equações

reta r: $y = 2x + 5$; reta s: $y = -2x + 7$; reta t: $y = 2x + 3$; reta v: $y = 1 - 2x$

Determina todos os pares possíveis de retas paralelas que se podem formar com estas retas.

Exemplo (1.5)

Indica dois pontos de entre $A(2{,}3)$, $B(4{,}5)$ e $C(2{,}7)$ que determinem uma reta não vertical e justifica.

Exemplo (1.5 e 1.6)

Determina o declive da reta EF sabendo que, num determinado referencial ortogonal e monométrico, se tem:

$a. E(2{,}5)$ e $F(4{,}5)$.

$b. E(2{,}5)$ e $F(-3{,}3)$.

Exemplo* (1.1 e 3.1 de FSS7)
Prova que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem do referencial.

R.: De acordo com FSS7-3.1, uma função de proporcionalidade direta é igual no seu domínio a uma função linear que se define algebricamente por $f(x) = ax$. De acordo com 1.1 os gráficos das funções lineares são retas não verticais que passam na origem do referencial. Assim, podemos concluir que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem.

Exemplo
Considera, num referencial cartesiano, os pontos $A(a, 2)$, $B(3, a)$ e $C(7,5)$ sendo a um número real.

a. *Sabendo que a reta AB é vertical qual é o valor de a?*
b. *Haverá algum valor de a para o qual a reta BC seja vertical? Porquê?*
c. *Supondo que a reta AC é vertical, indica uma equação para essa reta.*

Descritor	Texto de apoio
1.1 1.2	Até ao momento não se definiu a^{-n} quando n é um número natural ou nulo. Pretende-se uma definição que conserve a propriedade $$a^{m+n} = a^m \times a^n$$ no caso de m e n serem inteiros relativos. **Exemplo** (definição de a^o) a. Que valor deve ser atribuído a 5^0 por forma a que seja válida a igualdade $$5^{0+3} = 5^0 \times 5^3 \text{ ?}$$ b.* De forma mais geral, dado um número não nulo a, quanto deve valer a^0 por forma a que para todo o inteiro natural n se tenha $$a^{0+n} = a^0 a^n \text{ ?}$$ **Exemplo** (definição de a^{-n}, n número natural) a. Que valor deve ser atribuído a 7^{-2} por forma a que seja válida a igualdade $$7^{2+(-2)} = 7^2 \times 7^{-2} \text{ ?}$$ b.* De forma mais geral, dado um número não nulo a e um inteiro natural n, quanto deve valer a^{-n} por forma a que se tenha $$a^{n+(-n)} = a^n a^{-n} \text{ ?}$$
1.3	Tendo em conta as definições que constam nos dois descritores anteriores, os alunos deverão reconhecer que se mantêm válidas, para potências de expoente inteiro, as propriedades descritas em ALG 6-1.4,1.6 ,1.7 e 1.8.
2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8 2.9	Uma das dificuldades na manipulação de monómios prende-se com o facto de, à imagem das variáveis, os coeficientes poderem igualmente envolver letras, neste caso representando valores numéricos constantes. Sugere-se, numa fase inicial, que se designe por t, x, y, w, z … as variáveis e por $a, b, c, d,$ … valores numéricos representados por letras, envolvidos nos coeficientes. Nos exemplos que se seguem, quando não houver indicação em contrário, para efeito de determinar a parte literal dos monómios, adotar-se-á para as variáveis a ordem alfabética. **Exemplo** *Indica a parte numérica, a parte literal e o grau de cada um dos seguintes monómios* *a.* $4x^2$*, variável* x. *b.* $37y^3$*, variável* y. *c.* $3ax^4$*, variável* x*,* a *número real não nulo.* *d.* $2yx^2y^2$*, variáveis* x *e* y. *e.* $3c$*,* c *número real não nulo.* *f.* $21ax^2b^2cx^2y^5$*, variáveis* x *e* y*,* a*,* b *e* c *números reais não nulos.*

R.:

alínea	monómio	parte numérica	parte literal	grau
a.	$4x^2$	4	x^2	2
b.	$37y^3$	37	y^3	3
c.	$3ax^4$	$3a$	x^4	4
d.	$2yx^2y^2$	2	x^2y^3	5
e.	$3c$	$3c$	não tem	0
f.	$21ax^2b^2cx^2y^5$	$21ab^2c$	x^4y^5	9

Exemplo

Indica uma forma canónica para cada um dos seguintes monómios e identifica os que são semelhantes e os que são iguais:

a. $3xyx^2$*, variáveis* x *e* y*.*
b. $37zxxy^3$*, variáveis* x, y *e* z*.*
c. $3ayx^3$*, variáveis* x *e* y*,* a *número real não nulo.*
d. $2y^2xy^3$*, variáveis* x *e* y*.*
e. $\frac{c}{5}$*,* c *número real não nulo.*
f. $37xzyxy^2$*, variáveis* x, y *e* z
g. $13{,}4$*.*

R.:

alínea	monómio	forma canónica	Igual a	Semelhante a
a.	$3xyx^2$	$3x^3y$	-	c.
b.	$37zxxy^3$	$37x^2y^3z$	f.	f.
c.	$3ayx^3$	$3ax^3y$	-	a.
d.	$2y^2xy^3$	$2xy^5$	-	-
e.	$\frac{c}{5}$	$\frac{c}{5}$	-	g.
f.	$37xzyxy^2$	$37x^2y^3z$	b.	b.
g.	$13{,}4$	$13{,}4$	-	e.

2.10
2.11
2.12

Tal como nos exemplos anteriores, poderá, salvo menção em contrário, adotar-se a ordem alfabética para ordenar as variáveis de um dado monómio.

Exemplo

Nos monómios seguintes, as variáveis designam-se por x*,* y *e* z *e as constantes por* a*,*b *e* c*.*

Escreve na forma canónica o produto dos seguintes monómios e, caso os monómios sejam semelhantes, determina igualmente a respetiva soma.

a. $3x^2$ *e* $7x^3$*;*
b. $2y$ *e* $5ay$*;*
c. $4x^2y$ *e* $8yx^2$*;*
d. $12abcx^2y^3z^4$ *e* $3ba^2xyz$*.*
e. $(3+2b)x^2$ *e* $7axy$*.*

R.:

a. $3x^2 \times 7x^3 = 3 \times 7 \times x^5 = 21x^5$;
b. $2y \times 5ay = 2 \times 5a \times y^2 = 10ay^2$;
Os monómios são semelhantes: $2y + 5ay = (2+5a)y$.

	c. $4x^2y \times 8yx^2 = 4 \times 8 \times x^4y^2 = 32x^4y^2$; Os monómios são semelhantes: $4x^2y + 8yx^2 = 12x^2y$. d. $12abcx^2y^3z^4 \times 3ba^2xyz = 12abc \times 3ba^2 \times x^3y^4z^5 =$ $= 36a^3b^2cx^3y^4z^5$. e. $(3+2b)x^2 \times 7axy = (3+2b) \times 7a \times x^3y = 7a(3+2b)x^3y$.
2.13 2.14	Trata-se aqui simplesmente de reconhecer que a soma algébrica e o produto de monómios anteriormente definidos são coerentes com o valor numérico das diferentes expressões uma vez concretizadas as variáveis. São propriedades bastante óbvias, uma vez que as operações e o conceito de igualdade entre monómios foram definidos tendo esse fim em vista, levando em conta as propriedades algébricas da multiplicação e das potências. Deve-se no entanto chamar a atenção para estes factos simples uma vez que legitimam as operações apresentadas. Por exemplo, observando a igualdade $$8xy \times 2x^3y^2 = 16x^4y^3$$ poderão atribuir-se diferentes valores às variáveis e observar que se obtêm dessa forma igualdades verdadeiras, o que se pode prever com toda a generalidade, aplicando simplesmente as propriedades comutativa e associativa da multiplicação e a regra para o produto de potências com a mesma base.
3.3 3.4 3.5 3.6 3.7	**Exemplo** *Obtém uma forma reduzida de cada um dos seguintes polinómios (variáveis x e y), indicando o respetivo grau e identificando duas alíneas em que se representem polinómios iguais:* *a.* $3x^2 + 8 + 5x - 13x^2 + 7$; *b.* $3x^2y^2 + 4x + 4xy - x^2y^2 + y^2 + 2xy + x - 2x^2y^2$; *c.* $3ax^2 + 2by - y^2 - 3by + ax^2$; *d.* $2x^2y^2 + 5x + 3xy - x^2y^2 + y^2 + 3xy - x^2y^2$; *e. Polinómio soma dos representados nas alíneas b. e c.*
3.8 3.9	Tal como para as operações com monómios, as operações com polinómios e o conceito de igualdade de polinómios são definidos, levando em conta as propriedades algébricas das operações de adição e multiplicação e as regras para operar com potências, com o objetivo de garantir que as igualdades envolvendo resultados dessas operações se mantêm quando se substituem as variáveis por números. Assim, por exemplo, a definição de produto de polinómios traduz simplesmente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, pelo que o produto de números obtidos pela substituição das variáveis de dois polinómios por valores numéricos concretos será sempre igual ao valor obtido pela substituição pelos mesmos valores das variáveis do polinómio produto, como se prova aplicando a referida propriedade e o que já se sabe acerca do produto de monómios.
3.10	Uma vez que está definido o produto de polinómios, podemos utilizar a notação das potências de expoente natural para representar o produto de certo número de fatores polinomiais iguais entre si. Pretende-se então que os alunos provem as igualdades:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
e
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Tendo em conta o presente objetivo geral, pretende-se que os alunos elaborem demonstrações algébricas, utilizando as definições das operações e o conceito de igualdade entre polinómios; por exemplo:

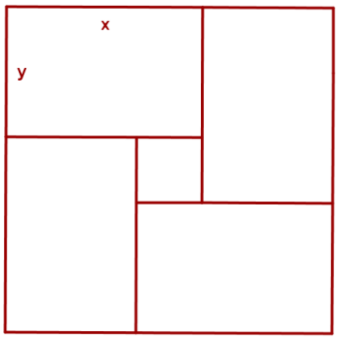
$$(x+y)^2 = (x+y)\times(x+y) = x\times x + x\times y + y\times x + y\times y =$$
$$= x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

No entanto, o professor poderá também apresentar construções geométricas que ilustrem estas igualdades, proporcionando assim aos alunos uma compreensão mais ampla do seu significado.

4.1

Exemplo*

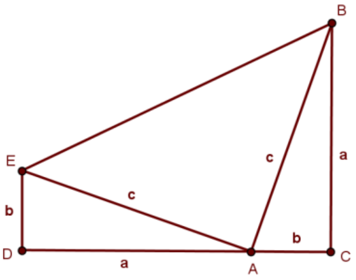
Na seguinte figura um quadrado de lado $x+y$ foi dividido em quatro retângulos iguais e um quadrilátero central.



a. *Justifica que o quadrilátero central é um quadrado e indica uma expressão para o lado desse quadrado como um polinómio de variáveis x e y.*
b. *Exprime a área dos retângulos e do quadrado central através de polinómios nas variáveis x e y.*
c. *Utilizando a alínea anterior, mostra que $(x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2$.*
d. *Prova algebricamente a igualdade da alínea anterior.*

Exemplo*

Na figura estão representados dois triângulos $[ABC]$ e $[DEA]$, retângulos respetivamente em C e em D, de tal forma que os pontos D, A e C estão alinhados e tais que $\overline{DA} = \overline{CB} = a$, $\overline{DE} = \overline{AC} = b$ e $\overline{AE} = \overline{AB} = c$.



a. *Justifica que o triângulo $[EAB]$ é retângulo.*
b. *Exprime a área de cada um dos triângulos através de polinómios nas variáveis a, b e c e determina a respetiva soma designando-a por A_1.*
c. *Justifica que os três triângulos formam um trapézio retângulo $[EBCD]$~~e~~, exprime a área desse trapézio através de um polinómio nas variáveis a e b~~,~~ e designa-o por A_2.*
d. *Levando em conta os resultados das alíneas anteriores e sem utilizares o Teorema de Pitágoras prova que $a^2 + b^2 = c^2$.*

Exemplo

Se três números naturais m*,* n *e* p *verificarem a igualdade* $m^2 + n^2 = p^2$ *diz-se que* (m, n, p) *é um terno pitagórico.*

a. *Mostra que se* (m, n, p) *é um terno pitagórico e* k *é um número natural então* (km, kn, kp) *é também um terno pitagórico.*

b. *Prova que, sendo* a *e* b *números naturais tais que* $a > b$ *então os números inteiros* $m = a^2 - b^2$*,* $n = 2ab$ *e* $p = a^2 + b^2$ *formam um terno pitagórico.*

c. *Utiliza a alínea anterior para obteres diferentes triângulos retângulos de lados inteiros.*

R.:

a. Tem-se $(km)^2 + (kn)^2 = k^2m^2 + k^2n^2 = k^2(m^2 + n^2) = k^2p^2 = (kp)^2$, pelo que (km, kn, kp) é um terno pitagórico.

b. $m^2 + n^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 =$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = p^2,$$

de onde se conclui que (m, n, p) é um terno pitagórico.

4.2

Entende-se pela expressão «fatorizar um polinómio» a operação que consiste em escrever um dado polinómio como produto de polinómios, sendo pelo menos um dos fatores não constante e de grau inferior ao polinómio inicial. Fica subentendido, no exemplo seguinte, que se deve prosseguir a factorização tanto quanto possível.

Exemplo*

Fatoriza os seguintes polinómios, começando por colocar em evidência fatores comuns e observando, em seguida, a eventual ocorrência de casos notáveis que permitam prosseguir a factorização.

a. $3xy^2 - 12x^3$

b. $a^4b^2 - a^2b^2$

c. $(x - y)^2 - 4$

d. $(a - b)^3 - 9(a - b)$

e. $3x(x - y)^3 - 12x^3(x - y)$

f. $(x - 2)^4 - 16$

g. $5x^2 - 10x + 20$

h. $3ax^2 + 6ax + 3a$

i. $4xy^2 + 24xy + 36x$

j. $-xy^2 + 2xy - x$

k. $4x^2y^4 - 4xy^3z + y^2z^2$

l. $4x^4y^2 - 4x^3yz + x^2z^2$

m. $4x^2y^4 - 4xy^3z + y^2z^2 - 4x^4y^2 + 4x^3yz - x^2z^2$

5.3

Demonstração da lei de anulamento do produto:

Sejam dois números x e y tais que $x \times y = 0$.

Se $x \neq 0$, multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{x}$ vem

$\frac{1}{x} \times x \times y = \frac{1}{x} \times 0$, ou seja, $y = 0$.

Desta forma, $x = 0$ ou $y = 0$.

5.4

Considerando a equação $x^2 = k$ na incógnita x:

Se $k < 0$, como $x^2 \geq 0$ independentemente do valor de x, a equação não tem solução.

Se $k = 0$, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pela lei de anulamento do produto.

Se $k > 0, x^2 = k \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{k}^2 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{k}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0 \Leftrightarrow$ $x - \sqrt{k} = 0 \vee x + \sqrt{k} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}$

Exemplo
Resolve as seguintes equações:

a. $4x^2 - 49 = 0$
b. $2x^2 - 50 = 0$
c. $(x+4)^2 - 9 = 0$
d. $(x-3)^2 + 4 = 0$
e. $3x^2 + 4 = x^2 + 4$
f. $4x^2 - (x+1)^2 = 0$

7.2

Exemplo
Resolve em ordem a x a equação $4x^2 = ax$, onde a é um número real.

R.:
$4x^2 = ax \Leftrightarrow 4x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow (4x - a) \times x = 0.$

Pela lei do anulamento do produto, $x = 0 \vee 4x - a = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a}{4}$.

Exemplo*
Um quadrado de lado x tem perímetro p e área a ($p > 0$ e $a > 0$).
a. *Escreve uma igualdade que relacione x e p e outra que relacione x e a.*
b. Resolve cada uma das equações em ordem a x e deduz que $p^2 = 16a$.
c. Existe algum quadrado de perímetro $20\ cm$ e de área $24\ cm^2$?

R.:
a. $p = 4x$; $x^2 = a$.
b. $x = \frac{p}{4}$ e $x = \sqrt{a}$, de onde se conclui que $\frac{p}{4} = \sqrt{a}$, ou ainda que
$p^2 = (4\sqrt{a})^2 = 16a$.
c. $20^2 = 400$ e $24 \times 16 = 384$. Como $400 \neq 384$, não existe nenhum quadrado com essas caraterísticas.

Descritor	Texto de apoio
1.1 1.2	**Informação Complementar para o professor** *Observação sobre os quartis* No Ensino Básico e Secundário o termo «quartis» é associado de uma maneira geral à divisão em quatro partes de um conjunto de dados sem que se apresente uma definição mais precisa, recorrendo-se muitas vezes a exemplos relativamente aos quais são indicados os procedimentos para os obter. Analisando a literatura especializada, verifica-se a existência de uma grande diversidade de processos que não conduzem aos mesmos resultados para o primeiro e para o terceiro quartil (o segundo quartil, invariavelmente, é definido como sendo igual à mediana). Em suma, não existe uma definição universalmente aceite nem para o primeiro nem para o terceiro quartil. A título de exemplo, observe-se o cálculo do primeiro quartil (Q_1) tomando um conjunto com 23 dados ($x_1, x_2, \dots, x_{23}$) recorrendo a diferentes métodos que podem ser encontrados correntemente na literatura e repare-se como cada um dos processos apresentados pode conduzir a diferentes valores de Q_1. 1.º processo: Divide-se o número de dados por quatro. Uma vez que $\frac{23}{4}$ não é inteiro, consideram-se os números inteiros imediatamente inferior e superior (5 e 6) e os dados correspondentes a essas ordens na sequência ordenada dos dados, tomando-se para primeiro quartil a média aritmética desses dois dados. Neste caso, tem-se $Q_1 = \frac{x_5+x_6}{2}$. 2.º processo: Depois de ordenados os dados e de encontrada a mediana (x_{12}), o primeiro quartil (Q_1) é obtido como a mediana dos dados de ordem inferior à ordem da mediana (x_1 a x_{11}). Assim, tem-se $Q_1 = x_6$. É este o processo utilizado por grande parte das calculadoras. 3.º processo: Depois de ordenados os dados e de encontrada a mediana (x_{12}), o primeiro quartil (Q_1) é obtido como a mediana dos dados de ordem inferior ou igual à ordem da mediana (x_1 a x_{12}), obtendo-se o valor $Q_1 = \frac{x_6+x_7}{2}$. No entanto, os diferentes autores parecem concordar que a definição deveria ser tal que *a percentagem de dados não superiores ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 25% (respetivamente 75%) e a percentagem de dados não inferiores ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 75% (respetivamente 25%)*, embora, com frequência, esta propriedade seja apresentada de um modo menos exigente, mencionando-se apenas a primeira parte: *a percentagem de dados não superiores ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 25% (respetivamente 75%).* Porém, com esta simplificação, apenas se restringem os valores possíveis para os quartis a intervalos que não são limitados à direita, o que é claramente inconveniente. Para que uma condição deste tipo implique que os quartis pertencem a intervalos de extremos iguais aos valores de dois dados consecutivos na respetiva sequência ordenada (com determinados índices que apenas dependem da dimensão da amostra), é necessário que se refira tanto à percentagem de dados menores ou iguais a um determinado quartil, como à percentagem de dados maiores ou iguais a esse valor. Curiosamente, não existe uma definição simples nem para o primeiro nem para o terceiro quartil, que, independentemente do número de dados em análise, implique a veracidade desta propriedade, mesmo na versão mais simples acima referida. É o caso, por exemplo, dos três processos acima descritos, que, como veremos mais adiante, falham em certas situações. Pode no entanto garantir-se que, nessas situações, as percentagens mínimas dos dados em questão se aproximam dos limiares considerados (respetivamente 25% e 75%) tanto quanto o desejarmos, desde que se considerem amostras com dimensões suficientemente elevadas. Generalizando para um conjunto com n dados cada um dos três processos em análise, convém distinguir os casos correspondentes aos diferentes restos resultantes da divisão de n por 4. Repare-se ainda que quando n é ímpar existe um dado cujo valor é igual à mediana ao passo que, quando n é par, a mediana pode não coincidir com o valor de nenhum dos dados já que é calculada como média dos valores de dois dados. Nos casos em que n é par, tanto o 2.º como o 3.º processo fazem intervir no cálculo de Q_1 os valores das ordens até à ordem $\frac{n}{2}$ (inclusive). Considerem-se então os quatro casos: $n = 4k$; $n = 4k + 1$; $n = 4k + 2$; $n = 4k + 3$. Na tabela seguinte, apresenta-se o valor de Q_1, calculado pelo método apresentado em cada um dos três processos.

	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
1.º processo	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
2.º processo	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$
3.º processo	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = \frac{x_{k+1} + x_{k+2}}{2}$

Passemos agora à verificação da propriedade no que respeita ao primeiro quartil, que exige que a percentagem de dados menores ou iguais a Q_1 deve ser pelo menos 25% e a percentagem de dados maiores ou iguais a Q_1 deve ser pelo menos 75%.

1.º processo (Q_1)				
N.º de dados	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Valor do primeiro quartil	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
N.º de dados de valor garantidamente menor ou igual a Q_1	k	k	k	k
Verificação da Propriedade	$\frac{k}{4k} = 25\%$	$\boldsymbol{\frac{k}{4k+1}} < 25\%$	$\boldsymbol{\frac{k}{4k+2}} < 25\%$	$\boldsymbol{\frac{k}{4k+3}} < 25\%$
N.º de dados de valor garantidamente maior ou igual a Q_1	$n - (k - 1)$ $= 3k + 1$	$n - k = 3k + 1$	$n - k = 3k + 2$	$n - k = 3k + 3$
Verificação da Propriedade	$\frac{3k + 1}{4k} > 75\%$	$\frac{3k + 1}{4k + 1} > 75\%$	$\frac{3k + 2}{4k + 2} > 75\%$	$\frac{3k + 3}{4k + 3} > 75\%$

Nos casos assinalados a vermelho não se pode garantir a propriedade.

2.º processo (Q_1)				
N.º de dados	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Valor do primeiro quartil	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$
N.º de dados de valor garantidamente menor ou igual a Q_1	k	k	$k + 1$	$k + 1$
Verificação da Propriedade	$\frac{k}{4k} = 25\%$	$\boldsymbol{\frac{k}{4k+1}} < 25\%$	$\frac{k + 1}{4k + 2} > 25\%$	$\frac{k + 1}{4k + 3} > 25\%$
N.º de dados de valor garantidamente maior ou igual a Q_1	$n - k = 3k$	$n - k = 3k + 1$	$n - k = 3k + 2$	$n - k = 3k + 3$
Verificação da Propriedade	$\frac{3k}{4k} = 75\%$	$\frac{3k + 1}{4k + 1} > 75\%$	$\frac{3k + 2}{4k + 2} > 75\%$	$\frac{3k + 3}{4k + 3} > 75\%$

No caso assinalado a vermelho não se pode garantir a propriedade. No entanto, verifica-se que para $n \geq 53$, o valor obtido é arredondado à unidade percentual para 25%, uma vez que a diferença é menor que $0{,}5\%$.

3.º processo (Q_1)				
N.º de dados	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
Valor do primeiro quartil	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = \frac{x_{k+1} + x_{k+2}}{2}$
N.º de dados de valor garantidamente menor ou igual a Q_1	k	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$
Verificação da Propriedade	$\frac{k}{4k} = 25\%$	$\frac{k+1}{4k+1} > 25\%$	$\frac{k+1}{4k+2} > 25\%$	$\frac{k+1}{4k+3} > 25\%$
N.º de dados de valor garantidamente maior ou igual a Q_1	$n - k = 3k$	$n - k = 3k + 1$	$n - k = 3k + 2$	$n - (k + 1)$ $= 3k + 2$
Verificação da Propriedade	$\frac{3k}{4k} = 75\%$	$\frac{3k+1}{4k+1} > 75\%$	$\frac{3k+2}{4k+2} > 75\%$	**$\frac{3k+2}{4k+3}$** $< 75\%$

Mais uma vez, o caso assinalado a vermelho é o problemático. Todavia, verifica-se que para $n \geq 51$, o valor obtido é arredondado à unidade percentual para 75%, já que a diferença é menor que $0{,}5\%$.

Como acabámos de verificar, nenhum dos processos apresentados garante que *a percentagem de dados não superiores (respetivamente não inferiores) ao primeiro quartil é pelo menos 25% (respetivamente 75%)*. Para que isso acontecesse, seria necessário que se estabelecessem regras específicas para o cálculo dos quartis que dependessem do resto da divisão do número de dados (n) por 4, tornando-se o procedimento fastidioso e pouco interessante para os alunos deste ciclo de estudos.

Rejeitando o 1.º processo, dado que não verifica uma das propriedades em três quartos dos casos e comparando os 2.º e 3.º processos nos casos em que não garantem a propriedade, verifica-se que se encontram em igualdade de circunstâncias quanto à opção de preferência, quando se efetua a verificação da versão completa da propriedade.

	Para n ímpar	
	Processo que não inclui a ordem da mediana no cálculo dos quartis (2.º processo) $(n = 4k + 1)$	Processo que inclui a ordem da mediana no cálculo dos quartis (3.º processo) $(n = 4k + 3)$
Percentagem de dados de valor menor ou igual a Q_1 é maior ou igual a 25%	**Não garantido**	Garantido
Percentagem de dados de valor maior ou igual a Q_1 é maior ou igual a 75%	Garantido	**Não garantido**
Percentagem de dados de valor menor ou igual a Q_3 é maior ou igual a 75%	Garantido	**Não garantido**
Percentagem de dados de valor maior ou igual a Q_3 é maior ou igual a 25%	**Não garantido**	Garantido

Atendendo a estas questões, optou-se, nas Metas Curriculares, pelo 2.º processo de cálculo dos quartis (OTD8-1.1 e OTD8-1.2) uma vez que é o mais amplamente utilizado, sendo em particular o que está programado na grande maioria das calculadoras. Em conformidade com esta escolha, o descritor OTD8-1.4 refere apenas as propriedades que de facto são válidas com a definição adotada. É no entanto aconselhável referir a importância das propriedades enunciadas na primeira e na última linha do quadro anterior, ainda que, pelo processo de cálculo adotado, apenas se verifiquem aproximadamente, tal como foi explicado.

Relativamente a estes descritores é conveniente que se deem exemplos em que os quartis sejam iguais a algum dos dados apresentados bem como exemplos em que isso não acontece.

Exemplo

Considera o seguinte conjunto de dados numéricos:

23, 13, 14, 25, 26, 14, 12, 20, 15, 13, 23, 26, 26, 12, 17.

Indica os valores do primeiro e do terceiro quartil.

R.: Dados ordenados: 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26.

Como são 15 dados e 15 é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem $\frac{15+1}{2} = 8$.

12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor que 8:

12, 12, 13, 13, 14, 14, 15.

O primeiro quartil é 13.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem maior que 8:

20, 23, 23, 25, 26, 26, 26

O terceiro quartil é 25.

Exemplo

Indica o primeiro e o terceiro quartil do seguinte conjunto de dados:

8, 14, 14, 10, 7, 2, 10, 6, 7, 13, 16, 16, 4, 7, 15, 11, 3.

R.: Dados ordenados: 2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 16.

Como o n.º de dados é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem $\frac{17+1}{2} = 9$.

2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 16

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem inferior à ordem assinalada:

2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8

O primeiro quartil é 6,5.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados a partir da ordem assinalada, correspondente à mediana:

10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 16

O terceiro quartil é 14.

Exemplo

Indica o primeiro e o terceiro quartil do seguinte conjunto de dados:

3, 4, 15, 16, 4, 2, 10, 5, 4, 13, 16, 16, 2, 7, 5, 2.

R.: Sequência ordenada dos dados: 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 10, 13, 15, 16, 16, 16.

Uma vez que este conjunto tem 16 dados (n.º par), para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor ou igual a 8 $\left(\frac{16}{2}\right)$:

2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5

O primeiro quartil é 3,5.

Para o terceiro quartil, temos:

5, 7, 10, 13, 15, 16, 16, 16

O terceiro quartil é 14.

Exemplo

Indica o primeiro, o segundo e o terceiro quartis do seguinte conjunto de dados:

33, 34, 45, 47, 34, 32, 40, 35, 33, 43, 47, 47, 32, 37.

R.: Dados ordenados: 32, 32, 33, 33, 34, 34, 35, 37, 40, 43, 45, 47, 47, 47.

Uma vez que o número de dados é par, existem duas ordens centrais, a ordem 7 e a ordem 8. Assim, a mediana é igual à média dos valores dessas ordens, ou seja, a mediana é 36. O segundo quartil é também 36 pois, por definição, é igual ao valor da mediana.

Para calcular o primeiro quartil, devemos ter em conta os dados até à ordem 7 $\left(\frac{14}{2}\right)$. Calculando a mediana dos primeiros 7 dados da sequência ordenada, temos que o primeiro quartil é 33.

32, 32, 33, 33, 34, 34, 35

Calculando a mediana dos últimos 7 dados da sequência ordenada, verifica-se que o terceiro quartil é 45.

37, 40, 43, 45, 47, 47, 47

Assim, $Q_1 = 33$; $Q_2 = 36$; $Q_3 = 45$.

1.6

Exemplo

Calcula a amplitude e a amplitude interquartil do seguinte conjunto de dados:

120, 135, 128, 140, 115, 127, 150, 144, 131, 126, 132, 129, 142.

R.: Dados ordenados:

115, 120, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 135, 140, 142, 144, 150.

mediana

Q_1: 115, 120, 126, 127, 128, 129

Q_3: 132, 135, 140, 142, 144, 150

mínimo: 115

máximo: 150

$Q_1 = 126{,}5$

$Q_3 = 141$

$150 - 115 = 35$

$141 - 126{,}5 = 14{,}5$

A amplitude é 35 e a amplitude interquartil é 14,5.

2.1	**Exemplo** *Observa o gráfico representado abaixo, relativo às faltas dos alunos de uma turma do 8.º ano durante o mês de setembro.*  *a. Determina os extremos e os quartis.* *b. Constrói um diagrama de extremos e quartis.*

9.º ANO

Números e Operações NO9

Descritor	Texto de apoio
1.1	No caso de três números naturais a, b e c, a implicação $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ é uma consequência da própria noção de contagem, não carecendo por isso, a este nível, de uma justificação. Note-se que esse mesmo princípio de contagem garante também a implicação inversa, pelo que se tem de facto $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c.$ Esta propriedade facilmente se estende ao caso de três números inteiros relativos. Para o constatar poderá ser útil, desde já, observar que dado dois quaisquer números racionais x e y, $x < y \Leftrightarrow -x > -y$. Esta equivalência é trivial no caso de x e de y terem sinais opostos (x negativo e y positivo), sendo os restantes casos uma consequência direta do descritor NO6 -2.9. Agora, se, por exemplo, $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$ forem números inteiros, $a < b \Leftrightarrow -a > -b \Leftrightarrow -a + (-c) > -b + (-c) \Leftrightarrow -(a + c) > -(b + c)$ $\Leftrightarrow a + c < b + c.$ No caso dos números racionais, a propriedade reduz-se ao caso dos números inteiros: tomando três números racionais representados por quocientes de inteiros que podemos supor com o mesmo divisor $d \in \mathbb{N}$, $q = \frac{a}{d}$, $r = \frac{b}{d}$ e $s = \frac{c}{d}$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$, sabemos que $q < r \Leftrightarrow a < b$. ($cf$. NO3-11.13 no caso de a e b serem positivos e utilizar, além desta propriedade, o que se acabou de constatar para inteiros relativos no caso geral). Como $q + s = \frac{a+c}{d}$ e $r + s = \frac{b+c}{d}$, $q + s < r + s \Leftrightarrow a + c < b + c$, de onde se deduz que $q < r \Leftrightarrow q + s < r + s$.
1.2 1.3	Dados dois números naturais a e b, com $a < b$, tem-se simultaneamente, pelo descritor anterior, $a + a < b + a$ e $a + b < b + b$, de onde resulta que $2a < 2b$. Também, $2a + a < 2b + a$ e $a + 2b < b + 2b$, o que implica que $3a < 3b$. Iterando este raciocínio verifica-se que dado um qualquer número natural c, $a < b \Rightarrow ca < cb.$ Esta propriedade pode ser utilizada para reconhecer as propriedades referidas nestes dois descritores: Dados dois números racionais $q = \frac{a}{d}$, $r = \frac{b}{d}$ $(a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } d \in \mathbb{N})$ e um terceiro número racional positivo $s = \frac{c}{d}$ $(c \in \mathbb{N})$, observando que $qs = \frac{ac}{d^2}$ e $rs = \frac{bc}{d^2}$. $q < r \Rightarrow a < b \Rightarrow ca < cb \Rightarrow qs < rs.$ Se s for negativo, $q < r \Rightarrow q \times (-s) < r \times (-s) \Rightarrow -qs < -rs \Rightarrow qs > rs.$

1.4	A demonstração pedida aos alunos é a seguinte: Se $a < b$ então $a + c < b + c$. Se $c < d$ então $b + c < b + d$. (Utilizou-se duas vezes o descritor 1.1) Finalmente, por transitividade, $a + c < b + d$. Analogamente, tomando a, b, c e d números positivos: Se $a < b$ então $ac < bc$. Se $c < d$ então $bc < bd$. (Utilizou-se duas vezes o descritor 1.2) Por transitividade, $ac < bd$.
1.5	Estas propriedades já haviam sido referidas nos descritores ALG7-2.1 e ALG7-2.2 no caso dos números racionais, recorrendo a considerações geométricas envolvendo a área de quadrados e o volume de cubos. A justificação agora pedida aos alunos é imediata, utilizando o resultado relativo ao produto que foi mencionado no descritor anterior, tomando, em primeiro lugar, $c = a$ e $d = b$, e, posteriormente, $c = a^2$ e $d = b^2$.
1.6	A justificação pedida é a seguinte: Dados dois números positivos a e b, $a < b \;\Rightarrow\; a \times \frac{1}{a} < b \times \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} \times a \times \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \times b \times \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
3.3	**Exemplo** *Sabendo que* 5 *e* 7 *são respetivamente aproximações dos números reais* x *e* y *com erro inferior a* $\frac{1}{10}$*, que valores pode tomar o produto* $x \times y$ *?* R.: Como 5 é uma aproximação de x com erro inferior a $\frac{1}{10}$, $5 - \frac{1}{10} < x < 5 + \frac{1}{10}$. Da mesma forma, $7 - \frac{1}{10} < y < 7 + \frac{1}{10}$. Sendo todas estas quantidades positivas, pode concluir que (*cf.* 1.4) $\left(5 - \frac{1}{10}\right)\left(7 - \frac{1}{10}\right) < x \times y < \left(5 + \frac{1}{10}\right)\left(7 + \frac{1}{10}\right)$, ou seja, $\frac{49}{10} \times \frac{69}{10} < x \times y < \frac{51}{10} \times \frac{71}{10}$ e $33{,}81 < x \times y < 36{,}21$. **Exemplo*** *3 é uma aproximação do número real* x *com erro inferior a* $\frac{3}{10}$*;* -4 *é uma aproximação do número real* y *com erro inferior a* $\frac{4}{10}$. *Qual o erro máximo que se comete ao aproximar* $x \times y$ *por* $3 \times (-4) = -12$ *?*

R.: De acordo com o enunciado,

$$3-\frac{3}{10}<x<3+\frac{1}{10}$$

e

$$-4-\frac{4}{10}<y<-4+\frac{4}{10},$$

ou seja,

$$\frac{27}{10}<x<\frac{33}{10} \quad \text{e} \quad -\frac{44}{10}<y<-\frac{36}{10}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por -1 vem

$$\frac{36}{10}<-y<\frac{44}{10}.$$

Podemos portanto concluir, pelo descritor 1.4, que

$$\frac{27}{10}\times\frac{36}{10}<x\times(-y)<\frac{33}{10}\times\frac{44}{10},$$

ou ainda que

$$-\frac{1452}{100}<x\times y<-\frac{972}{100}.$$

Destas desigualdades resulta pelo descritor 1.1 que

$$-\frac{1452}{100}-12<x\times y-12<-\frac{972}{100}-12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{252}{100}<x\times y-(-12)<\frac{228}{100}.$$

Como $\left|-\frac{252}{100}\right|>\left|\frac{228}{100}\right|$, o erro máximo que se comete ao aproximar $x\times y$ por -12 é de $r=\frac{252}{100}=2{,}52$.

3.4 Neste descritor pede-se que os alunos calculem aproximações de raízes quadradas e cúbicas por enquadramentos. Existem vários métodos *ad-hoc* que permitem atingir esse objetivo, como por exemplo o utilizado no seguinte exercício:

Exemplo

Aproxima $\sqrt{11}$ *às décimas.*

R.: Tem-se $3^2<11<4^2$, pelo que $3<\sqrt{11}<4$.

Calcula-se agora (com o auxílio, por exemplo, de uma calculadora) o quadrado de 3,1 , 3,2 , … , etc., até que se ultrapasse o valor 11:

$$3{,}1^2=9{,}61; \quad 3{,}2^2=10{,}24; \quad 3{,}3^2=10{,}89; \quad 3{,}4^2=11{,}56.$$

Como $3{,}3^2<11<3{,}4^2$, $\quad 3{,}3<\sqrt{11}<3{,}4$.

Estes métodos podem ser sistematizados da seguinte forma:

Dado um número x positivo, distinto de um quadrado perfeito e um número natural n, o produto $x\times n^2$ pode ser enquadrado de forma estrita entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos m e $m+1$:

$$m^2<x\times n^2<(m+1)^2.$$

Destas desigualdades deduz-se que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 < x < \left(\frac{m+1}{n}\right)^2,$$

o que é equivalente a

$$\frac{m}{n} < \sqrt{x} < \frac{m+1}{n}.$$

Assim, os números $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ são aproximações (respetivamente por defeito e por excesso) de $\sqrt{x}$ com erro inferior a $r = \frac{1}{n}$.

Exemplo

Enquadra $\sqrt{3}$ por números racionais, com um erro inferior a $r = 0{,}2$.

R.: Temos $r = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.

Enquadrando o produto $5^2 \times 3 = 75$ por dois quadrados perfeitos consecutivos $(64 < 75 < 81)$, obtemos

$$8^2 < 5^2 \times 3 < 9^2 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^2 < 3 < \left(\frac{9}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{5} < \sqrt{3} < \frac{9}{5} \Leftrightarrow 1{,}6 < \sqrt{3} < 1{,}8.$$

Substituindo os quadrados por cubos, é possível aproximar de forma análoga raízes cúbicas:

Exemplo

Determina um intervalo de extremos racionais e de medida de comprimento inferior ou igual a $\frac{1}{2}$ que contenha $\sqrt[3]{5}$.

R.: Enquadrando o número $5 \times 2^3 = 40$ por cubos perfeitos consecutivos:

$$3^3 = 27 < 5 \times 2^3 = 40 < 64 = 4^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 < 3 < \left(\frac{4}{2}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \sqrt[3]{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3} \in \left]\frac{3}{2}\,; 2\right[.$$

Este método permite aproximar qualquer raiz quadrada (respetivamente cúbica) com um erro tão pequeno quanto desejarmos calculando apenas quadrados (respetivamente cubos) de números inteiros. Esses cálculos podem naturalmente ser efetuados com uma calculadora, ou, em alternativa, recorrendo a uma tabela de quadrados (respetivamente cubos) perfeitos.

Por exemplo, para calcular os primeiros três algarismos da representação em dízima de $\sqrt{5}$, podemos proceder da seguinte forma:

Temos

$$2^2 = 4 < 5 < 9 = 3^2.$$

Multiplicando por 10^2 esta cadeia de desigualdades vem

$$20^2 < 5 \times 10^2 < 30^2.$$

Note-se que 20 e 30 não são números inteiros consecutivos. Um processo célere que permite enquadrar $5 \times 10^2 = 500$ por quadrados perfeitos consecutivos consiste em testar um número inteiro próximo da média aritmética destes números:

$25^2 = 625 > 500$, pelo que

$$20^2 < 5 \times 10^2 < 25^2.$$

Este processo, conhecido por «dicotomia» é extremamente utilizado em vários algoritmos numéricos. Em particular, o método de dicotomia é muito útil na determinação de um zero de uma função contínua, conhecidos dois pontos em que esta toma respetivamente um valor positivo e um valor negativo.

Prosseguindo, como $22^2 = 484 < 500$,

$$22^2 < 5 \times 10^2 < 25^2.$$

Finalmente, observando que $23^2 = 529 > 500$,

$$22^2 < 5 \times 10^2 < 23^2.$$

Este enquadramento já permite deduzir que $\left(\frac{22}{10}\right)^2 < 5 < \left(\frac{23}{10}\right)^2$, isto é, que

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3.$$

Para obtermos mais uma casa decimal, multiplicamos novamente a última desigualdade obtida por 10^2:

$$22^2 < 5 \times 10^2 < 23^2 \Leftrightarrow 22^2 \times 10^2 < 5 \times 10^2 \times 10^2 < 23^2 \times 10^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 220^2 < 5 \times 10^4 < 230^2 \Leftrightarrow 220^2 < 5000 < 230^2.$$

Pelo método de dicotomia, observando consecutivamente que
$225^2 = 50625$, $223^2 = 49729$ e $224^2 = 50176$,

$$223^2 < 5 \times 10^4 < 224^2 \Leftrightarrow \left(\frac{223}{100}\right)^2 < 5 < \left(\frac{224}{100}\right)^2 \Leftrightarrow 2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24.$$

Exemplo
Aproxima $\sqrt{8}$ *às décimas.*

R.: Tem-se $2^2 < 8 < 3^2$. Multiplicando por 10^2,

$$20^2 < 8 \times 10^2 < 30^2.$$

Pelo método de dicotomia, $25^2 = 625$, $28^2 = 729$ e $29^2 = 841$, de onde se conclui que

$$28^2 < 8 \times 10^2 < 29^2 \Leftrightarrow \left(\frac{28}{10}\right)^2 < 8 < \left(\frac{29}{10}\right)^2 \Leftrightarrow 2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9.$$

Exemplo
Utiliza a tabela de cubos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x^3	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375

para aproximar $\sqrt[3]{2}$ *às décimas.*

R.: $2 \times 10^3 = 2000$. Pela tabela fornecida, $12^3 < 2 \times 10^3 < 13^3$. Logo,

$$\left(\frac{12}{10}\right)^3 < 2 < \left(\frac{13}{10}\right)^3 \Leftrightarrow 1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3.$$

4.1

Exemplo

Pretende-se substituir paineis retangulares de dimensões 2,5m e 3,5m por paineis quadrados que tenham a mesma área. Determina com erro inferior a 1 dm e utilizando a tabela de quadrados perfeitos abaixo, dois valores aproximados, um por defeito e outro por excesso, da medida em metros, do lado de cada um desses quadrados.

x	26	27	28	29	30	31	32	33	34
x^2	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156

Exemplo

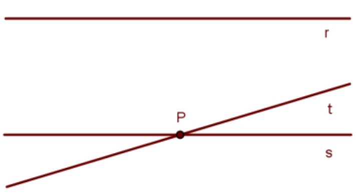
Sabe-se que $2 < a < 3$ *e que* $2 < b < 8$. *Aproxima por defeito às unidades* $\sqrt[3]{a + 3b}$.

Exemplo

O líquido contido num reservatório piramidal de altura 52 *metros e cuja base é um quadrado de* 3 *metros de lado, vai ser substituído por quatro reservatórios cúbicos. Determina as dimensões mínimas que devem ter os reservatórios cúbicos utilizando a seguinte tabela de cubos perfeitos*

x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
x^3	27000	29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319

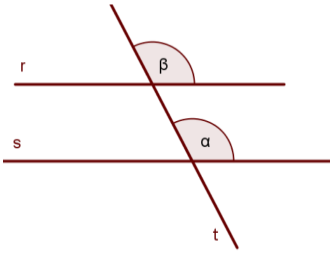
Apresenta o resultado arredondado às décimas de metro.

Descritor	Texto de apoio
1.5	**Exemplo** *Em cada uma das seguintes implicações, distingue a condição necessária da condição suficiente e diz se a implicação recíproca é verdadeira.* a. *Se um número natural termina em zero então é par.* b. *Se um triângulo é equilátero então é isósceles.* c. *Num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais.* d. *Num quadrado as diagonais são perpendiculares.* e. a *e* b *são números naturais e não são primos entre si* $\Rightarrow m.d.c.(a,b) > 1$. **Exemplo** *Em cada uma das seguintes alíneas corta uma das palavras «necessária» ou «suficiente» de modo a obteres uma afirmação verdadeira e indica em que casos a afirmação continua a ser verdadeira se substituíres essa palavra pela expressão «necessária e suficiente»:* a. *Dados dois números naturais* m *e* n*, é condição necessária/suficiente para que* m *e* n *sejam quadrados perfeitos que* $\sqrt{\frac{m}{n}}$ *seja um número racional.* b. *É condição necessária/suficiente para que um quadrilátero seja um retângulo que as respetivas diagonais sejam iguais.* c. *É condição necessária/suficiente para que um número natural seja par e múltiplo de 5 que a respetiva representação decimal termine com um zero.* d. *É condição necessária/suficiente para que um triângulo seja isósceles que tenha dois ângulos iguais.* **Exemplo** *Em cada um dos seguintes teoremas, identifica a hipótese e a tese.* a. *Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos é igual ao quadrado da medida de comprimento da hipotenusa.* b. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.* c. *Se o produto de dois números é nulo então um dos fatores é nulo.* d. *Dadas três retas não necessariamente complanares, se duas delas são paralelas à terceira reta então são paralelas entre si.*
4.1 4.2 4.3	**Exemplo** *Demonstra que se uma reta* t *interseta uma de outras duas retas paralelas* r e s *e é com elas complanar então interseta a outra.* R.: Consideremos duas retas paralelas r e s e uma reta t complanar com r e s e que interseta a reta s no ponto P. Pelo axioma euclidiano do paralelismo sabe-se que existe uma única reta paralela à reta r e que passa em P; como s é paralela a r e passa em P, a reta t, distinta de s não pode ser paralela a r, pelo que, sendo com ela complanar, interseta-a. 

Exemplo

Considera duas retas paralelas r e s. Demonstra que são iguais os ângulos correspondentes determinados em r e s por uma reta secante t.

R.:



Designando por α e β dois ângulos correspondentes determinados em r e s pela reta t:

A soma de α com um suplementar de β não é inferior a um ângulo raso, pois nesse caso, pelo 5.º axioma de Euclides, as retas r e s seriam secantes (no semiplano determinado por t que contém estes ângulos).

Por outro lado, a soma de α com um suplementar de β não é superior a um ângulo raso pois neste caso r e s seriam também secantes (basta considerar os ângulos suplementares adjacentes a α e β do outro lado da secante e mais uma vez o 5.º axioma).

Assim, a soma de α com um suplementar de β é igual a um ângulo raso, ou seja, α e β são iguais.

Exemplo

Demonstrar que se, num dado plano, as retas distintas r e t são paralelas à reta s então r e t são paralelas entre si.

R.:

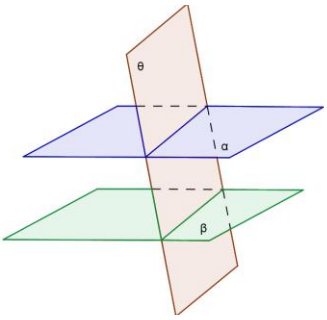
Vamos supor que as retas r e t não são paralelas, ou seja, uma vez que são complanares, que se intersetam num ponto P. Então r e t seriam duas retas paralelas a s passando por P, contra o que estabelece o axioma euclidiano do paralelismo logo r e t são paralelas.

5.5

Exemplo

Justifica que, se um plano θ é concorrente com dois planos paralelos α e β então as retas interseção do primeiro com cada um dos outros dois são paralelas.

R.:



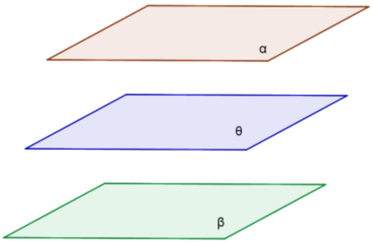
Supondo que as retas interseção não eram paralelas então, por pertencerem ambas ao mesmo plano θ, teriam um ponto comum que, por pertencer a ambas, também pertenceria a ambos os planos α e β, contra a hipótese de paralelismo destes planos. As retas interseção têm portanto de ser paralelas.

5.8

Para provar que dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si podemos utilizar o seguinte raciocínio:

Sejam α e β dois planos, ambos paralelos a um terceiro plano θ.

Se os dois planos α e β não fossem paralelos entre si, então intersetar-se-iam e portanto β, por exemplo, de acordo com o resultado expresso no descritor 5.5, intersetaria também θ, que é paralelo a α. Mas por hipótese β também é paralelo a θ, pelo que não o pode intersetar; esta contradição prova que α e β são paralelos.



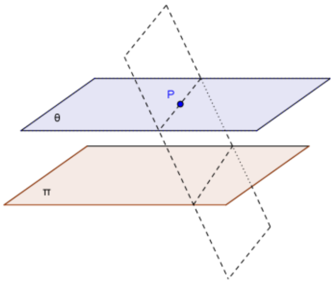
No exemplo seguinte, não é pedida a justificação da existência de um plano paralelo a outro que passe por um determinado ponto. Apenas se solicita a prova da unicidade de um tal plano.

Exemplo

Justificar, dado um plano π e um ponto P exterior ao plano, que o plano θ que passa por P e é paralelo a π é único.

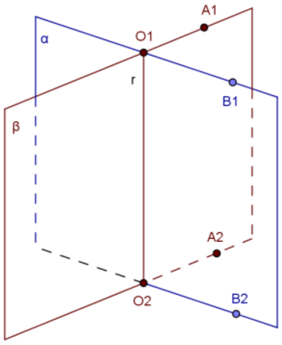
R.:

Qualquer outro plano que passe por P é concorrente com θ e portanto com π, atendendo ao resultado expresso no descritor 5.5; não pode portanto ser paralelo a π, o que prova que θ é o único plano paralelo a π que passa por P.



6.1 **Exemplo****

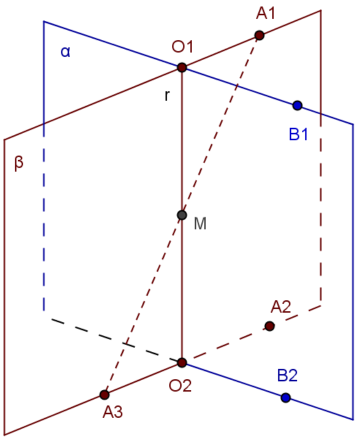
Consideremos dois planos α e β que se intersetam segundo uma reta r e dois ângulos convexos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ de vértices em r e lados perpendiculares a r, de forma que os lados $\dot{O}_1A_1$ e $\dot{O}_2A_2$ estão num mesmo semiplano determinado por r em α e os lados $\dot{O}_1B_1$ e $\dot{O}_2B_2$ estão num mesmo semiplano determinado por r em β.



Prova que os ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ são iguais resolvendo as seguintes alíneas:

a. *Considera M, ponto médio do segmento de reta $[O_1O_2]$. Quais são as imagens de O_1 e de O_2 pela reflexão central de centro M?*

b. *Na figura junta está representado o ponto A_3, imagem do ponto A_1 pela reflexão central de centro M. Justifica que O_2A_3 é paralela a O_1A_1 e que o ponto A_3 está no semiplano oposto a A_2 de fronteira r.*

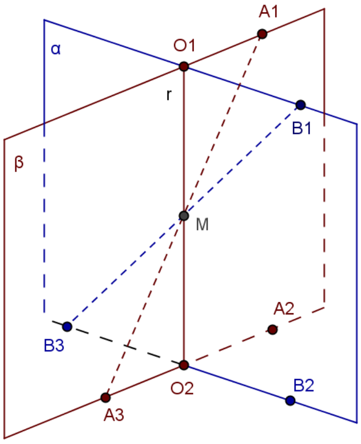


c. *Seja B_3 a imagem do ponto B_1 pela reflexão central de centro M. Justifica que O_2B_3 é paralela a O_1B_1 e que o ponto B_3 está no semiplano oposto a B_2 de fronteira r.*

d. *Justifica que os ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_3O_2B_3$ são iguais.*

e. *Justifica que O_2A_2 é paralela a O_1A_1 e que O_2B_2 é paralela a O_1B_1.*

f. *Justifica que os ângulos $A_2O_2B_2$ e $A_3O_2B_3$ são verticalmente opostos e conclui que os ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ são iguais.*

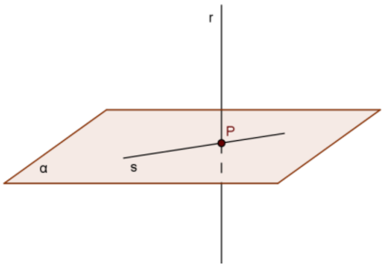


6.4

Exemplo

Considera uma reta r perpendicular ao plano α no ponto P e s uma reta contida no plano α e que passa em P.

Justifica que a reta r também é perpendicular à reta s, ou seja, r é perpendicular a qualquer reta do plano α que passe por P.



R.:

Por definição, uma reta r é perpendicular a um plano quando é perpendicular a duas retas desse plano que passam por um ponto P de r. Pelo resultado expresso no descritor 6.3, r é perpendicular a qualquer reta do plano α que passe por P.

6.5

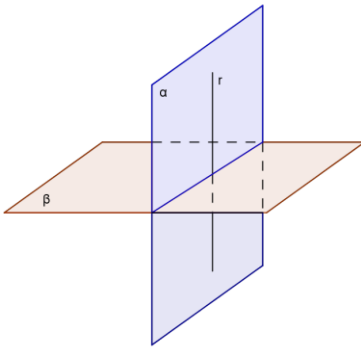
Pretendemos provar que é condição necessária e suficiente para que dois planos sejam perpendiculares que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro.

Exemplo

Prova que:

(I) *Se um plano α contiver uma reta r perpendicular a um plano β então α é perpendicular a β.*

(II) *Se um plano α for perpendicular a um plano β, então α contém uma reta r perpendicular a β.*



R.:

(I) Se o plano α contiver uma reta r perpendicular a um plano β então estes são concorrentes e não coincidem, sendo a respetiva interseção uma reta que designamos por s e à qual pertence o ponto P de interseção da reta r com o plano β. Consideremos a reta t perpendicular a s e contida no plano β, concluimos que a reta r é perpendicular a t (6.4) e que consequentemente α é perpendicular a β já que r e t são perpendiculares a s (reta interseção dos dois planos) e perpendiculares entre si.

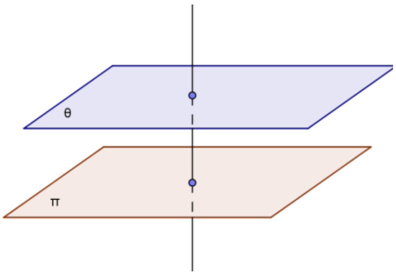
(II) Se um plano α for perpendicular a um plano β a respetiva interseção é uma reta s. Considerando um ponto P de s, uma reta r contida em α e perpendicular a s em P e uma reta t contida em β e perpendicular a s em P, então estas duas retas formam quatro ângulos retos, ou seja, são perpendiculares. Como a reta r é perpendicluar a s e a t então é perpendicular ao plano que as contém, ou seja, ao plano β.

6.8

Exemplo**

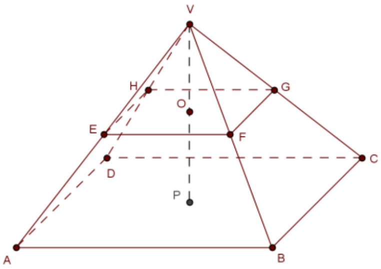
Considera uma reta r perpendicular a um plano θ.
Justifica que:

a. *se π for um plano paralelo a θ então r também é perpendicular a π.*
b. *Se a reta r também for perpendicular a um plano π então os planos θ e π são paralelos.*



Exemplo

Considera a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, a reta VP perpendicular ao plano da base $[ABCD]$ e quatro pontos complanares E, F, G e H, pertencentes respetivamente às arestas $[VA], [VB], [VC]$ e $[VD]$.

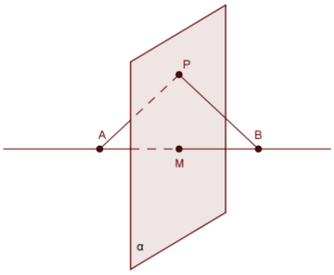


a. *Supõe que o plano EFG é paralelo ao plano ABC da base e que $[EFGH]$ é um quadrado.*
   Sendo O o ponto de interseção da reta VP com o plano EFG, justifica que $[VO]$ é a altura da pirâmide de base $[EFGH]$.
b. *Sendo O o ponto de interseção da reta VP com o plano EFG e supondo agora que a reta VO é perpendicular a esse plano, justifica que os planos ABC e EFG das bases das pirâmides são paralelos.*

6.9

Exemplo**

Considera um segmento de reta $[AB]$ e o plano α perpendicular a $[AB]$ no respetivo ponto médio M. Justifica que o plano α é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de A e B, ou seja, *justifica que são verdadeiras as seguintes afirmações:*



a. *se o ponto P pertencer ao plano α então $\overline{AP} = \overline{PB}$;*
b. *se Q for um ponto do espaço tal que $\overline{AQ} = \overline{QB}$ então Q pertence ao plano mediador de $[AB]$.*

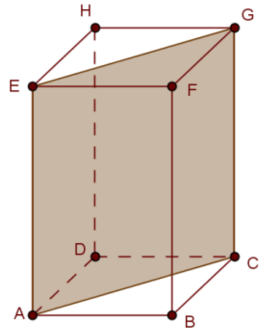
R.:

a. Seja P um ponto do plano α distinto de M. A reta AB é perpendicular ao plano α e interseta-o no ponto M logo é perpendicular a qualquer reta do plano que passe em M, em particular a MP. Logo, no plano ABP, MP é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e portanto $\overline{AP} = \overline{BP}$.
   Se o ponto P coincidir com M é obviamente equidistante de A e de B.

b. Seja Q um ponto do espaço tal que $\overline{AQ} = \overline{QB}$ e seja M o ponto médio de $[AB]$. Os pontos A, B e Q definem um plano ao qual também pertence M. Nesse plano QM é a mediatriz de $[AB]$ pelo que é perpendicular à reta AB. Portanto QM está contida no plano normal à reta AB no ponto M (*cf.* 6.7), ou seja, ao plano mediador de $[AB]$. Em particular Q pertence a esse plano.

Exemplo*

Considera um prisma reto cujas bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$ são losangos. Prova que o plano EAC é perpendicular a $[BD]$ no respetivo ponto médio M, começando por justificar que:

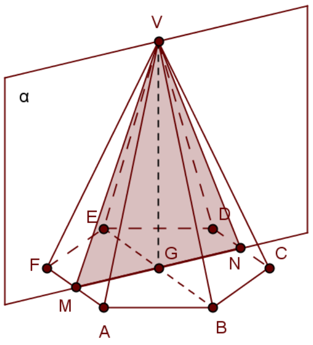


a. *As retas AC e BD são perpendiculares;*
b. *As retas BD e EM são perpendiculares, começando por mostrar que E é equidistante de B e de D.*

No exemplo seguinte mostra-se, em particular, que “a altura de uma pirâmide regular (na ocorrência, uma pirâmide hexagonal), é o segmento de reta que liga o vértice ao centro da base”. O conceito de «altura» de uma pirâmide ou de um cone será definido mais adiante, no texto de apoio ao descritor 8.1; nesse mesmo texto de apoio apresentar-se-á um exemplo em que se mostra, mais geralmente, que esta propriedade vale para qualquer pirâmide com arestas laterais iguais (dita «reta» por alguns autores) e para qualquer cone reto.

Exemplo**

Considera uma pirâmide hexagonal regular de base $[ABCDEF]$ e vértice V e os pontos médios M e N, respetivamente das arestas $[AF]$ e $[CD]$.

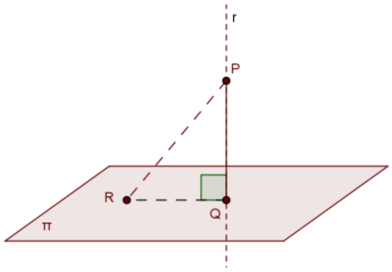


a. *Prova que $[MENB]$ é um losango.*
b. *Justifica que o plano VMN é o plano mediador do segmento de reta $[EB]$.*
c. *Prova que os segmentos $[VM]$ e $[VN]$ são iguais.*
d. *Sendo G o centro da circunferência circunscrita à base $[ABCDEF]$, mostra que VG é perpendicular ao plano que contém a base, começando por mostrar que a reta VG é perpendicular, simultaneamente, a EB e a MN.*
e. *Prova que os planos VMN e VEB são perpendiculares.*

8.1

Exemplo

Considera um plano π, um ponto P não pertencente ao plano, a reta r perpendicular a π e que passa em P e o pé da perpendicular Q. Justifica que, se R for um ponto do plano π distinto de P, então $\overline{PQ} < \overline{PR}$.



Conhecido o conceito de distância de um ponto a um plano, podemos agora utilizá-lo para definir rigorosamente a altura de uma pirâmide ou de um cone como sendo a distância do respetivo vértice ao plano da base. No exemplo seguinte mostra-se que os vértices da base de uma pirâmide com arestas laterais iguais estão situados numa mesma circunferência e que a altura é igual à distância do vértice da pirâmide ao centro dessa circunferência. Analogamente, a altura de um cone reto é a distância do respetivo vértice ao centro da base, segmento contido no eixo do cone. Por outras palavras, os vértices da base estão numa mesma circunferência de centro na projeção ortogonal do vértice da pirâmide ou do cone no plano da base.

Exemplo*

Considera uma pirâmide de vértice V cujas arestas laterais são iguais e seja O a projeção ortogonal de V no plano da base da pirâmide.

a. *Dados dois vértices A e B da base, pretendemos provar que os pontos A e B estão situados numa mesma circunferência de centro O. Para o efeito resolve as seguintes alíneas:*
   - a_1. *Justifica que os triângulos $[VOA]$ e $[VOB]$ são triângulos retângulos iguais.*
   - a_2. *Conclui da alínea anterior que A e B estão situados numa mesma circunferência de centro em O.*

b. *Conclui de a. que os vértices da base de uma pirâmide de arestas laterais iguais estão situados numa mesma circunferência de centro O e que a altura da pirâmide é igual à distância $\overline{VO}$ do vértice da pirâmide ao centro dessa circunferência.*

Observação: Tal como foi referido no Caderno de Apoio do 2.º Ciclo (GM6-2.3 e GM6-2.7), certos autores definem «pirâmide reta» como uma pirâmide cujas arestas laterais são iguais. Como então foi observado, esta definição não é consensual já que em várias obras se entende por «pirâmide reta» uma pirâmide tal que o segmento de reta que liga o vértice ao centro de massa é perpendicular ao plano que contém a base.

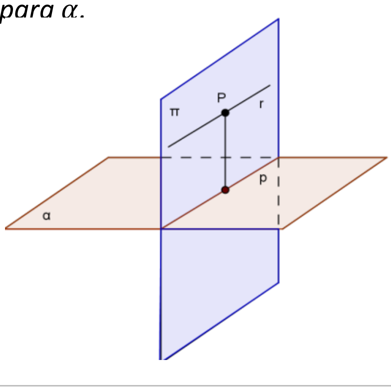
Recorde-se que, com a primeira definição, uma pirâmide é reta se e apenas se existir uma circunferência que contém todos os vértices da base e se o segmento de reta que liga o vértice ao centro da circunferência for perpendicular à base. Uma destas implicações encontra-se demonstrada no último exemplo, sendo que a outra pode ser provada utilizando o mesmo tipo de argumentos. Com esta definição, as pirâmides retas são as pirâmides que se podem inscrever em cones retos (*cf.* GM6-2.7).

8.2

Exemplo

Considera uma reta r paralela a um plano α e o plano π definido pela reta r e pelo pé da perpendicular traçada de um ponto P de r para α.

a. *Justifica que:*
   - a_1. *O plano π é perpendicular ao plano α.*
   - a_2.* *Os pontos da reta p interseção dos planos α e π são os pés das perpendiculares traçadas dos pontos da reta r para o plano π.*

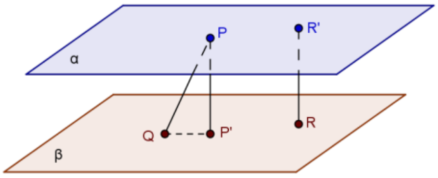


b. *Designando a reta* p *por «projeção ortogonal da reta* r *no plano* α*» e a distância entre as retas paralelas* r *e* p *por «distância entre a reta* r *e o plano* α*», justifica que essa distância é menor do que a distância de qualquer ponto de* r *a um ponto do plano distinto da respetiva projeção ortogonal.*

8.3

Exemplo

Sejam dois pontos P *e* R*, respetivamente pertencentes a dois planos paralelos* α *e* β*. Considera ainda a projeção ortogonal de* P *sobre o plano* β *e a projeção ortogonal de* R *sobre o plano* α*, designando-as, respetivamente, por* P' *e* R'*.*



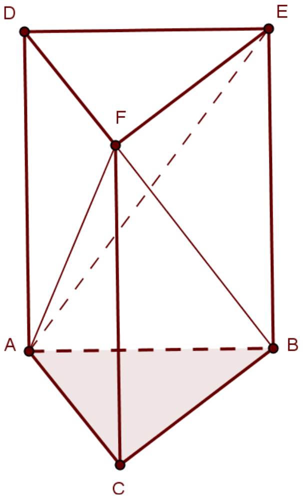
a. *Justifica que, sendo* Q *um ponto do plano* β *distinto de* P'*, se tem* $\overline{PP'} < \overline{PQ}$*.*

b. *Justifica que* $\overline{PP'} = \overline{RR'}$*.*

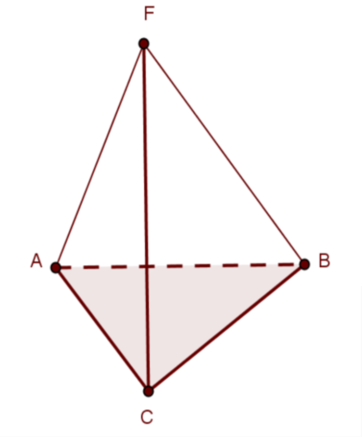
9.1

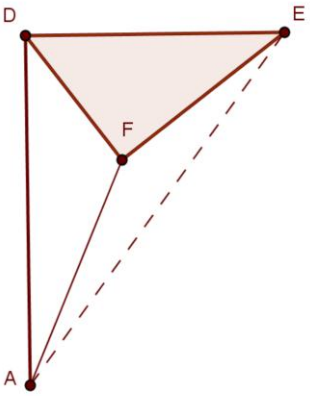
A justificação da fórmula que permite obter o volume V_P de uma pirâmide triangular a partir da área da sua base (A_b) e respetiva altura (h), $V = \frac{A_b \times h}{3}$, não é exigível neste ano de escolaridade. Com este descritor pretende-se que os alunos saibam que este resultado pode ser obtido por decomposição de um prisma triangular reto em três pirâmides com o mesmo volume. Um passo importante neste processo consiste em observar que duas pirâmides triangulares com mesma base e a mesma altura têm o mesmo volume. De um ponto de vista rigoroso, este resultado pode ser justificado por aplicação do Princípio de Cavalieri (ver Texto Complementar de Geometria, texto de apoio relativo aos descritores GM9-9.1 a GM9-9.4).

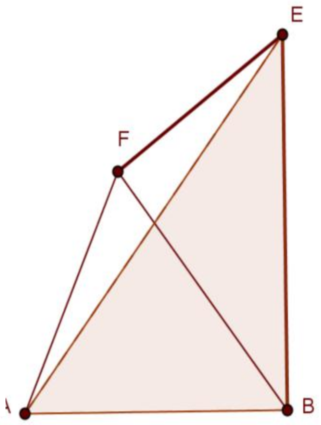
Conhecido este resultado, pode argumentar-se da seguinte forma:



Um prisma triangular reto de bases $[ABC]$ e $[DEF]$ pode ser decomposto nas pirâmides $[ACBF]$, $[DFEA]$ e $[ABEF]$. As duas primeiras têm alturas iguais ($\overline{CF} = \overline{AD}$) e bases iguais $[ABC]$ e $[DEF]$ respetivamente. Pela propriedade acima enunciada, têm pois o mesmo volume. Por outro lado, as pirâmides $[DFEA]$ e $[ABEF]$ têm também bases iguais ($[ADE]$ e $[ABE]$ respetivamente) e alturas iguais (distância do ponto F ao plano que contém ambas as bases), pelo que também têm volumes iguais.







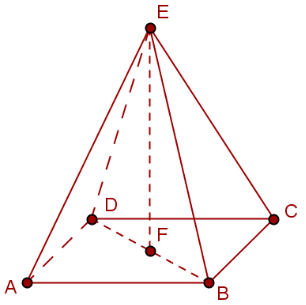
Daqui se conclui que as três pirâmides têm o mesmo volume. Como o volume do prisma é igual ao produto da área da base pela altura (GM6-7.5), facilmente se obtém que o volume de cada uma das pirâmides é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Mantendo a base e deslocando o vértice num plano paralelo à base podemos mostrar que duas pirâmides triangulares com a mesma base e altura têm o mesmo volume, utilizando o Teorema de Tales para verificar as hipóteses do Princípio de Cavalieri e baseando-nos também na fórmula para o cálculo da área de um triângulo (*cf.* o texto de apoio acima referido no Texto Complementar de Geometria). Assim obtemos a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide triangular comparando o volume de uma qualquer destas pirâmides com uma que tenha a mesma base mas além disso uma aresta lateral perpendicular à base, por forma a poder identificar-se com uma das três pirâmides em que se decompõe um prisma triangular reto com bases iguais à da pirâmide e a mesma altura. Podemos depois utilizar decomposições em pirâmides triangulares para obter a mesma fórmula para qualquer pirâmide e em seguida, por aproximação, para cones. É esta a estratégia sugerida nos dois descritores seguintes. No entanto, utilizando propriedades mais gerais relativas à área de duas quaisquer figuras semelhantes (e não apenas o caso mais elementar dos triângulos semelhantes) podemos directamente concluir que o volume de qualquer pirâmide ou cone, ou mesmo dos chamados “cones generalizados”, pode ser calculado pela mesma fórmula; estas considerações são também desenvolvidas no referido texto de apoio no Texto Complementar de Geometria.

9.2

Exemplo

Considera a pirâmide quadrangular $[ABCDE]$ representada. Utilizando uma decomposição em pirâmides triangulares, verifica que o volume da pirâmide quadrangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.



R.:

Designando por V o volume da pirâmide quadrangular $[ABCDE]$ e por V_1 e V_2, respetivamente, os volumes das pirâmides triangulares $[ABDE\ ]$ e $[BCDE]$, tem-se

$$V = V_1 + V_2.$$

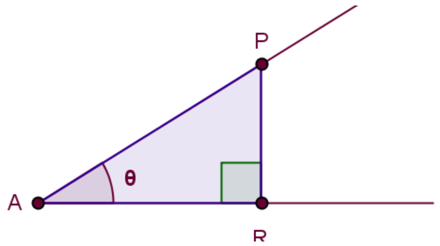
Por outro lado, $V_1 = \frac{A_{[ABD]} \times h}{3}$ e $V_2 = \frac{A_{[BCD]} \times h}{3}$, onde h designa a distância do ponto E ao plano que contém A, B e C (e D), sendo a altura comum das pirâmides triangulares relativamente às bases $[ABD]$ e $[BCD]$. Assim,

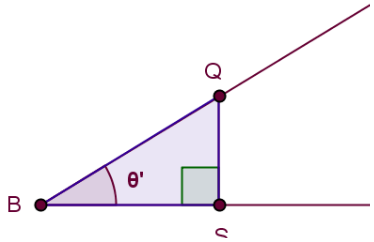
$$V = \frac{A_{[ABD]} \times h}{3} + \frac{A_{[BCD]} \times h}{3} = \frac{\left(A_{[ABD]} + A_{[BCD]}\right) \times h}{3} =$$
$$= \frac{A_{[ABCD]} \times h}{3}.$$

Outros exemplos, relativos a pirâmides cuja base tenha um maior número de lados, podem igualmente ser trabalhados recorrendo à mesma estratégia, ou seja, decompondo a base em triângulos.

11.6

Considerando dois ângulos θ e θ' de vértices A e B com a mesma amplitude, fixemos num dos lados de θ um ponto P e, num dos lados de θ', um ponto Q.





Tirando por P (respetivamente por Q) uma perpendicular ao outro lado do ângulo θ (respetivamente θ') determina-se o pé da perpendicular R (respetivamente S). Os triângulos $[APR]$ e $[BQS]$ são semelhantes, por aplicação do critério AA. Tem-se pois $\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{BQ}}$, pelo que $sen\ \theta = \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{BQ}} = sen\ \theta'$.

Analogamente se prova que $cos\ \theta = cos\ \theta'$ e $tg\ \theta = tg\ \theta'$.

Verificou-se que ângulos de igual amplitude têm mesmo seno, cosseno e tangente, pelo que ficam bem definidos o seno, o cosseno e a tangente de uma amplitude de ângulo.

11.7

O valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ (e da respetiva amplitude) é independente da unidade de comprimento fixada pois, atendendo a GM7-7.2, o quociente entre as medidas de comprimento de dois segmentos de reta mantém-se quando se altera a unidade de comprimento.

11.8

Exemplo

Considera um triângulo $[PQR]$ *retângulo em* R *e designa o ângulo interno com vértice em* Q *por* α*.*

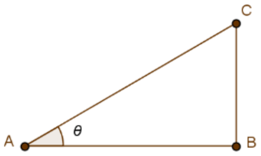
- a. *Indica qual o lado do triângulo de maior comprimento.*
- b. *Justifica que o seno e o cosseno do ângulo* α *são números positivos menores do que* 1*.*

11.9

Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$ *retângulo em* B *e um dos ângulos agudos do triângulo que designas por* θ*. Exprime* $sen\ \theta$ *e* $cos\ \theta$ *em função da medida dos comprimentos dos lados de* $[ABC]$ *e deduz que*

$$(sen\ \theta)^2 + (cos\ \theta)^2 = 1.$$



11.10

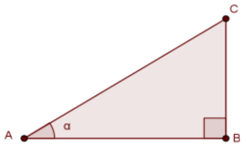
Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$ *retângulo em* B*. Calcula a razão entre o seno e o cosseno do ângulo* BAC *e prova que é igual à tangente do mesmo ângulo.*

R.: Seja o triângulo retângulo [ABC] representado na figura.

Designando o ângulo BAC por α, tem-se que: $sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ e

$cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ *pelo que* $\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = tg\alpha.$



11.11

Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$ *retângulo em* B*. Designa os ângulos agudos* BAC *e* ACB *por* α *e* β *respetivamente.*

- a. *Escreve as expressões do seno de* α *e do cosseno de* β *na forma de razões entre comprimentos de lados do triângulo* $[ABC]$*.*
- b. *Justifica que os ângulos* α *e* β *são complementares.*
- c. *Que relação existe entre o seno de um ângulo agudo e o cosseno do seu complementar?*

11.13

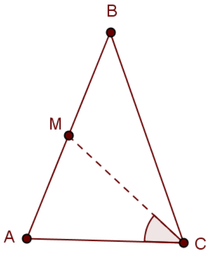
O exemplo seguinte só deve ser resolvido após ter sido estudado o descritor 13.5 pois este exercício permite relacionar vários conteúdos, nomeadamente uma propriedade do baricentro de um triângulo.

Exemplo**

Seja [ABC] um triângulo tal que , $\overline{AC} = 4, \overline{AB} = \overline{BC} = 6.$ *Seja* M *o ponto médio de* $[AB]$.

Determina a medida da amplitude do ângulo ACM *com aproximação à décima de grau, percorrendo os seguintes passos:*

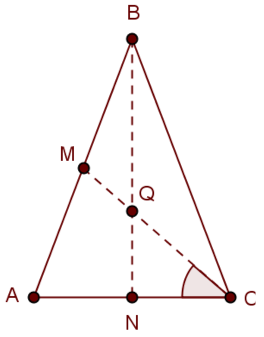
- a. *Traça a altura relativa ao vértice* B *e justifica que interseta* $[AC]$ *no respetivo ponto médio* N*.*
- b. *Justifica que o ponto* Q*, interseção de* $[MC]$ *com a altura relativa ao vértice* B*, é o baricentro do triângulo.*



c. *Determina a medida de* $\overline{BN}$ *e de* $\overline{QN}$.

d. *Utilizando uma razão trigonométrica determina* a medida da amplitude do ângulo ACM *com aproximação à décima de grau com o auxílio de uma calculadora.*

R.:



a. Atendendo a que $\overline{AB} = \overline{BC}$, B pertence à mediatriz de $[AC]$. Como essa reta é perpendicular a $[AC]$, contém a altura relativa a esse vértice. Desta forma N pertence a $[AC]$ e à respetiva mediatriz, pelo que coincide com o ponto médio de $[AC]$.

b. Como $[CM]$ e $[BN]$ são medianas do triângulo $[ABC]$ que se intersetam em Q, este ponto é o baricentro do triângulo.

c. A medida de $\overline{BN}$ pode ser obtida utilizando o teorema de Pitágoras, ou seja, $\overline{BN}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CN}^2 = 36 - 4 = 32$ donde $\overline{BN} = \sqrt{32}$ e, como Q é o baricentro do triângulo, $\overline{QN} = \frac{1}{3} \times \overline{BN} = \frac{1}{3} \times \sqrt{32} = \frac{\sqrt{32}}{3}$

d. Como o triângulo $[NCQ]$ é retângulo, tem-se que

$$tgA\hat{C}M = \frac{\overline{QN}}{\overline{NC}} = \frac{\frac{\sqrt{32}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{6} = \frac{\sqrt{2 \times 16}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Utilizando a tecla tan^{-1} numa calculadora científica, obtém-se $A\hat{C}M = tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 43{,}3^0$.

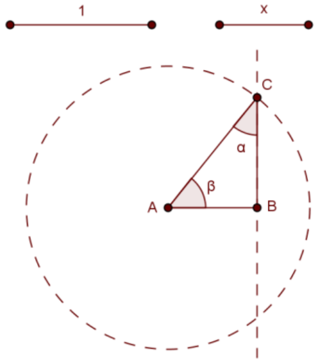
Observação: Funções trigonométricas inversas

Neste ciclo apenas se considera o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo, isto é, com medida de amplitude, em graus, no intervalo $]0{,}90[$. Como as funções

$$\sin:\ ]0{,}90[\ \longrightarrow]0{,}1[\ ,\cos:\ ]0{,}90[\ \longrightarrow]0{,}1[\ \text{e}\ \tan:\ ]0{,}90[\ \longrightarrow]0, +\infty[$$

são bijetivas, poderá indicar-se aos alunos, sem referir concretamente as funções arco-coseno, arco-seno e arco-tangente (ou mesmo as funções seno, cosseno e tangente enquanto funções de uma medida de amplitude angular), que as teclas sin^{-1}, cos^{-1}, e tan^{-1} fornecem uma aproximação da única medida de amplitude de ângulo agudo cujo seno, cosseno e tangente é igual a um dado número (entre 0 e 1, no caso do seno e do cosseno, e positivo, no caso da tangente).

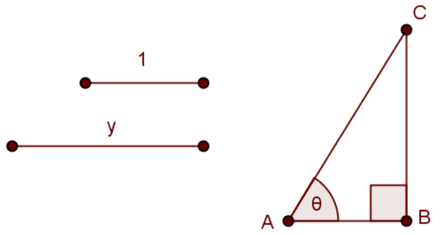
É relativamente fácil mostrar a bijetividade destas funções.



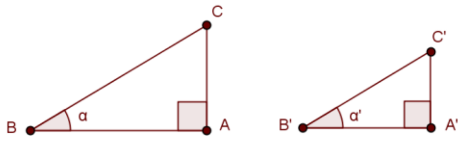
Comecemos por observar que dado um número $x \in\ ]0{,}1[$, existem ângulos agudos α e β tais que $\sin(\hat{\alpha}) = x$ e $\cos(\hat{\beta}) = x$. Basta para tal construir um triângulo retângulo cujas medidas da hipotenusa e de um dos catetos sejam respetivamente iguais a 1 e a x. Tomando um segmento $[AB]$ de comprimento x , a circunferência de centro em A e raio $r = 1 > x$ interseta a reta perpendicular a $[AB]$ que passa por B em dois pontos (ver TCG, GM6-1.4).

Nomeando C um deles, obtém-se um triângulo $[ABC]$ com as características desejadas. Tem-se então as propriedades anunciadas tomando $\alpha = A\hat{C}B$ e $\beta = B\hat{A}C$.

Por outro lado, dado um qualquer número positivo y, considerando dois segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$, perpendiculares e de medidas de comprimento respetivamente iguais a 1 e a y, $\tan(\hat{\theta}) = y$, onde $\theta = B\hat{A}C$.



A unicidade da amplitude de um ângulo agudo com um dado seno, cosseno ou tangente decorre de forma imediata dos critérios de semelhança de triângulos.
Sejam por exemplo dois ângulos agudos α e α' tais que $\cos(\alpha) = \cos(\alpha')$. A argumentação no caso do seno ou da tangente é análoga. Construímos dois triângulos ABC e $A'B'C'$ retângulos respetivamente em A e A' tais que $\alpha = A\hat{B}C$ e $\alpha' = A'\widehat{B'}C'$.



Da igualdade $\cos(\alpha) = \cos(\alpha')$ resulta que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

O Teorema de Pitágoras implica então de maneira imediata que se tem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}\ ,$$

já que, definindo

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \left(r\overline{B'C'}\right)^2 - \left(r\overline{A'B'}\right)^2 = r^2\left(\overline{B'C'}^2 - \overline{A'B'}^2\right) = r^2\overline{A'C'}^2,$$

de onde se conclui que $\overline{AC} = r\overline{A'C'}$.

Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são, pelo critério LLL, semelhantes, e os ângulos α e α', que se opõem a lados correspondentes, são iguais. Em particular, $\hat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$,como queríamos mostrar.

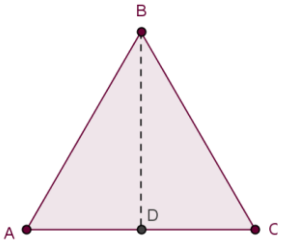
12.1

Exemplo

Considera um triângulo equilátero $[ABC]$ cujo lado mede $4\ cm$.

- *a. Determina a amplitude do ângulo BAC e utiliza razões trigonométricas para determinar a medida de $\overline{BD}$.*
- *b. Determina a área do triângulo $[ABC]$.*

R.:



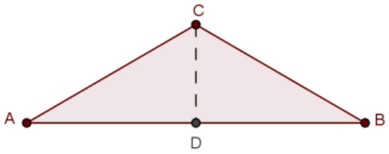
a. Na figura está representado o triângulo equilátero $[ABC]$ e a altura $[BD]$ relativa ao vértice B.
Como o triângulo é equilátero os ângulos internos são iguais pelo que $B\hat{A}C = \frac{180^0}{3} = 60^0$, tendo-se assim $sen\ BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado, $sen\ BAC = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{4}$. Finalmente,
$\frac{\overline{BD}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{3}$, ou seja, a medida de $\overline{BD}$ é igual a $2\sqrt{3}\ cm$.

b. Utilizando a alínea anterior, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2} = \frac{4\times2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, ou seja, a área do triângulo mede $4\sqrt{3}\ cm^2$.

Exemplo

Considera um triângulo isósceles $[ABC]$ tal que $A\hat{C}B = 120^0$ e $\overline{AB} = 3cm$. Determina a área do triângulo $[ABC]$.

R.:



O ângulo ACB é obtuso, logo os dois restantes ângulos internos são agudos. São portanto estes os ângulos iguais:

$$C\hat{A}B = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0.$$

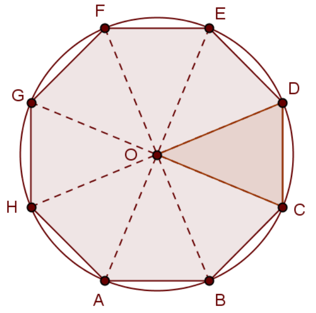
Como $\overline{AC} = \overline{CB}$ e sendo $[CD]$ a altura do triângulo relativa ao vértice C, $\overline{AD} = \overline{DB}$, logo $\overline{AD} = 1{,}5cm$.

Como $tg\ CAB = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{1{,}5}$ e $tg\ CAB = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então

$$\frac{\overline{CD}}{1{,}5} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{CD} = 1{,}5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, ou seja, a área do triângulo mede $\frac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2$.

Exemplo



Considera um octógono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio $4\ cm$ e decomposto em oito triângulos de vértice O e com um lado comum ao octógono.

- *a. Justifica que os triângulos nos quais está dividido o octógono são iguais e que $C\hat{O}D = 45^0$.*
- *b. Determina o valor exato das áreas do triângulo $[OCD]$ e do octógono.*

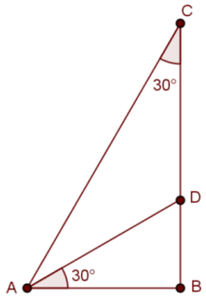
R.:

a. Aplicando o critério LLL de igualdade de triângulos conclui-se que os triângulos são todos iguais. Assim, os ângulos internos de vértice em O são todos iguais pelo que têm amplitude $\left(\frac{360}{8}\right)^{\text{o}} = 45°$.

b. Designando por h a altura relativa ao vértice D do triângulo $[COD]$ então $sen\ COD = \frac{h}{4} \Leftrightarrow 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = h \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2}$ pelo que a área do triângulo é $A_{[COD]} = \frac{4\times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$, ou seja a área do triângulo mede $4\sqrt{2}cm^2$ e a área do octógono mede $8 \times 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}cm^2$.

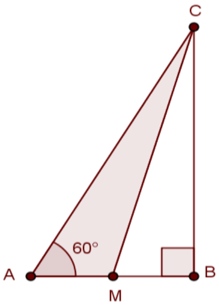
Exemplo*

Na figura está representado um triângulo retângulo em B e um ponto D no lado $[BC]$ tal que $B\hat{A}D = B\hat{C}A = 30^0$. Sabendo que $\overline{AD} = 4\ cm$, determina o valor exato perímetro do triângulo $[ABC]$.



Exemplo

Considera um triângulo $[ABC\ ]$ retângulo em B e M o ponto médio de $[AB]$. Sabendo que $B\hat{A}C = 60^0$ e que $\overline{AC} = 6\ cm$, determina o valor exato da área do triângulo $[AMC]$.



13.1

O conceito de mediatriz de um segmento de reta foi estudado no 6.º ano, (GM6-9.4 a 9.8) pelo que é importante que no 9.º ano a abordagem deste descritor seja precedida por atividades que permitam recordar não só a definição de mediatriz de um segmento de reta (reta perpendicular ao segmento no respetivo ponto médio) mas também a sua caracterização como lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos extremos do segmento de reta. Neste ano de escolaridade verifica-se apenas que as mediatrizes dos três lados de um triângulo se intersetam num ponto que se denomina circuncentro do triângulo por ser o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, os vértices do triângulo estão na circunferência.

Exemplo*

Considera um triângulo $[ABC]$ e as retas r e s mediatrizes respetivamente de $[AB]$ e $[BC]$.

a. *Justifica que as retas r e s se intersetam num ponto P que também pertence à mediatriz de $[AC]$.*
b. *Justifica que o ponto P é o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.*

R.:

a. Atendendo a que r e s são retas perpendiculares a retas não paralelas também não são paralelas pelo que se intersetam num ponto que podemos designar por P. Por pertencer às mediatrizes de $[AB]$ e $[BC]$ o ponto P é equidistante, respetivamente, dos pontos A e B e dos pontos B e C logo também será equidistante dos pontos A e C o que nos permite concluir que P pertence à mediatriz de $[AC]$.

b. Atendendo a que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, P é o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

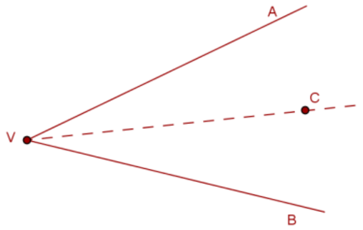
Observação: O centro de uma circunferência que contenha os três pontos A, B e C é necessariamente a interseção das três mediatrizes, já que é equidistante dos três. Assim, uma tal circunferência é única.

13.2
13.3

O conceito de bissetriz de um ângulo foi abordado pela primeira vez no 5.º ano (GM5-1.4) como semirreta nele contida, que tem origem no vértice do ângulo e que forma, com cada um dos lados, ângulos iguais. No 9.º ano mostra-se que pode ser caracterizada como o lugar geométrico dos pontos do ângulo que são equidistantes das retas suportes dos lados do ângulo e prova-se que as três bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se intersetam num ponto designado por incentro, assim chamado por se tratar do centro da circunferência inscrita ao triângulo, ou seja, uma circunferência a que o triângulo é circunscrito (GM6-1.6).

Exemplo*

Considera um ângulo convexo AVB, um ponto P da respetiva bissetriz e os pontos R e S, pés das perpendiculares traçadas de P, respetivamente, para VA e VB.



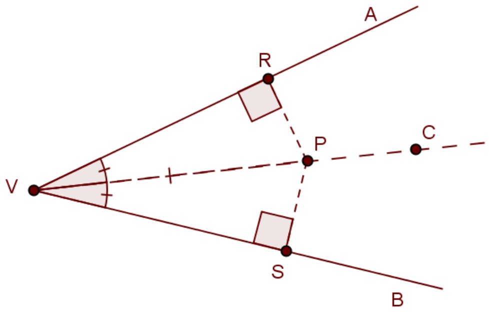
a. Justifica que os triângulos $[RVP]$ e $[SVP]$ são iguais.

b. Justifica que $\overline{RP} = \overline{SP}$ e conclui que os pontos da bissetriz de um ângulo convexo são equidistantes das retas suporte dos lados do ângulo.

c. Considera um ponto T do ângulo AVB que seja equidistante das retas suporte dos lados do ângulo AVB. Justifica que T pertence à bissetriz do ângulo e conclui que a bissetriz de um ângulo convexo é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que são equidistantes das retas suporte dos lados do ângulo.

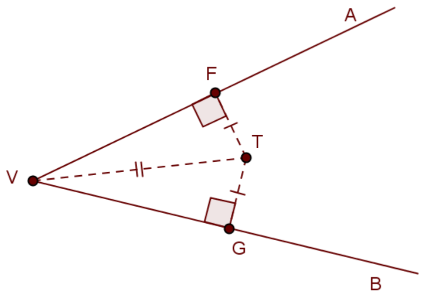
R.:

a. Os ângulos RVP e SVP são iguais pois $\dot{V}P$ é a bissetriz do ângulo AVB. Os ângulos VRP e VSP também são iguais pois são ambos retos logo VPR e VPS também são iguais. Atendendo a que $[VP]$ é um lado comum aos dois triângulos, pelo caso ALA de igualdade de triângulos, podemos concluir que os triângulos $[VPR]$ e $[VPS]$ são iguais.



b. Tem-se $\overline{RP} = \overline{SP}$ pois $[RP]$ e $[SP]$ opõem-se a ângulos iguais de triângulos iguais. Como P é um ponto genérico da bissetriz do ângulo AVB, podemos afirmar que qualquer ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do triângulo e consequentemente das retas suporte desses lados.

c. Se T pertence ao ângulo AVB e é equidistante das retas suporte dos respetivos lados então T é equidistante dos pés das perpendiculares, F e G, traçadas de T para VA e VB, ou seja, os triângulos $[VTF]$ e $[VTG]$ são retângulos e $\overline{TF} = \overline{TG}$.



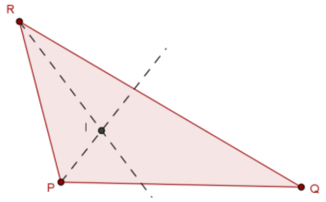
Como $[VT]$ é lado comum aos triângulos e os dois triângulos são retângulos podemos concluir, utilizando o Teorema de Pitágoras, que também se tem $\overline{VF} = \overline{VG}$.
Pelo caso LLL, os triângulos $[VTF]$ e $[VTG]$ são iguais.
Assim, podemos concluir que os ângulos AVT e BVT são iguais por se oporem a lados iguais em triângulos iguais, pelo que T é um ponto da bissetriz do ângulo AVB.

Tendo em conta esta propriedade e a justificada na alínea b., podemos afirmar que a bissetriz de um ângulo convexo é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que são equidistantes das retas suportes dos lados do ângulo.

Exemplo*

Considera um triângulo $[PQR]$ e as bissetrizes de dois dos seus ângulos internos.

a. Justifica que o ponto de interseção I das duas bissetrizes também pertence à bissetriz do terceiro ângulo mostrando que é equidistante das retas suporte dos três lados.



b. Justifica que I é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

R.:

a. Se I pertence á bissetriz do ângulo PRQ então é equidistante das retas RP e RQ. Como o ponto I também pertence à bissetriz do ângulo RPQ então é equidistante de RP e QP. Assim, podemos concluir que I é também equidistante das retas RQ e QP, logo pertence à bissetriz do ângulo PQR.

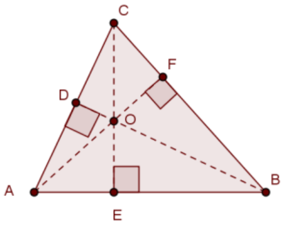
b. Atendendo a que o ponto I pertence às três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo então, sendo J, K e L, respetivamente, os pés da perpendiculares traçadas de I para cada um dos lados do triângulo, $\overline{IJ} = \overline{IK} = \overline{IL}$, ou seja, I é o centro de uma circunferência que passa pelos pontos J, K e L. Como os segmentos $[IJ]$, $[IK]$ e $[IL]$, raios da circunferência, são perpendiculares aos lados do triângulo, estes são tangentes à circunferência (GM6-1.4) e portanto a circunferência é inscrita ao triângulo.

Observação: Tal como foi visto para a circunferência circunscrita, é também única a circunferência inscrita a um triângulo. De facto, o centro de uma tal circunferência pertence necessariamente a cada uma das três bissetrizes, tratando-se portanto do incentro. O raio é a distância comum do incentro a cada um dos lados do triângulo.

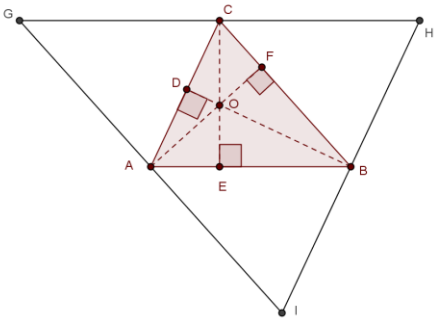
13.4

As três alturas de um triângulo são concorrentes e o respetivo ponto de interseção designa-se por «ortocentro» do triângulo.

Embora não seja solicitado o reconhecimento desta propriedade por parte dos alunos, apresenta-se também uma possível justificação que é válida para qualquer triângulo.



Seja $[ABC]$ um triângulo e $[CE]$, $[AF]$ e $[BD]$ as respetivas alturas. Pretende-se provar que as retas suporte destas alturas passam por um mesmo ponto.



Para esse efeito, consideremos três retas, cada uma paralela a um dos lados do triângulo e passando pelo vértice oposto. Estas três retas determinam um novo triângulo $[GHI]$.

Por construção, $[ABCG]$ é um paralelogramo, pelo que $\overline{AB} = \overline{GC}$. Como $[ABHC]$ é também um paralelogramo, $\overline{AB} = \overline{CH}$. Conclui-se assim que $\overline{CH} = \overline{GC}$, pelo que CE, perpendicular a AB e portanto também a GH, é a mediatriz deste segmento.

Analogamente, AF e BD são as mediatrizes de GI e de IH respetivamente. Como CE, AF e BD são as mediatrizes de um triângulo, passam por um mesmo ponto (o circuncentro).

13.5

A «mediana de um triângulo» é um segmento de reta que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Assim, um triângulo tem três medianas.

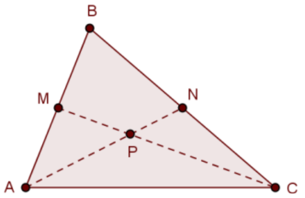
Duas quaisquer medianas de um triângulo intersetam-se num ponto a uma distância de cada um dos vértices igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da respetiva mediana.

Os seguintes exemplos fornecem duas demonstrações distintas desta propriedade.

Exemplo*

Considera um triângulo $[ABC]$ e os pontos médios M e N respetivamente dos lados $[AB]$ e $[BC]$.

Designa o ponto interseção das medianas $[CM]$ e $[AN]$ por P.



a. Justifica que

a_1. Os segmentos de reta $[MN]$ e $[AC]$ são paralelos.

a_2. Os triângulos $[MNP]$ e $[ACP]$ são semelhantes.

b. Indica a razão da semelhança que transforma o triângulo $[MNP]$ em $[ACP]$ e conclui que $\overline{CP} = \frac{2}{3}\overline{CM}$ e $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AN}$.

R.:

a_1. Aplicando o resultado enunciado no descritor GM7-4.6, se uma reta intersetar os lados $[AB]$ e $[BC]$ respetivamente nos pontos médios M e N então é paralela ao terceiro lado $[AC]$.

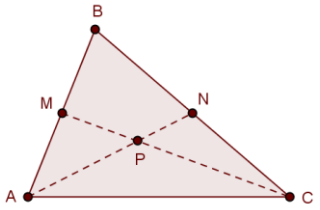
a_2. Os ângulos MPN e CPA são verticalmente opostos logo iguais e os ângulos MNA

e NAC também são iguais pois são alternos internos, determinados por uma secante num par de retas paralelas. Assim, pelo critério AA de semelhança de triângulos, conclui-se que $[MNP]$ *e* $[ACP]$ são semelhantes.

b. Mais uma vez atendendo ao resultado enunciado no descritor GM7-4.6, temos $\overline{AC}=2\,\overline{MN}$. Assim, a razão da semelhança que transforma $[MNP]$ em $[ACP]$ é igual a 2 e portanto $\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{CP}+\overline{PM}}=\frac{2\times\overline{MP}}{3\times\overline{MP}}=\frac{2}{3}$ e $\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP}+\overline{PN}}=\frac{2\times\overline{NP}}{3\times\overline{NP}}=\frac{2}{3}$, concluindo-se assim que $\overline{CP}=\frac{2}{3}\overline{CM}$ e $\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AN}$.

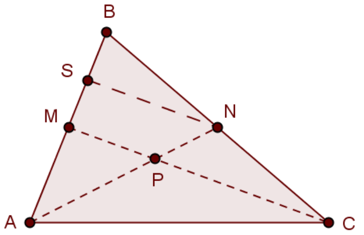
Exemplo*

Considera um triângulo $[ABC]$ e os pontos médios M e N respetivamente dos lados $[AB]$ e $[BC]$.
Designa o ponto interseção das medianas $[CM]$ e $[AN]$ por P.



Traça a reta paralela a CM que passa por N e designa por S o ponto de interseção com $[AB]$. Justifica que S é o ponto médio de $[BM]$ e conclui que $\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AN}$.

R.: Aplicando o resultado enunciado no descritor GM7-4.6, sabe-se que, se $[NS]$ é paralela a $[CM]$ e N é o ponto médio de $[BC]$, então S é o ponto médio de $[AB]$. Aplicando o teorema de Tales, sabe-se que $\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{AM}}=\frac{2}{3}$ logo $\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AN}$.



Esta propriedade tem como consequência imediata a existência de um ponto comum às três medianas de um triângulo: consideremos um triângulo $[ABC]$ e L, M e N os pontos médios de $[AC]$, $[AB]$ e $[BC]$ respetivamente.
Designando por P o ponto de interseção das medianas $[AN]$ e $[CM]$ e por Q o ponto de interseção das medianas $[AN]$ e $[BL]$, vimos que
$\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AN}$ e $\overline{AQ}=\frac{2}{3}\overline{AN}$. Como P e Q pertencem ambos ao segmento $[AN]$, P e Q são coincidentes.
Este ponto comum às medianas de um triângulo, denominado «baricentro», «centro de massa» ou «centroide», situa-se portanto a uma distância de cada um dos vértices igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da respetiva mediana.

13.6

Os alunos podem construir os pontos notáveis de um triângulo recorrendo a régua e compasso ou utilizando programas de geometria dinâmica. Esses procedimentos podem sempre vir associados à aplicação de propriedades destes pontos ou das linhas que os determinam.

Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$.

- *a. Constrói a mediana do lado $[AB]$, designando o ponto médio de $[AB]$ por D.*
- *b. Justifica que os triângulos $[BCD]$ e $[ACD]$ têm a mesma área.*
- *c. Constrói o baricentro do triângulo $[ABC]$ e designa-o por G.*
- *d.* Justifica que os seis triângulos de vértice comum G determinados pelas três medianas de $[ABC]$* têm a mesma área.

14.1

Exemplo

Considera três pontos não colineares A, B e C.

a. Determina, através de uma construção geométrica, um ponto P que seja equidistante dos três pontos dados.

b. Para além dos pontos A, B e C existirão outros pontos do mesmo plano que estejam à mesma distância do ponto P ? Identifica o respetivo lugar geométrico.

15.6

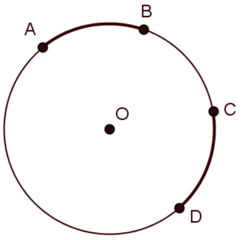
Este descritor pode ser trabalhado em conjunto com os descritores 9.5 e 9.6. De facto, sabemos já pelos resultados referidos nestes descritores que dois ângulos ao centro com a mesma amplitude determinam, por interseção com a circunferência, arcos com o mesmo comprimento (9.5) e portanto arcos iguais (9.6), e reciprocamente. Tudo se resume pois a reconhecer que ângulos ao centro iguais determinam cordas iguais e vice-versa.

Exemplo

Na figura está representada uma circunferência de centro O e dois arcos AB e CD iguais. Justifica que:

a. Os ângulos ao centro AOB e COD são iguais.

b. As cordas $[AB]$ e $[CD]$ são iguais.



R.:

a. Pelo critério de igualdade de arcos numa mesma circunferência, os ângulos ao centro AOB e COD são iguais.

b. Os triângulos $[AOB]$ e $[COD]$ são iguais pelo critério LAL. Logo $[AB]$ e $[CD]$ são iguais por serem lados opostos a ângulos iguais em triângulos iguais.

15.8

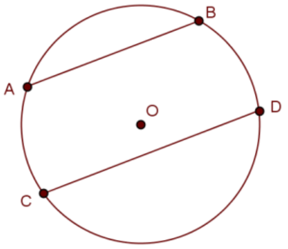
Exemplo

Na figura está representada uma circunferência de centro O e duas cordas $[AB]$ e $[CD]$ paralelas. Traça a reta r perpendicular a AB e que passa em O. Justifica que:

a. A reta r é a mediatriz de $[AB]$ e de $[CD]$.

b. A corda $[AC]$ é igual à corda $[BD]$.

c. Os arcos AC e BD são iguais.



R.:

a. Tanto a mediatriz m de $[AB]$ como a reta r são perpendiculares ao segmento de reta $[AB]$, logo são paralelas. Como o ponto O é comum a estas duas retas (é equidistante de A e de B logo pertence à mediatriz de $[AB]$ e pertence a r por hipótese), r e m coincidem. De forma análoga, r é a mediatriz de $[CD]$.

b. Pela alínea anterior, as imagens dos pontos A e C pela reflexão de eixo r, são, respetivamente, os pontos B e D. Assim, esta reflexão transforma $[AC]$ em $[BD]$, pelo que estas cordas são iguais.

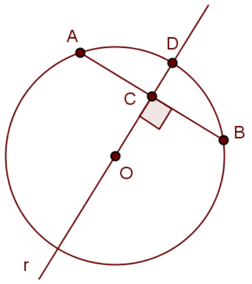
c. Pelo descritor 15.6, numa mesma circunferência, a cordas iguais correspondem arcos iguais.

15.9

Exemplo

Na figura está representada uma circunferência de centro O, uma corda $[AB]$ e uma reta r que passa por O e é perpendicular a $[AB]$. Justifica que:

- *a. $\overline{AC} = \overline{CB}$.*
- *b. Os ângulos AOD e BOD são iguais.*
- *c. Os arcos AD e DB são iguais.*



R.:

a. A reta r é perpendicular a $[AB]$ e contém um ponto equidistante dos extremos deste segmento, pelo que se trata da sua mediatriz (ver a alínea a. do exemplo anterior).

b. Os ângulos AOD e BOD são iguais pois são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo r (da alínea anterior, a imagem de A é o ponto B e os pontos O e D, pertencendo ao eixo, são imagens de si próprios).

c. Aplicando o descritor 15.6, os arcos AD e DB são iguais pois são determinados por ângulos ao centro iguais, respetivamente, os ângulos AOD e BOD.

15.11

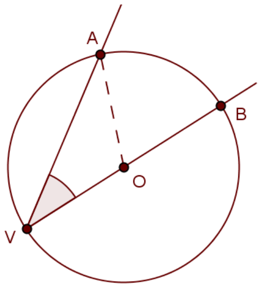
Exemplo

Considera uma circunferência de centro O e três pontos A, V e B pertencentes a essa circunferência. Justifica, em cada uma das situações seguintes, que a amplitude do ângulo AVB é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados:

- *a. $[VB]$ é diâmetro da circunferência;*
- *b. Caso $[VB]$ não seja diâmetro, considera um ponto C da circunferência tal que $[VC]$ seja um diâmetro e analisa as seguintes situações:*
  - *b_1. Os pontos A e B pertencem à mesma semicircunferência definida pelo diâmetro $[VC]$.*
  - *b_2. Os pontos A e B pertencem a semicircunferências distintas definidas pelo diâmetro $[VC]$.*

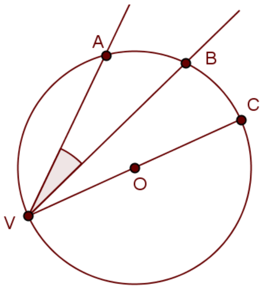
R.:

a. O triângulo $[VOA]$ é isósceles pois $\overline{OV} = \overline{OA}$ logo $A\hat{V}B = V\hat{A}O$. Como o ângulo AOB é externo do triângulo $[VOA]$, $A\hat{O}B = A\hat{V}B + V\hat{A}O = 2 \times A\hat{V}B$ e como a amplitude do ângulo ao centro AOB é igual à amplitude do arco AB, então a amplitude do arco AB é igual ao dobro da amplitude do ângulo AVB, ou seja, a amplitude do ângulo AVB é metade da amplitude do arco AB.



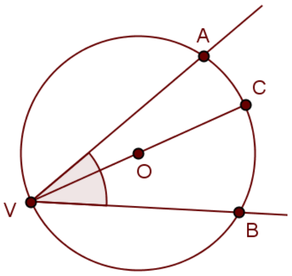
b. b_1. Na alínea a. já provámos que se um dos lados de um ângulo inscrito contiver um diâmetro então a medida da respetiva amplitude é igual a metade da medida da amplitude do arco compreendido entre os respetivos lados. Portanto $A\hat{V}C = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ e $B\hat{V}C = \frac{1}{2}\widehat{BC}$ pelo que

$$A\hat{V}B = A\hat{V}C - B\hat{V}C = \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AC}-\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$



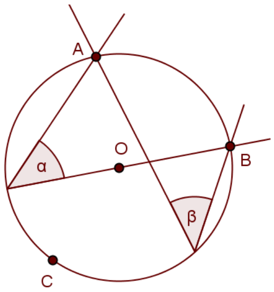
b$_2$. Analogamente, tem-se que $A\hat{V}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$ e $C\hat{V}B = \frac{\widehat{BC}}{2}$ pelo que

$$A\hat{V}B = A\hat{V}C + B\widehat{VC} = \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{CB}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{CB}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



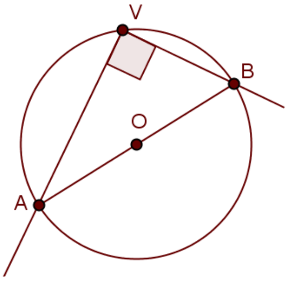
Exemplo

Na figura estão representados os ângulos α e β inscritos no arco ACB. Justifica que têm a mesma amplitude



Exemplo

Na figura está representada uma circunferência de diâmetro $[AB]$ e V um ponto dessa circunferência distinto de A e B. Justifica que o ângulo AVB é reto.



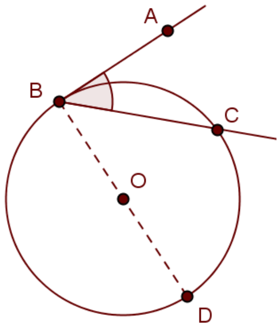
15.13

Exemplo

Na figura estão representados dois pontos B e C de uma dada circunferência e um ângulo de segmento ABC.

Considerando o diâmetro $[BD]$ da circunferência:

- *a. Justifica que o ângulo ABD é reto.*
- *b. Exprime, em graus, a medida de amplitude do ângulo ABC em função da medida de amplitude do ângulo CBD.*
- *c. Justifica que a amplitude do ângulo ABC é igual a metade da amplitude do arco BC.*

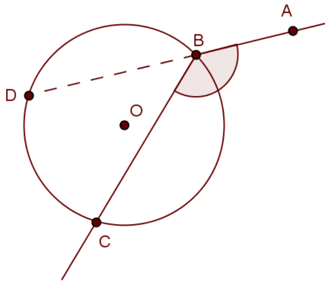


15.14

Exemplo

Na figura estão representados dois pontos B e C de uma dada circunferência, um ângulo ex-inscrito CBA e a corda DB contida na reta AB.

- *a. Exprime, em graus, a medida da amplitude do ângulo CBA em função da medida da amplitude de DBC.*
- *b. Justifica que a amplitude do ângulo CBA é igual à média das amplitudes dos arcos BD e CB.*



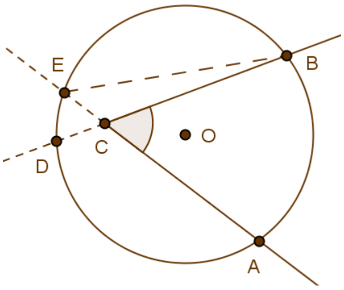
15.15

Exemplo*

Na figura estão representados dois pontos A e B de uma dada circunferência, um ponto C interior ao respetivo círculo e as cordas AE e DB que passam pelo ponto C.

a. Exprime a amplitude dos ângulos EBD e BEA em função da amplitude dos arcos compreendidos entre os seus lados.

b. Tendo em conta que o ângulo ACB é externo do triângulo $[BEC]$, exprime a medida da amplitude de ACB em função das medidas das amplitudes dos arcos AB e DE.



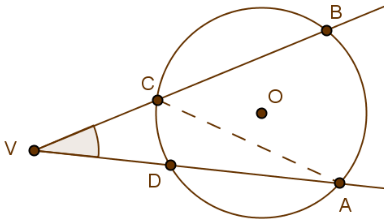
15.16

Exemplo

Na figura estão representados dois pontos A e B pertencentes a uma dada circunferência e um ponto V exterior ao respetivo círculo. Estão ainda representados os pontos C e D (distintos de A e de B) pertencentes à circunferência e, respetivamente, às semirretas VB e VA.

a. Exprime a amplitude dos ângulos ACB e CAD em função da amplitude dos arcos compreendidos entre os respetivos lados.

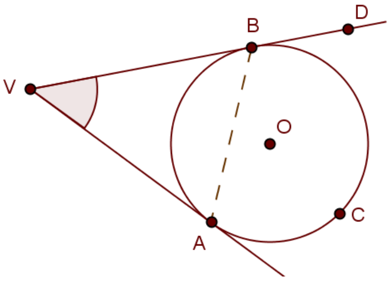
b. Tendo em conta que o ângulo BCA é externo do triângulo $[VCA]$, exprime a amplitude de AVB em função das amplitudes dos arcos AB e CD.



Exemplo

Na figura está representado um ponto C pertencente a uma dada circunferência. O ângulo AVB tem lados tangentes à circunferência, respetivamente nos pontos A e B, e vértice V no exterior do respetivo círculo. Finalmente, o ponto D pertence à semirreta oposta a $\dot{B}V$.

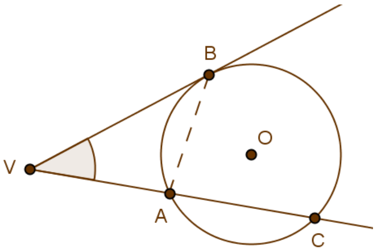
Tendo em conta que o ângulo DBA é externo do triângulo $[VAB]$, exprime a amplitude de AVB em função das amplitudes dos arcos AB e BCA.



Exemplo

Na figura está representado o ângulo AVB de vértice no exterior de um dado círculo de centro O e em que um dos lados interseta a respetiva circunferência em dois pontos A e C e o outro é tangente em B.

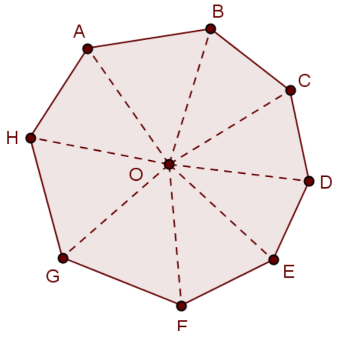
Tendo em conta que o ângulo BAC é externo do triângulo $[VAB]$, exprime a amplitude de AVB em função das amplitudes dos arcos AB e BCA.



15.17

Exemplo*

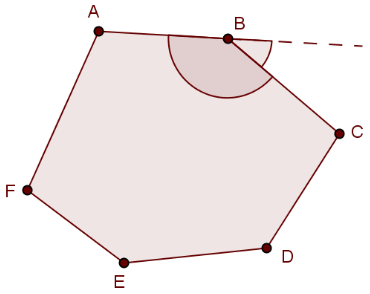
Considera um octógono decomposto em oito triângulos de vértice comum O e com os dois restantes vértices coincidentes com vértices do octógono.



- a. *Determina a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos dos oito triângulos.*
- b. *Indica a soma das medidas das amplitudes dos ângulos agudos com vértice em O.*
- c. *Utilizando os resultados obtidos nas alíneas anteriores, determina a soma das amplitudes dos ângulos internos do octógono.*
- d. *Considerando agora um polígono de n lados, adapta o procedimento utilizado nas alíneas anteriores de forma a provar que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos do polígono é, em graus, igual a $(n-2)180$.*

Exemplo

Na figura está representado um hexágono $[ABCDEF]$.

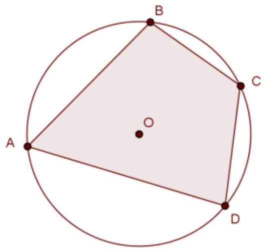


- a. *Determina a soma das medidas de amplitude dos ângulos internos do hexágono.*
- b. *Atendendo a que a soma de cada um dos ângulos internos com um dos externos adjacentes é um ângulo raso, determina a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos do hexágono (considerando apenas um por vértice).*
- c. *Considerando agora um polígono de n lados, adapta o procedimento adotado nas alíneas anteriores de forma a provar que a soma dos ângulos externos de um polígono de n lados (considerando apenas um por vértice) é igual a um ângulo giro.*

15.18

Exemplo

Considera um quadrilátero $[ABCD]$ inscrito numa circunferência de centro O.

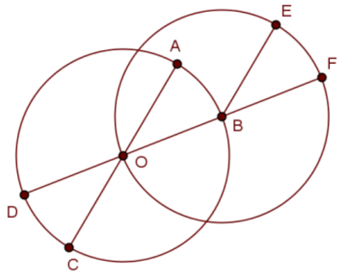


- a. *Exprime a amplitude dos ângulos inscritos BAD e BCD em função da amplitude do $arco\ BD$.*
- b. *Utilizando as expressões obtidas na alínea a., prova que $B\hat{A}C + B\hat{C}D = 180^0$.*

16.1
16.2
16.3

Exemplo*

Na figura estão representadas duas circunferências, respetivamente, de centros O e B, três diâmetros $[AC], [BD]$ e $[OF]$ e o raio $[BE]$ paralelo a $[OA]$.



Justifica que:

- a. *Os ângulos AOB, COD e EBF são iguais.*
- b. *As cordas $[AB]$, $[CD]$ e $[EF]$ são iguais.*
- c. *Os arcos AB, CD e EF são iguais.*

R.:

a. Os ângulos AOB e COD são iguais pois são verticalmente opostos. Os ângulos AOB e EBF são iguais pois são correspondentes determinados pela secante OF nas retas paralelas AO e BE.

b. As circunferências são iguais porque partilham um mesmo raio ($[OB]$). As cordas $[AB]$, $[CD]$ e $[EF]$ são iguais uma vez que são determinadas em circunferências iguais por ângulos ao centro iguais.

c. Os arcos AB, CD e EF são iguais por corresponderem a ângulos ao centro iguais em circunferências iguais (*cf.* 9.5 e 9.6).

Exemplo

Considera uma circunferência de diâmetro $[AB]$ e um ponto C pertencente à circunferência e distinto de A e de B.

a. Como classificas o triângulo $[ABC]$ quanto aos ângulos?

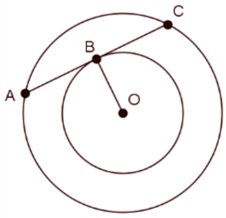
b. Qual o lugar geométrico dos pontos D tais que o ângulo ADB seja*

b_1. obtuso?

b_2. agudo?

Exemplo

Na figura estão representadas duas circunferências de centro O e a corda $[AC]$ tangente à circunferência de raio menor em B. Justifica que $\overline{AB} = \overline{BC}$.

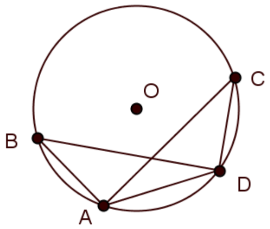


Exemplo

Na figura está representada uma circunferência de centro O e nela quatro pontos A, B, C e D tais que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

a. Justifica que $\overline{BD} = \overline{AC}$.

b. Supondo que a amplitude do arco maior BC mede 185^0 e que a do arco AD mede 80^0, determina a medida da amplitude do ângulo CAD.

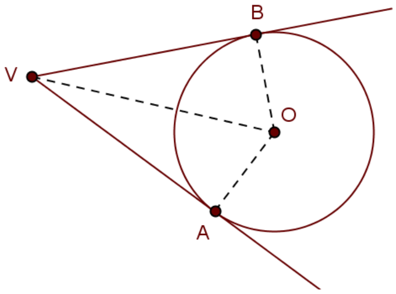


Exemplo

Na figura está representada uma circunferência de centro O e duas semirretas tangentes à circunferência nos pontos A e B e concorrentes em V.

a. Justifica que $\overline{VB} = \overline{VA}$.

b. Supondo que a amplitude do arco AB mede 120 graus determina a medida da amplitude do ângulo AVB.



Exemplo*

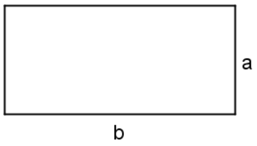
Dado um ponto P exterior a um dado círculo de centro O, como construir duas tangentes à circunferência e secantes em P?

Sugestão: Sabe-se que as retas tangentes a uma circunferência de centro O são perpendiculares ao raio nos respetivos pontos de tangência. Sendo R e S os pontos de tangência, $RO \perp RP$ e $SO \perp SP$, pelo que os ângulos ORP e OSP são ângulos inscritos numa circunferência de diâmetro $[OP]$. Basta determinar o centro dessa circunferência e determinar os pontos de tangência.

O problema da «quadratura» remonta à Antiguidade. Consiste em construir, dada uma figura geométrica, um quadrado com a mesma área. Provou-se tardiamente, no século XIX, que a quadratura do círculo - ou seja, a construção de um quadrado com mesma área de um círculo dado - é impossível. No exemplo seguinte apresenta-se a quadratura do retângulo.

Exemplo*

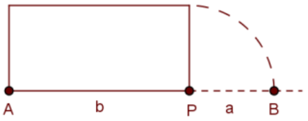
Considera um retângulo em que, numa dada unidade, a base mede b e a altura mede a. Para determinar, geometricamente, a medida do lado de um quadrado que tenha a mesma área do retângulo, ou seja, para efetuar a quadratura do retângulo, percorre os seguintes passos:



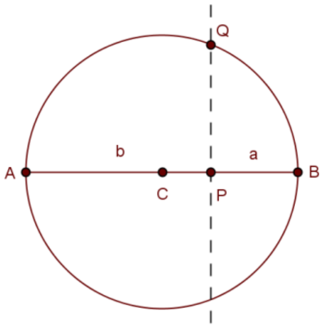
- *a. Considera um segmento de reta $[AB]$ tal que $\overline{AB} = a + b$ e designa por P um ponto pertencente a $[AB]$ tal que $\overline{AP} = a$ e $\overline{PB} = b$.*
- *b. Desenha a circunferência de diâmetro $[AB]$, traça a reta perpendicular a AB que passa por P e designa por Q um dos pontos de interseção dessa reta com a circunferência.*
- *c. Justifica que o triângulo $[AQB]$ é retângulo em Q e que $\frac{a}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{b}$.*
- *d. Conclui que $[PQ]$ é o lado de um quadrado que tem área igual ao retângulo inicial e desenha-o.*

R.:

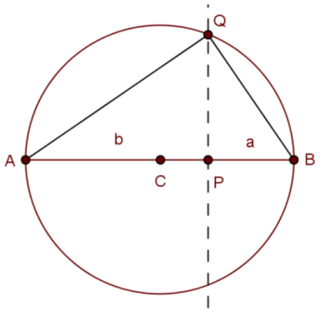
a.



b.



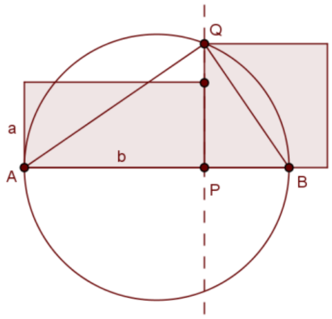
c.



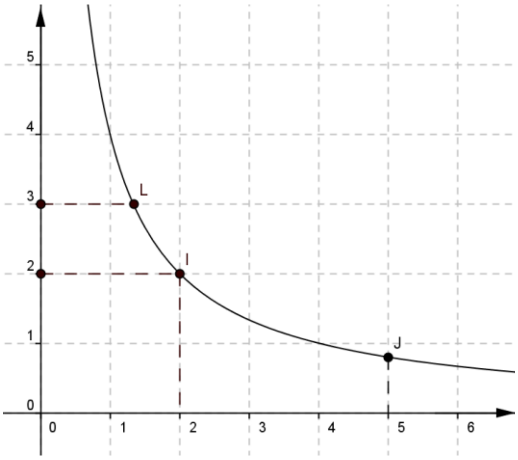
O triângulo $[AQB]$ é retângulo pois o ângulo AQB é reto porque está inscrito numa semicircunferência. Sendo $[PQ]$ a altura do triângulo $[AQB]$ relativa à hipotenusa, divide-o em dois triângulos semelhantes (caso AA). Ao lado $[AP]$ do triângulo $[APQ]$ corresponde o lado $[PQ]$ do triângulo $[BPQ]$ e ao lado $[PQ]$ do triângulo $[APQ]$ corresponde o lado $[BP]$ do triângulo $[BPQ]$, basta observar que $P\hat{A}Q = B\hat{Q}P$.

Tem-se portanto $\frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}}$ ou seja $\frac{b}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{a}$.

d. Da proporção $\frac{b}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{a}$ deduz-se que $\overline{PQ}^2 = ab$. Assim, o lado do quadrado que tem área igual à do retângulo inicial é igual a $\overline{PQ}$.

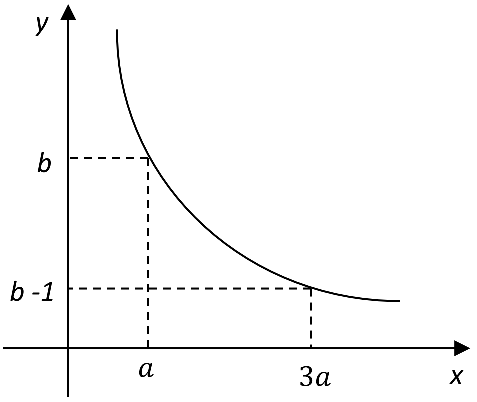


Como facilmente se conclui, o processo descrito no exemplo anterior também permite determinar geometricamente a solução positiva da equação $x^2 = ab$, ou seja, a raiz quadrada de um número positivo ab que também se designa por média geométrica de a e b.

Descritor	Texto de apoio
1.1	De acordo com o descritor ALG9-5.1, uma grandeza é «inversamente proporcional» a outra quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica multiplicada pelo inverso desse número. Se f é a função que associa a cada medida m de X a correspondente medida $f(m)$ de Y, então, se multiplicarmos por um número real positivo x cada valor de m, a respetiva imagem $f(xm)$ será igual à imagem inicial multiplicada por $\frac{1}{m}$, ou seja, $f(xm) = \frac{1}{x}.f(m)$. Tomando $m = 1$, obtém-se $f(x) = \frac{1}{x}.f(1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(1)}{x}$. Se designarmos $f(1)$ por a, então $f(x) = \frac{a}{x}$. De acordo com o descritor ALG9-5.2, uma grandeza é inversamente proporcional a outra da qual depende quando, fixadas unidades, o produto da medida da primeira pela medida da segunda é constante designando-se esta por «constante de proporcionalidade inversa». Como $x.f(x) = x.\frac{a}{x} = \frac{x.a}{x} = a$, a é a constante de proporcionalidade inversa. **Exemplo** *Sejam X e Y duas grandezas inversamente proporcionais. Sabe-se que quando a medida de X é 3, a medida de Y é 4.* *Determina uma expressão analítica para função f de proporcionalidade inversa associada.*
2.1	**Exemplo** *Considera a função f de proporcionalidade inversa representada graficamente no referencial cartesiano da figura.* *a) Determina a expressão algébrica da função f identificando a constante de proporcionalidade inversa.* *b) Determina abcissa do ponto L e a ordenada do ponto J.* 

Exemplo*

Considera a função f de proporcionalidade inversa representada graficamente no referencial cartesiano da figura.



a. Tendo em conta os dados da figura determina o valor de b.

b. Se $a = 4$, indica a constante de proporcionalidade e uma expressão algébrica da função f.

R:

a. Tendo em conta a definição de função de proporcionalidade inversa, podemos escrever que $f(3a) = \frac{1}{3}f(a)$, ou seja, $b - 1 = \frac{1}{3}b$.

Ora

$$b - 1 = \frac{1}{3}b \Leftrightarrow 3b - 3 = b \Leftrightarrow 2b = 3 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}.$$

b. A constante de proporcionalidade inversa é por exemplo igual a

$$c = af(a) = ab = \frac{3}{2}a.$$

Como $a = 4$, $c = 6$. Tem-se então, para todo número real x positivo,

$$f(x) = \frac{6}{x}.$$

3.1

Exemplo

Considera a função f definida nos reais por $f(x) = 3x^2$.

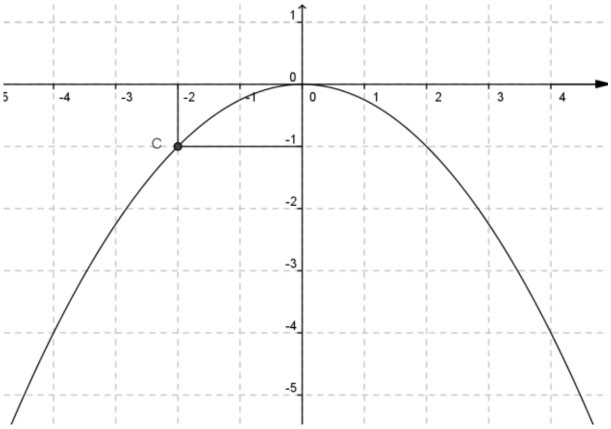
a. Esboça o gráfico de f num referencial cartesiano.

b. Determina graficamente as soluções da equação $3x^2 = 12x$ determinando a interseção dos gráficos da função quadrática f e da função afim g definida por $g(x) = 12x$.

Exemplo*

Considera uma função quadrática f representada graficamente no referencial cartesiano da figura por uma parábola de eixo vertical e que passa na origem.

Sabendo que o ponto de coordenadas (-2,-1) pertence gráfico de f, determina a expressão algébrica de f.



R.:

Uma vez que a função f é quadrática sendo o seu gráfico uma parábola de eixo vertical e com vértice na origem, então a expressão algébrica de f é do tipo $f(x) = ax^2$. Como o ponto $(-2,-1)$ pertence ao gráfico de f,

$$f(-2) = -1 \Leftrightarrow a(-2)^2 = -1 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

Assim, $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

3.2

Exemplo*

Considera as funções f e g definidas por $f(x) = ax^2$ e $g(x) = -bx - c$. Prova que os pontos de interseção dos gráficos de f e g têm por abcissa as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

R.:

Considerando um ponto P do gráfico da função f então as coordenadas de P são, para cada valor real de x, do tipo (x, ax^2). Por outro lado, se o ponto P pertencer também ao gráfico da função g então as suas coordenadas serão do tipo $(x, -bx - c)$.

Como P pertence simultaneamente aos gráficos de f e de g, então, de acordo com FSS7-1.6, $ax^2 = -bx - c$ que é equivalente à equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo

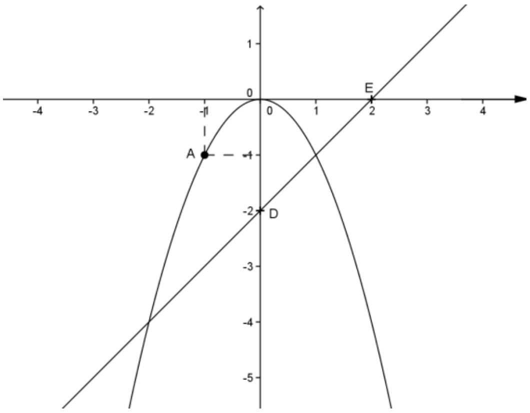
Considera as funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -6x - 8$. Determina analiticamente as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g.

Exemplo

No referencial cartesiano da figura estão representados os gráficos de duas funções f e g, respetivamente, a parábola de vértice $(0,0)$ que passa pelo ponto $A(-1,-1)$ e a reta DE em que $D(0,-2)$ e $E(2,0)$.

a. Determina uma expressão algébrica para cada uma das funções.

b. Determina as coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos.



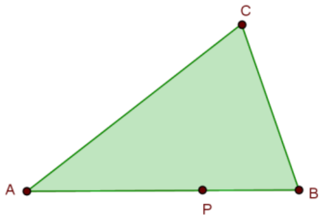
Descritor	**Texto de apoio**
1.1	De forma análoga ao que sucede no subdomínio ALG7-Expressões Algébricas, a introdução às inequações poderá ser efetuado num primeiro tempo em exemplos, sem recorrer à noção de função.
1.5	Os princípios de equivalência citados neste descritor podem ser trabalhados em conjunto com os descritores NO9-1.1,1.2 e 1.3.
1.6	**Exemplo** *Resolve a inequação* $$2x+\frac{1}{3}>\frac{5}{2}x-5$$ R.: $2x+\frac{1}{3}>\frac{5}{2}x-5 \Leftrightarrow 2x-\frac{5}{2}x>-5-\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x>-\frac{16}{3} \Leftrightarrow -x>-\frac{32}{3} \Leftrightarrow$ $x<\frac{32}{3}$. $$S=\left]-\infty,\frac{32}{3}\right[.$$
3.1	**Exemplo** *Obtém, para cada alínea, uma expressão equivalente que seja a soma de uma constante com o quadrado de um polinómio de primeiro grau (eventualmente multiplicado por uma constante).* *a.* x^2+4x+2; *b.* x^2-6x-1; *c.* x^2+x+1; *d.** $3x^2+2x+7$. R.: a. x^2+4x são os dois primeiros termos do caso notável $(x+2)^2=x^2+4x+4$. Assim, $x^2+4x=(x+2)^2-4$ e $x^2+4x+2=(x+2)^2-2$. b. x^2-6x são os dois primeiros termos do caso notável $(x-3)^2=x^2-6x+9$. Assim, $x^2-6x=(x-3)^2-9$ e $x^2-6x-1=(x-3)^2-10$. c. x^2+x são os dois primeiros termos do caso notável $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}$. Assim, $x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ e $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. d. $3x^2+2x+7=3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}\right)$.

$x^2 + \frac{2}{3}x$ são os dois primeiros termos do caso notável $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.

Desta forma,
$x^2 + \frac{2}{3}x = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$ pelo que $3x^2 + 2x + 7 = 3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{7}{3}\right) =$
$3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{9}\right) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{3}$.

2.1

Exemplo
Um terreno tem a forma de um triângulo isósceles $[ABC]$*, tal que* $\overline{AB} = \overline{AC}$ *e* P *é um ponto do lado* $[AB]$ *tal que* $\overline{PB} = 100\ m$ *e* $\overline{AP} = \overline{BC}$*. Foram feitas duas medições aproximadas, respetivamente por defeito e por excesso, ao perímetro do terreno, tendo-se obtido os seguintes resultados:* 821 *metros e* 827 *metros.*



Determina dois intervalos de amplitude inferior ou igual a 2, tais que a medida do comprimento, em metros, dos lados $[AB]$ *e* $[BC]$*, pertençam respetivamente a esses intervalos.*

3.2
3.3
3.4

Exemplo
Resolve a equação do segundo grau $x^2 - 6x + 5 = 0$ *sem recorreres à fórmula dita «resolvente».*

R.: $x^2 - 6x$ são os dois primeiros termos do caso notável $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.
$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3-2)(x-3+2) = 0$.
Pela lei de anulamento do produto, $x - 5 = 0 \vee x - 1 = 0$.
O conjunto-solução é portanto:

$$S = \{1, 5\}.$$

Exemplo*
Resolve a equação do segundo grau $x^2 + 5x + 1 = 0$ *sem recorreres à fórmula dita «resolvente».*

R.:
$x^2 + 5x$ são os dois primeiros termos do caso notável $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$.

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Leftrightarrow$$
$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}\right) = 0.$$

Pela lei de anulamento do produto, $x = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \vee x = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$.

O seguinte exemplo pode ser trabalhado em conjunto com o objetivo geral ALG9-1.

Exemplo**
Para que valores do parâmetro α a equação do segundo grau
$$x^2 + x + \alpha = 0$$
possui duas soluções distintas?

R.:
$x^2 + x + \alpha = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \alpha \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-4\alpha}{4}$.

Se $\Delta = \frac{1-4\alpha}{4} < 0$, a equação não possui solução, uma vez que $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ é positivo ou nulo.
Se $\Delta = \frac{1-4\alpha}{4}$, a equação é equivalente a $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, que possui a solução única $x = -\frac{1}{2}$.
Se $\Delta > 0$, a equação é equivalente a $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = 0$, que possui as duas soluções distintas
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\Delta}.$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \quad \frac{1-4\alpha}{4} > 0 \Leftrightarrow 1 - 4\alpha > 0 \times 4$ (porque $4 > 0$) $\Leftrightarrow 1 - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > 4\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{4} > \alpha$.

Finalmente, a equação $x^2 + x + \alpha = 0$ possui duas soluções distintas se e apenas se $\alpha < \frac{1}{4}$.

5.1 Se y e x designarem respetivamente as medidas de duas grandezas, a primeira dependendo da segunda, as grandezas dizem-se inversamente proporcionais se, dado um número positivo q, a uma medida $q \times x$ da segunda corresponder uma medida $\frac{1}{q} \times y$ da primeira.

Exemplo
No quadro seguinte está representado o tempo, em horas, que um certo número de operários demora a pintar um dado muro:

Número de operários	2	4	16
Tempo (horas)	4	2	$\frac{1}{2}$

Averigua se estas duas grandezas são inversamente proporcionais.

R.:
2 operários demoram 4 horas para pintar um muro.
4 operários demoram 2 horas para pintar um muro.
Para passar de de 2 para 4 operários é necessário multiplicar por $\frac{4}{2} = 2$.

Para passar de 4 horas para2 horas é necessário multiplicar por $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(Inversamente, para passar de 4 para 2 operários, multiplica-se por $\frac{1}{2}$, e para passar de 2 para 4 horas multiplica-se por $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ =2.)

2 operários demoram 4 horas para pintar um muro.
16 operários demoram $\frac{1}{2}$ hora para pintar um muro.

Para passar de 2 para 16 operários é necessário multiplicar por $\frac{16}{2} = 8$.
Para passar de 4 horas para $\frac{1}{2}$ hora é necessário multiplicar por $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$.

(Inversamente, para passar de 16 para 2 operários, multiplica-se por $\frac{1}{8}$, e para passar de $\frac{1}{2}$ hora para 4 horas multiplica-se por $\frac{1}{\frac{1}{8}}$ =8.)

4 operários demoram 2 horas para pintar um muro.
16 operários demoram $\frac{1}{2}$ hora para pintar um muro.

Para passar de de 4 para 16 operários é necessário multiplicar por $\frac{16}{4} = 4$. .
Para passar de 2 horas para $\frac{1}{2}$ hora é necessário multiplicar por $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
(Inversamente, para passar de 16 para 4 operários, multiplica-se por $\frac{1}{4}$, e para passar de $\frac{1}{2}$ hora para 2 horas multiplica-se por $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ =4.)

Podemos concluir que as duas grandezas são inversamente proporcionais.

Note-se que a última verificação, apesar de se poder deduzir das duas primeiras, tem de ser feita para que se possa justificar adequadamente, tendo em conta a definição, que as grandezas são inversamente proporcionais.

5.2 De forma análoga ao que sucede no domínio ALG6 para a proporcionalidade direta, esta propriedade pode ser usada como definição de proporcionalidade inversa, passando o descritor 5.1 a enunciar uma propriedade.

Exemplo
As medidas de duas grandezas X e Y, inversamente proporcionais, são dadas pelo seguinte quadro de valores:

X	*b*	*3*
Y	*0,7*	*1,4*

Determina o valor de b aplicando a definição de grandezas inversamente proporcionais e indica o valor da constante de proporcionalidade inversa.

Informação Complementar para o Professor
Proporcionalidade Inversa

De facto, ambos os enunciados são equivalentes.
Consideremos uma primeira grandeza diretamente proporcional a uma segunda.
Se às medidas y, y' da primeira corresponderem respetivamente as medidas x, x' da segunda:

Para passar de x para x' multiplicou-se por $\frac{x'}{x}$.
Logo, como as grandezas são inversamente proporcionais, $y' = y\frac{1}{\frac{x'}{x}} = \frac{xy}{x'}$, de onde se conclui que $x'y' = xy$.
Inversamente, se o produto das medidas de duas grandezas for constante: $xy = x'y' = c$, tem-se que $x' = \frac{c}{y'} = \frac{xy}{y'} = x \times \frac{y}{y'}$.
Como $y' = y \times \frac{y'}{y} = y \times \frac{1}{\frac{y}{y'}}$, as grandezas são inversamente proporcionais.

Esta propriedade permite verificar de forma mais expedita que duas grandezas são inversamente proporcionais. Por exemplo, retomando o exemplo do descritor anterior, bastaria verificar que $4 \times 2 = 2 \times 4 = 16 \times \frac{1}{2}$.

5.3 Este descritor é uma consequência imediata do anterior e permite falar em «grandezas inversamente proporcionais» sem que seja necessário especificar qual a primeira e qual a segunda.

6.1 **Exemplo***

Um ponto móvel percorre a uma velocidade constante de V metros por segundo, uma distância de 240 metros em T segundos.

a. *Justifica que as grandezas V e T são inversamente proporcionais e indica a constante de proporcionalidade inversa.*

b. *Na seguinte tabela estão representados possíveis valores de V e dos correspondentes valores de T.*

Tempo (s)	T_1	4	T_3
Velocidade (m/s)	30	V_2	$2V_2$

Determina os valores de T_1, T_3 e V_2.

c. *Exprime o tempo T em função da velocidade V.*

Descritor — **Texto de apoio**

1.1 Estende-se a noção de variável estatística quantitativa ao caso em que cada classe fica determinada por um intervalo de números, fechado à esquerda e aberto à direita, sendo esses intervalos disjuntos dois a dois e de união igual a um intervalo. Também se considera o caso em que se interseta cada um desses intervalos com um conjunto finito pré-determinado de números. Feitas estas extensões designam-se também estes intervalos por «classes».
Por vezes, quando conveniente, o intervalo com os maiores extremos pode tomar-se fechado.

1.3 **Exemplo**

Considera o seguinte conjunto de dados:

1,25	1,20	0,98	1,29	1,00	1,15	0,99	1,33	1,19	1,31
1,01	1,05	1,12	0,95	1,24	1,29	1,09	1,16	1,34	0,98
0,98	0,99	1,08	1,03	1,22	1,30	1,32	1,21	1,09	1,14
1,30	0,96	1,33	1,24	1,12	1,17	0,96	1,13	1,26	1,05

Tomando o valor mínimo para extremo inferior da primeira classe, agrupa os dados em classes de amplitude $0{,}5$.

R.:
mínimo: $0{,}95$
máximo: $1{,}34$

$$1{,}34 - 0{,}95 = 0{,}39$$

$$0{,}39 : 0{,}5 = 7{,}8$$

É pois necessário formar 8 classes de amplitude $0{,}5$.

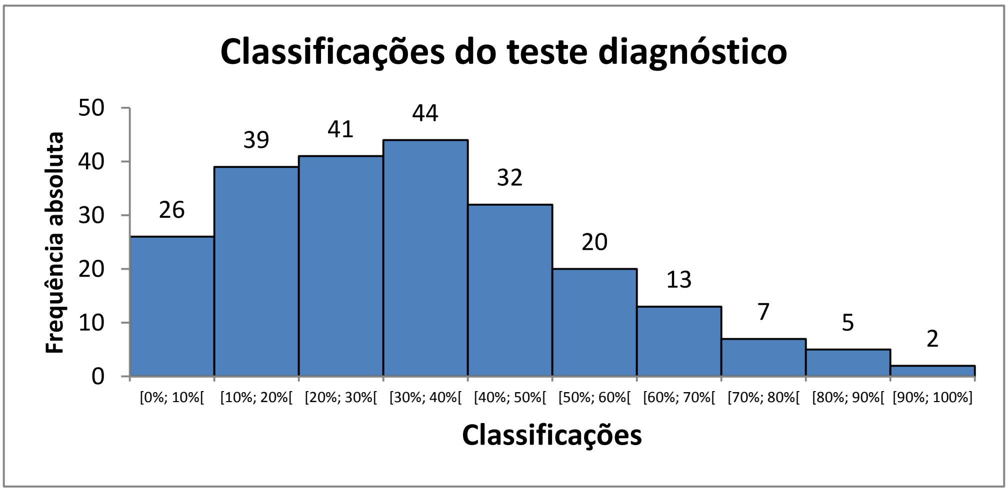
Classes	Freq. absoluta
[0,95; 1,00[	8
[1,00; 1,05[	3
[1,05; 1,10[	5
[1,10; 1,15[	4
[1,15; 1,20[	4
[1,20; 1,25[	5
[1,25; 1,30[	4
[1,30; 1,35[	7

1.6 **Exemplo**

Representa num histograma o conjunto de dados relativo às classificações obtidas num teste diagnóstico realizado por 229 *alunos e registados na seguinte tabela:*

Classificações $(em\ \%)$	Freq. absoluta
[0; 10[	26
[10; 20[	39
[20; 30[	41
[30; 40[	44
[40; 50[	32
[50; 60[	20
[60; 70[	13
[70; 80[	7
[80; 90[	5
[90; 100]	2

R.:



3.4
3.5

Exemplo

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6 e registar o número da face que fica voltada para cima (o resultado da experiência).

Relativamente a esta experiência, sejam A, B, C *e* D *os seguintes acontecimentos:* $A = \{1, 4, 5\}$ *;* $B = \{1, 3, 5\}$ *;* $C = \{6\}$ *;* $D = \{2, 4, 6\}$*. Indica pares de acontecimentos que sejam:*

- *a. Incompatíveis mas não complementares;*
- *b. Complementares;*
- *c. Compatíveis.*

R.: a. Por exemplo, A e C.
b. B e D.
c. Por exemplo, A e B.

Observação: Dizer que o dado é equilibrado deve ser interpretado como uma forma abreviada de se dizer que são equiprováveis os acontecimentos elementares da experiência cujo resultado é o número da face que fica voltada para cima depois de um lançamento do dado.

3.6
3.7
3.8
3.9

Numa experiência aleatória, cujos casos possíveis sejam em número finito n (o cardinal do espaço amostral Ω) e equiprováveis, a probabilidade $P(A)$ de um dado acontecimento A é, por definição, igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a A ($\#A$) e o número n de casos possíveis. Como $A \subset \Omega$, $\#A \leq \#\Omega = n$, de onde resulta que $0 \leq P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \leq 1$.

Se A e B forem dois acontecimentos disjuntos, tem-se $\#(A \cup B) = \#A + \#B$, de onde se deduz que

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A\cup B)}{n} = \frac{\#A+\#B}{n} = \frac{\#A}{n} + \frac{\#B}{n} = p(A) + p(B).$$

Exemplo

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado octaédrico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 8 e registar o número da face que fica voltada para cima (o resultado da experiência).

Relativamente a esta experiência define:

- *a. um acontecimento certo;*
- *b. um acontecimento impossível;*
- *c. dois acontecimentos equiprováveis distintos, indicando a respetiva probabilidade.*

Exemplo

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas. Supõe-se que todas as cartas têm a mesma probabilidade de ser escolhidas. Sejam A e B dois acontecimentos definidos por:

A: «$sair\ \text{ás}$» ; B: «$sair\ uma\ figura$»

- a. Calcula a probabilidade de A, $p(A)$.
- b. Calcula a probabilidade de B, $p(B)$.
- c. Define em extensão o acontecimento $A \cup B$.
- d. Justifica que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

3.10

Exemplo

Considera uma caixa U com 5 bolas iguais numeradas de 1 a 5 e uma caixa V com 10 bolas iguais numeradas de 1 a 10. Realiza-se uma experiência aleatória que consiste em retirar uma bola de cada caixa e determinar o produto dos números saídos, considerando-se que todas as bolas de uma mesma caixa têm a mesma probabilidade de ser selecionadas.

- *a. Constrói uma tabela de dupla entrada que indique o resultado desta experiência em função dos números inscritos nas bolas retiradas e determina o conjunto de resultados possíveis.*
- *b. Qual é a probabilidade do produto dos números saídos ser 12?*
- *c. Dá exemplos de dois acontecimentos equiprováveis.*
- *d. Qual dos acontecimentos é mais provável:*
  - A: *«o produto dos números saídos é 10»*
  - B: *«o produto dos números saídos é 40 »?*

R.:

a.

		Caixa V									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Caixa U	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

O conjunto de resultados possíveis é {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 45, 50}.

b. $p(\text{o produto dos números saídos é } 12) = \frac{3}{50}$.

c. Por exemplo, «o produto dos números saídos é 7» e «o produto dos números saídos é 45».

d. $p(A) = \frac{3}{50}$;

$p(B) = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$.

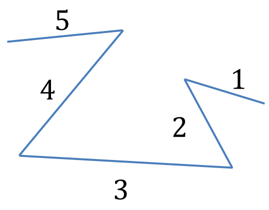
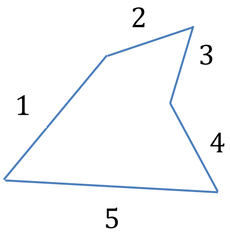
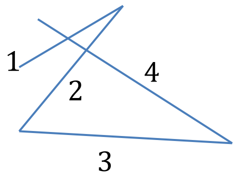
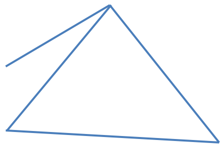
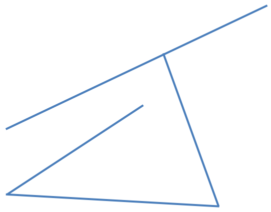
O acontecimento A é mais provável do que o acontecimento B.

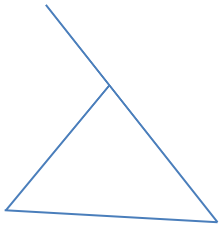
METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO - MATEMÁTICA

Texto Complementar de Geometria

3.º Ciclo

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Maria Clementina Timóteo

Descritor	Texto de apoio
2.1	Representam-se abaixo três figuras, cada uma delas constituída pela união dos lados de uma linha poligonal, indicando-se em cada caso a ordem pela qual os segmentos aparecem na sequência que constitui a linha:    Tanto no primeiro como no terceiro caso trata-se também da união dos lados da linha poligonal dada pela sequência dos segmentos por ordem inversa, ou seja, considerando sucessivamente os que estão marcados respetivamente 5,4,3,2,1 e 4,3,2,1. No segundo caso, presumindo que, como a figura sugere, cada segmento numerado partilha ambos os extremos com outro desses segmentos, haveria dez possibilidades para ordenar os segmentos de modo a formar uma linha poligonal, bastando para tal atribuir sucessivamente a cada um deles o primeiro lugar na sequência e considerar em cada caso como segundo segmento um dos dois que com esse partilham um extremo; haveria assim cinco possibilidades para primeiro segmento e para cada um destes casos duas hipóteses de sequência cumprindo as condições que definem uma linha poligonal. Já as figuras seguintes não são assim constituídas, ou seja, nenhuma delas pode ser o conjunto dos pontos dos lados de uma linha poligonal:   No primeiro caso porque num ponto incidem três segmentos da figura, dos quais não há dois colineares, pelo que não é possível formar um lado de linha poligonal com a união de dois deles; assim teríamos três lados partilhando um extremo, o que contradiz a definição de linha poligonal. Quanto ao segundo caso, também existe um ponto interseção de dois segmentos não colineares, pertencente também a um terceiro segmento que apenas interseta cada um dos outros dois nesse ponto. Mesmo que, como a figura sugere, este terceiro segmento seja colinear a um dos outros dois, podendo assim, em princípio, unir-se a este para formar um lado de linha poligonal, neste caso esse lado não partilharia nenhum dos extremos com outro segmento da figura que pudesse também ser lado dessa linha poligonal. Assim, mais uma vez, não podemos estar em presença da união dos lados de uma linha poligonal. Já uma ligeira modificação da primeira figura a transformaria no conjunto dos pontos de uma linha poligonal:

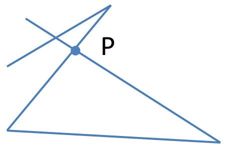


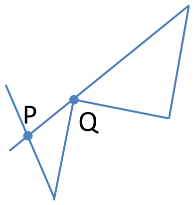
Nesta figura existe um ponto em que se intersetam dois segmentos não colineares mas tal que existe um terceiro segmento que supomos colinear com um dos outros dois, partilhando exatamente esse ponto com cada um deles; os dois segmentos colineares, neste caso, podem unir-se para formar um lado de linha poligonal, pois, com os restantes dois segmentos, podemos formar uma linha poligonal desde que se escolha adequadamente a ordem pela qual se tomam os três lados.

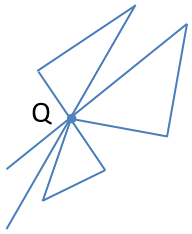
2.2 A **origem** de uma linha poligonal é o extremo do primeiro lado que não é partilhado com o segundo e a **extremidade** da linha poligonal é o extremo do último lado que não é partilhado com o penúltimo; quando a origem coincide com a extremidade a linha diz-se **fechada** e é apenas neste caso que não é possível, conhecendo o conjunto L dos pontos da linha poligonal, identificar dois pontos que têm forçosamente de ser respetivamente a origem e a extremidade da linha, ainda que não se saiba qual dos dois é uma e outra.

Observação*: Verifiquemos que, com a definição apresentada, o conhecimento da figura geométrica L constituída pelos pontos de uma linha poligonal (união dos respetivos lados) permite identificar os vértices, e portanto, como veremos, os lados da linha poligonal. Para facilitar a linguagem, comecemos por designar por «segmento de L com um extremo em P» um segmento com um extremo no ponto P, contido em L, e que não esteja contido num segmento distinto com um extremo em P e contido em L.

Agora notemos que, por definição de linha poligonal, se um dado vértice for comum a dois dos lados estes não podem ser colineares e quaisquer dois lados a que esse vértice pertença também não podem ser colineares, pelo que os pontos de L em que, nessa figura, se formam ângulos não rasos são os únicos que podem ser vértices da linha poligonal, para além, eventualmente da origem e/ou da extremidade da linha poligonal, quando algum destes pontos pertencer apenas a um dos lados da linha poligonal. Por outro lado, alguns desses pontos podem não ser vértices, como se exemplifica nas seguintes figuras, todas elas representando conjuntos de pontos de linhas poligonais:





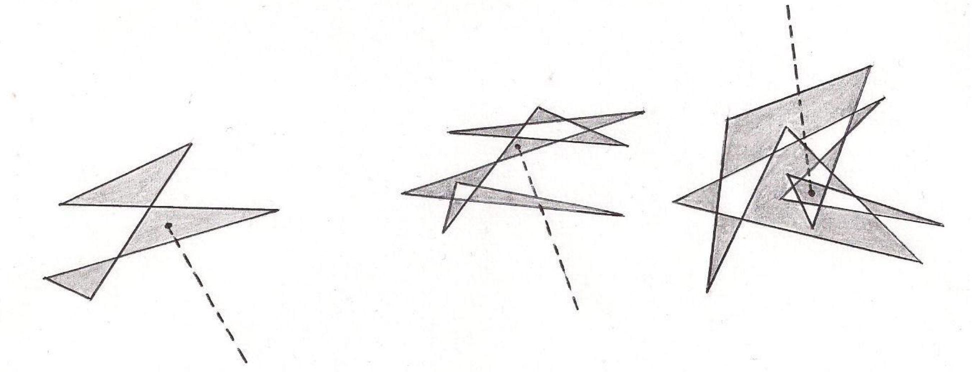


Os pontos marcados com «P» não são vértices, ao contrário dos pontos marcados com «Q», presumindo que são colineares os segmentos como tais sugeridos nas figuras. Com efeito, para que se trate de conjuntos de pontos de linhas poligonais, é necessário que, considerando os segmentos de cada uma das figuras com um extremo em P, se possam respetivamente unir a segmentos colineares da mesma figura também com esse extremo, por forma a obter em cada caso segmentos que se intersetam em P, sendo cada um deles lado da linha poligonal, com os extremos distintos de P; caso contrário, haveria mais do que dois lados partilhando um mesmo vértice. Já no caso dos pontos Q tal não ocorre, presumindo que são colineares os segmentos que a figura sugere como tais e que se intersetam em Q; a união desses segmentos colineares forma, em cada caso, um dos lados da linha poligonal passando por Q e existem outros dois lados partilhando o extremo Q, que é assim vértice da linha poligonal, por ele passando um ou mais dos outros lados da linha, mas sem que Q seja extremo destes.

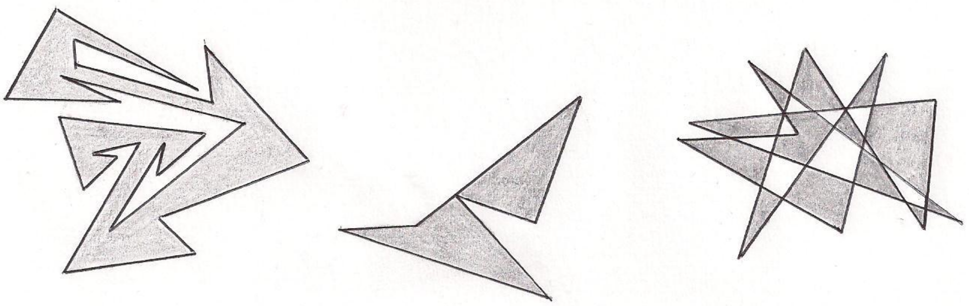
Estes exemplos sugerem um processo sistemático para identificar os vértices da linha poligonal de entre os pontos de L em que se formam ângulos não rasos (para além destes só poderão ainda ser vértices a origem e a extremidade, nos casos em que um destes pontos ou ambos pertençam apenas a um lado da linha poligonal). Dado um desses pontos Q, podemos considerar os segmentos de L com um extremo em Q; no máximo poderão existir dois desses segmentos que não se possam unir a outros respetivamente colineares para formarem lados da linha poligonal que passem por Q sem terem Q por extremo (caso contrário haveria mais do que dois lados partilhando um vértice). Assim, temos apenas duas hipóteses: ou os referidos segmentos que têm Q por extremo podem emparelhar-se por forma que em cada par os segmentos são colineares, ou existem no máximo dois desses segmentos de L que têm um extremo em Q e não se podem prolongar em L. É apenas neste último caso que Q é vértice da linha poligonal; uma vez identificados, deste modo, os vértices (para além eventualmente da origem e da extremidade) é agora fácil identificar o lado ou lados que têm esse vértice por extremo, pois serão exatamente os segmentos acima considerados que permitem distinguir Q como vértice.

2.3
2.4
2.5
Uma linha poligonal diz-se **simples** quando os únicos pontos comuns a dois lados são vértices da linha, ou seja, quando dois lados não se intersetam fora dos vértices que são extremos desses lados; dizemos que tal linha não se "auto-interseta".

O complementar num plano do conjunto de pontos de uma linha poligonal fechada simples desse plano pode ser decomposto de maneira única na união de duas regiões disjuntas, cada uma delas "conexa", no sentido em que dois quaisquer pontos podem ser respetivamente origem e extremidade de uma linha poligonal simples contida nessa região. Uma dessas partes é limitada e diz-se **parte interna** da linha poligonal, ao passo que a outra é ilimitada e diz-se **parte externa** da linha poligonal; em muitos casos é fácil identificar informalmente essas decomposições do plano, mas o teorema geral que garante esta possibilidade no caso geral é um resultado relativamente profundo e complexo (Teorema de Jordan). Note-se que apenas abordamos a noção de parte interna de uma linha poligonal no caso em que esta é fechada simples; embora seja possível estender esta noção a linhas poligonais fechadas em geral, não apresentaremos uma definição formal. Um processo simples de identificar a parte interna de uma linha poligonal fechada qualquer é o seguinte: um ponto pertence à parte interna quando é origem de uma semirreta tal que é ímpar o número de lados da linha poligonal que a semirreta interseta, não contendo pontos que pertençam a mais do que um lado. Considera-se, de certa forma, que "percorrendo a semirreta a partir da respetiva origem" sempre que se interseta um lado (e um só), passa-se "de dentro para fora" ou "de fora para dentro" dessa linha poligonal fechada; como é limitado o conjunto dos pontos da linha poligonal, a partir de certa altura não se volta a intersetar nenhum dos lados e fica-se na componente conexa ilimitada da parte externa, pelo que "se tivermos passado de dentro para fora ou de fora para dentro" um número total ímpar de vezes é porque inicialmente estávamos "dentro". Vejam-se os seguintes exemplos em que se assinalam as partes internas das linhas poligonais fechadas consideradas e, para cada uma delas, uma semirreta que permite caracterizar um ponto como pertencendo à parte interna:



Um **polígono** é exatamente a união dos lados de uma linha poligonal fechada com a respetiva parte interna e prova-se que se duas linhas poligonais derem origem, por este processo, ao mesmo polígono então coincidem as uniões dos respetivos lados (conjuntos dos pontos das linhas poligonais), assim como as respetivas partes internas; a parte interna da linha poligonal diz-se **interior** do polígono, a parte externa diz-se **exterior** do polígono e o conjunto dos pontos da linha poligonal diz-se **fronteira** do polígono (estes termos correspondem a propriedades topológicas precisas). Pelo que acima se viu, os vértices e lados de uma linha poligonal ficam determinados pelo respetivo conjunto de pontos, pelo que podemos definir os vértices e lados de um polígono como, respetivamente, os vértices e lados de uma qualquer linha poligonal da qual a fronteira do polígono seja o conjunto de pontos. Um polígono diz-se **simples** quando for simples uma linha poligonal da qual a fronteira do polígono é a união dos lados; prova-se que, nesse caso, todas o são. Na figura abaixo representam-se três polígonos, dos quais apenas o primeiro é simples:

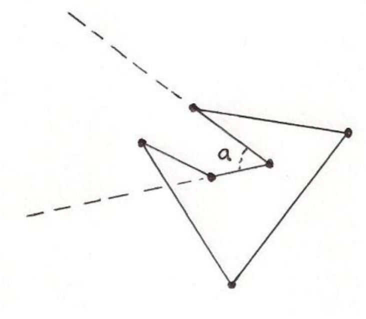


De aqui em diante, por abuso de linguagem e sempre que não se prestar a ambiguidade, utilizaremos o termo «polígono» para referir os polígonos simples.

2.8
2.9
2.10

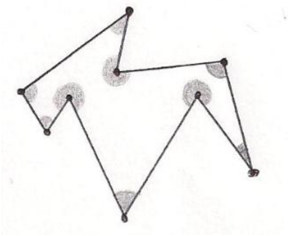
Um ângulo interno de um polígono, por definição, tem vértice coincidente com um dos vértices do polígono e lados contendo os lados do polígono que se encontram nesse vértice. É fácil concluir que estas duas condições podem ser substituídas apenas pela condição de que *os lados do ângulo contenham dois lados consecutivos do polígono*, pois, tanto os lados do ângulo como os lados do polígono encontram-se exatamente num ponto; ora o vértice do polígono em que os lados se encontram é, em particular, ponto comum aos lados do ângulo e portanto terá de coincidir com o respetivo vértice. Também podemos dizer que *os lados de um ângulo interno de um polígono se obtêm prolongando indefinidamente dois lados consecutivos desse polígono partindo do vértice comum na direção dos outros extremos dos lados*.

Uma vez que lados consecutivos do polígono não podem ser colineares (por definição de linha poligonal), as semirretas de origem no vértice comum e que contêm os lados determinam um ângulo convexo e um ângulo côncavo; dos dois será ângulo interno do polígono o que intersetar o respetivo interior *em pontos tão próximos do vértice quanto o desejarmos*, ao passo que o outro ângulo com os mesmos lados intersetará o exterior do polígono, também em pontos tão próximos do vértice quanto o desejarmos. Se o polígono for convexo (2.9), de entre aqueles dois, o ângulo interno caracteriza-se simplesmente por intersetar o interior do polígono, pois, de acordo com 2.10 (resultado que admitiremos), o polígono fica contido em todos os respetivos ângulos internos, que, neste caso, são convexos (o polígono é mesmo igual à interseção dos ângulo internos, de acordo com 2.10), pelo que os ângulos côncavos associados não intersetam o interior do polígono. No caso geral (ou seja, também para polígonos não convexos) a condição de que a interseção com o interior do polígono se dê *em pontos tão próximos do vértice quanto o desejarmos* não pode ser dispensada, para que a definição se adeque à ideia intuitiva de ângulo interno, como se compreende examinando o seguinte exemplo:



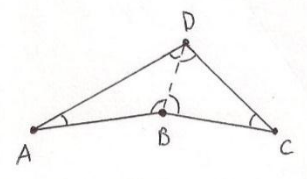
O ângulo a não é interno ao polígono representado na figura pois, embora tenha lados contendo dois lados consecutivos do polígono e intersete o interior do mesmo, não interseta esse interior em pontos de um círculo de raio suficientemente pequeno centrado no vértice, ou seja, não cumpre a condição de intersetar o interior do polígono *em pontos tão próximos do vértice quanto o desejarmos*. O ângulo côncavo com os mesmo lados que o ângulo a é o ângulo interno do polígono no vértice de a pois, ao contrário deste último, interseta o interior do polígono em pontos de qualquer círculo centrado no respetivo vértice.

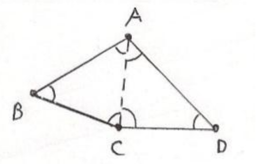
Recordando que *setor circular* é a interseção de um ângulo com um círculo no mesmo plano e centrado no vértice, podemos distinguir um ângulo interno, de entre os que têm lados contendo dois lados consecutivos de um polígono, verificando que *existe um setor circular determinado por esse ângulo e inteiramente contido no polígono*; basta tomar um raio inferior à distância do vértice a todos os lados do polígono a que não pertence. Além disso, considerando o setor circular com esse mesmo raio determinado pelo ângulo com os mesmos lados que não é interno ao polígono, esse setor circular terá interior contido no exterior do polígono. Na figura seguinte assinalam-se setores circulares que permitem identificar os ângulos internos do polígono representado:



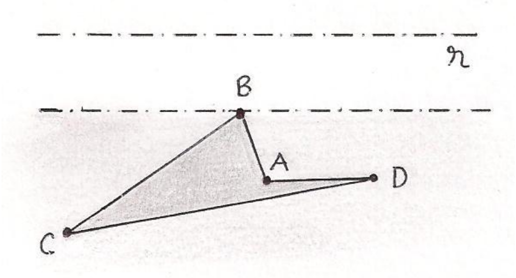
2.12

Pretendemos provar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a um ângulo giro, ou seja, à soma de dois ângulos rasos. Podemos, para o efeito, decompor o quadrilátero em dois triângulos e utilizar a propriedade conhecida para cada triângulo, segundo a qual a soma dos respetivos ângulos internos é igual a um ângulo raso (GM5, 2.2), o que permite obter imediatamente a conclusão:





Observação:** Examinemos mais pormenorizadamente como podemos sempre obter a decomposição de um quadrilátero em dois triângulos. Se o quadrilátero for convexo (exemplo da direita na figura acima) o segmento de extremos coincidentes com dois vértices não consecutivos («diagonal», *cf.* 2.14) tem de estar inteiramente contido no quadrilátero e, com cada um dos outros dois vértices do quadrilátero, determina um triângulo, sendo o quadrilátero igual à união dos dois triângulos assim determinados, os quais constituem uma das possíveis decomposições procuradas. Consideremos agora o caso geral, ou seja, podendo o quadrilátero não ser convexo, seja ele $[ABCD]$; comecemos por verificar que pelo menos um dos ângulos internos tem de ser agudo. Para o efeito, podemos escolher uma reta r no plano do quadrilátero delimitando um semiplano contendo o quadrilátero (basta que esse semiplano contenha os quatro vértices) e, para simplificar, designaremos por «horizontais» essa reta e as que lhe são paralelas nesse plano; podemos depois fixar um dos vértices do quadrilátero cuja distância a r seja menor ou igual à distância a r dos outros vértices (ou seja, fixamos o vértice mais próximo de r, ou um dos que esteja a essa distância mínima, se existir mais do que um):



Suponhamos que esse vértice é B (alterando, se necessário, as designações dos vértices); é fácil concluir que é convexo o ângulo interno do quadrilátero de vértice em B pois o quadrilátero fica inteiramente contido num dos semiplanos determinado pela reta horizontal que passa por B, o que acontece, portanto, em particular aos lados $[AB]$ e $[BC]$, e pelo menos um dos vértices A ou C não pode estar na reta fronteira do semiplano (já que A, B e C não podem ser colineares, por definição de polígono). O ângulo interno em B não poderia ser o ângulo côncavo ABC pois qualquer setor circular determinado por este ângulo tem pontos fora do referido semiplano contendo o quadrilátero e portanto fora do quadrilátero, o que não pode acontecer a um ângulo interno (um setor circular de raio suficientemente pequeno determinado por um ângulo interno tem de estar contido no quadrilátero, *cf.* 2.8 – 2.10, acima).

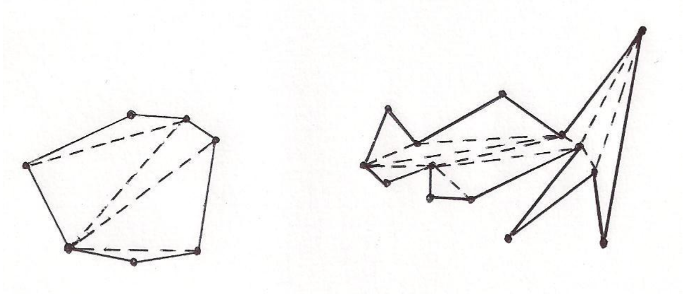
Agora que sabemos que no quadrilátero $[ABCD]$ é convexo o ângulo interno em B, podemos distinguir duas situações:

1) O vértice D fica situado fora do triângulo $[ABC]$ (é o caso do quadrilátero representado na figura acima); podemos neste caso dividir o quadrilátero em dois triângulos através do segmento de reta $[AC]$.
2) O vértice D fica no interior do triângulo $[ABC]$; neste caso o segmento $[BD]$ fica contido no quadrilátero e divide-o em dois triângulos. Com efeito, neste caso, a semirreta $\dot{B}D$ está contida no interior do ângulo convexo $[ABC]$ e portanto os respetivos pontos suficientemente próximos de B estão no interior do quadrilátero e a semirreta não pode intersetar a fronteira do quadrilátero num ponto estritamente entre B e D pois um tal ponto teria de estar num lado entre dois vértices consecutivos, que só poderiam ser A e C, e nesse caso D ficaria fora do triângulo, contra a hipótese.

É relevante notar que a divisão do quadrilátero em dois triângulos obtém-se sempre através de um segmento com extremos em vértices não consecutivos e que está inteiramente contido no quadrilátero; as considerações acima destinaram-se essencialmente a mostrar que um tal segmento («diagonal interior») existe sempre. Um triângulo como o $[ABC]$ na figura acima, que fica inteiramente contido num polígono do qual A,B e C são vértices consecutivos, designa-se por «orelha» do polígono; verificámos que *um quadrilátero tem exatamente duas orelhas que não se intersetam nos respetivos interiores* e veremos que *qualquer polígono com mais de três lados tem sempre pelo menos duas orelhas* nessas condições, o que se relacionará com a possibilidade de decomposição de qualquer polígono em triângulos de vértices coincidentes com vértices do polígono e portanto com o cálculo da soma das medidas dos respetivos ângulos internos.

2.13

Tal como no caso dos quadriláteros, a determinação da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono com n lados pode obter-se decompondo o polígono em triângulos de vértices coincidentes com vértices do polígono, como acima foi referido (*cf.* 2.12). De facto, como adiante se verá, é sempre possível efetuar essa decomposição e obtêm-se exatamente $n-2$ triângulos, pelo que a soma das medidas em graus dos ângulos internos de qualquer polígono será sempre igual a $(n-2)\times 180$, já que os ângulos internos dos triângulos reconstituem (eventualmente por adição de ângulos) exatamente os ângulos internos do polígono. Examinemos dois exemplos de polígonos decompostos em triângulos do modo indicado:



Trata-se de um polígono convexo com sete lados decomposto em cinco triângulos e de um polígono não convexo com 14 lados decomposto em 12 triângulos; não seria difícil obter diferentes decomposições em triângulos com a propriedade requerida para ambos os polígonos, ou seja, a decomposição não é, em geral, única (como já tínhamos verificado no caso dos quadriláteros convexos).

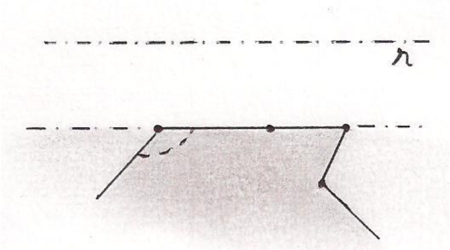
Para determinarmos a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos de um polígono, comecemos por notar que em 2.11 apenas se definiu ângulo externo para o caso de polígonos convexos; assim, a propriedade relativa a ângulos externos do descritor 2.13 apenas se refere a este tipo de polígonos. No entanto, na observação 2 abaixo, também abordaremos a possível extensão ao caso de polígonos não necessariamente convexos. No caso convexo, como cada ângulo externo é suplementar do interno adjacente e como a soma das medidas de amplitude em graus destes é igual a $(n-2)\times 180$, é fácil calcular a soma das medidas em graus das amplitudes de ângulos externos, escolhendo, para cada um dos internos, um dos ângulos externos adjacentes. Com efeito, a soma das medidas em graus de todos os internos e dos externos assim escolhidos terá de ser igual à soma das medidas em graus de n ângulos rasos, ou seja, terá de ser exatamente $n\times 180$. A soma dos externos será então $n\times 180-(n-2)\times 180=360$, ou seja, igual à medida em graus de um ângulo giro. Podemos assim afirmar, com algum abuso de linguagem, pois apenas podemos considerar, para o efeito, metade do número total de ângulos externos, que *a soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a um ângulo giro*.

A interpretação deste resultado em termos de percurso ao longo dos lados do polígono, em determinado sentido, análoga à que efetuámos em GM5-2.6, a propósito da soma dos ângulos externos de um triângulo, pode agora estender-se a polígonos quaisquer (para já convexos); ou seja, as sucessivas “viragens” que é necessário efetuar sobre si próprio para completar esse percurso, cada uma delas de amplitude igual a um ângulo externo, acabam por adicionar-se exatamente de modo a formar uma “volta inteira”, que corresponde ao ângulo giro. Notemos que esta propriedade é característica do plano (euclidiano); se pensarmos num trajeto idêntico numa esfera, por exemplo à superfície da Terra, podemos obter resultados bem diferentes. Imaginemos por exemplo um trajeto partindo do Pólo Norte ao longo de um meridiano até ao Equador, seguido de um trajeto ao longo do próprio equador, percorrendo um quarto deste, e em seguida voltando a percorrer um meridiano até ao Pólo Norte; ou seja, efetuando um percurso ao longo do que podemos designar por um “triângulo esférico”. Em cada viragem o observador terá dado um quarto de volta (entre direções tangentes à superfície da Terra) e se antes de começar o trajeto estivesse a olhar “a direito” na direção do segundo meridiano a percorrer, mas virado para fora do triângulo esférico, em particular dirigindo o olhar numa direção perpendicular à tangente ao primeiro meridiano a percorrer, terá de começar por dar um quarto de volta para começar a percorrer esse meridiano e, após o trajeto total e ter efetuado três quartos de volta, voltará exatamente à posição inicial, virado para o mesmo lado; ora, para rodar sobre si próprio sem se deslocar à superfície da Terra e obter o mesmo resultado final teria de dar uma volta inteira e não apenas três quartos de volta. Ou seja, o facto de se deslocar em círculos máximos de uma esfera em lugar de segmentos de um plano (euclidiano) fê-lo "poupar" um quarto de volta para poder voltar à posição inicial... Por outras palavras, a simples soma dos ângulos correspondentes às viragens efetuadas ao passar de um dos "lados" para outro do triângulo esférico no percurso efetuado não permite reconstituir a volta completa que teria de dar sobre si próprio para voltar à posição inicial, se pretendesse permanecer sempre no Pólo Norte e aí apenas efetuar voltas sempre no mesmo sentido.

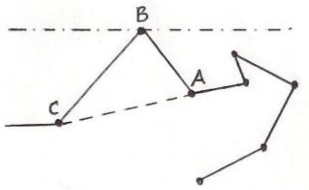
Se admitíssemos em primeiro lugar o resultado relativo à soma dos ângulos externos, baseados por exemplo na "intuição" associada à ideia dos percursos que acabámos de explorar (ainda que, como vimos, essa intuição possa revelar-se enganadora fora do contexto do plano euclidiano...), poderíamos depois deduzir o valor da soma das medidas de amplitude dos ângulos internos, explorando, como atrás, a suplementaridade dos ângulos internos e externos.

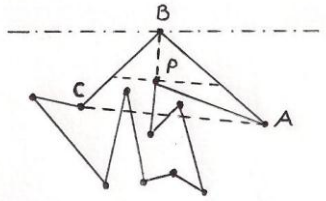
Observação 1:** No caso dos polígonos convexos, qualquer diagonal fica inteiramente contida no polígono, pelo que, se partirmos de um vértice e considerarmos uma das diagonais por ele determinada com um dos vértices que se segue a um dos imediatamente vizinhos, o polígono fica decomposto num triângulo e noutro polígono com menos um vértice (e um lado) que o polígono inicial. O segundo polígono será também convexo, como é fácil concluir a partir da definição de polígono convexo e porque os respetivos ângulos internos são todos convexos (2.10). Podemos depois repetir sucessivamente o processo até chegarmos a um triângulo; partindo de um polígono com n lados e uma vez que, em cada passo, diminuímos o número de lados de uma unidade, chegaremos ao triângulo ao fim de $n-3$ passos, obtendo, em cada passo, um triângulo da decomposição e um polígono "a decompor". No fim do processo teremos obtido então $n-3$ triângulos e um triângulo "sobrante", ou seja, no total, $n-2$ triângulos, como previsto.

Se o polígono inicial não for necessariamente convexo podemos servir-nos de um processo idêntico ao utilizado para o caso dos quadriláteros (*cf.* 2.12). Convém, no entanto, generalizar ligeiramente as condições a impor aos polígonos e admitir que estes possam ter lados consecutivos colineares. Nessas condições o processo seguido no caso dos quadriláteros para obter um vértice com ângulo interno associado agudo pode ainda ser utilizado pois, mesmo que se obtenham mais de dois vértices colineares seguidos à menor distância possível da reta horizontal fixada inicialmente para determinar um semiplano contendo o polígono, podemos sempre escolher, por exemplo, o vértice "mais à esquerda" de entre estes, o que impedirá que o ângulo interno com esse vértice seja raso, como se pode ilustrar com a figura seguinte:



Em qualquer caso ficaremos então com a situação ilustrada na figura seguinte, em dois casos alternativos:

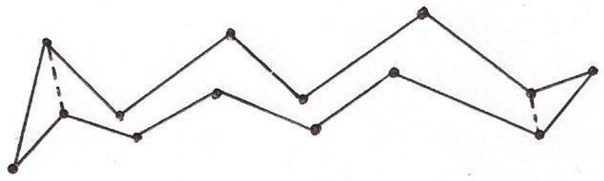




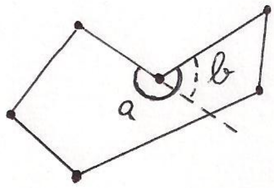
Agora, mais uma vez, se não existirem outros vértices do polígono contidos no triângulo $[ABC]$, como no primeiro caso da figura anterior, podemos decompor o polígono nesse triângulo e num polígono com menos um lado e um vértice através do lado $[AC]$ do triângulo, que terá forçosamente de estar contido no polígono, pois, se intersetasse um lado do polígono num ponto distinto dos extremos, esse lado, ou estaria contido no segmento $[AC]$, ou teria um dos vértices adjacentes no interior do triângulo $[ABC]$ (como acontece no exemplo da direita). Caso contrário (como no segundo polígono da figura acima), podemos escolher um dos vértices contidos no triângulo que esteja à maior distância possível da reta AC, de entre os vértices contidos no triângulo (seja P esse vértice), e decompor o polígono em dois através do segmento $[BP]$; com efeito esse segmento também não pode intersetar nenhum dos lados do polígono num ponto distinto de B e P pois, caso contrário, dos vértices extremos desse lado, pelo menos um deles estaria no triângulo $[ABC]$ e mais afastado que P da reta AC (o que contradiria a escolha de P). Daqui resulta que $[BP]$ está totalmente contido no polígono e determina portanto a referida decomposição em dois polígonos, cada um deles com menos, no mínimo, um vértice e um lado que o polígono inicial. Note-se que, em qualquer dos casos, não podemos garantir agora que em algum dos polígonos assim obtido o novo lado não seja colinear a algum dos adjacentes, mas esse facto não impede que se repita o processo em cada um dos novos polígonos, reduzindo-se assim sucessivamente o número de lados até se chegar apenas a triângulos e portanto à decomposição pretendida do polígono inicial. Foi esse processo que se seguiu para decompor em 12 triângulos o polígono de 14 lados acima representado, mas num dos passos (qual?) utilizou-se uma direção “não horizontal” para prosseguir, por uma questão de clareza do desenho.

Para concluirmos que o número de triângulos de uma decomposição de um polígono de n lados assim obtida é igual a $n-2$, comecemos por observar que este número terá de ser o mesmo para qualquer decomposição do polígono em triângulos cujos vértices sejam vértices do polígono, já que a soma das medidas em graus dos ângulos internos não pode, evidentemente, depender da decomposição efetuada e será sempre igual ao número de triângulos multiplicado por 180. Notemos agora que, na decomposição construída em cada passo do processo acima descrito, os dois polígonos obtidos terão um número de lados cuja soma é igual a $n+2$, já que cada um dos polígonos tem exatamente um lado que não partilha com o polígono inicial, sendo esse o único lado comum aos dois polígonos da decomposição. Como um polígono não pode ter menos que três lados, cada um dos polígonos da decomposição não pode ter mais que $n-1$ lados; além disso, se um deles tiver k lados, o outro terá $n-k+2$ (para que a soma seja igual a $n+2$); assim, se soubermos que a decomposição de cada um deles dá lugar a um número de triângulos igual a menos duas unidades que o respetivo número de lados, o primeiro decompor-se-á em $k-2$ triângulos e o segundo em $n-k$ pelo que, no total, obteremos $n-2$ triângulos para uma decomposição do polígono inicial. Ora, estando já estabelecido que esta regra para o número de triângulos de uma tal decomposição vale para quadriláteros, ficará forçosamente também a valer para pentágonos, pois no primeiro passo do processo acima descrito estes só podem decompor-se em triângulos e quadriláteros. Agora podemos tirar a mesma conclusão para hexágonos, e assim sucessivamente, e portanto para polígonos com qualquer número de lados. A formalização deste tipo de demonstração em que se verifica determinada propriedade (dependente de um número natural n) para certo valor p de n e depois, para valores m superiores a p, prova-se que vale para m desde que se admita que vale para os valores entre p e $m-1$ (ou, em alternativa, apenas para $m-1$), designa-se por *método de indução matemática*.

Esta propriedade de decomposição de um polígono em triângulos relaciona-se estreitamente com a que invocámos a propósito dos quadriláteros, segundo a qual *qualquer polígono com mais de três lados tem sempre pelo menos duas orelhas que não se intersetam nos respetivos interiores* (*cf.* 2.12); admitido este resultado, poderíamos justificar a decomposição de qualquer polígono em triângulos nas condições atrás requeridas muito simplesmente "cortando sucessivamente uma orelha" até ficarmos apenas com um triângulo... Apresenta-se na figura seguinte um exemplo de polígono com 14 lados mas apenas com duas orelhas, sugerindo que se pode apresentar um exemplo semelhante com qualquer número de lados (superior a três):



Observação 2:** Podemos estender a noção de *ângulo externo* a polígonos não necessariamente convexos; pretendemos manter a propriedade segundo a qual o vértice de um ângulo externo é vértice do polígono, um dos lados coincide com o lado do ângulo interno com esse vértice e outro lado é a semirreta oposta ao outro lado do referido ângulo interno. A situação pode ilustrar-se com a figura seguinte:

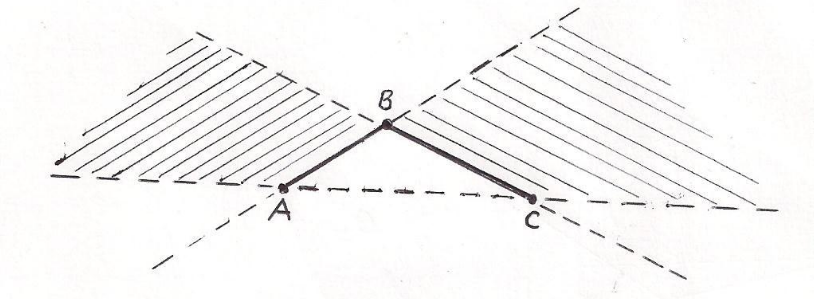


O ângulo b é um dos dois *ângulos externos* associado ao ângulo interno côncavo a; note-se que um ângulo externo, assim definido, não é suplementar do interno com o qual partilha um lado mas antes suplementar do ângulo convexo com os mesmos lados que esse ângulo interno, mas, se lhe atribuirmos o sinal negativo a "soma algébrica" do ângulo interno com o externo ("diferença entre o ângulo a e o ângulo b") será mais uma vez igual a um ângulo raso. Esta definição de ângulo externo é coerente com a ideia de que o ângulo externo representa o "ângulo da volta sobre si próprio" executada por um observador que percorra sucessivamente os lados do polígono (situado no plano horizontal em que anda o observador), quando passa pelo respetivo vértice. No caso acima, se um observador efetuar esse percurso começando noutro vértice qualquer e deixando sempre o polígono do seu lado direito, ao atingir o vértice comum dos ângulos a e b, para prosseguir, dará uma volta sobre si próprio de amplitude igual à de b, mas no sentido direto (contrário ao dos ponteiros do relógio), ao passo que nos outros vértices a volta executada tem também amplitude igual à do ângulo externo correspondente, mas no sentido retrógrado (no sentido dos ponteiros do relógio). Assim, se atribuirmos aos ângulos externos de vértice comum com ângulos internos côncavos o sinal negativo, como acima foi sugerido, e adicionarmos as respetivas amplitudes dotadas dos sinais assim atribuídos, a soma algébrica dessas amplitudes dará como resultado a amplitude da volta inteira que o observador executou sobre si próprio em determinado sentido ao percorrer toda a fronteira do polígono. Admitindo que no plano euclidiano essa volta corresponde à que daria sobre si próprio sem se deslocar para ficar na posição final que resultou do seu percurso (de acordo com o que acima se comentou no caso dos polígonos convexos), podemos concluir que *"a soma algébrica dos ângulos externos"* também neste caso é igual a um ângulo giro, desde que se atribua o sinal negativo à medida de amplitude dos ângulos externos associados a ângulos internos côncavos. Esse resultado permitiria agora reobter a fórmula para a soma dos ângulos internos de qualquer polígono; com efeito, como acima foi observado, a soma algébrica da medida de amplitude em graus de um ângulo interno côncavo com a "medida negativa" de amplitude em graus de um ângulo externo associado será também igual a 180 e podemos assim reproduzir o argumento sugerido para o caso dos polígonos convexos.

2.15

É fácil concluir que um quadrilátero tem exatamente duas diagonais, pois, com os quatro vértices, podemos constituir seis pares (conjuntos com dois desses pontos), ou seja, mais dois que o número de lados; haverá portanto exatamente dois pares que não são constituídos por extremos de um mesmo lado do quadrilátero e determinam portanto duas diagonais. Para verificar que se podem formar exatamente seis pares de pontos com os quatro vértices basta partir de um deles, o qual pertencerá a três pares (um formado com cada um dos restantes três pontos), depois escolher um segundo ponto, o qual, para além do par já considerado, pertencerá ainda a dois outros pares, finalmente um terceiro que ainda pertencerá a um terceiro par, para além dos dois já considerados; o quarto ponto já foi emparelhado com cada um dos outros três, pelo que não há pares a acrescentar. No total teremos então, de facto, $3 + 2 + 1 = 6$ pares.

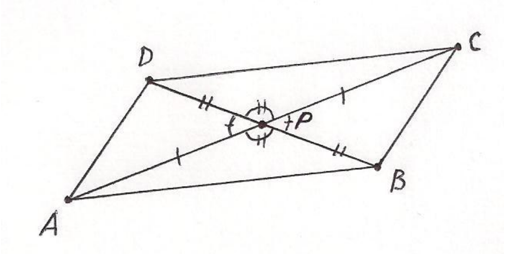
Examinemos o que pode acontecer à posição relativa das duas diagonais de um quadrilátero, seja ele $[ABCD]$; os pontos A, B e C não podem ser colineares e o ponto D não poderá estar na região assinalada a tracejado na figura abaixo, determinada por aqueles três pontos:



Com efeito, cada ponto dessa região determina com um dos pontos A ou C um segmento que terá de intersetar um dos lados AB ou BC fora dos vértices, não podendo assim ser lado do polígono. Examinando separadamente os polígonos que resultam de escolher um dos pontos de cada uma das restantes regiões em que o plano fica dividido como na figura acima, verifica-se que apenas se obtém um polígono convexo no caso em que D fica no interior da interseção do ângulo convexo ABC com o semiplano oposto a B determinado pela reta AC. Nesse caso as diagonais (segmentos $[BD]$ e $[AC]$) têm necessariamente que se intersetar no interior do polígono, já que o segmento $[BD]$ interseta a reta AC porque B e D estão em semiplanos opostos por ela determinados e o mesmo segmento está, por hipótese, contido no interior do ângulo ABC, pelo que o ponto de interseção das diagonais tem de situar-se entre os pontos A e C, ou seja, no segmento $[AC]$, sendo distinto dos extremos. Nos restantes casos o quadrilátero não é convexo e, examinando as diferentes hipóteses, conclui-se que as diagonais não se intersetam; note-se que, para polígonos não convexos com mais de quatro lados, duas diagonais podem intersetar-se num ponto que tanto pode estar no interior como no exterior ou na fronteira do polígono e, mesmo sendo o polígono convexo, duas diagonais podem não se intersetar no interior e, se tiver mais que cinco lados, podem mesmo não se intersetar.

2.16

Consideremos um quadrilátero cujas diagonais se bissetam. Atendendo ao que acima se viu (*cf.* 2.15) tal quadrilátero terá de ser convexo, pois, caso contrário, as diagonais não se intersetariam, e o ponto de interseção terá de situar-se no interior do quadrilátero. Teremos então a seguinte situação:

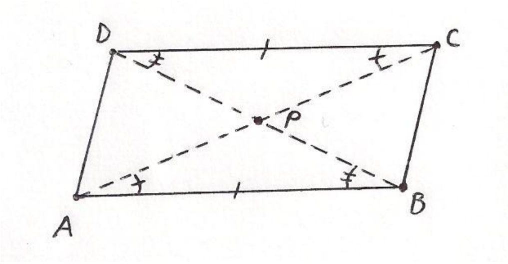


A hipótese de que as diagonais se bissetam traduz-se nas igualdades de segmentos assinaladas; por outro lado são iguais os ângulos APB e CPD, assim como os ângulos DPA e BPC por serem dois a dois verticalmente opostos. Resulta destas igualdades geométricas que, pelo critério LAL, são iguais os triângulos $[APB]$ e $[CPD]$, assim como os triângulos $[DPA]$ e $[BPC]$ e portanto serão iguais, por exemplo, os ângulos CDP e ABP por se oporem a lados iguais em triângulos iguais. Mas estes ângulos são alternos internos relativamente ao par de retas AB e DC intersetadas pela reta DB; da igualdade dos ângulos deduz-se então que as retas AB e DC são paralelas (*cf.* GM5-1.13). De modo análogo se conclui que são paralelas as retas DA e BC, pelo que o quadrilátero é um paralelogramo, como pretendíamos demonstrar.

Outra possível demonstração consiste em utilizar o facto de B ser a imagem de D, e C a imagem de A, pela *reflexão central de cento* P pelo que, como sabemos (GM6-9.2) serão iguais os segmentos $[AD]$ e $[CB]$, bem como os segmentos $[AB]$ e $[CD]$, já que as reflexões centrais são *isometrias*. Ora, como vimos a propósito de GM5-2.16, *um quadrilátero em que os lados opostos são iguais é um paralelogramo*. Também poderíamos chegar a esta conclusão utilizando ainda a reflexão central de centro P para concluir que são iguais os ângulos CDP e ABP (GM6-9.3) e daí deduzir que as retas AB e DC são paralelas, como acima foi feito; em seguida, podemos, pelo mesmo processo, concluir que são paralelas as retas DA e BC.

Note-se que deste resultado conclui-se que *as reflexões centrais transformam cada segmento com extremos não colineares com o centro de reflexão num segmento paralelo*.

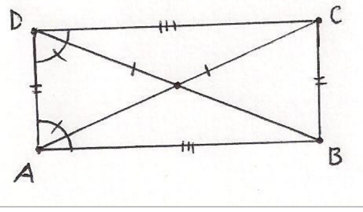
Reciprocamente, se o quadrilátero for um paralelogramo, em particular será convexo; com efeito, fixados três vértices A, B, C consecutivos, examinando as diversas possibilidades para o quarto vértice D, de acordo com a análise desenvolvida no texto de apoio ao descritor anterior, facilmente se conclui que, para que AD seja paralela a BC (por exemplo), D apenas pode estar situado na região do plano que corresponde aos quadriláteros convexos. Sabemos também que os lados opostos são iguais (GM5-2.16), pelo que a situação é a da figura seguinte:



Do paralelismo dos lados opostos deduzimos que nos triângulos $[APB]$ e $[CPD]$ são iguais os ângulos PAB e DCP, assim como os ângulos ABP e CDP, por se tratar de pares de ângulos alternos internos determinados respetivamente pelas retas DB e AC no par de retas paralelas AB e DC; por outro lado, como foi referido, os lados opostos de um paralelogramo são iguais, em particular os lados $[AB]$ e $[CD]$. Assim, pelo critério ALA, deduzimos a igualdade dos triângulos $[APB]$ e $[CPD]$ e portanto a igualdade dos lados $[AP]$ e $[PC]$ que se opõem a ângulos iguais em triângulos iguais, bem como, pela mesma razão, a igualdade dos lados $[BP]$ e $[PD]$, o que prova que as diagonais do paralelogramo se bissetam.

Observação: A primeira parte do resultado expresso neste descritor 2.16 permite justificar um novo método para se traçar a paralela a uma dada reta passando por um ponto exterior a essa reta. Com efeito, dada uma reta r e um ponto P fora de r, se fixarmos um ponto qualquer A de r e construirmos o ponto médio M do segmento $[AP]$ (construindo a mediatriz deste segmento com régua e compasso, por exemplo, como foi referido no texto de apoio do TCG relativo aos descritores GM6-9.4 a GM6-9.7), a imagem Q de outro qualquer ponto B da reta r pela reflexão central de centro M será tal que $[ABPQ]$ é um paralelogramo, atendendo a que, por construção, as diagonais deste quadrilátero se bissetam. Em particular a reta PQ que passa pelo ponto P é paralela à reta AB, já que são retas suporte de lados opostos de um paralelogramo. Como a construção de um ponto imagem de outro por uma reflexão central pode ser muito facilmente obtida utilizando uma régua e um compasso, podemos utilizar estes instrumentos para obter sucessivamente o ponto M e o ponto Q que com P determina a paralela pretendida. Na prática, em muitos casos, podemos efectuar esta construção de modo suficientemente preciso utilizando apenas uma régua graduada.

2.17 Suponhamos que, em determinado paralelogramo, as diagonais são iguais, como na seguinte figura:

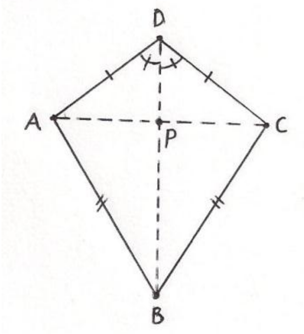


Então, pelo critério LLL, são iguais os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ (utilizando também a igualdade dos lados opostos de um paralelogramo), sendo portanto iguais os ângulos ADC e DAB, por se oporem a lados iguais em triângulos iguais. Mas como esses ângulos são suplementares (*cf.* GM5-2.7) têm de ser retos, o mesmo se podendo dizer então dos restantes dois ângulos, atendendo à mesma propriedade dos ângulos internos de um paralelogramo que acabámos de invocar. Assim os quatro ângulos internos são retos e o paralelogramo é um retângulo.

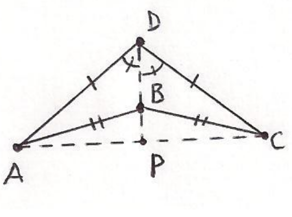
Reciprocamente, é fácil concluir que as diagonais de um retângulo são iguais; na figura acima, se se tratar de um retângulo, pelo critério LAL, são iguais os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ pois são retos respetivamente em A e em D, e são iguais os lados $[AB]$ e $[DC]$, sendo comum o lado $[AD]$. Então serão iguais os lados $[DB]$ e $[AC]$ (que são exatamente as diagonais do retângulo) por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais.

2.18
2.19
2.20

É óbvio, definindo «papagaio» como um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos iguais, que um losango, tendo os lados todos iguais, é, em particular, um papagaio. Comecemos então por verificar que as diagonais de um papagaio são perpendiculares, considerando a figura seguinte:



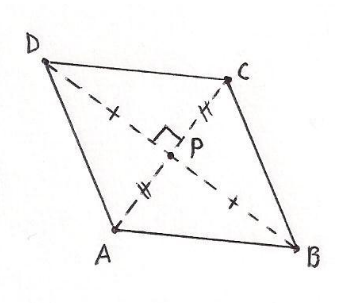
Pelo critério LLL são iguais os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ (as igualdades de segmentos assinaladas resultam simplesmente da definição de papagaio e um dos lados é comum); em particular são iguais os ângulos ADB e CDB (por se oporem a lados iguais em triângulos iguais) e portanto, pelo critério LAL, também serão iguais os triângulos $[ADP]$ e $[CDP]$. Desta igualdade resulta que são iguais os ângulos suplementares APD e CPD e portanto são retos, ou seja, as diagonais do papagaio são perpendiculares. Note-se que o resultado e esta demonstração valem para um papagaio *não convexo*, como se ilustra com a seguinte figura:



A construção efetuada na demonstração anterior também permite concluir que são iguais os segmentos $[AP]$ e $[PC]$ (opõem-se a ângulos iguais em triângulos iguais); concluímos então que a reta que contém a diagonal $[BD]$ bisseta a diagonal $[AC]$. Ou seja, *a reta que contém a diagonal do papagaio que une os vértices em que se encontram os pares de lados iguais bisseta a outra diagonal*.

Em alternativa, e de modo mais expedito, poderíamos utilizar o que sabemos acerca da mediatriz de um segmento de reta (*cf.* GM6-9.4 a GM6-9.6); com efeito, nas figuras acima, por definição de papagaio, os pontos D e B pertencem à mediatriz do segmento $[AC]$ (GM6-9.6), pelo que, por definição de mediatriz, DB é perpendicular a $[AC]$ no respetivo ponto médio.

Consideremos agora um paralelogramo com diagonais perpendiculares, como na figura abaixo:



Como já sabemos que as diagonais se bissetam (*cf.* 2.16), em particular serão iguais os triângulos retângulos $[ADP]$ e $[CDP]$, pelo critério LAL. Então são iguais os lados $[AD]$ e $[DC]$ (por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais) e portanto os lados do paralelogramo serão todos iguais, já que os lados opostos àqueles dois serão também iguais a eles. Trata-se portanto, de facto, de um losango.

Outro argumento que poderíamos utilizar seria notar que a hipótese de serem perpendiculares as diagonais e o facto de já sabermos que as diagonais se bissetam permite concluir que C é a imagem de A pela reflexão de eixo BD e B é a imagem de D pela reflexão de eixo AC, no plano do quadrilátero, o que permite concluir sucessivamente (*cf.* GM6-9.10) as igualdades dos segmentos $[BC]$ e $[BA]$, $[DC]$ e $[DA]$ e, finalmente (por exemplo), $[BC]$ e $[DC]$, pelo que os lados são, de facto todos iguais entre si e o quadrilátero é um losango.

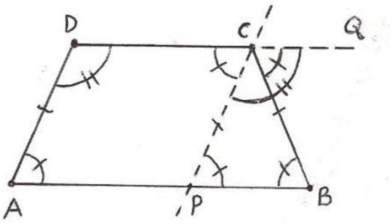
Também neste caso poderíamos utilizar as propriedades da mediatriz para chegar à mesma conclusão; se as diagonais de um paralelogramo forem perpendiculares, como, por outro lado, se bissetam (2.16), por definição cada diagonal está contida na mediatriz da outra, pelo que, pela propriedade expressa no descritor GM6-9.6 são iguais as distâncias de cada vértice aos dois que lhe são vizinhos, ou seja, os lados são todos iguais.

2.21

Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Tem portanto dois pares de lados paralelos e cada um desses dois pares de lados cumpre a condição definidora das bases de um trapézio; ou seja, *um paralelogramo é um trapézio e cada par de lados opostos é um par de bases do trapézio*.

2.22

Embora não seja requerido no descritor 2.22 em que se define trapézio isósceles (trapézio com dois lados iguais não paralelos), podemos notar que, em tal trapézio, ângulos adjacentes a uma base são iguais (esta propriedade pode constituir exemplo do que se sugere em 3.1). Para o demonstrar basta considerar uma reta paralela a um dos lados opostos não paralelos, passando pelo vértice da base menor que não partilha com esse lado; note-se que se as bases fossem iguais a reta assim construída intersetaria a outra base num vértice (já que obteríamos o paralelogramo $[APCD]$ da figura abaixo e da igualdade das bases resultaria que o ponto P coincidiria com o ponto B) e portanto essa reta conteria um lado do trapézio distinto das bases fixadas, o qual, contra a hipótese, seria paralelo ao lado oposto. Obtemos assim a figura seguinte em que se assinala a igualdade pressuposta do par de lados não paralelos do trapézio:



Notemos que, por construção, o quadrilátero $[APCD]$ é um paralelogramo e portanto são iguais os lados $[AD]$ e $[PC]$ (GM5-2.16), como assinalado. Então é isósceles o triângulo $[PBC]$, donde são iguais os ângulos PBC e BPC (opostos a lados iguais num triângulo – *pons asinorum*, *cf.* GM5-2.12) e como também são iguais os ângulos correspondentes BPC e BAD, concluímos que são, de facto, iguais os ângulos adjacentes à base maior, ABC (que é o mesmo que PBC) e BAD.

Por outro lado, são alternos internos e portanto iguais os pares de ângulos BPC, PCD e PBC, BCQ; das igualdades já antes estabelecidas resulta agora que este quatro ângulos são iguais entre si, ou seja, são iguais todos os ângulos assinalados na figura com um traço. Agora concluímos que o ângulo BCD é igual ao ângulo PCQ pois são ambos iguais à soma de um ângulo (PCB) com ângulos iguais (PCD e BCQ); mas o ângulo PCQ é igual ao ângulo correspondente ADC, pelo que, finalmente, são, de facto, iguais os ângulos BCD e ADC, adjacentes à base menor $[CD]$.

4.1
4.2
4.3
4.4

A noção de figuras *geometricamente iguais* que foi introduzida no 1º ciclo com base na ideia intuitiva de *deslocamento rígido* (entendido como deslocamento no espaço de um "objeto rígido") e a ligação entre esta ideia intuitiva e a noção primitiva de *equidistância* ou *igualdade de comprimento* têm como consequência que, qualquer que seja a formalização que se possa fazer de modo rigoroso dessa noção de deslocamento rígido, duas figuras obtidas uma da outra por esse processo, ou seja, duas figuras (geometricamente) iguais, serão necessariamente *isométricas* ou *congruentes*, uma vez que se pode estabelecer uma correspondência um a um associando as "posições inicial e final" de qualquer ponto que tenha sido objeto desse deslocamento, e a distância entre pares de pontos correspondentes deverá ser igual, uma vez que é precisamente através de deslocamentos rígidos que pretendemos na prática aferir as igualdades de distâncias.

A recíproca, no entanto, *não é verdadeira* no espaço tridimensional; ou seja, há figuras *isométricas* que não são *geometricamente iguais*, no sentido em que não podem ser obtidas uma da outra por deslocamento rígido; prova-se, no entanto, que duas figuras isométricas ou são iguais ou uma delas é igual à imagem da outra por um espelho plano (desde que se traduzam adequadamente todos estes conceitos intuitivos numa formalização rigorosa da Geometria euclidiana). Por exemplo, se, dados dois parafusos, um deles for igual à imagem do outro refletida num espelho, serão *isométricos* ou *congruentes* (com a definição que estamos a adotar) mas não serão geometricamente iguais, o que se traduz, em particular, no facto de não os conseguirmos enroscar nas mesmas porcas… Entre figuras planas, no entanto, há equivalência das noções de congruência e igualdade geométrica, desde que se continuem a admitir deslocamentos *no espaço tridimensional*.

Podemos dizer que duas figuras (geometricamente) iguais têm *a mesma forma e tamanho* e por vezes também se considera que figuras *isométricas* ou *congruentes* têm “a mesma forma” (e tamanho), mas, mesmo por razões práticas, há que distinguir esta “igualdade de forma” generalizada da mais estrita associada à noção de igualdade geométrica, como se viu com o exemplo dos parafusos…

A noção intuitiva de “igualdade de forma”, independente agora do “tamanho” traduz-se geometricamente na noção de *semelhança* de que agora nos ocuparemos.

A noção de semelhança faz intervir a proporcionalidade de distâncias entre pares de pontos correspondentes; ou seja, através de uma correspondência um a um entre pontos de duas figuras, estabelece-se uma correspondência entre distâncias de pares de pontos correspondentes e, para que as figuras sejam semelhantes, pretende-se que haja proporcionalidade entre as distâncias assim postas em correspondência, ou seja, neste caso, as duas *grandezas diretamente proporcionais uma à outra* são as distâncias entre pares de pontos em cada figura, sendo a dependência entre as grandezas definida pela referida correspondência.
A definição de proporcionalidade pressupõe que, fixadas unidades, seja possível determinar a medida de cada grandeza na respetiva unidade; neste caso, uma vez que se trata de grandezas da mesma natureza (*distâncias* ou *comprimentos*), a definição de *razão de semelhança*, enquanto constante de proporcionalidade, pressupõe que se fixa uma unidade de comprimento comum para o cálculo das distâncias em ambas as figuras; veremos adiante (*cf.* 7.1,2) que a razão de semelhança não depende da unidade de comprimento comum fixada para o cálculo das distâncias, já que, como se verá, os quocientes entre as medidas de comprimento de dois segmentos não dependem da unidade de comprimento fixada para os medir a ambos. Assim, representando por A', B', C' e D' respetivamente os pontos da segunda figura correspondentes a pontos A, B, C e D da primeira, e fixada uma unidade de comprimento qualquer, teremos, para as distâncias entre os pontos, medidas nessa unidade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Ou, de maneira equivalente:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$$

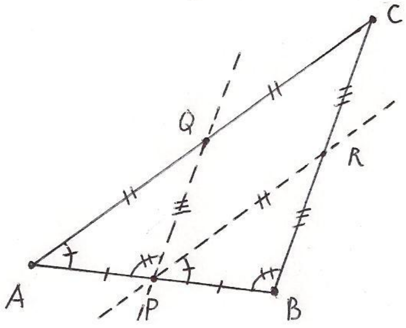
O valor destes últimos quocientes iguais, que é, portanto, independente dos pares de pontos distintos fixados e da unidade de comprimento escolhida, é a constante de proporcionalidade e portanto a própria *razão de semelhança.* Veremos também que os números racionais não são suficientes para representar a medida de comprimento de todos os segmentos numa dada unidade (*cf.* 7.4, 5, 6). Será assim necessário introduzir uma nova classe, mais alargada, de números (ditos números reais) entre os quais será sempre possível encontrar a medida de comprimento de qualquer segmento de reta, fixada uma qualquer unidade de comprimento; assim, estendidas também as operações aos números reais, será possível sempre considerar os quocientes acima representados e verificar as condições de proporcionalidade envolvidas na definição de semelhança.

Do que precede, imediatamente se conclui que a semelhança será uma isometria se (e apenas se) a respetiva razão for igual a 1, o que traduz exatamente a equidistância de pares de pontos correspondentes. Desta propriedade resulta que as propriedades estabelecidas para semelhanças poderão aplicar-se em particular a isometrias, adaptando-se devidamente as conclusões pelo facto de, nesse caso, a razão ser igual a 1.

Quando determinada figura é constituída por um número finito de pontos, qualquer figura a ela semelhante (ou, em particular, congruente) terá forçosamente o mesmo número finito de pontos, já que a existência de uma *correspondência um a um* entre as duas figuras é condição prévia para se verificarem as condições de proporcionalidade que caracterizam uma semelhança, o que significa exatamente que têm o mesmo número de pontos. A semelhança neste caso traduz-se num número finito de proporções envolvendo todos os possíveis pares de pontos distintos numa das figuras e os correspondentes na outra. Se uma das figuras for constituída exatamente pelos vértices de um polígono, prova-se que a outra também o é e então as proporções envolverão os comprimentos dos lados e das diagonais de dois polígonos com esses vértices. Prova-se também que, nesse caso, a semelhança entre os conjuntos de vértices pode estender-se a uma semelhança que transforma um dos polígonos noutro semelhante. Além disso, se determinada figura for semelhante a um polígono também será um polígono e qualquer semelhança transforma vértices em vértices e lados em lados.

Atendendo ao que acabámos de estabelecer para semelhança de polígonos e à noção de razão de semelhança ficamos a saber que para dois polígonos serem semelhantes basta (e é necessário) que se possa estabelecer uma correspondência entre os respetivos vértices de modo que os lados e as diagonais de um se obtenham respetivamente de lados e diagonais do outro com vértices correspondentes e as medidas dos respetivos comprimentos se obtenham das medidas de comprimento dos lados e diagonais correspondentes no outro polígono multiplicando-os por um mesmo número positivo. Prova-se que polígono semelhante a um polígono convexo é também convexo e que determinado conjunto finito de pontos num plano não pode ser o conjunto de vértices de mais que um polígono convexo, pelo que, no caso de dois polígonos que à partida se saiba serem convexos, para se verificarem as condições de semelhança utilizando os vértices não é necessário verificar se lados correspondem a lados e diagonais a diagonais, bastando verificar as condições de proporcionalidade entre os diversos segmentos correspondentes determinados pelos vértices.

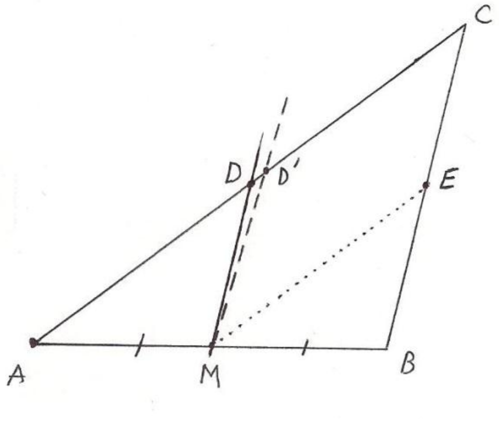
4.5 Analisemos qual o resultado de decompormos um triângulo utilizando para o efeito duas retas passando pelo ponto médio de um dos lados e cada uma delas paralela a um dos outros dois lados; em primeiro lugar conclui-se que cada uma das retas terá de intersetar ambos os lados do triângulo aos quais não é paralela (para cada uma das retas trata-se de um resultado intuitivo que pode ser deduzido com base numa propriedade próxima que é habitualmente tomada como axioma da Geometria – o axioma de Pasch), obtendo-se então a seguinte figura:



Assinalaram-se com um traço na figura os segmentos iguais em que se decompõe o lado $[AB]$ do triângulo $[ABC]$ através do ponto médio P desse segmento; também por hipótese, a reta PQ é paralela ao lado $[BC]$ e a reta PR é paralela ao lado $[AC]$. Dos paralelismos considerados podemos deduzir as igualdades dos ângulos assinalados pelo mesmo número de traços, por se tratar de pares de ângulos correspondentes determinados pela secante AB nos dois referidos pares de retas paralelas. Então do critério ALA podemos deduzir a igualdade dos triângulos $[APQ]$ e $[PBR]$ e em seguida a igualdade dos lados desses triângulos assinalados com o mesmo número de traços (dois ou três), por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais. Por outro lado são iguais os lados opostos do paralelogramo $[PRCQ]$, o que também está assinalado na figura. Então, finalmente, concluímos que Q é o ponto médio do lado $[AC]$ e R é o ponto médio do lado $[BC]$, ou seja, por este processo, os outros dois lados do triângulo ficam bissetados; podemos concluir que uma reta paralela a um dos lados e bissetando outro bisseta também o terceiro. Note-se que esta construção permite ainda concluir que o segmento $[BC]$ tem comprimento de medida igual ao dobro da medida do comprimento de $[PQ]$.

4.6

Do que precede (4.5) podemos concluir, em particular, dado um triângulo $[ABC]$, que, se uma reta interseta o lado $[AB]$ no respetivo ponto médio M e o lado $[AC]$ em D, então, se for paralela ao lado $[BC]$, D é o ponto médio de $[AC]$, como se ilustra na figura seguinte:



Reciprocamente, se D for o ponto médio de $[AC]$ pretendemos concluir que a reta MD é paralela a $[BC]$. Para o efeito podemos considerar a reta MD' paralela a $[BC]$; pelo resultado anterior (4.5) concluímos que D' é o ponto médio de $[AC]$, coincidindo portanto com D; mas, nesse caso, a reta MD coincide com a reta MD' (já que têm dois pontos em comum) e portanto, de facto, é paralela a $[BC]$. Assim, como pretendíamos concluir, D é o ponto médio de AC quando e apenas quando a reta MD é paralela a $[BC]$. Neste último caso, a construção efetuada em 4.5 permite concluir que a reta ME, paralela a $[AC]$, bisseta o segmento $[BC]$ e, como foi observado, do facto de $[MECD]$ ser um paralelogramo, conclui-se que os segmentos $[MD]$ e $[EC]$ são iguais e portanto o segmento $[BC]$ tem comprimento igual ao dobro do comprimento do segmento $[MD]$ (podemos referir-nos à "razão dos comprimentos" e portanto ao "dobro do comprimento" em lugar de falarmos na razão das respetivas medidas, fixada uma unidade, pois, como foi referido em 4.1-4, e será examinado em pormenor no objetivo 7 abaixo, essas razões não dependem da unidade).

4.7

O resultado anterior pode ser entendido como um caso particular do chamado *Teorema de Tales* (e do respetivo recíproco) e, como veremos, pode ser utilizado para obter uma demonstração desse teorema. Com efeito, em particular, verificámos que nas condições da figura acima, a proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = 2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

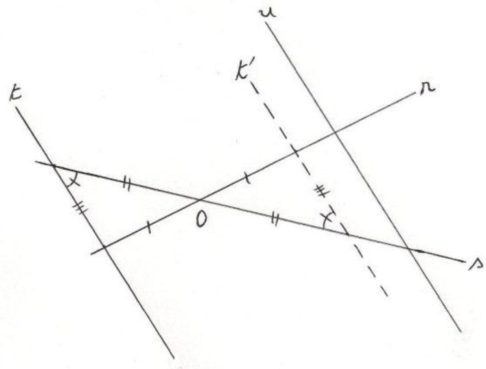
permite garantir que são paralelas as retas MD e BC e, nesse caso, podemos completar a proporção com uma nova igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{MD}}$$

Reciprocamente, o paralelismo das retas MD e BC permite concluir as proporções acima, desde que se suponha que M é o ponto médio de $[AB]$. O resultado mais geral que se designa por *Teorema de Tales* resulta de relaxar a hipótese de que M tenha de ser obrigatoriamente o ponto médio de $[AB]$ (admitindo o paralelismo de MD e BC) concluindo-se as proporções acima, mas sem que os quocientes considerados nas proporções tenham de ser iguais a 2.

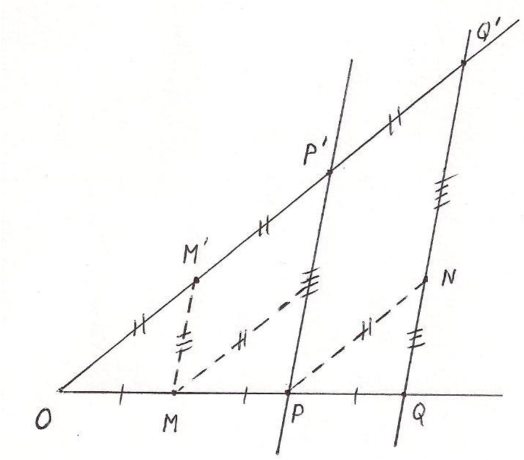
Assim, pretendemos partir de duas retas r e s concorrentes num ponto O e de outro par de retas t e u que as intersetam fora do ponto O; se este segundo par for constituído por retas paralelas pretendemos demonstrar determinadas proporções, sugeridas pelas que acima foram obtidas. Reciprocamente, se t e u intersetarem os lados do mesmo ângulo convexo determinado pelas retas r e s ou se cada uma delas intersetar os lados respetivamente de cada um dos ângulos de um par de ângulos convexos verticalmente opostos determinados por r e s e se tiverem lugar determinadas proporções entre comprimentos de segmentos determinados pelos pontos de interseção das diversas retas, desejamos provar que t e u são paralelas.

Comecemos por notar que podemos sempre reduzir-nos ao caso em que as retas t e u intersetam ambas os dois lados do mesmo ângulo convexo determinado por r e s; no caso em que intersetam ângulos verticalmente opostos, podemos reduzir-nos ao anterior utilizando a reta obtida de uma delas por reflexão central de centro O, como indicado na seguinte figura:



Os pontos obtidos por reflexão central de centro O dos pontos de interseção da reta t com as retas r e s, determinam a reta t' e, uma vez que a reflexão central é uma isometria, sabemos que também ficam iguais os segmentos assinalados com três traços e os ângulos assinalados com um traço (*cf.* GM6-9.2,3). Agora, da igualdade desses ângulos, que são alternos internos determinados no par de retas t e t' pela secante s, concluímos que são paralelas as retas t e t' (propriedade das reflexões centrais que já tínhamos assinalado em 2.16, acima). Assim, para obter os resultados acima referidos para as retas r, s, t e u bastará demonstrá-los para as retas r, s,t' e u.

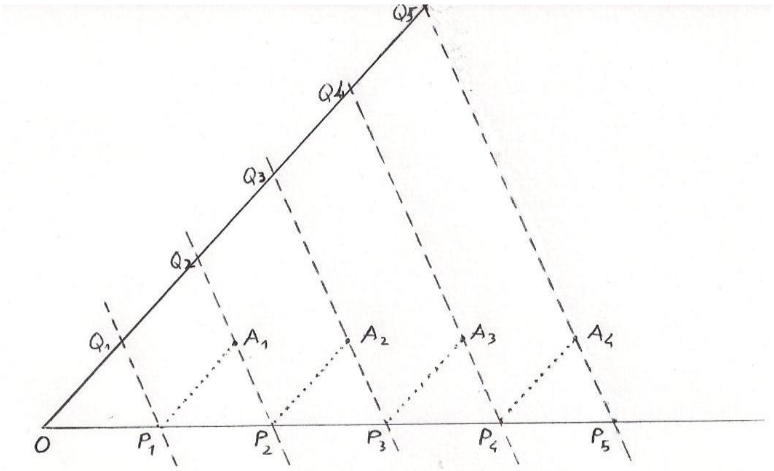
Procuremos então generalizar situação acima (4.5 e 4.6), em que os pontos de interseção, por exemplo, da reta s com as retas t' e u, juntamente com O, determinavam dois segmentos consecutivos iguais. Façamos uma primeira extensão do método acima utilizado considerando a seguinte figura:



Neste caso começamos por considerar o comprimento de $[OP]$ igual ao dobro do comprimento de $[PQ]$ o que permite considerar os segmentos iguais assinalados com um traço na figura. Se as retas PP' e QQ' forem paralelas, podemos começar por aplicar ao triângulo $[OPP']$ os resultados acima (4.5 e 4.6), o que justifica as igualdades de segmentos nesse triângulo assinaladas com dois traços, e em seguida considerar a reta PN paralela a $[OQ']$ assinalada a tracejado na figura, a qual interseta $[QQ']$ no ponto N. Utilizando o critério ALA, tal como se fez em 4.5, concluímos facilmente que são iguais os triângulos $[PQN]$ e $[OMM']$ e consequentemente os lados assinalados respetivamente com dois e três traços. Agora, no paralelogramo $[PNQ'P']$ serão iguais os lados opostos, assinalados com dois e quatro traços; assim, finalmente, $[P'Q']$ também será igual a $[OM']$ e a $[M'P']$, e $[NQ']$, sendo igual a $[PP']$, terá comprimento igual ao dobro do comprimento de $[MM']$ (atendendo a 4.6). Concluímos assim que $[QQ']$ terá comprimento igual a três vezes o comprimento de $[MM']$ e portanto igual a $3/2$ do comprimento de $[PP']$. Esta é a mesma razão que existe entre os comprimentos de $[OQ]$ e $[OP]$ e entre os comprimentos de $[OQ']$ e $[OP']$; teremos portanto proporções análogas às obtidas no caso anteriormente estudado:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{PP'}}$$

Este processo pode ser prosseguido traçando um número arbitrário de pontos num dos lados do ângulo de modo que os sucessivos segmentos por eles determinados (começando com um segmento tendo o vértice do ângulo por um dos extremos) tenham todos o mesmo comprimento. Considerando retas paralelas entre si passando por esses pontos e intersetando o outro lado do ângulo, e retas paralelas a esse lado passando também por esses pontos, obteremos uma figura do seguinte tipo (exemplifica-se com cinco pontos):



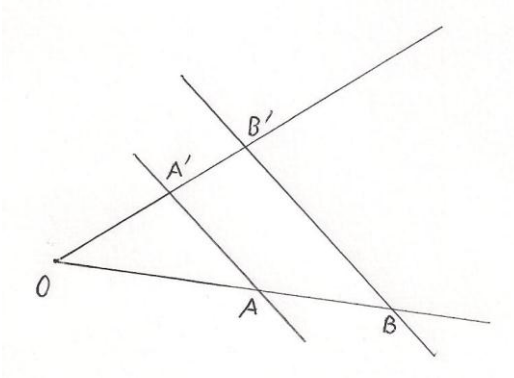
Note-se que, utilizando os triângulos assinalados, podemos concluir, como acima, que $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2A_1} = \overline{P_3A_2} = \overline{P_4A_3} = \overline{P_5A_4}$ e $\overline{OQ_1} = \overline{P_1A_1} = \overline{P_2A_2} = \overline{P_3A_3} = \overline{P_4A_4}$; utilizando os paralelogramos e as igualdades anteriores obteremos as igualdades, por um lado $\overline{OQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q_4} = \overline{Q_4Q_5}$, e por outro $\overline{P_2Q_2} = 2\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_3Q_3} = 3\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_4Q_4} = 4\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{P_5Q_5} = 5\overline{P_1Q_1}$. Assim, podemos estabelecer proporções envolvendo o ponto O e pontos P e Q com quaisquer dois índices, por exemplo:

$$\frac{\overline{OP_5}}{\overline{OP_2}} = \frac{5}{2} = \frac{\overline{OQ_5}}{\overline{OQ_2}} = \frac{\overline{P_5Q_5}}{\overline{P_2Q_2}}$$

Ou, mais geralmente:

$$\frac{\overline{OP_m}}{\overline{OP_n}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{OQ_m}}{\overline{OQ_n}} = \frac{\overline{P_mQ_m}}{\overline{P_nQ_n}}$$

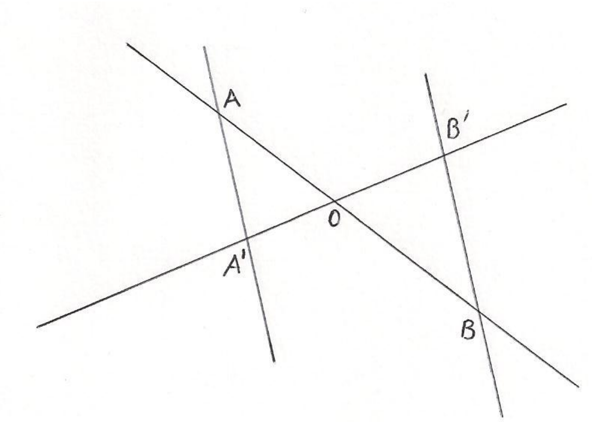
Genericamente, se duas retas paralelas intersetarem os dois lados de um ângulo convexo e as distâncias ao vértice dos pontos de interseção com um dos lados do ângulo forem múltiplas de um mesmo comprimento, ou seja, se pudermos fixar um segmento como unidade de medida de modo que os segmentos com um dos extremos no vértice e os outros coincidentes com os referidos pontos de interseção tenham medidas de comprimento inteiras, nessa unidade, sejam elas respetivamente m e n ($m > n$) podemos considerar uma figura como a acima, mas com pontos de índices até m, e obter proporções como as últimas apresentadas. Ou seja, dada a seguinte figura, nas condições referidas:



teremos:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

Valendo as mesmas proporções na situação ilustrada pela figura seguinte, atendendo ao que acima foi visto:



Como veremos adiante (objetivo geral 7), dados dois segmentos, nem sempre é possível encontrar uma unidade de comprimento que permita exprimir a medida do comprimento dos dois segmentos como números inteiros, o que é equivalente a dizer que tomando um dos dois segmentos para unidade de comprimento nem sempre existe um número racional que permita exprimir a medida do comprimento do outro nessa unidade (tais segmentos dizem-se *incomensuráveis*). Esta situação revela que o estudo até agora feito não pode aplicar-se diretamente a um par arbitrário de retas paralelas que intersetam os dois lados de um ângulo agudo (ou na situação da última figura acima). No entanto, como se verá mais tarde e já foi acima referido (*cf.* 4.1-4), é possível alargar o conjunto dos números aos chamados *números reais* de modo a conseguir exprimir sempre a medida do comprimento de um segmento, fixada uma qualquer unidade; além disso, nesse conjunto alargado de números, definem-se as operações habituais e, utilizando aproximações por racionais (que existem com qualquer grau de precisão), estendem-se muitas das propriedades conhecidas, em particular as expressas nas proporções anteriores, mesmo que os segmentos $[AO]$ e $[OB]$ não sejam comensuráveis.

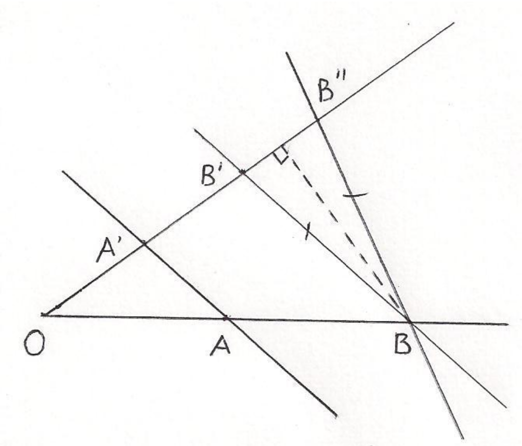
Reciprocamente, dadas duas retas AA' e BB' intersetando outras duas concorrentes como em qualquer das figuras acima, admitida a proporção:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

podemos proceder como em 4.6 para concluir que AA' e BB' são paralelas, bastando para tal considerar uma reta AA'' paralela a BB' (A'' na reta OA'), utilizar as proporções resultantes e as da hipótese e daí concluir que os segmentos $[OA']$ e $[OA'']$ são iguais e portanto A'' tem de coincidir com A', donde resulta imediatamente o paralelismo requerido. No entanto, a proporção:

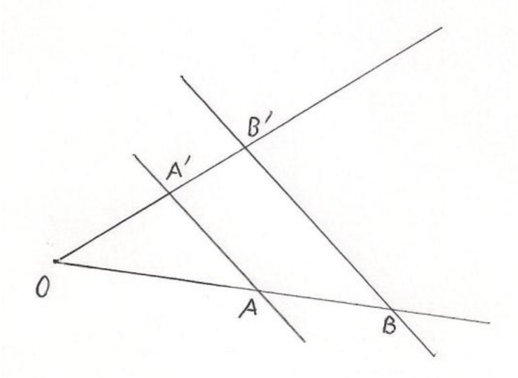
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

não é suficiente para garantir o paralelismo de AA' e BB', como fica patente no exemplo seguinte:



O segmento BB'' foi construído de modo que $\overline{BB''} = \overline{BB'}$, pelo que, na proporção acima, podemos substituir $\overline{BB'}$ por $\overline{BB''}$ e no entanto BB'' não é paralela a AA'.

Estes resultados constituem exatamente o chamado *Teorema de Tales* (ou o *Teorema de Tales* e o respetivo *recíproco*, se reservarmos a designação «Teorema de Tales» para a proposição acima em que se deduz as proporções entre comprimentos do paralelismo de duas das retas envolvidas). Podemos enunciá-lo sintetizando o resultado final a que se chegou na situação geométrica descrita nas figuras acima. Retomando uma delas, para fixar ideias:



Se AA' e BB' forem retas paralelas intersetando respetivamente as retas OA e OA' nos pontos indicados então têm lugar as proporções:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}}$$

E outras que destas se podem facilmente deduzir. Além disso, não pressupondo o paralelismo de AA' e BB', este é consequência da proporção:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

Notemos que a proporção:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

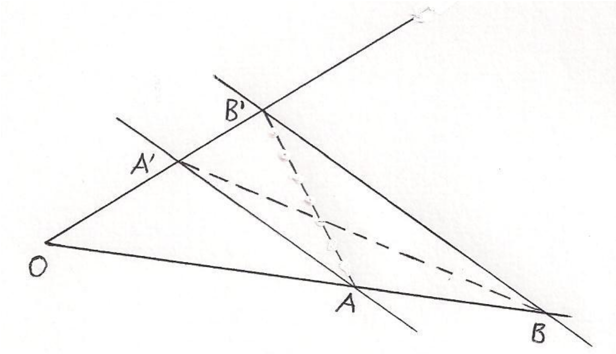
deduz-se de:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}+\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}+\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow 1+\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = 1+\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}$$

e agora facilmente se obtém a última proporção indicada na primeira parte do enunciado por um processo idêntico:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}+1 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}+1 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}+\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}+\overline{A'B'}}{\overline{A'B'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}}.$$

Observação*: Tal como acontece em outras situações (*cf.* por exemplo a observação no TCG ao descritor GM6-1.7), admitindo propriedades intuitivas da noção de área, incluindo a fórmula para o cálculo da área de um triângulo, é possível demonstrar o Teorema de Tales de maneira mais expedita, embora, como foi observado no exemplo acima referido, a justificação rigorosa dessas propriedades da medida de área seja de natureza bastante complexa. Consideremos então a seguinte figura, em que as retas AA' e BB'são paralelas:



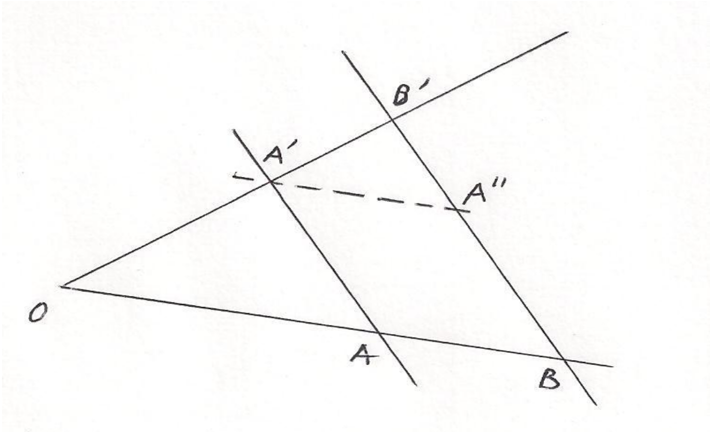
Comecemos por notar que são iguais as áreas dos triângulos $[AA'B']$ e $[AA'B]$ por partilharem a base $[AA']$ e terem alturas iguais (iguais à distância entre as retas paralelas AA' e BB'); então também são iguais as áreas dos triângulos $[OAB']$ e $[OA'B]$, pelo que podemos estabelecer as seguintes proporções envolvendo áreas de triângulos:

$$\frac{\Delta\ OBA'}{\Delta\ OAA'} = \frac{\Delta\ OB'A}{\Delta\ OA'A}$$

Ora, em cada quociente, os triângulos envolvidos têm alturas iguais relativamente aos vértices respetivamente A' e A, pelo que o quociente das áreas será igual ao quociente das bases relativas a essa alturas (podemos "cortar metade da altura" no dividendo e no divisor em cada quociente), o que permite obter imediatamente:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

A partir desta obtêm-se facilmente as outras proporções envolvendo segmentos correspondentes nas retas OA e OB, como acima se indicou. As proporções envolvendo $[AA']$ e $[BB']$ podem obter-se destas muito simplesmente observando agora a seguinte figura:



Considerou-se a reta $A'A''$ paralela a OB e agora podemos utilizar os resultados já demonstrados para obter, atendendo a esse paralelismo:

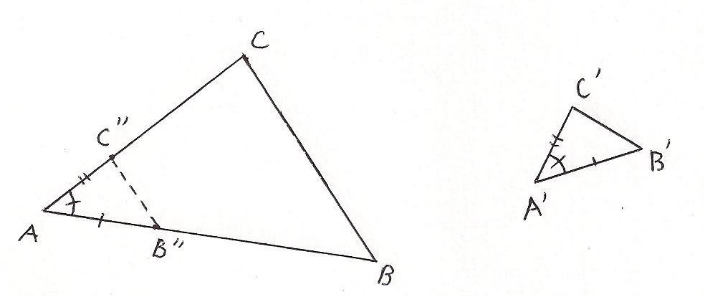
$$\frac{\overline{B'O}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{A''B}}$$

Mas, porque $[ABA''A']$ é um paralelogramo, são iguais $[A''B]$ e $[A'A]$, pelo que se obtém:

$$\frac{\overline{B'O}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{A'A}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$

4.8 Atendendo a 4.4, uma vez que os segmentos de extremos nos lados de um triângulo são todos lados deste, a existência de proporcionalidade direta entre os comprimentos dos lados de um e os comprimentos dos correspondentes lados do outro (para uma correspondência um a um adequada) é suficiente para que os triângulos sejam semelhantes, resultado que se designa por *critério LLL de semelhança de triângulos*. Tal como ficou estabelecido em 4.4, esta condição também é necessária para a semelhança dos triângulos.

4.9
4.11 Se, em dois triângulos, os comprimentos de dois lados de um forem proporcionais aos comprimentos de dois lados do outro e forem iguais os ângulos internos formados por cada um destes pares de lados em cada triângulo podemos obter a seguinte figura:



Admitida a proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

e a igualdade dos ângulos assinalados com um traço, podemos marcar os pontos B'' e C'' de modo que sejam iguais os segmentos assinalados com o mesmo número de traços, o que, pelo critério LAL, determina a igualdade dos triângulos $[A'B'C']$ e $[AB''C'']$, donde se conclui também a igualdade dos lados opostos aos ângulos iguais assinalados, ou seja, de $[B'C']$ e $[B''C'']$. A proporção da hipótese pode então ser substituída por:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$$

e portanto, pelo recíproco do Teorema de Tales (4.7), concluímos que são paralelas as retas $B''C''$ e BC, pelo que, do mesmo Teorema de Tales, podemos agora concluir que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}},$$

donde:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

que eram as proporções que faltavam para podermos aplicar o critério LLL e concluir que os triângulos dados são, de facto, semelhantes. O resultado que acabámos de estabelecer designa-se por *critério LAL de semelhança de triângulos*.

Reciprocamente, supondo que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes, valem as proporções indicadas entre os respetivos lados (eventualmente alterando as designações dos vértices de um deles), atendendo ao que se viu a propósito de 4.8; construindo o triângulo $[AB''C'']$ como indicado na figura acima, sendo iguais os segmentos assinalados com um e dois traços, mostremos agora que são, de facto, iguais os ângulos assinalados com um traço. Para o efeito podemos, mais uma vez aplicar o recíproco do Teorema de Tales, pois uma das proporções da hipótese, atendendo à igualdade de segmentos, dá agora lugar à proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$$

Concluímos assim que são paralelas as retas $B''C''$ e BC, e portanto, mais uma vez pelo Teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}};$$

substituindo $\overline{AB''}$ pelo comprimento igual $\overline{A'B'}$ obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}$$

o que, em conjunto com a proporção também pressuposta:

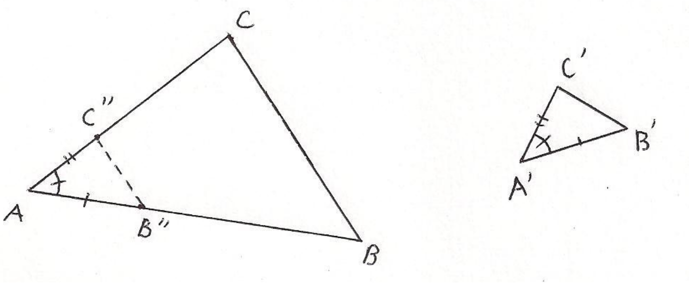
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

conduz a:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

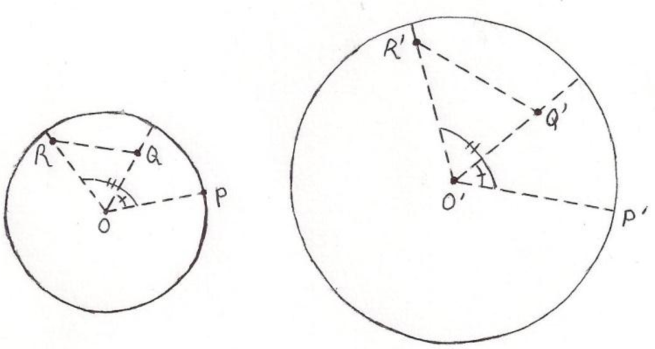
e portanto à igualdade dos segmentos $[B'C']$ e $[B''C'']$, da qual resulta, pelo critério LLL, a igualdade dos triângulos $[A'B'C']$ e $[AB''C'']$ e portanto, finalmente, a igualdade dos ângulos assinalados com um traço, que se opõem a lados iguais nesses triângulos. Concluímos assim que em triângulos semelhantes são iguais os ângulos formados por pares de lados proporcionais, ou seja, *triângulos semelhantes têm os ângulos correspondentes iguais*.

4.10 Se dois ângulos internos de um triângulo forem respetivamente iguais a dois ângulos internos de outro triângulo, o mesmo acontecerá aos terceiros ângulos dos triângulos, já que a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a um ângulo raso, mas basta-nos utilizar as igualdades da hipótese. Podemos então, mais uma vez servir-nos da figura:



Agora sabemos que também são iguais, para além dos assinalados, por exemplo, os ângulos em B e B'. Por outro lado, da igualdade dos triângulos $[A'B'C']$ e $[AB''C'']$ resulta a igualdade dos ângulos em B' e B''. Então serão iguais os ângulos *correspondentes* em B e B'', o que determina o paralelismo das retas BC e $B''C''$ e portanto as proporções que determinam a semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[AB''C'']$, donde se deduz imediatamente a semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$. Este resultado designa-se por *critério AA de semelhança de triângulos*.

4.12 É fácil concluir que dois quaisquer círculos C e C' são semelhantes, se admitirmos que o conjunto dos números racionais foi alargado (juntamente com as operações básicas nele definidas) de modo a incluir as medidas de comprimento de quaisquer segmentos, fixada uma unidade, e portanto os quocientes das medidas de comprimento de dois quaisquer segmentos (que, como já foi referido, não depende da unidade de comprimento fixada – *cf.* também o objetivo geral 7). Com efeito, *designando por r o quociente entre os comprimentos dos raios dos círculos C' e C podemos estabelecer uma correspondência um a um entre os pontos de C e os pontos de C' que determina a semelhança dos dois círculos, sendo r a razão de semelhança*. Para o efeito podemos utilizar a seguinte figura:



Representam-se pela mesma letra os pontos correspondentes nos dois círculos, mas afetando de uma plica (“linha”) as letras designando pontos de C'; em particular, o centro O' do círculo C' corresponde ao centro O do círculo C. A ideia intuitiva consiste em fazer corresponder o raio $[O'P']$ ao raio $[OP]$ (sendo os raios arbitrariamente fixados em cada círculo) e, em seguida, rodar esses raios em determinado sentido (por exemplo, no sentido direto, ou seja, contrário ao dos ponteiros do relógio); cada ângulo de rotação determina em cada círculo raios que também se põem em correspondência e agora, a um ponto Q de C, faz-se corresponder o ponto Q' do raio correspondente de C' tal que $\overline{O'Q'} = r\,\overline{OQ}$. Se considerarmos agora dois quaisquer pontos Q e R de C distintos do centro podemos facilmente concluir, utilizando a semelhança dos triângulos $[OQR]$ e $[O'Q'R']$ (caso LAL), que $\overline{Q'R'} = r\,\overline{QR}$, muito simplesmente utilizando a proporção:

$$\frac{\overline{Q'R'}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{O'Q'}}{\overline{OQ}} = r.$$

O caso em que um dos pontos é o centro é, evidentemente, mais simples, pois resulta imediatamente da própria definição de Q' a partir de Q. Portanto a correspondência assim construída é, de facto, uma semelhança de razão r entre os dois círculos, transformando as respetivas circunferências uma na outra, pelo que estas duas figuras também são semelhantes, com a mesma razão de semelhança.

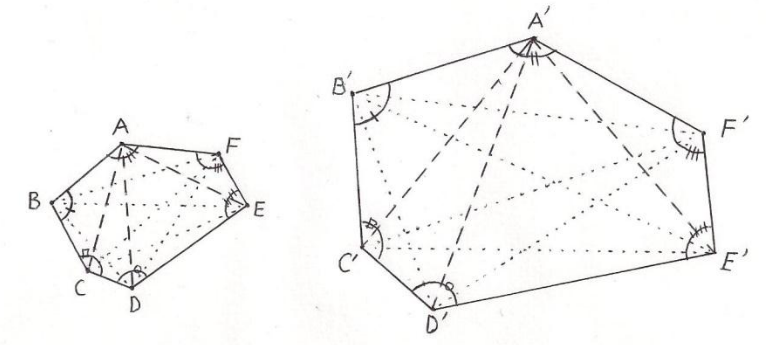
Observação**: Podemos definir a semelhança sem recorrer ao conceito intuitivo de “rotação no sentido direto”. Para o efeito fixa-se um ponto P na circunferência de C e um ponto correspondente P' na circunferência de C' e, em cada círculo, escolhe-se um dos semiplanos determinados respetivamente pelas retas OP e $O'P'$, pondo-se esses semiplanos em correspondência, bem como os seus opostos. Em cada par de semiplanos correspondentes põem-se em correspondência os ângulos ao centro de cada círculo que sejam convexos, tenham a mesma amplitude e tais que um dos lados de cada ângulo de C (respetivamente de C') contém o raio $[OP]$ (respetivamente o raio $[O'P']$); em seguida põem-se em correspondência os lados, em ângulos correspondentes, que não contêm $[OP]$ nem $[O'P']$ e finalmente põem-se em correspondência os raios de cada circunferência contidos em lados correspondentes de ângulos ao centro correspondentes. Resta pôr em correspondência os raios $[OP]$ e $[O'P']$ e os que com estes formam um diâmetro; em seguida podemos prosseguir como acima.

4.13

A semelhança de polígonos já foi abordada a propósito de 4.3 e 4.4 e estabelecemos que dois polígonos são semelhantes quando e apenas quando se pode definir uma correspondência um a um entre os vértices de um e do outro polígono por forma que lados correspondam a lados e diagonais a diagonais e que os comprimentos de segmentos correspondentes (lados e diagonais) sejam proporcionais. A partir do que agora sabemos acerca de semelhança de triângulos pode deduzir-se um critério geral de semelhança de polígonos *envolvendo apenas a proporcionalidade dos lados correspondentes, mas acrescentando-se a igualdade dos ângulos internos por eles determinados*.

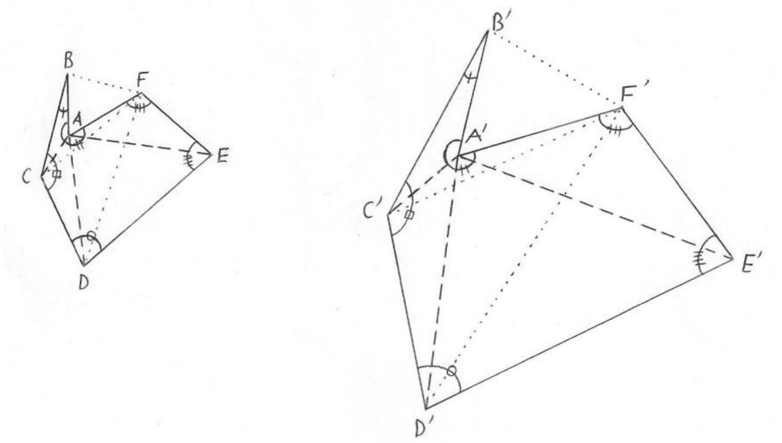
É fácil concluir que, ao contrário do que se passa com os triângulos, para polígonos com mais de três lados, para garantirmos a semelhança, *não basta pressupormos a proporcionalidade dos lados*, pois, caso contrário, todos os losangos seriam semelhantes entre si, e portanto, em particular semelhantes a todos os quadrados, o que manifestamente é falso, já que é fácil construir losangos com diagonais distintas, ao contrário do que se passa com os quadrados (já que estes são retângulos). Para tais polígonos, também ao contrário do que se passa com os triângulos, *não basta pressupormos a igualdade de ângulos correspondentes*, pois, caso contrário, todos os retângulos seriam semelhantes o que também é claramente falso, pois é óbvio, por exemplo, que um quadrado e um retângulo não quadrado não podem ser semelhantes .

Consideremos então dois polígonos P e P' em que se representam pela mesma letra vértices correspondentes, mas acrescentando uma plica às designações dos vértices de P', e suponhamos que *são proporcionais os lados correspondentes e iguais os ângulos internos com vértice em pontos correspondentes*. Pelo que vimos, será suficiente, a partir destas hipóteses, obter as proporções envolvendo também todas as diagonais correspondentes dos dois polígonos. Para o efeito, podem utilizar-se decomposições em triângulos como as referidas a propósito de 2.13; no caso de polígonos *convexos* podemos, para cada vértice, utilizar a decomposição em triângulos utilizando todas as diagonais com um dos extremos nesse vértice, como na figura seguinte, em que se utilizaram os vértices A e A', representando-se a tracejado as referidas diagonais (e a pontilhado as restantes):



Podemos sucessivamente utilizar a hipótese e o critério LAL para obter a semelhança dos triângulos correspondentes, começando por dois correspondentes com vértices contíguos a A e A', sejam eles $[ABC]$ e $[A'B'C']$, aos quais o critério se pode obviamente aplicar, atendendo à hipótese. Consequentemente serão iguais os ângulos BAC e $B'A'C'$ e também os ângulos BCA e $B'C'A'$ e os lados $[CA]$ e $[C'A']$ (diagonais correspondentes dos polígonos) estarão na mesma proporção que os restantes pares de lados correspondentes dos dois triângulos. Então, "retirando" esses triângulos ficaremos com dois polígonos com menos um lado e um vértice, mantendo-se as condições de igualdade dos ângulos internos correspondentes e a proporcionalidade dos lados correspondentes, já que é esse o caso dos "novos lados" $[CA]$ e $[C'A']$ e as igualdades de ângulos da hipótese, em conjunto com as que acabámos de deduzir, permitem obter as igualdades dos correspondentes "novos ângulos internos"; assim, serão iguais os ângulos ACD e $A'C'D'$ pois formam ângulos iguais quando somados respetivamente com os ângulos iguais BCA e $B'C'A'$, e, analogamente, serão iguais os ângulos CAF e $C'A'F'$. Prova-se assim, sucessivamente, que são semelhantes os triângulos em que se decompõem os polígonos, através da correspondência que associa os vértices de um polígono aos vértices correspondentes do outro; daí resultam as proporções envolvendo as diagonais correspondentes que são lados desses triângulos. Partindo de outro vértice qualquer é sempre possível obter uma decomposição em triângulos com as características da que acabámos de descrever, utilizando todas as diagonais que partilham esse vértice como um dos extremos. Assim, procedendo do mesmo modo para todos os vértices, podemos obter todas as proporções envolvendo os lados e diagonais correspondentes dos polígonos e que garantem a semelhança das duas figuras.

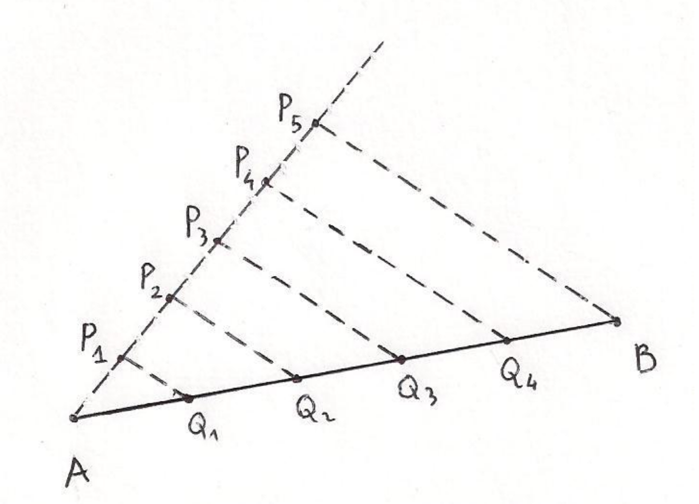
O caso dos polígonos não convexos é mais complexo, e não iremos mais longe na justificação do critério de semelhança no caso geral, pois, para além de, numa triangulação como a acima considerada, não se obterem em geral todas as diagonais *interiores* (o que já acontecia no caso dos convexos), há que considerar ainda as restantes diagonais (não contidas nos polígonos); em exemplos concretos, no entanto, pode ser fácil utilizar decomposições em triângulos como as descritas a propósito de 2.13 para ir obtendo as proporções envolvendo as diversas diagonais interiores, como foi feito no caso convexo e, em seguida, proceder sistematicamente para obter as que envolvem diagonais exteriores, utilizando-se novamente triângulos, desta vez não contidos no polígono, mas de lados coincidentes com lados ou diagonais dos polígonos, como se vê no exemplo seguinte:



Indicam-se a tracejado diagonais definindo triangulações dos polígonos obtidas pelos métodos referidos a propósito de 2.13; a partir delas é possível justificar as proporções envolvendo essas diagonais, exatamente como foi feito acima para o caso convexo. Indicam-se depois a pontilhado algumas das diagonais que falta considerar, podendo-se, por processos análogos, concluir a semelhança dos triângulos correspondentes e portanto a validade também das proporções envolvendo essas diagonais.

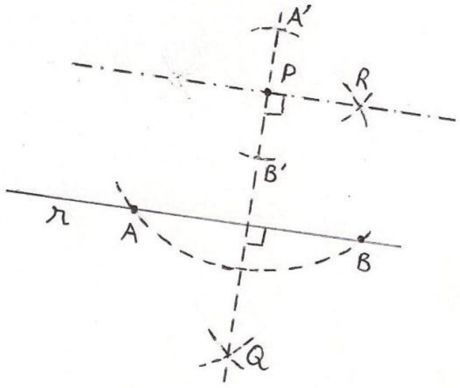
A recíproca desta propriedade é bastante mais fácil de estabelecer, pois as proporções envolvendo lados são casos particulares das que se têm de verificar para que os polígonos sejam semelhantes (*cf.* 4.4) e quanto à igualdade dos ângulos internos correspondentes basta aplicar o critério LLL de semelhança de triângulos aos triângulos determinados por três vértices consecutivos e aos correspondentes no outro polígono e em seguida utilizar a propriedade expressa em 4.11 que garante a igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes.

4.14 Podemos utilizar o Teoremas de Tales (ou a semelhança de triângulos) para justificar um método prático para dividir um segmento num dado número de segmentos iguais. Exemplifiquemos com a divisão em cinco partes iguais:



Para dividir o segmento $[AB]$ em cinco partes iguais basta considerar um qualquer ponto P_1 não colinear com A e B e, na semirreta $\dot{A}P_1$, marcar mais quatro sucessivos pontos P_2, P_3, P_4, P_5 por forma que $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_5}$; as retas paralelas a P_5B passando respetivamente por P_1, P_2, P_3, P_4 intersetam o segmento $[AB]$ em pontos que determinam a divisão desse segmento em cinco partes iguais, atendendo ao Teorema de Tales, como facilmente se conclui.

A construção das retas paralelas pode efetuar-se utilizando régua e esquadro (*cf.* GM5-1.12) ou utilizando apenas régua e compasso, tirando também partido do critério de paralelismo referido em GM5-1.11. Concretamente, para traçar uma reta paralela a uma dada reta r passando por um dado ponto P não pertencente a r, bastará traçar uma perpendicular s a r passando por P e, em seguida, no plano determinado por r e P, uma reta t perpendicular a s passando por P; os ângulos correspondentes determinados por s nas retas r e t, por construção, serão ambos retos e portanto iguais. Assim, pelo critério de paralelismo acima referido, r e t serão, de facto, paralelas. A construção das referidas paralelas poderá ser levada a cabo utilizando apenas régua e compasso por processos semelhantes aos utilizados a propósito de GM6-9.7 para construir a mediatriz de um segmento, como se ilustra na figura seguinte:



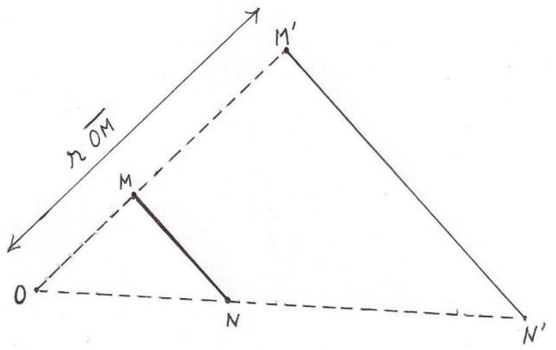
Para traçar a perpendicular PQ à reta r passando por P podemos começar por determinar dois pontos A e B da reta r equidistantes de P utilizando um compasso, como indicado na figura; agora o processo acima referido para determinar a mediatriz do segmento $[AB]$ pode ser utilizado para obter a reta PQ, podendo usar-se a mesma abertura do compasso e arcos centrados em A e B para obter o ponto

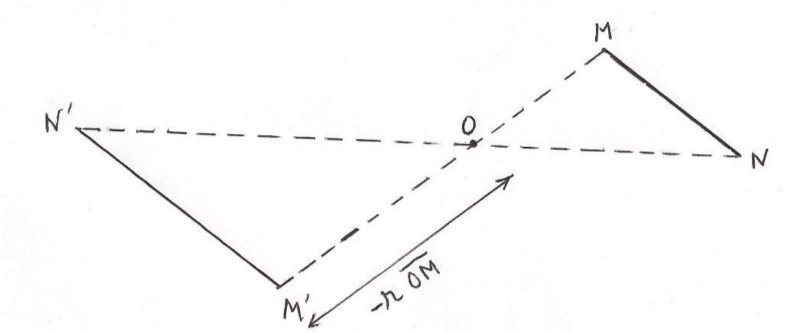
Q. A perpendicularidade das retas PQ e r foi justificada a propósito da construção da mediatriz. Basta agora construir a perpendicular a PQ, no mesmo plano, passando por P, utilizando um processo idêntico; note-se que o facto de P pertencer à reta não impede que se reproduzam os passos anteriores, começando-se por utilizar o compasso para marcar dois pontos A' e B' da reta PQ equidistantes de P.

5.4 A definição de homotetia de centro O e razão r permite imediatamente concluir que, sendo M' e N' os homotéticos respetivamente de M e N, vale a proporção:

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = |r| = \frac{\overline{ON'}}{\overline{ON}}.$$

No caso em que os três pontos O, M e N não são colineares podemos aplicar o Teorema de Tales (*cf.* 4.7) a uma das figuras (consoante $r > 0$ ou $r < 0$):





As proporções acima estabelecidas garantem então, em qualquer caso, o paralelismo das retas MN e $M'N'$ (recíproco do Teorema de Tales) e agora o Teorema de Tales garante também que:

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = |r|;$$

Se os pontos O, M e N forem colineares, por definição de homotetia, os pontos M' e N' estarão na reta determinada por dois quaisquer daqueles pontos. Então, examinando as diversas possibilidades, consoante $r > 0$ ou $r < 0$ e as posições relativas dos pontos O, M e N na reta, obtém-se também a proporção acima estabelecida, pois, essencialmente, trata-se de efetuar cálculos numa reta numérica. Por exemplo, se O, M e N estiverem alinhados por esta ordem e escolhermos a reta que os contém para reta numérica, com origem O e semirreta positiva contendo M e N, se $r > 0$ então M' e N' também estarão na semirreta positiva e a proporção procurada resume-se a uma verificação utilizando as abcissas dos pontos M, N, M' e N', sejam elas, respetivamente, m, n, m' e n'; teremos:

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}}=\frac{n'-m'}{n-m}=\frac{rn-rm}{n-m}=r\frac{n-m}{n-m}=r=\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}\ ;$$

Como os pontos M e N são arbitrários podemos obter todas as proporções que, por definição (*cf.* 4.2), garantem a semelhança de quaisquer duas figuras homotéticas, utilizando a homotetia para definir a semelhança, e sendo a razão de semelhança igual ao módulo da razão da homotetia.

7.1
7.2
7.3
7.6

Se considerarmos um segmento de reta $[AB]$ de medida $m=\frac{p}{q}$ em determinada unidade, ao dividirmos um segmento unitário em q partes iguais e $[AB]$ em p partes iguais, sabemos, por definição de medida de comprimento, que cada uma das partes em que $[AB]$ fica decomposto será um segmento igual a cada um dos segmentos em que o segmento unitário ficou decomposto. Conclusão análoga se pode obter para um segmento $[CD]$ de medida $m'=\frac{p'}{q'}$ na mesma unidade; mas $m=\frac{pq'}{qq'}$ e $m'=\frac{qp'}{qq'}$, ou seja, se dividirmos a unidade em qq' partes iguais, seja uma delas $[PQ]$, $[AB]$ poderá ser dividido em pq' partes iguais a $[PQ]$ e $[CD]$ em qp' partes iguais a $[PQ]$. Então, se tomarmos agora para unidade o comprimento de $[AB]$, verificamos que a nova unidade pode ser dividida em pq' partes iguais e $[CD]$ em qp' partes iguais a essas (todas iguais a $[PQ]$). Por definição de medida de comprimento podemos então dizer que *a medida do comprimento de* $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade é igual a:*

$$\frac{qp'}{pq'}=\frac{\frac{p'}{q'}}{\frac{p}{q}}=\frac{m'}{m}.$$

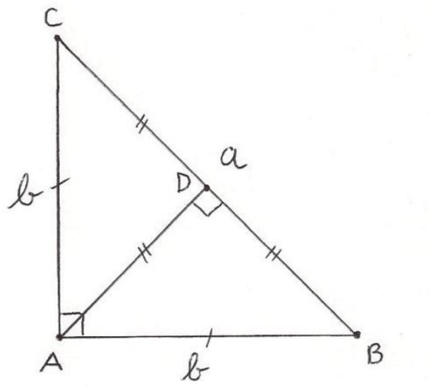
Desta análise também podemos concluir que se tomarmos para unidade o comprimento do segmento $[PQ]$ então as medidas de $[AB]$ e $[CD]$ exprimem-se ambas como números inteiros, nomeadamente, pq' e qp' (respetivamente), ou seja, os segmentos $[AB]$ e $[CD]$ são *comensuráveis*. Concluímos assim que *dois segmentos que podem ser medidos (utilizando números racionais positivos) numa mesma unidade são comensuráveis, sendo óbvia a recíproca desta propriedade*. Além disso, *dois segmentos são comensuráveis quando e apenas quando um deles pode ser medido através de um número racional tomando o outro para unidade*, já que, atendendo ao que acima vimos, esta propriedade é equivalente a poderem ambos ser medidos utilizando uma unidade de comprimento comum.

Do que precede resulta agora que se alterarmos a unidade de medida e escolhermos para nova unidade um segmento de reta com medida m na unidade primitiva, as medidas de quaisquer segmentos na nova unidade obtêm-se das medidas desses segmentos na unidade primitiva dividindo-as pelo mesmo valor m. Assim, *os quocientes das medidas de dois quaisquer segmentos na mesma unidade não dependem da unidade pré-fixada*, já que esses quocientes não se alteram ao dividirmos o dividendo e o divisor pelo mesmo valor. Note-se que ao referirmos “quaisquer segmentos” pressupomos que são comensuráveis com a unidade de medida inicialmente fixada, o que implica serem também comensuráveis com a nova unidade se esta, por seu lado, for comensurável com a inicialmente fixada. *Este facto permite-nos definir o «quociente dos comprimentos» de dois segmentos* *comensuráveis através do quociente das respetivas medidas de comprimento, em qualquer unidade com eles comensurável*. Podemos, nesse caso, também dizer que *o comprimento "dividendo" é igual ao produto do quociente pelo comprimento "divisor"*. Podemos assim atribuir significado a equações envolvendo apenas somas e produtos por números racionais de comprimentos de segmentos, pois, verificando-se tais equações para as respetivas medidas, fixada determinada unidade comum, serão válidas para qualquer unidade com esta comensurável, já que, ao alterarmos a unidade, os valores de ambos os membros das equações ficam multiplicados por uma mesma constante.

Estas propriedades foram acima utilizadas, no objetivo geral 4, como então foi referido.

7.4
7.5

Admitamos que a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo isósceles são comensuráveis, ou seja, que existe uma unidade de comprimento relativamente à qual as medidas da hipotenusa e de qualquer dos catetos são iguais respetivamente aos números naturais a e b. Podemos decompor um tal triângulo em dois triângulos utilizando a altura relativa à hipotenusa, como na figura seguinte:



Deste modo o triângulo inicial fica decomposto em dois triângulos também retângulos isósceles, o que pode ser justificado de diversas maneiras alternativas, utilizando propriedades conhecidas. Com efeito, podemos, por exemplo, considerar a bissetriz AD do ângulo reto CAB e utilizar o resultado referido em GM6-9.13 para concluir que os vértices B e C do triângulo $[ABC]$ são imagem um do outro pela reflexão de eixo que contém a bissetriz, uma vez que estão à mesma distância do vértice A (já que o triângulo retângulo é também isósceles). Quer isto dizer que o ângulo ADB é reto e que são iguais os segmentos $[DC]$ e $[DB]$; por outro lado, sabemos que o ângulo DAB é metade de um reto, por definição de bissetriz, bem como o ângulo ABD pois somado com DAB tem de perfazer um reto, já que a soma destes dois com o ângulo reto ADB tem de ser igual a um raso, por se tratar da soma dos três ângulos internos de um triângulo. Assim, o triângulo $[ABD]$ tem iguais os ângulos não retos e é portanto também isósceles.

Outro processo, entre muitos, seria considerar o quadrado com três dos vértices coincidentes com os vértices do triângulo $[ABC]$ e as respetivas diagonais, as quais teriam de bissetar-se, porque o quadrado é um paralelogramo, teriam de ser perpendiculares, porque o quadrado é um papagaio e teriam de ser iguais, porque o quadrado é um retângulo (*cf.* o objetivo geral 2 acima); estas propriedades em conjunto permitiriam imediatamente concluir que DA é perpendicular a BC e que são iguais os três segmentos assinalados com dois traços.

Utilizando, por exemplo, o critério LAL com os ângulos retos e os catetos, é óbvio que todos os triângulos retângulos isósceles são semelhantes; então, em particular, o triângulo inicial e cada um dos que foram obtidos na decomposição acima referida são semelhantes, o que permite obter a proporcionalidade entre as hipotenusas e os catetos de tais triângulos:

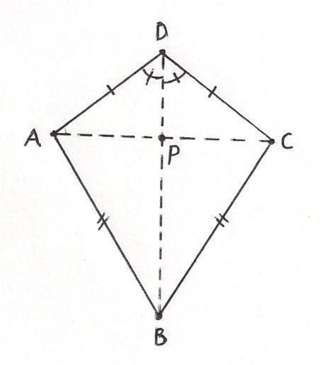
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$

Ora se considerarmos as decomposições de a e b em fatores primos, pelo Teorema fundamental da Aritmética (*cf.* NO6-1.3) sabemos que as decomposições de a^2 e b^2 serão obtidas destas muito simplesmente elevando ao quadrado cada um dos fatores primos respetivamente de a e b, e portanto duplicando o número de ocorrências de cada número primo da decomposição. Assim, tanto em a^2 como em b^2, cada fator primo ocorre um número par de vezes; ora da igualdade acima obtida, $a^2 = 2b^2$ e, mais uma vez da unicidade da decomposição em fatores primos garantida pelo Teorema fundamental da Aritmética, o primo 2 terá de ocorrer forçosamente na decomposição de a^2, e, como concluímos, um número par de vezes. Mas essa decomposição é também a de $2b^2$, pelo que o número 2 ocorrendo um número par de vezes terá de ocorrer pelo menos uma vez na decomposição de b^2 e então, como vimos, um número par de vezes, o que garante que em $2b^2$, e portanto em a, ocorre mais uma vez, logo um número ímpar de vezes. Chegámos assim à conclusão contraditória de que o número de ocorrências de 2 na decomposição em fatores primos de a^2 (ou seja, o expoente de 2 nessa decomposição expressa como produto de potências de primos distintos) teria de ser simultaneamente par e ímpar!

Esta conclusão decorre indubitavelmente da hipótese feita de que a hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo isósceles seriam comensuráveis; não o podem portanto ser… Acabámos portanto de concluir que existem, de facto, segmentos incomensuráveis, conclusão dramática a que chegaram os pitagóricos há cerca de 25 séculos e que iniciou a longa história da extensão do conjunto dos números racionais, por forma a incluir novas entidades capazes de exprimir, em certo sentido, a medida de comprimento de qualquer segmento, fixada arbitrariamente uma unidade, ou, de modo equivalente, de atribuir um valor à distância à origem de qualquer ponto de uma reta numérica. A forma geral do Teorema de Tales bem com os resultados acerca de figuras semelhantes e homotetias acima referidos (objetivos gerais 4 e 5) pressupõem já a possibilidade de se utilizar esse conjunto mais extenso de números, ditos reais, admitindo-se diversas propriedades que estendem as conhecidas para racionais.

8.1

Decompondo um papagaio convexo em dois triângulos isósceles através de uma das diagonais, o que é sempre possível, uma vez que dois pares de lados consecutivos são iguais, obtemos a seguinte figura:

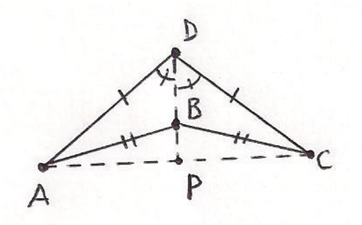


onde os triângulos isósceles representados têm alturas contidas na diagonal $[DB]$. Então, utilizando a conhecida fórmula para o cálculo da área de um triângulo, obtemos a área do papagaio em unidades quadradas somando as áreas dos dois triângulos isósceles:

$$\frac{\overline{AC}\times\overline{DP}}{2}+\frac{\overline{AC}\times\overline{PB}}{2}=\frac{\overline{AC}\times(\overline{DP}+\overline{PB})}{2}=\frac{\overline{AC}\times\overline{DB}}{2}=\frac{D\times d}{2},$$

designando respetivamente por D e d as medidas de comprimento das diagonais em determinada unidade. Então a fórmula acima dá o valor em unidades quadradas da área do papagaio através do semiproduto das medidas do comprimento das diagonais.

Se o papagaio for côncavo, a situação será a seguinte:

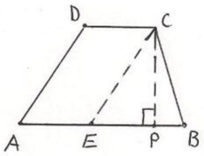


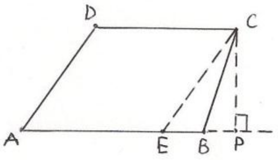
Neste caso para obter a medida da área do papagaio teremos de subtrair as medidas das áreas dos triângulos isósceles; a fórmula final resultante será exatamente a mesma, como é fácil concluir, já que, neste caso, a diagonal $[DB]$ tem comprimento igual à diferença dos comprimentos das alturas dos triângulos.

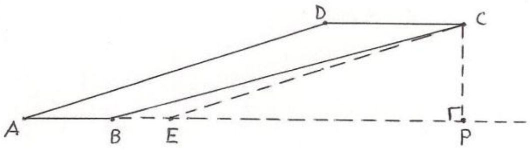
Se decompusermos o papagaio em dois triângulos através da outra diagonal, obteremos também dois triângulos iguais, ainda que não necessariamente isósceles. Adicionando as áreas desses dois triângulos podemos tratar em simultâneo o caso dos papagaios convexos e côncavos; em ambos os casos a base comum dos triângulos tem comprimento igual à diagonal utilizada nesta decomposição e a altura é igual a metade do comprimento da outra diagonal.

8.2
8.3

Para obter a área de um trapézio podemos utilizar uma decomposição (ou uma composição) envolvendo um paralelogramo e um triângulo, como se ilustra nas figuras seguintes:







Todas as figuras representam um trapézio $[ABCD]$ e é sempre considerada uma paralela CE ao lado $[AD]$ que não é base, ficando assim construído o paralelogramo $[AECD]$; representa-se também uma altura comum $[CP]$ ao trapézio, ao paralelogramo e ao triângulo $[BCE]$. Em cada figura obtém-se a medida da área do trapézio como soma ou diferença da medida de área dos referidos paralelogramo e triângulo; aplicando as fórmulas conhecidas para as áreas destas figuras resta depois provar que o fator que multiplica a altura é igual à média das medidas das bases do trapézio. Ora esse fator é sempre a soma ou a diferença da medida do comprimento de $[AE]$ (base do paralelogramo) com metade da medida do comprimento do segmento $[EB]$ (base do triângulo), ou seja, esse fator será metade de $2\overline{AE} \pm \overline{EB}$. Mas temos $\overline{AE} \pm \overline{EB} = \overline{AB}$ (será a soma no caso das duas primeiras figuras e a diferença no caso da terceira). Como $\overline{CD} = \overline{AE}$, finalmente, o fator que multiplica a altura será igual a metade de $2\overline{AE} \pm \overline{EB} = \overline{AE} + \overline{AE} \pm \overline{EB} = \overline{CD} + \overline{AB}$, ou seja, igual à média das medidas de comprimento das bases do trapézio, como pretendíamos provar.

Em alternativa, em qualquer dos casos, podemos decompor o trapézio em dois triângulos através de uma das diagonais e notar que para o cálculo das respetivas áreas podemos tomar como bases dos triângulos as bases do trapézio, sendo as alturas correspondentes iguais à altura do trapézio. Deste modo obtém-se imediatamente a área do trapézio como produto da semissoma das medidas de comprimento das bases pela altura.

9.1

A proporcionalidade dos comprimentos dos lados de polígonos semelhantes garante que o comprimento de cada lado de um dos polígonos se obtém do comprimento do lado correspondente do outro multiplicando-o pela razão de semelhança; o mesmo acontecerá portanto á soma das medidas dos comprimentos dos lados (basta, numa das somas, pôr em evidência a razão de semelhança). Obtemos assim o resultado pretendido: se dois polígonos forem semelhantes, o perímetro de um obtém-se do perímetro do outro multiplicando-o pela razão de uma semelhança que transforme o segundo no primeiro.

Uma vez que os perímetros dos círculos são proporcionais aos raios, como foi estabelecido (*cf.* GM6-5.2,3), e a razão de semelhança entre dois círculos é igual ao quociente dos raios, é óbvio que essa mesma razão de semelhança entre dois círculos de raios r e r' permite obter o perímetro do segundo multiplicando-a pelo perímetro do primeiro:

$$\frac{2\pi r'}{2\pi r} = \frac{r'}{r} \Longrightarrow 2\pi r' = \frac{r'}{r} \times 2\pi r\,.$$

9.2	É óbvio que quaisquer dois quadrados são semelhantes, utilizando o critério expresso em 4.13, uma vez que todos os ângulos internos são retos (e portanto iguais) e a igualdade dos lados em cada quadrado garante a proporcionalidade de lados correspondentes para qualquer correspondência um a um entre os vértices dos quadrados que associe vértices consecutivos a vértices consecutivos, pois, neste caso, os quocientes que se pretendem igualar têm iguais todos os dividendos e todos os divisores. Como a área de um quadrado é, em unidades quadradas, igual ao quadrado da medida a de um dos lados, é também óbvio que a área de outro quadrado, cujos lados tenham comprimento igual ao produto de determinada razão de semelhança r pelo comprimento de um lado do primeiro quadrado será igual (também em unidades quadradas) a $(ra)^2 = r^2\,a^2$ e portanto igual ao produto por r^2 da área do primeiro quadrado.
9.3	Um raciocínio idêntico ao utilizado para as áreas de quadrados (*cf.* 9.2) pode ser utilizado para triângulos semelhantes, desde que se comece por verificar que as alturas correspondentes estão na mesma proporção que os lados; trata-se de um simples exercício de semelhança de triângulos, aplicando o critério AA a triângulos retângulos. Assim, dados dois triângulos semelhantes, a medida da área do segundo é igual à medida da área do primeiro, multiplicada pelo quadrado da razão de uma semelhança que transforme o primeiro no segundo. Utilizando triangulações como as referidas a propósito de 2.13 e 4.13 podemos concluir então que a mesma relação existe entre as áreas de quaisquer dois polígonos semelhantes, já que essas triangulações podem ser definidas de modo que triângulos correspondentes sejam semelhantes (*cf.* 4.13). Para figuras mais gerais podemos argumentar por aproximação das respetivas áreas por áreas de triangulações adequadas ou quadrículas e, para estas, utilizando os resultados conhecidos para quadrados e outros polígonos; a construção rigorosa e mais geral da medida de área é bastante complexa, pelo que não iremos mais longe na justificação da propriedade referida em 9.3.

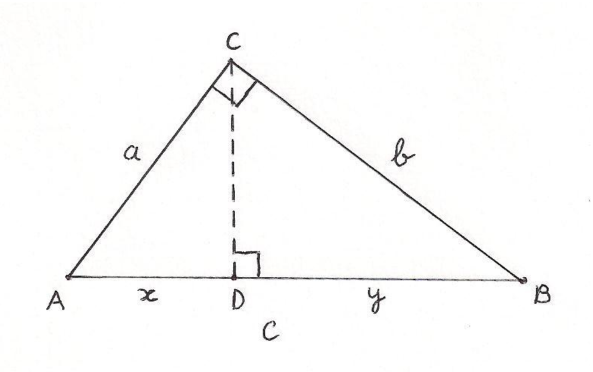
8.º ANO

Geometria e Medida GM8

Descritor | **Texto de apoio**

1.1
1.2

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C consideremos a altura traçada do vértice C para a hipotenusa e designemos por D o pé dessa perpendicular:



Essa altura divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos, cada um deles partilhando um ângulo interno não reto com o triângulo $[ABC]$; pelo critério AA, os três triângulos são semelhantes entre si (*cf.* GM7-4.10). Podemos então concluir que são proporcionais os lados correspondentes em cada par de triângulos. É fácil identificar os lados correspondentes através dos ângulos opostos; em particular, notando, por exemplo, que, no triângulo $[ADC]$, o ângulo D é reto e os ângulos em A dos triângulos $[ADC]$ e $[ABC]$ coincidem, concluímos que o ângulo em C do triângulo $[ADC]$ é igual ao ângulo em B do triângulo $[ABC]$, e, analogamente, são iguais o ângulo em C do triângulo $[BDC]$, e o ângulo em A do triângulo $[ABC]$. Temos portanto, utilizando as semelhanças entre o triângulo $[ABC]$ e cada um dos triângulos da decomposição:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \ e\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}.$$

Ou seja, representando as medidas dos comprimentos dos lados pelas letras indicadas na figura:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a} \ e\ \frac{b}{c} = \frac{y}{b},$$

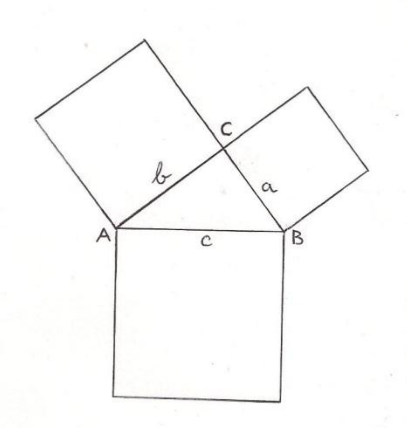
o que é equivalente à conjunção das duas igualdades $a^2 = xc\ e\ b^2 = yc$; adicionando-as membro a membro obtemos $a^2 + b^2 = xc + yc = (x + y)c = c^2$, ou seja, num triângulo retângulo o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos, o que costuma abreviar-se em «num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos», designando-se esta proposição por Teorema de Pitágoras.

Observação 1*: Para levar a cabo a demonstração acima é essencial garantir que o ponto D, pé da perpendicular traçada para a hipotenusa a partir do vértice oposto, fica estritamente situado entre os vértices $A\ e\ B$. Embora este facto pareça geometricamente óbvio, carece de demonstração. Em primeiro lugar D não pode coincidir com nenhum dos vértices, pois, caso contrário, o triângulo teria dois ângulos internos retos; por outro lado, se o ponto D estivesse situado na reta AB fora do segmento $[AB]$, por exemplo, se B estivesse entre A e D, o ângulo CBD seria um ângulo externo do triângulo $[ABC]$ não adjacente ao ângulo reto e portanto teria de ser um ângulo obtuso (já que é igual à soma de um ângulo reto com um ângulo agudo). Mas, nesse caso, o triângulo $[CBD]$ teria um ângulo interno reto e outro obtuso, o que é absurdo (*cf.* GM5-2.3); de modo análogo chegaríamos a um absurdo supondo que A estaria entre D e B, pelo que apenas resta a hipótese de D estar estritamente situado entre A e B.

Observação 2: Na abordagem seguida anteriormente para a demonstração do Teorema de Pitágoras evitou-se recorrer a propriedades da noção de área, já que uma teoria rigorosa da medida de área é conceptualmente mais complexa, pressupondo, nas abordagens mais correntes, o conhecimento prévio de Teoremas como o de Tales e de Pitágoras (*cf.* comentários análogos nas observações finais dos textos de apoio do TCG aos descritores GM7-4.7 e GM6-1.7). No entanto, o Teorema de Pitágoras, na sua versão clássica, encontra-se expresso nos Elementos de Euclides na seguinte forma:

Livro I – Proposição 47

«Em triângulos retângulos, o quadrado no lado subtenso ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados nos lados que contêm o ângulo reto.»

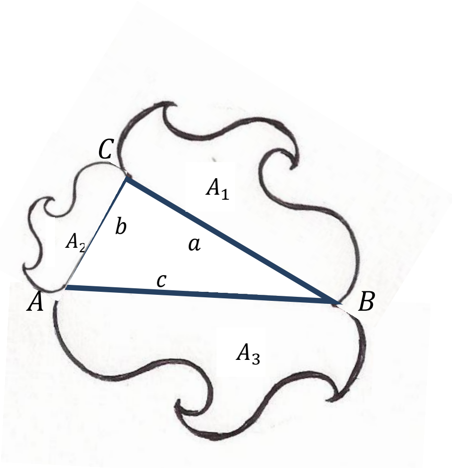


No Livro VI desta mesma obra, podemos encontrar uma aparente generalização deste resultado:

Livro VI – Proposição 31

«Em triângulos retângulos, a figura traçada no lado subtenso ao ângulo reto é igual à soma das figuras semelhantes desenhadas nos lados em torno do ângulo reto».

Em linguagem atual, a Proposição 31 diz simplesmente que se considerarmos três figuras semelhantes, cada uma contendo um dos lados de um triângulo retângulo e de tal forma que a semelhança que transforma uma em outra transforme também o respetivo lado do triângulo no outro, então a soma das áreas das figuras correspondentes aos catetos é igual à área da figura correspondente à hipotenusa.



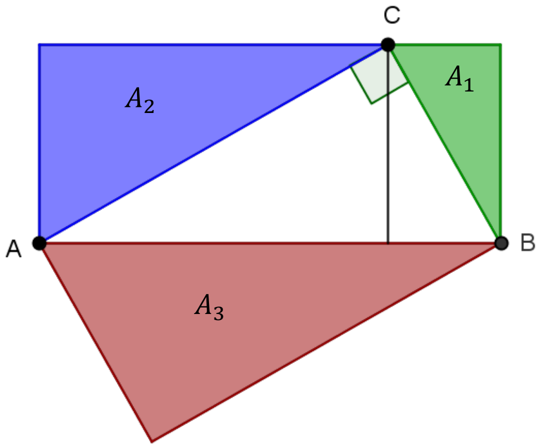
O Teorema de Pitágoras é uma consequência desta propriedade, já que basta escolher para figuras semelhantes quadrados de lados iguais aos lados do triângulo. Na verdade, os dois resultados são equivalentes: reciprocamente, se considerarmos três figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo $[ABC]$, as razões das semelhanças que transformam a figura construída sobre a hipotenusa naquelas que estão construídas sobre os catetos são respetivamente iguais a $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$. Temos assim

$$A_1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 A_3 \ e \ A_2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 A_3,$$

A relação $A_1 + A_2 = A_3$, implica que $\left(\frac{a}{c}\right)^2 A_3 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 A_3 = A_3$, ou seja, que $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, de onde se conclui que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

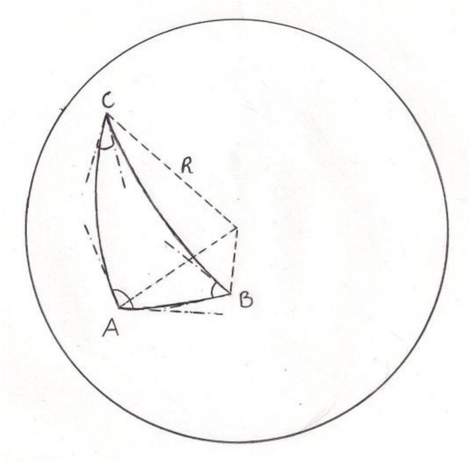
Podemos pois, para provar o Teorema de Pitágoras, admitindo o resultado básico relativo a áreas de figuras semelhantes, selecionar uma qualquer figura em particular e mostrar a aditividade das áreas. A escolha natural recai sobre triângulos semelhantes ao inicial. O facto de que a altura relativa ao ângulo reto divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos semelhantes ao primeiro constitui já uma demonstração do Teorema de Pitágoras. De facto, se chamarmos $A_1 \ e \ A_2$ às áreas desses dois triângulos e A_3 à área do triângulo inicial, temos $A_1 + A_2 = A_3$ por construção.



Assim, também nesta abordagem, o Teorema de Pitágoras aparece de forma natural como um teorema de semelhança de triângulos, ou seja, como uma consequência do Teorema de Tales. A demonstração do Teorema de Pitágoras proposta nas Metas Curriculares baseia-se unicamente nas proporções do Teorema de Tales, sem qualquer referência à noção de área.

É interessante observar que o Teorema de Pitágoras apenas é válido em geometria euclidiana, e que apenas nesta geometria existem triângulos semelhantes. Em conjunto com o que foi explicado, este facto deixa adivinhar uma ligação mais profunda entre a existência de triângulos semelhantes e o Teorema de Pitágoras. Por exemplo, em Geometria esférica, o Teorema de Pitágoras é falso e, nesta Geometria, os únicos triângulos semelhantes que existem são os triângulos iguais.

A área de um triângulo esférico $[ABC]$



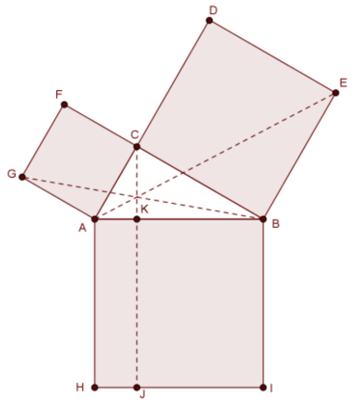
é dada por

$$A_{[ABC]} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2$$

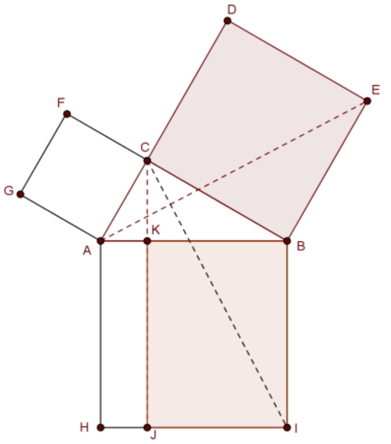
onde R é o raio da superfície esférica e $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ designam as medidas em radianos dos ângulos internos do triângulo. Uma consequência imediata deste resultado é que se dois triângulos têm ângulos iguais então têm a mesma área. É possível demonstrar, utilizando ferramentas próprias à geometria esférica, que dois tais triângulos são então iguais.

Observação 3:

A demonstração do Teorema de Pitágoras constante do Livro I dos Elementos de Euclides, Proposição 47, referida na observação anterior, utiliza as áreas de certos triângulos de forma extremamente interessante e que pode fornecer pistas para futuras estratégias de resolução de problemas.



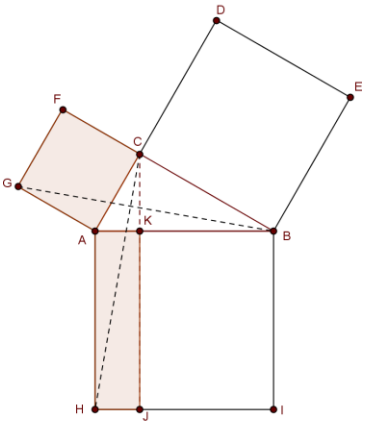
Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C e de altura $[CK]$, consideremos os quadrados $[ACFG]$, $[BCDE]$ e $[ABIH]$, construídos sobre os respetivos lados, e o ponto J, interseção das retas (perpendiculares) HI e CK.



O triângulo $[ABE]$ tem altura, relativa à base $[BE]$, igual a $[BC]$ logo a área do quadrado $[BCDE]$ é igual ao dobro da área do triângulo $[ABE]$.

Pelo caso LAL de igualdade de triângulos prova-se que os triângulos $[ABE]$ e $[IBC]$ são iguais pois $\overline{AB} = \overline{BI}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ e $A\hat{B}E = I\hat{B}C$ (ângulos que são iguais à soma de um ângulo reto com o ângulo ABC). Assim, podemos

afirmar que a área do quadrado $[BCDE]$ é igual ao dobro da área do triângulo $[IBC]$.
Por outro lado, o triângulo $[IBC]$ tem altura relativa à base $[BI]$ igual a $[IJ]$, logo a área do retângulo $[IJKB]$ é também igual ao dobro da área do triângulo $[IBC]$. Podemos portanto concluir que a área do quadrado $[BCDE]$ é igual à área do retângulo $[IJKB]$.



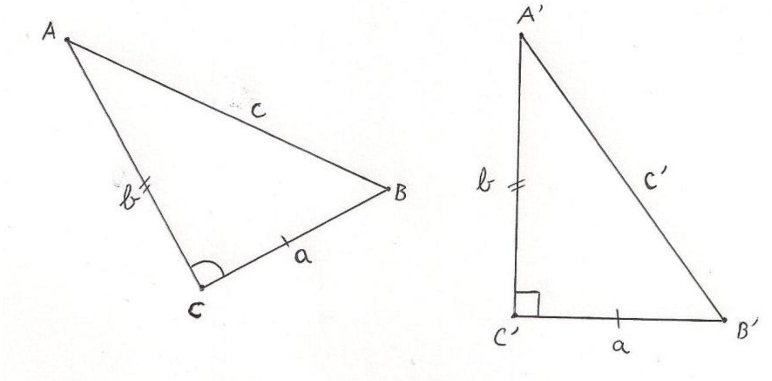
De forma análoga se conclui, utilizando os triângulos $[ABG]$ e $[CAH]$ que a área do retângulo $[AHJK]$ é igual à área do quadrado $[ACFG]$.

Assim se conclui a demonstração:

$$A_{[ABIH]} = A_{[AHJK]} + A_{[IJKB]} = A_{[BCDE]} + A_{[ACFG]}$$

1.3

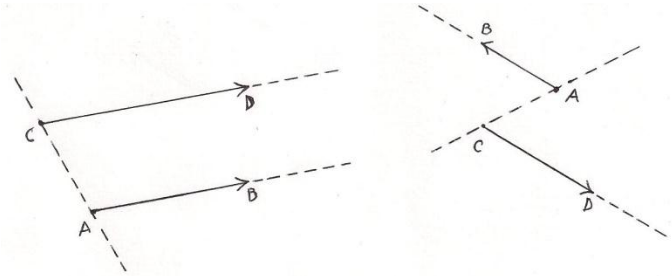
Suponhamos agora que é dado um triângulo $[ABC]$ com lados de medida de comprimento $a, b, c,$ de modo que $a^2 + b^2 = c^2$, e consideremos um triângulo $[A'B'C']$, retângulo em B', de catetos com medidas de comprimento iguais respetivamente a a e b, como assinalado na figura seguinte:



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[A'B'C']$ concluímos que $a^2 + b^2 = c'^2$, pelo que $c'^2 = c^2$, e portanto $c' = c$, atendendo ao resultado expresso em ALG7-2.4 (sendo c'e c positivos, não poderiam ter quadrados iguais se fossem distintos) . Mas então, pelo critério LLL os dois triângulos são iguais, pelo que, em particular, o ângulo interno do triângulo $[ABC]$ oposto ao lado de medida c será igual ao ângulo reto do outro triângulo, o que prova que *o triângulo* $[ABC]$ *é reto no vértice oposto ao lado de medida* c. Acabámos de provar o chamado *recíproco do Teorema de Pitágoras*.

3.1
3.2
3.4
3.5

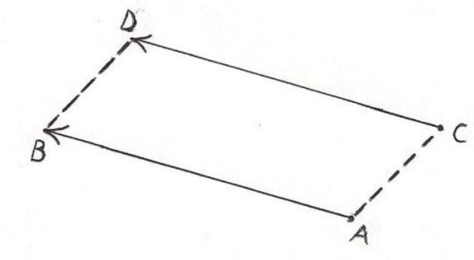
Dois segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ dizem-se «equipolentes» quando têm *a mesma direção, o mesmo sentido* e *o mesmo comprimento*. De acordo com 3.1, terem *a mesma direção* significa que *as retas suporte são coincidentes ou paralelas* e, nesse caso, terem também *o mesmo sentido*, significa que *as semirretas* $\dot{A}B$ *e* $\dot{C}D$ *têm o mesmo sentido* (*cf.* 3.2), ou seja, *uma delas está contida na outra, no caso em que as retas suporte coincidirem, ou estão contidas no mesmo semiplano de fronteira passando pelas respetivas origens, se as retas suporte não coincidirem* (*cf.* GM5-1.8, GM5-1.9). Nas figuras abaixo representam-se dois pares de segmentos orientados com a mesma direção (no caso em que as retas suporte em cada par não coincidem), na figura da esquerda com o mesmo sentido e na figura da direita com sentidos opostos:



Finalmente, a expressão «comprimento de $[A, B]$» é sinónima de «comprimento de $[AB]$» em todos os casos em que ocorre (*cf.* 3.4), ou seja, dois segmentos orientados «terem o mesmo comprimento» significa simplesmente que os segmentos de reta respetivamente com os mesmos extremos têm o mesmo comprimento (ou seja, são iguais, ou ainda, são iguais as distâncias entre a origem e a extremidade de cada segmento orientado).

No caso em que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a mesma direção mas as respetivas retas suporte não coincidem, a condição de terem o mesmo sentido é equivalente *a B e D estarem no mesmo semiplano de fronteira AC*, pois *se uma semirreta tiver origem num reta r que não é a sua reta suporte então está inteiramente contida no semiplano de fronteira r que contenha um qualquer dos seus pontos, distinto da origem*. Esta propriedade das semirretas e semiplanos, muito intuitiva, é demonstrável no quadro de uma axiomática adequada da Geometria e utilizá-la-emos daqui em diante.

Do que precede, resulta que, se os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ forem equipolentes, no caso em que as retas suporte não coincidem, estas retas serão paralelas; em particular serão paralelos os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$) e os segmentos ficarão contidos num mesmo semiplano de fronteira AC, estando os pontos B e D fora desta reta (senão uma das retas AB ou CD coincidiria com AC, donde AB e CD não poderiam ser paralelas, pois intersetar-se-iam pelo menos no ponto A ou no ponto C). Então ficará definido um trapézio $[ABDC]$, de bases $[AB]$ e $[CD]$, já que, para além do referido paralelismo, os segmentos $[BD]$ e $[AC]$ não podem intersetar-se, ou os pontos B e D estariam em semiplanos opostos de fronteira AC, contra a hipótese relativa aos sentidos; portanto também fica cumprida a condição definidora de um polígono simples (*cf.* GM7-2.5, atendendo a GM7-2.3). Mas, ainda por definição de equipolência, este trapézio também tem as bases $[AB]$ e $[CD]$ iguais, pelo que se trata de um paralelogramo (*cf.* GM7-2.24):



Reciprocamente, se os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ forem tais que fica definido um paralelogramo $[ABDC]$, então AB e CD são retas paralelas, ou seja, $[A,B]$ e $[C,D]$ têm a mesma direção e retas suporte distintas. Além disso, B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC, senão o lado $[BD]$ do paralelogramo intersetaria a reta AC, o que é impossível, já que BD e AC são retas paralelas, por definição de paralelogramo. Então, pelo que acima se viu acerca de semirretas e semiplanos, $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ estão contidas no mesmo semiplano de fronteira AC, pelo que essas semirretas, e portanto, os segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$, também têm o mesmo sentido. Finalmente, $[AB]$ e $[CD]$ têm o mesmo comprimento, já que se trata de lados opostos de um paralelogramo; ficam assim cumpridas todas as condições que garantem que os segmentos orientados $[A,B]$ e $[C,D]$ são equipolentes.

Do que precede conclui-se que *dois segmentos orientados* $[A,B]$ *e* $[C,D]$ *com retas suporte distintas são equipolentes quando e apenas quando* $[ABDC]$ *é um paralelogramo*.

Observação 1:** No caso em que as retas suporte coincidem, $[A,B]$ e $[C,D]$ terem o mesmo sentido (ou seja, as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ terem o mesmo sentido), se as origens A e C também coincidirem, é equivalente à coincidência das duas semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ pois há apenas duas semirretas com uma mesma origem em determinada reta e nenhuma está contida na outra. Caso as origens sejam distintas, a identidade dos sentidos pode traduzir-se numa propriedade que terá alguma utilidade no que se segue:

LEMA:* 1) *Duas semirretas com a mesma reta suporte e origens distintas têm o mesmo sentido quando e apenas quando a origem de uma das semirretas pertence à outra semirreta mas a origem da segunda não pertence à primeira, ou de maneira equivalente, quando e apenas quando os pontos situados estritamente entre as origens das semirretas pertencem todos a uma delas e nenhum pertence à outra*.

2) *Duas semirretas com a mesma reta suporte têm sentidos opostos quando e apenas quando a interseção das duas semirretas ou é vazia (e nesse caso os pontos situados estritamente entre as origens das semirretas são exatamente os pontos da reta suporte que não pertencem a nenhuma das semirretas) ou igual ao segmento de reta de extremos coincidentes com as origens das semirretas*.

Demonstração:** 1) Para demonstrarmos esta propriedade representemos genericamente por $P-Q-R$ o facto de o ponto Q estar situado entre os pontos P e R, podendo generalizar-se esta notação a mais de três pontos com o significado óbvio (conjunção de todas as relações "situado entre" que se obtêm eliminando na notação, de todas as maneiras possíveis, o número suficiente de pontos para se reduzirem a três). A relação «situado entre» para trios de pontos pode ser tomada para primitiva numa construção axiomática da Geometria e tem algumas propriedades intuitivas, algumas das quais podem ser demonstradas a partir de outras que se tomam para axiomas. Este conjunto de propriedades básicas determinam propriedades das semirretas e semiplanos que também são essenciais para algumas demonstrações. Nos argumentos que se seguem seremos levados a utilizar algumas dessas propriedades, as quais serão assim implicitamente admitidas sem demonstração.
Suponhamos então que $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ são colineares com A distinto de C, e

comecemos por supor que têm o mesmo sentido, ou seja, que uma das semirretas está contida na outra; admitindo, sem perda de generalidade, que é $\dot{C}D$ que está contida em $\dot{A}B$ então, em particular, o ponto C está na semirreta $\dot{A}B$ e portanto todo o segmento de reta $[AC]$ está contido em $\dot{A}B$ (por definição de semirreta). Por outro lado, temos $A - C - D$, pois, caso contrário seria $A - D - C$ ou $D - A - C$ e, em ambos os casos, os pontos P distintos de A tais que $P - A - C$ estariam, por um lado, na semirreta $\dot{C}D$ (teríamos $P - A - D - C$ ou $P - D - A - C$ ou $D - P - A - C$) mas, por outro, também na semirreta de origem A oposta a C (consequência imediata de $P - A - C$), ou seja, não estariam na semirreta $\dot{A}B$, onde supusemos que C se situa. Mas então estaríamos a contradizer a hipótese feita de que $\dot{C}D$ está contida em $\dot{A}B$. Esta contradição prova que, de facto, $A - C - D$, pelo que os pontos do segmento de reta $[AC]$ distintos de C (em particular o ponto A) não estão na semirreta $\dot{C}D$; concluímos então o que pretendíamos: o ponto A não está na semirreta $\dot{C}D$ e os pontos situados estritamente entre A e C estão todos na semirreta $\dot{A}B$ e nenhum na semirreta $\dot{C}D$.

Reciprocamente, supondo que o ponto C está na semirreta $\dot{A}B$, mas o ponto A não está na semirreta $\dot{C}D$ ou que, em alternativa, o ponto A está na semirreta $\dot{C}D$ mas o ponto C não está na semirreta $\dot{A}B$, mostremos que uma das semirretas tem de estar contida na outra. Sem perda de generalidade, suponhamos que é a primeira propriedade que tem lugar e mostremos que, nesse caso, a semirreta $\dot{C}D$ está contida na semirreta $\dot{A}B$. A hipótese implica, em particular, que não podemos ter $A - D - C$ nem $D - A - C$, senão A estaria na semirreta $\dot{C}D$, pelo que, forçosamente, teremos $A - C - D$. Então, examinando as diversas possibilidades para o ponto B, uma vez que, de acordo com a hipótese, o ponto C está situado na semirreta $\dot{A}B$, teremos forçosamente (já que $A - C - D$): $A - C - D - B$ ou $A - C - B - D$ ou $A - B - C - D$. Em todos os casos possíveis verificamos que a semirreta $\dot{C}D$ está contida na semirreta $\dot{A}B$, como pretendíamos.

Finalmente, se os pontos situados estritamente entre as origens das semirretas pertencerem todos a uma delas e nenhum pertencer à outra, em particular ambas as origens têm de pertencer à primeira das semirretas mas a origem dessa não pode pertencer à outra, senão o segmento de reta com extremos coincidentes com as origens das semirretas também estaria contido na outra semirreta, contra a hipótese. Ficamos assim reduzidos à hipótese que acabámos de examinar e portanto as duas semirretas terão o mesmo sentido.

2) É óbvio que se a interseção de duas semirretas colineares for vazia ou igual a um ponto ou a um segmento de reta então as duas semirretas têm sentidos opostos, já que, se tivessem o mesmo sentido, a respetiva interseção seria uma delas, o que prova uma das implicações desta afirmação do Lema.

Reciprocamente, dadas duas semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ com a mesma reta suporte, se tiverem sentidos opostos, ou seja, se não tiverem o mesmo sentido, e excluindo já o caso trivial em que as origens coincidem, então por 1) sabemos que ou nenhuma das origens das semirretas pertence à outra ou ambas as origens pertencem às duas semirretas.

No primeiro caso a interseção das semirretas é vazia pois um ponto P que pertencesse às duas estaria na semirreta oposta a C de origem A e na semirreta oposta a A de origem C, ou seja, teria de satisfazer simultaneamente a $P-A-C$ e a $P-C-A$, o que implicaria a coincidência de A e C, contra a hipótese feita de serem distintas as origens.

No segundo caso, o segmento de extremos nas origens teria de esta contido em ambas as semirretas e portanto na respetiva interseção. Por outro lado mais nenhum ponto pode pertencer a essa interseção, pois qualquer ponto P da reta suporte fora deste segmento terá de satisfazer a $P-A-C$ ou $A-C-P$; ora, se P pertencesse simultaneamente a $\dot{A}B$ e a $\dot{C}D$ então estas duas semirretas coincidiriam respetivamente com $\dot{A}P$ e $\dot{C}P$ e nesse caso, qualquer das duas relações $P-A-C$ ou $A-C-P$ implicaria que uma das semirretas estaria contida na outra, contra a hipótese de se tratar de semirretas com sentidos opostos.

Corolário: *a interseção de duas semirretas colineares só pode ser vazia, um segmento de reta (neste caso coincidente com o segmento de extremos nas origens das semirretas, incluindo o caso em que estas coincidem) ou coincidente com uma das semirretas.*

Demonstração: O corolário resulta imediatamente da alínea 2) do Lema, já que duas semirretas colineares, ou têm o mesmo sentido, caso em que, obviamente, a interseção das duas coincide com uma delas, ou têm sentidos opostos e, pelo alínea 2) do Lema a respetiva interseção é vazia ou coincidente com o segmento determinado pelas origens.

Observação 2:** Podemos verificar que *se dois segmentos orientados* $[A,B]$ *e* $[C,D]$ *tiverem a mesma direção, se* $[A,B]$ *e* $[C,D]$ *tiverem sentidos opostos então* $[A,B]$ *terá o mesmo sentido que* $[D,C]$ *e reciprocamente, se* $[A,B]$ *tiver o mesmo sentido que* $[D,C]$*, então* $[A,B]$ *e* $[C,D]$ *terão sentidos opostos*.

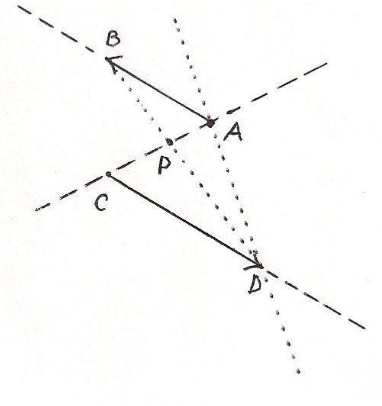
No caso em que os segmentos orientados são colineares, os resultados da Observação 1 atrás permitem concluir o que se pretende; com efeito, excluindo o caso mais simples em que os segmentos orientados $[A,B]$ *e* $[C,D]$ têm origem comum, se tiverem sentidos opostos a interseção das semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ é vazia ou coincidente com o segmento $[AC]$. Então, relativamente a $\dot{A}B$ e $\dot{D}C$, ficará cumprida a condição do Lema para que estas semirretas tenham o mesmo sentido, pois $\dot{D}C$ coincide com a união de $[DC]$ com a semirreta oposta a $\dot{C}D$, donde:

− se a interseção de $\dot{A}B$ com $\dot{C}D$ for vazia, $\dot{A}B$ estará contida na semirreta oposta a $\dot{C}D$ e portanto em $\dot{D}C$, que a contém;

− se a interseção das semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ coincidir com o segmento $[AC]$, em particular a semirreta $\dot{A}B$ coincide com a semirreta $\dot{A}C$ e a semirreta $\dot{C}D$ com a semirreta $\dot{C}A$; assim, temos $C-A-D$ ou $C-D-A$ e em ambos os casos a semirreta $\dot{D}C$ tem o mesmo sentido que a semirreta $\dot{A}C$, ou seja, que a semirreta $\dot{A}B$.

Suponhamos então que os segmentos não são colineares; sabemos, por hipótese, que AB e CD são retas paralelas e o facto de $[A,B]$ não ter o mesmo sentido que

$[C, D]$ significa, neste caso, que B e D não estão no mesmo semiplano de fronteira AC; mas isso significa que $[BD]$ interseta a reta AC, e portanto o segmento $[AC]$, já que $[BD]$ está situado entre as retas paralelas AB e CD, como se representa na seguinte figura:



Seja P o ponto de interseção de $[BD]$ com $[AC]$; então, tanto B como C estão no mesmo semiplano que P de fronteira AD (estão ambos em semirretas de origem na reta AD passando por P), donde B e C estão num mesmo semiplano de fronteira AD, o que significa que $[A, B]$ *e* $[D, C]$ têm o mesmo sentido, como pretendíamos. Reciprocamente, se $[A, B]$ tiver o mesmo sentido que $[D, C]$, então B e C estão no mesmo semiplano de fronteira AD; consideremos um ponto B' na semirreta $\dot{A}B$ a uma distância de A igual ao comprimento de $[DC]$. Então $[AB'CD]$ é um paralelogramo, pelo que as respetivas diagonais se intersetam num ponto P; em particular B' e D estão em semiplanos opostos de fronteira AC. Mas, por construção, B' está no mesmo semiplano que B de fronteira AC, pelo que B e D também estarão em semiplanos opostos de fronteira AC, o que prova que $[A, B]$ não pode ter o mesmo sentido que $[C, D]$.

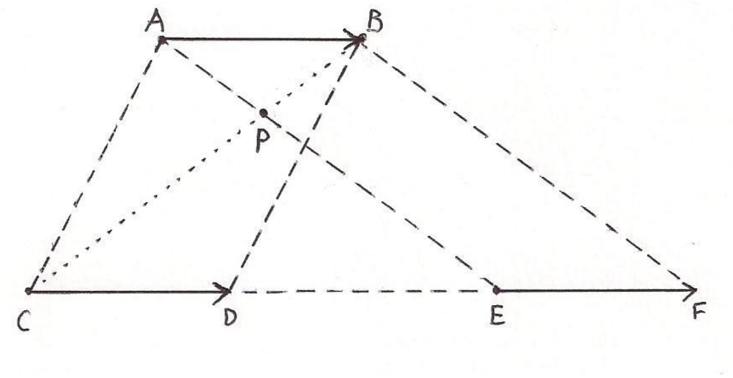
Observação 3:** Como é evidente, o que se disse para segmentos orientados com a mesma direção vale para semirretas com retas suporte paralelas ou coincidentes. *Quanto ao caso de semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ com a mesma reta suporte ainda podemos observar que $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ têm sentidos opostos sse $\dot{A}B$ tiver o mesmo sentido que a semirreta oposta a $\dot{C}D$*. Com efeito, mais uma vez excluindo o caso trivial em que A e C coincidem, podemos invocar o Lema da Observação 1 acima pois, por esse resultado, $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ terem sentidos opostos significa que nenhuma das origens das semirretas pertence à outra ou então ambas pertencem; substituindo $\dot{C}D$ pela semirreta oposta, em qualquer dos casos ficaremos com uma situação em que uma das origens pertence a ambas as semirretas e a outra apenas a uma delas, o que é equivalente à identidade dos sentidos, sendo idêntica a justificação da recíproca.

3.6 A possibilidade de definir coerentemente o conceito de vetor de modo que *fique associado um vetor a cada segmento orientado, estando associado o mesmo vetor a segmentos associados equipolentes e vetores distintos a segmentos orientados não equipolentes*, resulta do facto de *não poder existir um segmento orientado que seja simultaneamente equipolente a outros dois que não sejam equipolentes entre si*. Caso contrário os vetores associados a estes dois últimos, por um lado, teriam de ser distintos, por estarem associados a segmentos orientados não equipolentes, mas por outro seriam o mesmo vetor, já que seriam ambos coincidentes com o vetor associado ao primeiro segmento orientado.

A propriedade dos segmentos orientados acima referida pode traduzir-se dizendo que *se um segmento orientado é equipolente a outros dois então estes são equipolentes entre si*; trata-se de uma das formas da chamada *propriedade transitiva* da relação de equipolência. Esta relação entre segmentos orientados é também o que se chama *reflexiva* (*qualquer segmento orientado é equipolente a si próprio*) e *simétrica* (*se um segmento orientado é equipolente a outro, então este é equipolente ao primeiro*); estas duas propriedades são evidentes a partir da definição de equipolência e, em conjunto com a transitividade (que examinaremos na observação abaixo) determinam que a relação de equipolência é o que se chama uma *relação de equivalência.* A partir desta relação podemos definir, para cada segmento orientado, a respetiva *classe de equipolência* (*classe de equivalência* para a relação de equipolência), conjunto de todos os segmentos orientados a ele equipolentes. O facto de se tratar de uma relação de equivalência tem como consequência, como facilmente se conclui, que o conjunto das classes de equipolência constitui uma chamada *partição* do conjunto dos segmentos orientados, tanto num plano como no espaço tridimensional; ou seja, que o conjunto dos segmentos orientados é igual à união de todas essas classes de equipolência, sendo estas não vazias e disjuntas duas a duas. Poderíamos assim identificar o vetor associado a um segmento orientado como a própria classe de equipolência desse segmento orientado (conjunto dos chamados «representantes» do vetor) e, com esta definição, ficaria cumprida a condição acima expressa que pretendemos impor à noção de vetor.

Observação 1:** Ficou por justificar a propriedade transitiva da noção de equipolência, em que assenta, como acabámos de verificar, a coerência da definição de vetor. Trataremos apenas do caso de segmentos orientados num plano. Nesse caso, é fácil concluir que se duas retas forem paralelas a uma terceira são paralelas entre si, pois, caso contrário intersetar-se-iam, pelo que existiriam duas retas paralelas à terceira passando por um mesmo ponto, o que contradiria o axioma euclidiano de paralelismo, propriedade que é pressuposta, uma vez que nos situamos num plano euclidiano. Do mesmo modo, a relação de igualdade de comprimento entre pares de segmentos (ou de equidistância entre pares de pares de pontos) goza da propriedade transitiva, o que também é um dos pressupostos básicos da Geometria, que pode ser tomado como axioma. É fácil concluir então que, para provar a transitividade da relação de equipolência, resta apenas demonstrar que, *dados três segmentos orientados com a mesma direção e comprimento, se um deles tiver o mesmo sentido que cada um dos outros dois, então estes também terão o mesmo sentido*.

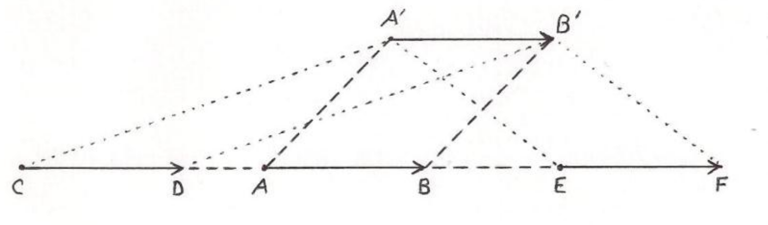
A figura seguinte traduz a propriedade que pretendemos demonstrar, num caso em que, dados três segmentos orientados, dois são colineares (representa-se também um ponto auxiliar P, interseção de BC e AE, que será utilizado no que se segue):



Utilizámos 3.5 para caracterizar a equipolência, por um lado, dos segmentos $[A,B]$ e $[C,D]$ e por outro de $[A,B]$ e $[E,F]$, servindo-nos de paralelogramos adequados, e pretendemos verificar que $[C,D]$ e $[E,F]$ também são equipolentes, bastando para tal verificar que $\dot{C}D$ e $\dot{E}F$ têm o mesmo sentido, ou seja, utilizando o Lema da Observação 1 do texto de apoio aos descritores 3.1 a 3.5, que uma das origens destas semirretas pertence a ambas e a outra apenas a uma delas. Suponhamos então, por exemplo, que C não pertence a $\dot{E}F$ e mostremos que nesse caso E tem de pertencer a $\dot{C}D$; com efeito, atendendo à hipótese feita, temos então $C - E - F$ e portanto, em particular C está no semiplano oposto a F de fronteira AE; como BF é paralela a AE, C também está no semiplano oposto a B de fronteira AE, pelo que CB interseta AE em certo ponto P. Então B e E estão no mesmo semiplano que P de fronteira AC; em particular B e E estão no mesmo semiplano de fronteira AC, donde D e E também, já que BD é paralela a AC e portanto B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC. Daí resulta que E está na semirreta $\dot{C}D$, como pretendíamos. Como podemos trocar os papéis das semirretas $\dot{C}D$ e $\dot{E}F$, acabámos de mostrar que se a origem de uma delas não pertencer à outra então a origem da segunda terá de pertencer à primeira. Resta ver que se a origem de uma pertencer à outra então a origem da outra não pode pertencer à primeira; suponhamos então que E pertence a $\dot{C}D$ e provemos que, nesse caso, C não pode pertencer a $\dot{E}F$. Temos então que E está no mesmo semiplano que D de fronteira CB, pelo que está no semiplano oposto a A com a mesma fronteira (D e A estão em semiplanos opostos de fronteira CB porque as diagonais de um paralelogramo intersetam-se); então AE interseta CB em certo ponto P, pelo que C está no semiplano oposto a B de fronteira AE, logo também no semiplano oposto a F com essa fronteira, já que BF é paralela a AE. Mas daí resulta que $C - E - F$, ou seja, C não está na semirreta $\dot{E}F$. Mais uma vez podemos trocar os papéis das semirretas $\dot{C}D$ e $\dot{E}F$, pelo que provámos o que acima ficou referido; em particular não é possível que nenhuma das origens das semirretas pertença à outra nem é possível que ambas as origens das semirretas pertençam às duas semirretas. Então a única possibilidade para as origens das semirretas $\dot{C}D$ e $\dot{E}F$ é que uma delas pertença a ambas as semirretas e a outra apenas a uma delas, o que prova que as semirretas têm o mesmo sentido.

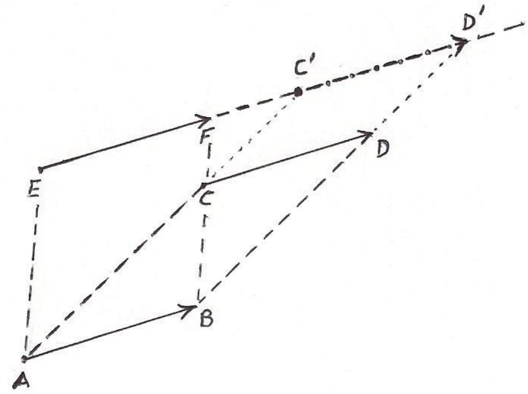
Se as hipóteses forem, por um lado, a equipolência de $[A,B]$ e $[C,D]$ e, por outro, de $[C,D]$ e $[E,F]$, facilmente podemos agora concluir que $[A,B]$ e $[E,F]$ são equipolentes, pois caso contrário, de acordo com o que vimos na Observação 2 do texto de apoio aos descritores 3.1 a 3.5, $[A,B]$ e $[F,E]$ seriam equipolentes e então poderíamos aplicar o resultado anterior aos segmentos $[A,B]$, $[C,D]$ e $[F,E]$ para concluirmos que $[C,D]$ e $[F,E]$ seriam equipolentes, o que contradiz a hipótese feita relativamente a estes segmentos, também de acordo com a referida observação.

No caso em que os três segmentos são colineares, podemos utilizar um quarto segmento equipolente com um deles, como se ilustra na seguinte figura:



Admitindo a equipolência, por um lado, dos segmentos $[A,B]$ e $[C,D]$ e por outro de $[A,B]$ e $[E,F]$, podemos construir um segmento orientado $[A',B']$ equipolente a $[A,B]$ mas com reta suporte distinta; então aplicando o resultado anterior a $[A',B']$, $[A,B]$ e $[C,D]$ concluímos que $[A',B']$ e $[C,D]$ são equipolentes e, analogamente $[A',B']$ e $[E,F]$ são equipolentes. Mas, pelo que acima foi visto, resulta daí que $[C,D]$ e $[E,F]$ são equipolentes, como pretendíamos provar.

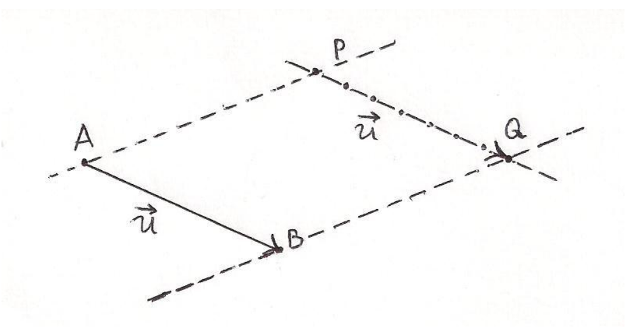
No caso em que são dados três segmentos orientados de forma que não há dois colineares, supondo um deles equipolente aos outros dois, podemos utilizar um segmento auxiliar colinear com um destes e equipolente aos outros dois, reduzindo-nos assim ao caso inicialmente estudado, como se sugere na figura seguinte:



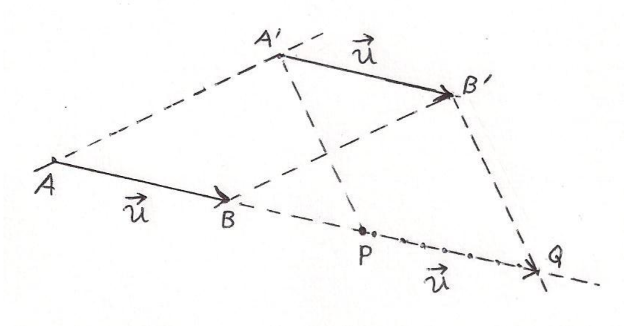
Admitindo a equipolência, por um lado, dos segmentos $[A,B]$ e $[C,D]$ e por outro de $[A,B]$ e $[E,F]$, podemos construir um segmento orientado $[C',D']$ equipolente a $[A,B]$ e a $[C,D]$, intersetando as retas AC e BD com a reta EF, respetivamente nos pontos C' e D'; note-se que estas interseções existem, já que, por hipótese, os pontos C e D não podem estar em AB, pelo que nem AC nem BD podem ser paralelas a EF, senão, para além de AB, existiria outra paralela a EF passando por A ou outra paralela a EF passando por B. O critério do paralelogramo (3.5) garante que, de facto, $[C',D']$ é equipolente a $[A,B]$ e a $[C,D]$. Agora, aplicando os resultados já demonstrados relativos ao caso em que dois dos segmentos são colineares, concluímos em primeiro lugar que $[E,F]$ e $[C',D']$ são equipolentes e em seguida que $[E,F]$ e $[C,D]$ são equipolentes, com pretendíamos provar.

Observação 2*: A transitividade da equipolência tem com consequência imediata a transitividade da identidade de sentido para semirretas num plano, pois podemos sempre utilizar segmentos orientados com o mesmo comprimento para tirar conclusões acerca do sentido de semirretas.

3.10 Dado um ponto P e um vetor $\vec{u}$, determinado por um segmento orientado $[A, B]$, se $\vec{u}$ não for o vetor nulo, ou seja, se A e B forem pontos distintos, e a reta AB não passar por P podemos construir um paralelogramo $[ABQP]$, ficando o ponto Q determinado de maneira única como o ponto interseção da reta paralela a AB passando por P com a reta paralela a AP passando por B:



Pela propriedade expressa em 3.5, o segmentos orientados $[A, B]$ e $[P, Q]$ são equipolentes, ou seja, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Se P estiver na reta AB podemos construir em primeiro lugar um segmento orientado $[A', B']$ equipolente a $[A, B]$ tal que a reta $A'B'$ não passa por P e a partir de $[A', B']$ construir o ponto Q, como acima:



Repare-se que estas construções permitem apenas concluir que existe um ponto Q com a propriedade requerida, fornecendo um processo construtivo para o obter, mas há que provar a respetiva unicidade, já que poderíamos ter recorrido a outros segmentos orientados que determinassem o mesmo vetor $\vec{u}$. Ora, a unicidade de Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ pode ser provada, muito simplesmente, notando que se trata do único ponto à distância de P igual ao comprimento do vetor $\vec{u}$, situado na única reta passando por P paralela a (ou coincidente com) qualquer das retas suporte dos segmentos orientados que determinam $\vec{u}$ e na única semirreta de origem P dessa reta com o mesmo sentido que qualquer das semirretas $\dot{A}B$ tais que $[A, B]$ determina o vetor $\vec{u}$.

Resta apenas examinar o caso trivial do vetor nulo; como é determinado pelos segmentos orientados $[A, A]$ (A ponto arbitrário), e apenas por esses, o único ponto Q tal que $\vec{0} = \overrightarrow{PQ}$ é o próprio ponto P.

	Estas propriedades permitem definir sem ambiguidade o que se entende por $P+\vec{u}$ (trata-se exatamente do ponto Q acima definido nos diversos casos); em particular verificámos que $P+\vec{0}=P$.
3.11 3.12 3.13 3.14 3.16	A aplicação que a um ponto P associa o ponto $P+\vec{u}$ designa-se «translação de vetor $\vec{u}$» e representa-se por $T_{\vec{u}}$, pelo que $P+\vec{u}$ também se representa por $T_{\vec{u}}(P)$. Se as translações $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$ forem a mesma aplicação em determinado plano ou no espaço todo, facilmente se conclui que $\vec{u}=\vec{v}$ pois aplicando-as a um qualquer ponto P do domínio comum obtemos o ponto $Q=T_{\vec{u}}(P)=T_{\vec{v}}(P)$ e, por definição, $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=\vec{v}$. Estabelecemos assim uma correspondência biunívoca entre vectores e translações em dado plano ou no espaço todo, que a cada vetor $\vec{u}$ associa a translação $T_{\vec{u}}$. Embora não se explore no 3.º ciclo a noção geral de composição de aplicações, introduz-se este conceito para o caso particular das translações. Neste caso, o domínio e contradomínio das funções a compor é sempre ou o espaço todo ou um plano, consoante o âmbito em que são estudados estes conceitos, o que facilita a definição da função composta. No ensino básico apenas se consideram isometrias num plano pré-fixado, pelo que consideraremos sempre que as translações são definidas por vetores associados a segmentos orientados desse plano e têm domínio igual a esse mesmo plano. Também é fácil concluir que o contradomínio nesse caso coincidirá com o domínio, pois dada uma translação de vetor $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e um ponto Q do plano, então $Q=T_{\vec{u}}(P)$ sendo P o ponto do plano tal que $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BA}$, de acordo com o descritor 3.10, já que, nesse caso, virá também $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Assim, a aplicação composta $T_{\vec{v}}\circ T_{\vec{u}}$ de duas translações num mesmo plano será também uma aplicação com domínio igual ao mesmo plano e facilmente se conclui que é também uma translação cujo vetor pode ser dado pelo segmento orientado $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ tal que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, sendo os pontos B e C sucessivamente obtidos por aplicação do resultado expresso no descritor 3.10. O vetor $\vec{w}$ designa-se por «soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor $\vec{v}$» e representa-se por $\vec{u}+\vec{v}$. Em particular, por definição: $$(P+\vec{u})+\vec{v}=T_{\vec{v}}\big(T_{\vec{u}}(P)\big)=T_{\vec{v}}\circ T_{\vec{u}}(P)=P+(\vec{u}+\vec{v}).$$

Descritor	Texto de apoio
2.1 2.2 2.3	Nos *Elementos* de Euclides, obra escrita há cerca de 24 séculos, a Geometria, hoje dita euclidiana, é apresentada como uma teoria hipotético-dedutiva. Ou seja, considera-se que dela fazem parte as proposições que se podem deduzir logicamente («demonstrar») a partir de um conjunto pré-fixado de proposições, designadas nos *Elementos* por «axiomas» e «postulados», cinco de cada, que são aceites sem demonstração por serem consideradas suficientemente "evidentes" para o efeito. Os axiomas enunciam princípios gerais cujo domínio de validade se considerava transcender o próprio domínio da Geometria (por exemplo: «duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si») ao passo que os postulados descrevem propriedades de entidades geométricas previamente definidas a partir de conceitos primitivos e relações primitivas entre estes conceitos, como sejam o de ponto, reta, plano, ângulo, distância, circunferência, etc. Embora Euclides apresente definições para quase todos estes termos, há que distinguir as definições que são efetivamente utilizadas nas demonstrações das que apenas sugerem uma interpretação intuitiva dos conceitos. Assim, por exemplo, a primeira definição dos *Elementos* é a de «ponto» ("aquilo que não tem partes"); como é óbvio, esta definição envolve conceitos que podem ser sugestivos para a intuição, mas que precisariam eles próprios de ser esclarecidos, ou então tomados como primitivos, sendo inevitável que se parta, em algum momento, de um conjunto de termos indefinidos. Verifica-se que a definição de ponto não é utilizada em nenhuma das demonstrações dos *Elementos*, pelo que este conceito pode ser ele próprio tomado para primitivo, ou seja, não definido, e tudo o que é necessário utilizar da noção de ponto para proceder às demonstrações consta dos postulados que o relacionam com outros conceitos, alguns deles também primitivos e outros definidos a partir dos primitivos. Os «Elementos» de Euclides foram aceites até ao século XIX como modelo praticamente inultrapassável de rigor; apenas o chamado 5.º postulado suscitava dúvidas quanto à sua evidência, pelo que, ao longo dos séculos, houve diversas tentativas para o demonstrar a partir dos restantes, sem qualquer êxito. No entanto, estas tentativas não foram inúteis, pois levaram ao desenvolvimento de cadeias dedutivas, algumas das quais mais tarde serviram para o esclarecimento desta questão e para o desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, quando finalmente se provou que o 5º postulado é independente dos restantes, no sentido em que é possível construir modelos coerentes tanto para uma Geometria em que se admitam os cinco postulados de Euclides como para uma Geometria em que se admitam os quatro primeiros postulados e a negação do 5.º. Voltaremos a esta questão mais adiante a propósito do objetivo geral 3. Para além da questão da independência do 5.º postulado, a análise lógica mais exigente que foi desenvolvida ao longo do século XIX dos fundamentos da Matemática em geral e, em particular, da Geometria, levou a uma crítica de alguns aspetos da obra de Euclides que conduziu ao aparecimento de axiomáticas mais rigorosas para a própria Geometria euclidiana. Deixou de se distinguir postulados de axiomas e reconheceu-se claramente a necessidade de partir de termos

indefinidos, relações indefinidas entre termos, e axiomas que apenas façam intervir esses termos e relações ou outros que se definam a partir destes, envolvendo adicionalmente apenas operações lógicas. A proposta mais famosa nesta fase histórica foi sem dúvida a de Hilbert, publicada em 1899, em que se consideravam como termos primitivos os «pontos», «retas» e «planos» e como relações primitivas as relações de «incidência» entre pontos e retas, entre retas e planos e entre pontos e planos, a relação «situado entre» relacionando três pontos, a relação de «congruência de segmentos de reta» e a relação de «congruência de ângulos».

Ao longo do século XX foram apresentadas diversas axiomáticas alternativas à de Hilbert, algumas delas pressupondo a construção prévia independente do corpo dos números reais (como a Axiomática de Birkhoff). De entre as que não partem desse pressuposto, permitindo assim que os números reais possam surgir como medidas de entidades geométricas previamente construídas independentemente, destaca-se a Axiomática de Tarski que se distingue pelo número reduzido de axiomas que envolve (apenas onze, incluindo os dois que limitam superior e inferiormente a dimensão do espaço), baseados em apenas um tipo de objetos primitivos (os pontos) e em apenas duas relações primitivas (a relação «situado entre» para trios de pontos e a relação binária de «equidistância» entre pares de pontos); prova-se mesmo que essa axiomática poderia ser inteiramente formulada apenas com base na relação de equidistância, ainda que os axiomas perdessem em simplicidade. A versão mais apurada desta Axiomática apenas foi publicada em 1965 na tese de doutoramento de um aluno de Tarski, H. N. Gupta.

Tomando apenas os *pontos* como objetos primitivos (constituindo um conjunto designado por «espaço») torna-se necessário definir *retas* e *plano*s; o conceito de reta resulta da relação «situado entre» para trios de pontos. Podemos dizer que três pontos estão «alinhados» (ou cada um deles alinhado com os outros dois ou ainda que são colineares) se um deles estiver situado entre os outros dois e podemos então entender a *reta* determinada (ou "definida", como por vezes se diz) por dois pontos como o conjunto que além destes dois pontos contém os pontos alinhados com esses dois. O conceito de ponto situado ente os outros dois traduz a ideia intuitiva de "ponto que oculta um dos outros dois do olhar de um observador situado no outro" e os axiomas da Geometria (em particular os de Tarski) podem ser interpretados como traduzindo alguns dados da nossa experiência em situações inspiradas nesta interpretação; sendo assim, os teoremas geométricos podem depois ter também uma interpretação física adequada.

Também poderíamos começar por definir a *semirreta* de origem O oposta a um ponto P como sendo o conjunto dos pontos Q tais que O está entre P e Q (o que podemos representar por $P - O - Q$), ou seja, intuitivamente, o conjunto dos pontos que "O oculta de P" (admitindo que dos axiomas se deduz que $P - O - O$, ou seja, incluindo-se a origem na semirreta) e em seguida definindo reta como a união de duas *semirretas opostas*, ou seja, com a mesma origem e tais que a origem está situada entre dois outros pontos escolhidos cada um em cada uma das semirretas. Seria evidentemente necessário provar a equivalência das duas definições; em particular prova-se que para cada semirreta existe exatamente uma semirreta oposta e a *reta* determinada por dois pontos O e P é muito simplesmente a união da semirreta de origem O oposta a P com a respetiva semirreta oposta.

De posse do conceito de reta podemos agora definir o *plano* determinado (ou "definido") por uma reta r e um ponto P que não lhe pertença; para que existam planos, é necessário admitir (como axioma) que existem pelo menos três pontos não alinhados, sem o que o espaço ficaria reduzido no máximo a uma só reta, ou seja seria um espaço de dimensão não superior a um. Por analogia com o que se fez para retas, poderíamos começar por definir o *semiplano* de fronteira r oposto a P como a união das semirretas de origem em pontos de r e opostas a P (ou seja, o conjunto dos pontos do espaço "que a reta r oculta do ponto P"), e em seguida dizer que dois *semiplanos* são *opostos* um ao outro se partilham a mesma reta fronteira e um ponto da fronteira está situado entre dois pontos fora dela, um em cada semiplano. Podemos então designar por «plano» a união de dois semiplanos opostos; prova-se que dado um semiplano existe exatamente um semiplano oposto a este, o que permite definir o *plano* determinado (ou "definido") por uma reta r e um ponto P com a união do semiplano de fronteira r oposto a P com o respetivo semiplano oposto.

Prova-se que tanto as retas como os planos são o que se chama «subespaços afins», ou seja, conjuntos de pontos do espaço que contêm, com dois quaisquer pontos, a reta por eles determinada. Demonstra-se também que uma reta é determinada por dois quaisquer dos seus pontos, ou seja, é o conjunto dos pontos alinhados com dois quaisquer pontos nela escolhidos; analogamente um plano é determinado por três quaisquer dos seus pontos não colineares, no sentido em que é determinado pela reta definida por dois quaisquer desses pontos e pelo terceiro.

Também é possível demonstrar que, para obter todos os pontos de um plano determinado por três pontos não colineares, basta considerar a união de seis ângulos convexos: os três ângulos convexos de vértices em cada um dos pontos e lados passando pelos outros dois, e os ângulos verticalmente opostos a estes.

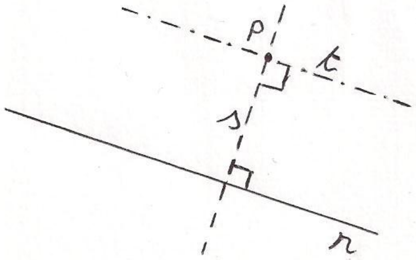
Duas retas secantes também determinam um plano: o único que contém o ponto interseção das duas retas e dois outros pontos, escolhidos arbitrariamente, um ponto em cada uma delas; as retas desse plano que passam pelo ponto interseção das duas retas dadas são exatamente as uniões das semirretas opostas de origem nesse ponto interseção e que ficam entre lados dos ângulos convexos com vértice nesse ponto e lados de suporte nas duas retas dadas. Com efeito, essas semirretas têm de estar contidas no plano pois, por definição de semirreta situada entre outras duas (*cf.* GM4-2.1), passam pelo ponto interseção, que está no plano, e por segmentos de extremos nos lados dos referidos ângulos, os quais têm portanto de estar contidos no plano. Assim, essas semirretas passam por dois pontos do plano e têm portanto de estar contidas nele; a recíproca também resulta de propriedades básicas mas é de demonstração menos elementar. Por outras palavras, o plano determinado por duas retas concorrentes é muito simplesmente a união dos quatro ângulos convexos determinados por essas duas retas (ou seja, com vértice no ponto interseção das retas e lados de suporte nas retas).

A partir da definição acima apresentada de subespaço afim podemos concluir que a interseção de um qualquer número de espaços afins é um espaço afim, uma vez que se dois pontos pertencem a essa interseção, a reta determinada por esses dois pontos também pertence, já que pertence a cada um deles. Assim, podemos definir o *subespaço afim gerado* por um conjunto de pontos como a interseção de todos os subespaços afins que contêm esse conjunto de pontos. A reta determinada por dois pontos será então o subespaço afim gerado pelo conjunto dos dois pontos e o plano determinado por três pontos não colineares o subespaço afim gerado pelo conjunto dos três pontos. Dizemos que uma reta tem dimensão 1 e um plano dimensão 2 e considera-se um ponto (identificado com o conjunto reduzido a esse

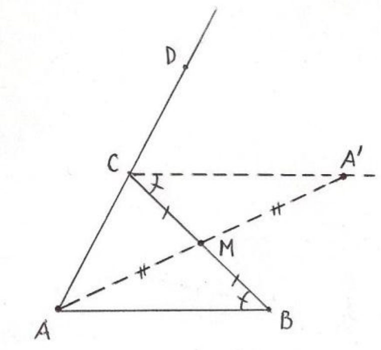
	ponto) como subespaço afim de dimensão 0; mais geralmente, podemos definir por recorrência a *dimensão* de um subespaço afim gerado por um número finito de pontos (dito de *dimensão finita*), dizendo que um subespaço afim tem dimensão n se for gerado por um conjunto de $n+1$ pontos que não pertencem a nenhum subespaço afim de dimensão $n-1$. Prova-se que a dimensão é um número bem definido para cada subespaço afim de dimensão finita. Consoante os axiomas de dimensão que fixarmos assim o espaço todo terá ou não dimensão finita e, se tiver dimensão finita, poderá ter uma dimensão determinada; em geral, a nível elementar, supõe-se que a dimensão é igual a 2 (Geometria plana) ou 3 (Geometria no espaço). As limitações impostas à dimensão do espaço têm consequências notáveis para as propriedades envolvendo interseções de subespaços afins; observe-se que a interseção de dois subespaços afins tais que nenhum está contido no outro, se não for vazia, só pode ser um subespaço afim de dimensão inferior a ambos. Assim, por exemplo, a interseção de duas retas só pode ser um ponto ou vazia, a interseção de uma reta com um plano em que não está contida só pode ser um ponto ou vazia (*cf.* 5.3) e a interseção de dois planos só pode ser uma reta, um ponto ou vazia. No entanto, num espaço de dimensão 3, dois planos não podem ter um ponto por interseção, pois prova-se que esse facto permitiria determinar dois pontos em cada plano, fora da interseção, que, com o ponto interseção, determinariam um subespaço afim de dimensão 4 (gerado por 5 pontos que não pertencem a um subespaço de dimensão 3), o que não é possível num espaço de dimensão 3. É daí que resulta a propriedade expressa no descritor 5.1, segundo a qual a interseção de dois planos que se intersetam (não paralelos) é uma reta.
3.1 3.2 3.3	O «5.º postulado de Euclides», na forma enunciada nos *Elementos*, estabelece que *se duas retas num plano, intersetadas por uma terceira, determinam com esta ângulos internos do mesmo lado da secante cuja soma é inferior a um ângulo raso então as duas retas intersetam-se no semiplano determinado pela secante que contém esses dois ângulos*. Como atrás foi referido, a relativa complexidade deste enunciado levou a que muitos matemáticos, ao longo de mais de dois milénios, duvidassem do caráter independente do 5º postulado, ou seja, acreditassem que seria possível demonstrá-lo a partir dos axiomas e dos restantes postulados. Apenas no século XIX a análise crítica dos fundamentos da Geometria levada a cabo por matemáticos como Gauss, Lobachewsky ou Boliyai, entre outros, permitiu concluir que o 5.º postulado é, de facto, independente. Com interpretações adequadas dos objetos e relações primitivas mostrou-se ser possível construir espaços em que valem os restantes axiomas e postulados e a negação do 5.º postulado (ditos espaços não-euclidianos); essas construções podem ser baseadas em estruturas mais primitivas da Matemática (nomeadamente os números naturais) ou mesmo na própria Geometria Euclidiana (a que incorpora o 5.º postulado), pelo que, admitindo o caráter não contraditório da Matemática em geral ou da própria Geometria Euclidiana tem de admitir-se também o caráter não contraditório de uma Geometria em que seja admitida a negação do 5.º postulado, mantendo-se a validade dos axiomas e restantes postulados. Qualquer axiomática rigorosa para a Geometria Euclidiana contém um axioma (ou eventualmente um conjunto de axiomas) equivalente ao 5.º postulado, no sentido em que pode ser substituído por este de modo que a nova axiomática assim obtida dê origem aos mesmos teoremas, ou seja, permita demonstrar as mesmas

proposições (os axiomas de uma podem ser todos demostrados com base apenas nos axiomas da outra). Consideremos então uma axiomática para a Geometria euclidiana que contém como axioma o 5.º postulado de Euclides e admitamos que os axiomas são todos *independentes*, ou seja, que nenhum deles pode ser demonstrado a partir dos outros. Tal facto pode provar-se construindo modelos em que valem todos os axiomas menos um deles e em que vale também a negação deste. Se retirarmos a uma tal axiomática o 5.º postulado ficaremos com axiomas suficientes para fundamentar a chamada *Geometria absoluta*, conjunto de resultados geométricos que podem ser demonstrados sem o auxílio do 5.º postulado e que, consequentemente, valem também numa Geometria não-euclidiana que se baseie apenas na substituição do 5.º postulado pela respetiva negação, designada por Geometria Hiperbólica ou de Lobachewsky.

Em Geometria absoluta pode provar-se que *por um ponto P fora de uma reta r passa pelo menos uma reta paralela a r*. Uma tal reta pode ser obtida começando por considerar a reta s, perpendicular traçada do ponto P para a reta r, e, em seguida, a perpendicular t à reta s no ponto P, contida no plano determinado pelo ponto P e pela reta r.

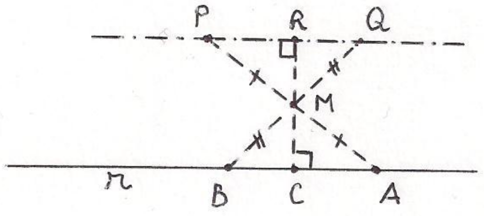


Todas estas construções são de Geometria absoluta e a reta t assim determinada é paralela à reta r pois é com ela complanar por construção e não pode intersetá-la; caso contrário, determinaria com ela um triângulo com dois ângulos internos retos. A impossibilidade de existir um tal triângulo resulta imediatamente de outro teorema de Geometria absoluta, segundo o qual *um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno não adjacente*; com efeito, se um triângulo tivesse dois ângulos internos retos, um ângulo externo adjacente a um deles seria também reto e igual ao outro ângulo interno reto, contrariando esse resultado. É habitual deduzir-se o referido resultado a partir daquele que estabelece a igualdade entre um ângulo externo e a soma dos internos não adjacentes; no entanto este último teorema é apenas euclidiano, ou seja, necessita do 5º postulado para a respetiva demonstração, já que é falso em Geometria de Lobachewski. Mas podemos demonstrar o primeiro sem recurso ao 5.º postulado, do seguinte modo:



Consideremos um triângulo $[ABC]$, um ponto D na semirreta $\dot{A}C$ fora do lado $[AC]$ e provemos que o ângulo DCB, externo do triângulo $[ABC]$, é maior do que o ângulo interno não adjacente ABC. Para o efeito consideremos o ponto médio M do lado $[BC]$ e o ponto A' imagem de A pela reflexão central de centro M. O ângulo $A'CB$ é igual ao ângulo ABC, já que os pontos A', C e B são as imagens respetivamente dos pontos A, B e C pela reflexão central de centro M. Basta-nos então verificar que o ângulo $A'CB$ é menor do que o ângulo DCB. Ora, o ponto A' está no mesmo semiplano de fronteira CD que o ponto B, já que estão ambos no mesmo semiplano com essa fronteira que o ponto M (estão em semirretas de origens na reta CD e passando por M) e também está no mesmo semiplano de fronteira CB que o ponto D, já que estão ambos no semiplano com essa fronteira oposto ao ponto A; então o ponto A' está no ângulo DCB e, por construção, não está nos respetivos lados, ou seja, a semirreta $\dot{C}A'$ está situada estritamente entre os lados do ângulo DCB o que prova que o ângulo $A'CB$ é, de facto, menor do que o ângulo DCB.

Outro processo para, em Geometria absoluta, construir uma reta paralela a uma dada reta r passando por um ponto P fora de r pode ser o referido na observação final do texto de apoio ao descritor GM7-2.16 no Texto Complementar de Geometria, e que utiliza a reflexão central de centro no ponto médio M do segmento de extremos em P e num ponto qualquer A de r.



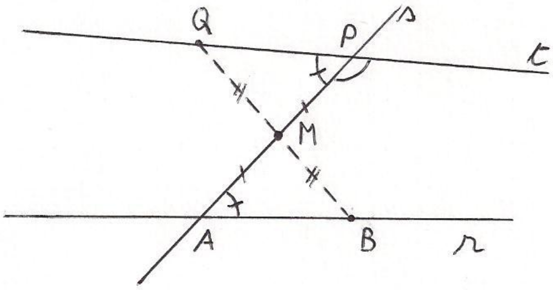
Escolhendo outro ponto qualquer B de r e designando por Q a imagem de B pela reflexão central de centro M podemos verificar que as retas AB (ou seja, r) e PQ são paralelas, sem utilizar o 5º postulado. Para o efeito, sendo C o pé da perpendicular traçada de M para r, conclui-se que a imagem R de C pela reflexão central de centro M é o pé da perpendicular traçada de M para a reta PQ, já que tem de pertencer ao segmento $[PQ]$ e os ângulos PRM e ACM têm de ser iguais e portanto ambos retos. Assim, PQ e r, retas complanares (por construção, P e Q pertencem ambos ao plano determinado por r e M), partilham uma perpendicular

(RC) e portanto são paralelas, pelo que vimos atrás. Evitámos utilizar o critério de paralelismo de duas retas que consiste na verificação da igualdade de ângulos correspondentes ou alternos internos determinados por um secante nas duas retas, o que permitirá utilizar esta construção para provar esse critério, que é verificável em Geometria absoluta, como adiante veremos, ao contrário do respetivo recíproco (em Geometria hiperbólica, uma secante pode determinar em duas retas paralelas ângulos correspondentes ou alternos internos com diferentes amplitudes).

Estabelecemos a existência de paralelas a uma dada reta r passando por um dado ponto P fora dela, seja em Geometria euclidiana, seja em Geometria de Lobachewsky, e sabemos que uma delas, t, pode ser obtida considerando o ponto Q, pé da perpendicular traçada de P para r e tomando para t a perpendicular a PQ passando por P no plano das retas PQ e r. Podemos agora observar que o 5º postulado impede a existência de outra paralela a r passando por P; com efeito, qualquer outra reta t' complanar com r e passando no ponto P estaria no plano que contém t e r (o plano de r e P) e não poderia ser perpendicular a PQ já que é distinta da única reta t nessas condições passando por P que existe nesse plano. Então essa reta t' teria de determinar com PQ um ângulo interno de um dos lados da secante, relativo ao sistema de duas retas r e t' cortadas pela secante PQ, menor do que um reto, o qual determinaria uma soma inferior a dois retos com o outro ângulo interno desse mesmo lado da secante, já que esse é reto, por construção. Pelo 5º postulado, as retas r e t' teriam de intersetar-se, ou seja, não seriam paralelas; portanto não pode existir outra reta paralela a r passando por P, para além da reta t.

Em Geometria euclidiana vale portanto a proposição segundo a qual *não existe mais do que uma reta paralela a uma dada reta passando por um ponto a ela exterior*.

Reciprocamente, acrescentando este resultado como axioma («axioma euclidiano de paralelismo») a uma axiomática da Geometria absoluta, podemos demonstrar o 5.º postulado de Euclides.



Com efeito, considerando três retas nas condições da hipótese desse postulado, ou seja, r, s e t complanares tais que s é secante a r num ponto A, secante a t num ponto P e s forma com as outras duas retas ângulos internos de um mesmo lado da secante cuja soma é inferior a dois retos, se r e t não se intersetassem no semiplano determinado pela secante que contém esses dois ângulos, ou seja, se esta situação contrariasse o 5º postulado, as retas r e t não poderiam intersetar-se em nenhum ponto, pois, caso contrário, no semiplano oposto, determinariam um triângulo com dois ângulos internos que somariam mais do que dois ângulos retos o que é impossível, já que, nesse caso, um ângulo externo adjacente a um deles não poderia ser maior do que o outro. Então as retas r e t seriam paralelas.

Designando por M o ponto médio do segmento $[AP]$, escolhendo um ponto B na reta r distinto de A e no semiplano em que se situam os ângulos internos do mesmo lado da secante cuja soma supomos ser inferior a dois ângulos retos, o ponto Q imagem de B pela reflexão central de centro M teria de pertencer à reta t, pois, como atrás verificámos, determina com P uma reta paralela a r e, pelo axioma euclidiano de paralelismo, essa reta tem de coincidir com t. Mas, por outro lado, os ângulos QPA e BAP são iguais, já que Q, P e A são imagens respetivamente de B, A e P pela reflexão central de centro M, de onde se deduz que a soma dos dois ângulos internos do mesmo lado da secante determinados por s nas retas r e t que supúnhamos ser inferior a dois retos é igual à soma de QPA com um seu suplementar. Esta contradição permite concluir a tese do 5º postulado de Euclides, como pretendíamos.

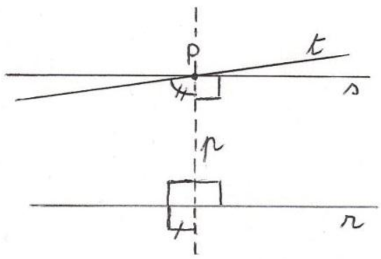
4.1
4.2
4.3

O Axioma euclidiano de paralelismo, que, como acabámos de verificar, é equivalente ao 5º postulado de Euclides (no quadro de uma axiomática para a Geometria absoluta), permite imediatamente concluir que se uma reta interseta uma de outras duas paralelas e é com elas complanar, então interseta a outra. Com efeito, se assim não fosse, as duas que se intersetam seriam duas retas paralelas a uma terceira passando por um mesmo ponto, contra o que estabelece o referido axioma.

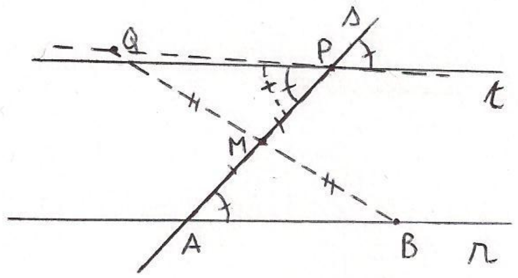
Do mesmo modo, em Geometria euclidiana, podemos imediatamente concluir que, *num plano, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si*, já que se não o fossem intersetar-se-iam e portanto uma delas intersetaria a terceira, pelo que acabámos de ver, contrariando a hipótese de paralelismo dessas duas retas. Como veremos adiante (5.6) esta propriedade vale também no espaço.

Se duas retas paralelas forem intersetadas por uma secante, verifiquemos que, ainda em Geometria euclidiana, *os ângulos correspondentes são iguais*. Pelo 5º postulado de Euclides, os dois pares de ângulos internos de um mesmo lado da secante que ficam assim determinados terão ambos soma igual a dois ângulos retos, pois se a soma de algum dos dois pares fosse inferior ou superior a dois retos, para um dos pares a soma seria inferior a dois retos (se um deles tivesse soma superior, os suplementares adjacentes do outro lado da secante teriam soma inferior a dois retos); nesse caso as duas retas que supúnhamos paralelas intersetar-se-iam do lado da secante em que se situam os ângulos desse par. Então ângulos correspondentes determinados pela secante nessas paralelas serão iguais, já que um deles é interno e o outro é suplementar adjacente ao outro ângulo interno do mesmo lado da secante e estes ângulos internos também são suplementares, pelo que acabámos de ver.

Como referimos no texto de apoio ao objetivo geral 3, esta propriedade, que foi abordada no descritor GM5-1.11 e serviu de base à demonstração da igualdade dos ângulos alternos internos e alternos externos determinados por uma secante em duas retas paralelas, é euclidiana, ou seja, não vale em Geometria hiperbólica, ao contrário da recíproca. De facto, em Geometria hiperbólica, tem de existir pelo menos uma reta r e um ponto P fora dela por onde passam pelo menos duas paralelas a r e sabemos que uma dessas paralelas é a reta s perpendicular em P, situada no plano de r e P, à reta p perpendicular a r passando por P. Designando por t outra paralela a r passando por P, p determina no par de retas paralelas r e t ângulos correspondentes que não são iguais pois em cada par de ângulos correspondentes um deles é reto (o determinado com a reta r) ao contrário do outro que só pode ser agudo ou obtuso (já que a secante p e a reta t não são perpendiculares). A figura seguinte ilustra esta situação:



Como foi referido, podemos demonstrar a recíproca da propriedade anterior em Geometria absoluta; pretendemos então verificar que *se uma secante determinar em duas retas complanares ângulos correspondentes iguais então essas retas são paralelas*. Sejam então r, s e t complanares tais que s é secante a r num ponto A, secante a t num ponto P e s forma com as outras duas retas ângulos correspondentes iguais; comecemos por notar que os ângulos alternos internos também são iguais, já que um deles é verticalmente oposto ao ângulo que é correspondente ao outro.



Então podemos considerar a reflexão central de centro no ponto médio M do segmento $[AP]$ e a imagem Q por essa reflexão de um ponto B distinto de A na reta r e situado no lado de um dos ângulos alternos internos iguais. Pelo que vimos no texto de apoio ao objetivo geral 3, a reta QP será paralela a r; como por outro lado os ângulos QPA e PAB também serão iguais, pelas propriedades da reflexão central, concluímos que o ângulo QPA é igual ao ângulo alterno interno ao ângulo PAB determinado pela secante s no par de retas r e t; como partilha com este ângulo o lado $\dot{P}A$ e está situado no mesmo semiplano de fronteira PA concluímos que a reta PQ coincide com a reta t e portanto t é, de facto, paralela a r.

5.1
5.2
5.3
5.4
5.5

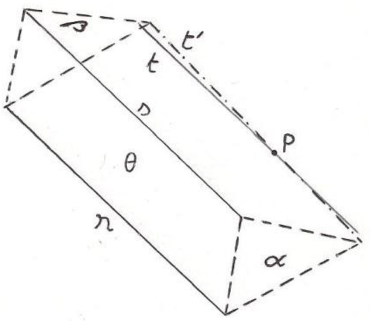
Como foi referido no texto de apoio atrás, relativo ao objetivo geral 2, a interseção de dois planos não paralelos (ou seja, que têm pelo menos um ponto em comum, designados também por «planos concorrentes») num espaço de dimensão 3 só pode ser uma reta. Analogamente, mas agora em qualquer dimensão, uma reta que não é paralela a um plano (ou seja, tem pelo menos um ponto em comum com o plano) e não está nele contida (também designada por «reta secante ao plano») interseta o plano exatamente num ponto.

O facto de atribuirmos ao espaço a dimensão 3 também tem como consequência que se um plano é concorrente com um de dois planos que não se intersetam («paralelos», com a definição que adotámos), então é concorrente com o outro, pois prova-se que, caso contrário, os três planos gerariam um subespaço afim de dimensão superior a 3. Note-se que em espaços de dimensão superior a 3, na definição de paralelismo de dois planos, é usual incluir a condição de que os planos pertençam a um mesmo subespaço de dimensão 3, a exemplo da definição de retas paralelas, que se supõem, à partida, complanares (*cf.* texto de apoio ao descritor 5.7, adiante). Em qualquer caso, as retas interseção do plano secante com os dois paralelos são evidentemente complanares e não podem intersetar-se (um ponto de interseção das duas retas seria comum aos dois planos paralelos…), pelo que são paralelas.

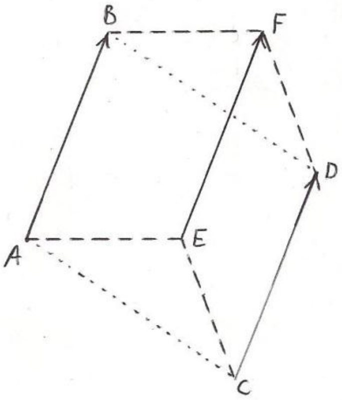
Se uma reta for secante a um de dois planos paralelos, é fácil agora concluir que terá de ser também secante ao outro. Com efeito, podemos considerar um qualquer plano contendo a reta, o qual intersetará então um dos planos dados, e portanto o que lhe é paralelo, segundo duas retas paralelas; a reta dada, que, por construção interseta uma delas, terá então de intersetar a outra (*cf.* 4.1), intersetando portanto o outro plano dado.

5.6 Embora não se peça para demonstrar a transitividade do paralelismo de retas no espaço, indica-se em seguida como esse resultado pode ser obtido. Para esse efeito convém recordar que uma reta e um ponto por onde ela não passa determinam um plano; em particular se uma reta é paralela a uma outra e passa por um dado ponto então está contida no único plano que contém a outra reta e esse ponto, já que retas paralelas, por definição, são complanares.

Consideremos então três retas r, s e t no espaço tais que r é paralela a s e s é paralela a t. Podemos já supor que as três retas não são complanares, uma vez que para retas complanares o resultado já é conhecido (*cf.* 4.3). Pretendemos provar que r e t são paralelas; para o efeito consideremos um ponto qualquer P de t que não esteja no plano θ das retas paralelas r e s e sejam α e β os planos determinados pelo ponto P e, respetivamente, pelas retas r e s. Os planos α e β sendo distintos (caso contrário o ponto P estaria no plano θ, contrariando o modo como foi escolhido) e tendo um ponto em comum , intersetam-se segundo uma reta t'. Vamos provar que t' é simultaneamente paralela a r e s; com efeito t' não pode intersetar s pois, caso contrário, o ponto de interseção pertenceria a ambos os planos α e β e, em particular, s passaria por um ponto do plano α que contém a reta r. O plano α coincidiria portanto com o plano θ das retas paralelas r e s, o que, como vimos, não é possível, já que o ponto P do plano α foi escolhido fora de θ. Então as retas s e t' são paralelas, já que não se intersetam e estão ambas contidas no plano β; analogamente, as retas r e t' são também paralelas. Mas pelo axioma euclidiano de paralelismo as retas t' e t têm de coincidir, já que são ambas paralelas a s passando por P; então a reta t, coincidente com t', é paralela à reta r, como pretendíamos demonstrar.



5.7	O critério de paralelismo referido no descritor 5.7 generaliza-se a espaços de dimensão superior a 3, o que não acontece com a definção adotada para planos paralelos no espaço tridimensional (simplesmente não se intersetarem); com efeito, nesses espaços de dimensões superiores, podem existir planos que não se intersetam mas que não é conveniente considerar paralelos, tal como duas retas no espaço podem não se intersetar e não serem paralelas. Podemos dizer mais geralmente que dois planos são paralelos se pertencerem a um mesmo subespaço de dimensão 3 e não se intersetarem; com essa definição o critério expresso no descritor 5.7 continua a valer em qualquer dimensão de espaço. Com efeito, se os planos forem paralelos, estão ambos contidos num subespaço de dimensão 3 e podemos fixar num dos planos duas retas concorrentes; escolhendo um ponto qualquer fora do plano (nesse subespaço de dimensão 3), os planos determinados pelas duas retas concorrentes e por esse ponto serão concorrentes com o plano em que as retas se situam e portanto com o outro plano dado que é paralelo ao primeiro, determinando neste um par de retas, sendo duas a duas paralelas as quatro retas assim determinados nos dois planos paralelos. Obviamente, as retas determinadas no segundo plano também terão de ser concorrentes pois, caso contrário, teríamos um contraexemplo para a transitividade do paralelismo de retas no espaço (*cf.* 5.6). Fica assim cumprido o critério de paralelismo expresso neste descritor. Reciprocamente, se existir um par de retas concorrentes em cada um de dois planos, duas a duas paralelas, prova-se que os dois planos estão ambos contidos no subespaço de dimensão 3 gerado por um dos planos dados e pelo plano de um dos pares de retas paralelas. Mostremos então que os planos dados não podem intersetar-se; se se intersetassem, designando por r a reta interseção dos dois planos, é fácil concluir que r teria de intersetar pelo menos cada uma das retas de um dos pares de retas paralelas dadas. Com efeito, se a reta r não intersetasse uma das quatro retas dadas, seja ela s, então seria paralela a essa reta, pois é com ela complanar, e portanto também seria paralela à reta dada que é paralela a s (pela transitividade do paralelismo no espaço). Teria então que intersetar as outras duas retas dadas (que são paralelas entre si) já que cada uma destas intersetaria uma paralela a r no plano em que r e essa paralela se situa. Mas se r interseta ambas as retas de um dos pares de retas paralelas dadas, uma em cada um dos planos dados, então o plano dessas duas retas paralelas tem de passar por dois pontos de r, pois, caso contrário, os pontos de interseção com r das duas retas paralelas teriam de coincidir e seria um ponto comum às duas paralelas. Então esse plano das duas paralelas contém a reta r, interseção dos dois planos dados, pelo que os planos que r determina com cada uma delas (os planos dados inicialmente) coincidem, contra a hipótese de serem dois planos distintos. Esta contradição prova que os planos dados não podem intersetar-se, ou seja, são paralelos, já que pertencem a um mesmo espaço de dimensão 3. **Observação:** Uma consequência interessante dos resultados expressos neste descritor e no anterior é a transitividade da equipolência de segmentos orientados não complanares no espaço tridimensional, essencial para a definição geral de vetores no espaço.

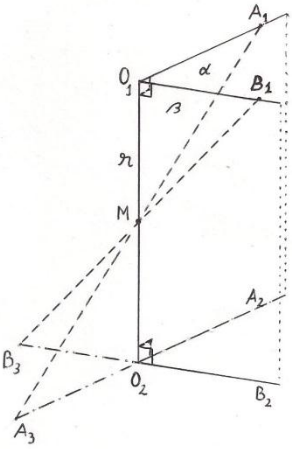


Com efeito, dados dois segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$, equipolentes a um terceiro $[E, F]$, os três segmentos não complanares, pelo critério do paralelogramo, $[AEFB]$ e $[CEFD]$ são paralelogramos, pelo que os segmentos $[AB]$ e $[EF]$ são paralelos, assim como os segmentos $[CD]$ e $[EF]$; assim, os segmentos $[AB]$ e $[CD]$ serão também paralelos. Por outro lado, do paralelismo das retas BF e AE, por um lado, e, DF e CE, por outro, concluímos que os planos BFD e AEC são paralelos; então as retas BD e AC são paralelas por serem as interseções destes dois planos paralelos com o plano das retas paralelas AB e CD. Então o quadrilátero $[ACDB]$ é um paralelogramo, o que termina a demonstração da equipolência dos segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$.

6.1
6.2

Com o objetivo de definirmos o que se entende por ângulo de dois semiplanos com fronteira comum r e planos suporte distintos vamos considerar um ponto P de r e duas semirretas de retas suporte perpendiculares a r e de origem P, cada uma delas num dos semiplanos. Essas semirretas são lados de um ângulo convexo que designaremos por ângulo dos dois semiplanos; para que possamos utilizar sem ambiguidade a amplitude desse ângulo como definição da “amplitude do ângulo dos dois semiplanos” (também designada simplesmente por «ângulo dos dois semiplanos», quando não houver perigo de confusão), será necessário demonstrar que todos os ângulos assim construídos são iguais.

Consideremos então dois planos α e β que se intersetam segundo uma reta r e dois ângulos convexos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ de vértices em r e lados perpendiculares a r, de forma que os lados $\dot{O}_1A_1$ e $\dot{O}_2A_2$ estão num mesmo semiplano determinado por r em α e os lados $\dot{O}_1B_1$ e $\dot{O}_2B_2$ estão num mesmo semiplano determinado por r em β. Provemos que os ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ são iguais. Para o efeito consideremos o ponto médio M do segmento $[O_1O_2]$; em particular O_1 e O_2 são imagens um do outro pela reflexão central de centro M. Vamos utilizar essa reflexão central para obter um ângulo igual ao ângulo $A_1O_1B_1$ e verticalmente oposto ao ângulo $A_2O_2B_2$ o que provará a igualdade pretendida. Considerando então as imagens de A_1 e B_1 pela mesma reflexão central, sejam elas



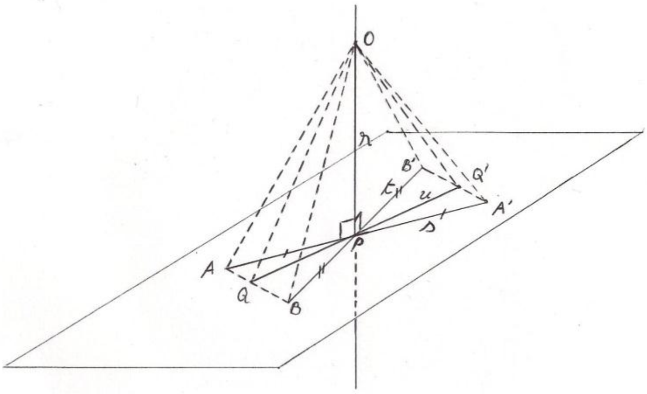
respetivamente A_3 e B_3, sabemos que serão iguais os ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_3O_2B_3$ e paralelas as retas O_1A_1 e O_2A_3, assim como as retas O_1B_1 e O_2B_3, situando-se $\dot{O}_1A_1$ e $\dot{O}_2A_3$ em semiplanos opostos determinados por r em α e $\dot{O}_1B_1$ e $\dot{O}_2B_3$ em semiplanos opostos determinados por r em β. Como O_1A_1 e O_2A_2 também são paralelas por serem perpendiculares à mesma reta r num mesmo plano, assim como O_1B_1 e O_2B_2, pelo axioma euclidiano de paralelismo concluímos que coincidem as retas O_2A_3 e O_2A_2, assim como as retas O_2B_3 e O_2B_2, estando em semiplanos opostos $\dot{O}_2A_3$ e $\dot{O}_2A_2$ assim como $\dot{O}_2B_3$ e $\dot{O}_2B_2$. Mas isso significa que os ângulos $A_3O_2B_3$ e $A_2O_2B_2$ são verticalmente opostos e portanto iguais, o que termina a demonstração da igualdade dos ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$.

Fica assim definido, sem ambiguidade, o que se entende por ângulo de dois semiplanos com fronteira comum e planos suporte distintos, entendendo esse ângulo como amplitude. Podemos assim medir essa amplitude em qualquer unidade de medida de amplitude de ângulos. Se, em particular, o ângulo de dois semiplanos tiver a amplitude de um ângulo reto é óbvio que os semiplanos respetivamente opostos a estes também formarão um ângulo reto e nesse caso dizemos que os respetivos planos suporte são perpendiculares.

Observação: Na anterior demonstração, da hipótese feita, apenas se utilizou a consequência simples que dela se deduz de serem diretamente paralelas as semirretas $\dot{O}_1A_1$ e $\dot{O}_2A_2$, por um lado, e as semirretas $\dot{O}_1B_1$ e $\dot{O}_2B_2$, por outro. Assim, o argumento utilizado permite demonstrar, mais geralmente, que *são iguais dois ângulos de lados diretamente paralelos no espaço*.

6.3
6.4
6.5

Se uma reta r for perpendicular a duas retas s e t num mesmo ponto P vamos mostrar que é também perpendicular a qualquer outra reta u do plano determinado por s e t e que passe por P. Para o efeito recordemos que o plano determinado por s e t pode ser obtido como união dos dois pares de ângulos convexos verticalmente opostos de vértice P determinados pelas retas s e t; assim as duas semirretas determinadas na reta u pelo ponto P estarão respetivamente situadas entre os lados de cada um dos ângulos convexos de um desses pares de ângulos verticalmente opostos.

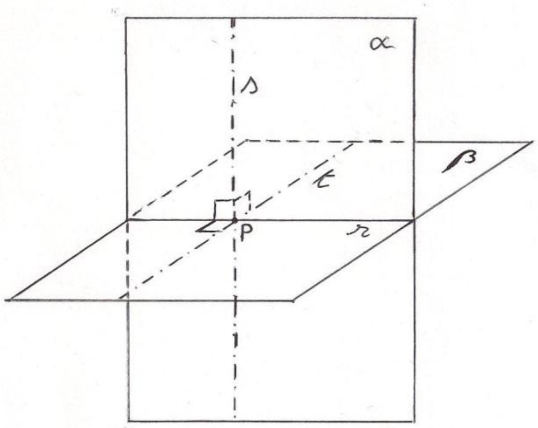


Podemos então escolher pontos A, A', B, B' equidistantes de P, estando os pontos A, A' em s, em semirretas opostas de origem P, e B, B' em t, também em semirretas opostas de origem P, e ainda pontos Q, Q' respetivamente nos segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ tais que u passa pelos pontos Q e Q'. Podemos também fixar um ponto O na reta r distinto de P. Os triângulos retângulos $[APO]$ e $[A'PO]$ são iguais, pelo critério LAL já que têm o cateto $[PO]$ comum e os catetos $[AP]$ e $[A'P]$ iguais por construção; então são também iguais as respetivas hipotenusas $[AO]$ e $[A'O]$. Analogamente são iguais $[BO]$ e $[B'O]$ e, por outro lado, $[AB]$ e $[A'B']$ são iguais porque os extremos de um se obtém respetivamente dos extremos do outro pela reflexão central de centro P. Então, pelo critério LLL, são iguais os triângulos $[ABO]$ e $[A'B'O]$ e, nesses triângulos, os ângulos OAB e $OA'B'$ por se oporem a lados iguais. Mas os pontos Q e Q' são imagem um do outro pela mesma reflexão central de centro P, já que a imagem de Q por essa isometria, por um lado tem de estar na reta QP (que coincide com u) e por outro no segmento $[A'B']$, já que as isometrias transformam segmentos em segmentos e Q está no segmento $[AB]$; portanto a imagem de Q tem de coincidir com a interseção das retas u e $A'B'$, que é exatamente o ponto Q'. Então, utilizando mais uma vez a reflexão central de centro P, podemos concluir que são iguais os segmentos $[AQ]$ e $[A'Q']$ pelo que podemos aplicar o critério LAL aos triângulos $[OAQ]$ e $[OA'Q']$ para concluir que são iguais (note-se que o ângulo OAB coincide com o ângulo OAQ e o ângulo $OA'B'$, igual a OAB, coincide com o ângulo $OA'Q'$). Daí resulta que também são iguais os lados $[OQ]$ e $[OQ']$ desses triângulos, por se oporem a ângulos iguais; agora, pelo critério LLL, são iguais os triângulos $[OPQ]$ e $[OPQ']$ e portanto os ângulos OPQ e OPQ' que neles se opõem a lados iguais. Mas esses ângulos são suplementares e portanto são retos; em particular a reta OP, ou seja, a reta r é perpendicular à reta PQ, ou seja à reta u, como pretendíamos provar.

A propriedade segundo a qual uma reta perpendicular a r que passa por P está contida no plano determinado pelas retas s e t resulta do facto de nos situarmos num espaço tridimensional; esta propriedade pode mesmo ser tomada como caracterização dessa tridimensionalidade ou então é consequência simples dos axiomas que fixam a dimensão do espaço. Em espaços de dimensão superior esta propriedade é falsa; do mesmo modo que num espaço tridimensional, ao contrário do que se passa num plano, existem infinitas retas perpendiculares a uma dada reta num ponto desta, em espaços de dimensões superiores a 3 existem infinitos planos perpendiculares a uma dada reta passando por um ponto desta, ou seja, três retas perpendiculares a uma dada reta num ponto desta não são forçosamente complanares.

Quando uma reta r é perpendicular a duas retas de um plano α que passam por um ponto P de r dizemos que a reta r é *perpendicular ao plano α no ponto P*. Pelo que acabámos de provar, a reta r é então perpendicular a todas as retas do plano α que passam por P.

Agora é fácil provar que *é condição necessária e suficiente para que dois planos α e β sejam perpendiculares que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro*.

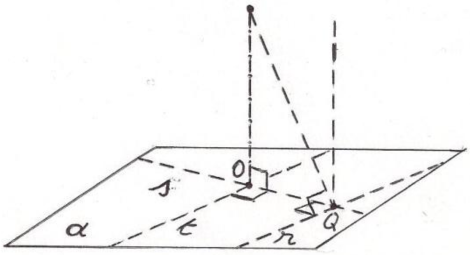


Com efeito, se dois planos forem perpendiculares, intersetam-se segundo uma reta r que neles determina semiplanos que formam um ângulo reto. Ou seja, considerando duas retas s e t perpendiculares a r num ponto P desta reta e contidas respetivamente no plano α e no plano β então s e t serão perpendiculares entre si; em particular, a reta t do plano β é simultaneamente perpendicular, no ponto P, à reta r e à reta s do plano α, pelo que, por definição, t é perpendicular ao plano α. Portanto o plano β contém, de facto, uma reta t perpendicular ao plano α, como pretendíamos provar. Reciprocamente, se essa condição se verificar (trocando, se necessário, as designações dos planos α e β), os planos α e β intersetam-se segundo uma reta r, já que a reta t do plano β tem exatamente um ponto comum P com o plano α ao qual é perpendicular, e portanto os planos intersetam-se mas não coincidem. Agora podemos considerar a reta s perpendicular a r no plano α passando pelo ponto P; como a reta t é perpendicular a α nesse ponto sabemos que será perpendicular a s, pelo que as retas s e t, perpendiculares à reta r interseção dos dois planos α e β no ponto P e cada uma delas contida num destes planos, são perpendiculares entre si, o que prova que os planos α e β são perpendiculares.

6.6

Podemos construir uma reta perpendicular a um plano α passando por um ponto P fora de α procedendo do seguinte modo:

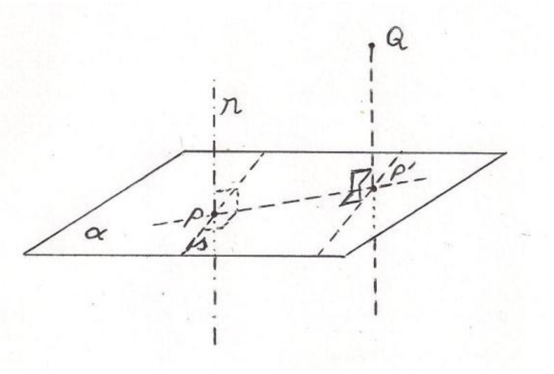
Começamos por considerar uma qualquer reta r do plano α e o ponto Q, pé da perpendicular traçada de P para r. Em seguida consideramos a reta s perpendicular a r no plano α passando pelo ponto Q e o ponto O pé da perpendicular traçada de P para a reta s. Vamos ver que a reta PO é perpendicular ao plano α no ponto O, que se diz então *pé da perpendicular traçada do ponto P para o plano α.*



Com efeito, podemos considerar a reta t do plano α perpendicular a s no ponto O; basta-nos então provar que a reta PO é perpendicular à reta t, com o que ficará verificada a definição de perpendicularidade entre a reta PO e o plano α, já que a reta PO é perpendicular à reta s desse plano no ponto O, por construção. Sendo as retas PO e t ambas perpendiculares à reta s, interseção do plano α com o plano das retas PQ e s, podemos obter a amplitude dos ângulos determinados pelas retas PO e t utilizando duas quaisquer retas perpendiculares a s num mesmo ponto e contidas respetivamente nesses planos. Ora se considerarmos a reta perpendicular a s, no plano das retas PQ e s, passando por Q, essa reta é perpendicular a r, já que r é perpendicular ao plano de PQ e s, por ser perpendicular em Q a essas duas retas, por construção. Isto significa que os dois planos, α e o plano das retas PQ e s, são perpendiculares e portanto as retas PO e t, perpendiculares à reta interseção desses planos no mesmo ponto O também são perpendiculares entre si. Termina assim a demonstração da perpendicularidade entre a reta PO e o plano α.

É fácil concluir que é única a reta perpendicular a um plano α, passando por um ponto P que não está em α; com efeito se existissem dois pontos Q e Q' em α tais que as retas PQ e PQ' fossem perpendiculares a α, em particular qualquer destas retas seria perpendicular à reta QQ', já que se trataria de uma reta do plano α passando pelos dois pontos Q e Q'. Mas então o triângulo $[PQQ']$ teria dois ângulos internos retos, o que sabemos ser impossível.

Mostremos agora que existe uma reta perpendicular a um plano α passando por um dado ponto P desse plano.



Para o efeito consideremos um ponto Q do espaço fora do plano α e seja P' o pé da perpendicular traçada de Q para α; se P' coincidir com P, a reta QP será perpendicular ao plano α passando por P, como pretendíamos. Caso contrário seja r a reta paralela à reta QP' passando por P; mostremos então que r é perpendicular ao plano α. Por um lado é óbvio que r é perpendicular à reta PP' do plano α, já que são iguais os ângulos correspondentes determinados pela secante PP' no par de retas paralelas r e QP', pelo que são ambos retos (QP' é perpendicular ao plano α e portanto, em particular, à reta PP' deste plano que passa por P'). Por outro, o plano α e o plano β das retas paralelas r e QP' são perpendiculares, já que β contém uma reta (a reta QP') perpendicular a α (6.5), intersetando-se segundo a reta PP', pelo que são perpendiculares as retas r e s, já que são ambas perpendiculares a PP' no ponto P e cada uma delas está num dos planos perpendiculares α e β. Concluímos assim que a reta r é perpendicular às duas retas PP' e s do plano α passando por P, pelo que r é perpendicular ao plano α no ponto P, como pretendíamos provar.

A unicidade da reta perpendicular a um dado plano α num ponto P desse plano é mais uma vez uma questão dimensional, mas que podemos provar recorrendo a uma outra propriedade também característica da dimensão 3 e expressa no descritor 5.1. De facto, se existissem duas retas r e s perpendiculares a α em P o plano das retas r e s intersetaria α segundo uma reta t (*cf.* 5.1) que seria então perpendicular em P às duas retas r e s no plano destas retas, o que não é possível, pela unicidade num plano da perpendicular a uma reta num ponto dessa reta.

O pé da perpendicular traçada de um ponto para um plano que por ele não passa também se diz *projeção ortogonal do ponto no plano* e a reta perpendicular a um plano passando por um ponto desse plano também se diz *reta normal ao plano* nesse ponto.

Observação: A justificação apresentada para a construção de uma reta normal a um plano num ponto deste prova, em particular, que *se uma reta r é paralela a uma dada reta perpendicular a um plano α, então r é também perpendicular ao plano α*. Basta começar por argumentar que a reta r também interseta o plano; de facto, o plano β das duas retas paralelas interseta o plano α (já que contém uma reta que o interseta) e portanto interseta esse plano segundo uma reta, que r também tem de intersetar (intersetando portanto o plano α) já que, no plano β, r é paralelo a uma reta que a interseta. Uma vez verificado este facto, podemos reproduzir o argumento atrás referido para provar que r é perpendicular a α.

6.7 *Dada uma reta r e um ponto P, considerando o ponto P' pé da perpendicular traçada de P para r, no caso em que a reta r não passa por P, e designando por P' o próprio ponto P no caso contrário*, mostremos que *existe um único plano perpendicular a r passando por P e que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que determinam com P' uma reta perpendicular a r*. Para o efeito, podemos considerar um ponto do espaço fora da reta r (já que o espaço tridimensional não pode reduzir-se a uma reta), o qual determina com r um plano e em seguida uma reta s nesse plano perpendicular a r passando por P'. Podemos depois considerar a reta t normal a esse plano passando por P'; em particular, as duas retas s e t serão ambas perpendiculares a r passando por P' e determinam portanto um plano α ao qual a reta r é normal em P'. Por uma das propriedades expressas no descritor 6.3 sabemos que qualquer ponto Q do espaço que determine com P' uma reta perpendicular a r estará nesse plano, já que a reta QP' será então uma reta desse plano; reciprocamente todos os pontos de α distintos de P determinam com P uma reta perpendicular a r, também de acordo com a propriedade expressa no descritor 6.3. Ou seja, o plano α é o único plano perpendicular a r passando por P' (e portanto por P) sendo o lugar geométrico dos pontos por onde passam retas perpendiculares a r passando também por P.

6.8 *Se uma reta r for perpendicular, num ponto P, a um plano α, paralelo a outro plano β*, provemos que *r é também perpendicular a β*. Sabemos já que terá de intersetar β num ponto P' (*cf.* 5.4); então considerando um par de retas do plano α concorrentes em P, cada uma delas determina com a reta PP' um plano que interseta β numa reta. Cada uma dessas retas em β será paralela a uma das retas fixadas em α, pelo que a reta r, perpendicular a cada uma destas em P, terá de ser também perpendicular, agora em P', às retas assim determinadas em β. Mas fica assim cumprida a condição para que r seja perpendicular ao plano β em P', como pretendíamos.

Reciprocamente, *se dois planos α e β forem perpendiculares a uma mesma reta r respetivamente em pontos P e P'* provemos que *são paralelos*. Para esse efeito, podemos considerar em β duas retas concorrentes passando por P' e as retas interseção do plano α com os planos determinados por estas com a reta PP'. Obtemos assim em α e β pares de retas concorrentes, duas a duas perpendiculares a uma mesma reta (PP') num mesmo plano e portanto duas a duas paralelas. Os planos α e β são portanto paralelos.

Uma outra demonstração possível para esta última propriedade poderia basear-se no resultado expresso na observação final do texto de apoio ao descritor 6.6, segundo o qual uma reta r paralela a outra s que é perpendicular a um dado plano α é também perpendicular a esse plano.

Com esta propriedade em mente podemos agora considerar uma reta r perpendicular a dois planos distintos e supor que não eram paralelos; então intersetar-se-iam segundo uma reta s e poderíamos considerar uma reta t paralela a r passando por um ponto P de s. Agora t seria simultaneamente perpendicular aos dois planos em P, o que é absurdo pois já sabemos que por um ponto de uma reta passa um único plano perpendicular a essa reta.

6.9

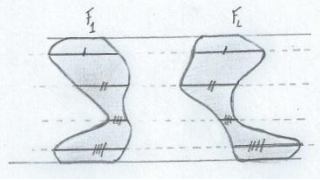
Seja α o plano mediador do segmento de reta $[AB]$, ou seja, o plano normal à reta AB no ponto médio M de $[AB]$. Sabemos que qualquer ponto P do espaço equidistante de A e B e não colinear com estes pontos está na mediatriz do segmento $[AB]$, considerada no plano determinado pela reta AB e pelo ponto P; sabemos também que a mediatriz é uma reta perpendicular a AB em M, pelo que pertence ao plano normal a AB nesse ponto, ou seja, ao plano mediador de $[AB]$. O único ponto do espaço colinear com A e B e equidistante destes pontos é o próprio ponto M, pelo que todos os pontos do espaço equidistantes de A e B estão no plano mediador de $[AB]$. Reciprocamente, qualquer ponto P do plano mediador distinto de M determina com M uma reta perpendicular a $[AB]$, a qual é portanto a mediatriz deste segmento no plano das retas PM e AB; em particular P é equidistante de A e B.

Então *o plano mediador α do segmento de reta $[AB]$ é*, de facto, *o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de A e B*.

9.1
9.2
9.3
9.4

Para compararmos áreas de figuras planas e volumes de sólidos no espaço tridimensional podemos utilizar o chamado «princípio de Cavalieri».

Para figuras planas, esse princípio estabelece que são iguais as áreas de duas figuras geométricas $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ contidas num plano entre duas retas paralelas r e s de tal modo que as interseções com $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de uma qualquer reta paralela a r e s e situada na região do plano entre as duas retas são segmentos de reta com o mesmo comprimento.

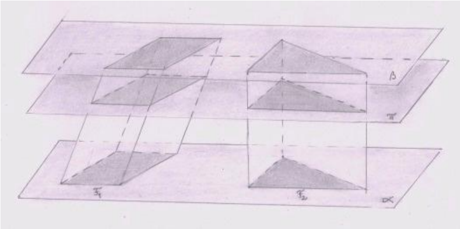


A justificação rigorosa do princípio de Cavalieri pressupõe a construção da medida de área para figuras planas, e pode utilizar propriedades da noção de integral, estreitamente relacionada com a Teoria da Medida, questões cuja complexidade ultrapassa o âmbito deste texto de apoio. Um dos aspetos que resulta de um tratamento adequado destas matérias é a impossibilidade de se definir a medida de área para todas as figuras planas, desde que se pretenda garantir propriedades básicas da noção de área. No entanto, as partes de um plano "mensuráveis", ou seja, às quais se pode atribuir medida de área (finita ou infinita) constituem uma classe de tal maneira abrangente que, na prática, para muitos efeitos, podemos pressupor que todas as figuras com que nos deparamos são mensuráveis. A ideia intuitiva que suporta o princípio de Cavalieri é a possibilidade de decompor aproximadamente as duas figuras $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ em retângulos dois a dois iguais. Em cada par de retângulos iguais, um em cada figura, dois lados iguais são os segmentos que são iguais, pela hipótese do princípio de Cavalieri, com a mesma reta suporte paralela a r e s, e obtidos por interseção dessa reta com cada uma das figuras, e os outro lados iguais tomam-se de comprimento com medida tão pequena quanto o desejarmos, dividindo a distância entre as retas r e s num número n de partes iguais tão grande quanto for necessário para o efeito. Quanto maior for n, menor será o erro cometido ao substituir o volume das figuras pela soma dos volumes dos retângulos e esse erro será tão próximo de zero quanto o desejarmos desde que tomemos n suficientemente grande.

Os argumentos intuitivos utilizados para justificar o princípio de Cavalieri sugerem que a tese se mantém supondo que as figuras $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ se situam respetivamente entre pares distintos de retas paralelas e equidistantes, fixando em cada par de retas uma delas para "reta-base" e substituindo, na hipótese acima formulada para esse princípio, as interseções das figuras por uma mesma reta, pelas interseções de cada uma delas por uma reta a uma dada distância da reta-base. De facto o Princípio de Cavalieri pode ser demonstrado nesta forma mais geral.

Uma aplicação interessante deste princípio pode ser a verificação de que têm a mesma área dois triângulos com bases colineares iguais e vértices opostos situados numa mesma reta r paralela às bases. Para o efeito basta verificar, utilizando as alturas (iguais) dos triângulos relativas às bases e o Teorema de Tales, que qualquer reta paralela às bases situada entre a reta suporte destas e a reta r interseta os triângulos segundo segmentos de reta iguais (pelo Teorema de Tales são iguais as razões entre os comprimentos desses segmentos e os comprimentos das bases iguais dos triângulos, pois tais razões são ambas iguais às razões dos comprimentos dos segmentos correspondentes determinados nas respetivas alturas pela reta r e pela paralela que determinou os segmentos iguais nos triângulos). De aí resulta, em particular, que triângulos com bases e alturas iguais têm a mesma área; ou seja, o princípio de Cavalieri permite recuperar esta propriedade, que também resulta imediatamente da fórmula conhecida para o cálculo da área do triângulo.

Note-se que o Teorema de Tales, utilizando segmentos perpendiculares a r e unindo os pontos de r a pontos da reta v onde se situam os vértices dos triângulos, também permite concluir que, fixada uma reta qualquer s paralela a r e situada entre r e v, se fixarmos um ponto qualquer V da reta dos vértices, a aplicação que a um ponto P de r associa o ponto P' interseção com s da reta VP é uma homotetia de razão igual ao quociente entre a distância da reta v à reta s e a distância da reta v à reta r. A razão da homotetia é portanto independente da escolha do ponto V, o que permite também concluir que os segmentos interseção da reta s com os triângulos considerados têm todos o mesmo comprimento, já que são homotéticos de segmentos iguais por homotetias com a mesma razão.

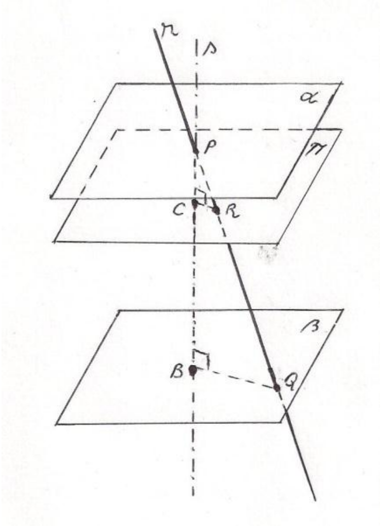


A medida de volumes de sólidos no espaço está sujeita a restrições análogas às que descrevemos para a medida de áreas planas. Para volumes de sólidos o princípio de Cavalieri estabelece que são iguais os volumes de duas figuras geométricas $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ situadas no espaço entre dois planos paralelos α e β de tal modo que são figuras planas com a mesma área as interseções com $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de um qualquer plano π paralelo a α e β e situado na região do espaço entre os dois planos. A justificação intuitiva deste princípio é análoga à descrita no caso plano, considerando agora decomposições aproximadas dos sólidos em prismas retos de alturas tão pequenas quanto o desejarmos e bases obtidas em cada sólido por interseção com os planos π atrás considerados, e portanto duas a duas iguais. Uma imagem sugestiva deste princípio pode ser uma pilha de moedas de diferentes dimensões, que é possível "desalinhar verticalmente" de modo arbitrário sem alterar o volume total, notando que esse volume também não se altera se cada moeda for substituída por uma moeda com a mesma espessura e faces de formas eventualmente distintas mas que tenham a mesma área do que as faces da moeda original.

Tal como para o caso plano, a conclusão de igualdade de volume para as figuras $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ mantém-se supondo-as situadas respetivamente entre pares de planos paralelos distintos e equidistantes, fixando em cada par de planos um deles para "plano-base" e substituindo, na hipótese acima formulada para o princípio de Cavalieri, as interseções das figuras por um mesmo plano, pelas interseções de cada uma delas por um plano a uma dada distância do plano-base correspondente.

Analogamente ao que foi feito para triângulos, o princípio de Cavalieri também permite mostrar a igualdade de sólidos geométricos numa classe constituída pelo que podemos designar por "cones generalizados". Dada uma figura plana B e um ponto V fora do plano em que B se situa, designamos por «cone generalizado de base B e vértice V» a reunião do segmentos de reta que unem V a um ponto de B.

Dados dois planos paralelos α e β e dois cones generalizados C_1 e C_2 de bases respetivamente B_1 e B_2 situadas no plano α e vértices respetivamente V_1 e V_2 situados no plano β, vamos provar, utilizando o princípio de Cavalieri, que se as bases forem equivalentes então os cones têm o mesmo volume. Designando por «altura» dos cones a distância entre os planos α e β, será então fácil concluir que cones generalizados com bases equivalentes e alturas iguais têm o mesmo volume; note-se que a altura, assim definida, é muito simplesmente a distância do vértice ao plano da base.



Comecemos por observar que os planos paralelos α e β e um terceiro plano π paralelo a estes determinam em qualquer reta secante segmentos cujos comprimentos são proporcionais às distâncias entre os planos (de entre α, β e π) em que se situam os extremos dos segmentos. Com efeito se uma dada reta r não perpendicular ao plano α o intersetar num ponto P, β num ponto Q e π num ponto R, podemos considerar a reta s perpendicular ao plano α em P, a qual será também perpendicular aos planos β e π em pontos respetivamente B e C destes planos. Como as retas r e s passam por um mesmo ponto P determinam um plano, pelo que, nesse plano, podemos aplicar o Teorema de Tales às retas r e s e às retas paralelas interseção desse plano com os planos β e π, obtendo-se imediatamente a referida proporcionalidade, já que os comprimentos dos segmentos de extremos nos pontos P, B e C são exatamente as distâncias entre os planos (de entre α, β e π) em que se situam os respetivos extremos. Para uma reta r perpendicular aos planos α, β e π , a propriedade é óbvia.

Este resultado permite concluir que, fixados os três planos α, β e π, dois a dois paralelos, e um ponto V de β, a aplicação que a cada ponto P de α faz corresponder o ponto P' de π, interseção da reta VP com o plano π é uma homotetia de razão com valor absoluto igual ao quociente entre a distância do plano β ao plano π e a distância do plano β ao plano α. A razão dessa homotetia não depende portanto da escolha do ponto P.

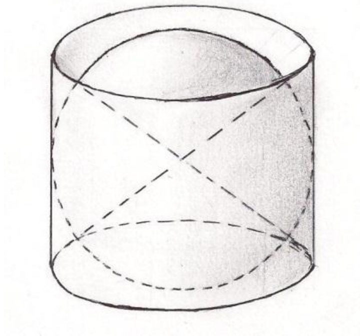
Agora é fácil concluir que dados dois cones generalizados C_1 e C_2 de bases equivalentes, respetivamente B_1 e B_2 , situadas no plano α e vértices respetivamente V_1 e V_2 situados no plano β ficam verificadas as hipóteses do princípio de Cavalieri, pois fixado um qualquer plano π paralelo a α e β e situado na região do espaço entre os dois planos, as interseções de π com C_1 e C_2 são imagens respetivamente das bases B_1 e B_2 por homotetias das que acabámos de referir. Assim, se as bases forem equivalentes (figuras planas com a mesma área), essas interseções também o serão, já que as respetivas áreas se obtêm da área comum das bases multiplicando-a pelo quadrado da razão comum das homotetias (*cf.* GM7-5.4 e GM7-9.3; embora originalmente apenas tivéssemos estudado homotetias num plano, a correspondência um a um estabelecida por estas homotetias no espaço entre os dois planos α e π são de facto semelhanças, já que ficaram acima estabelecidas as proporcionalidades que o provam, entre comprimentos de segmentos de α e comprimentos das respetivas imagens pelas homotetias). Este raciocínio poderia aplicar-se, *mutatis mutandis*, a dois quaisquer cones com bases equivalentes e alturas iguais (utilizando a generalização do princípio de Cavalieri acima referida, para a qual os sólidos podem estar situados entre pares distintos de planos paralelos equidistantes); ou seja *dois cones generalizados com áreas equivalentes e alturas iguais têm o mesmo volume*.

Este resultado aplica-se em particular a *cones* e *pirâmides*. No caso das pirâmides, podemos agora invocar a possibilidade de decompor um prisma triangular reto em três pirâmides, duas a duas com bases equivalentes e alturas iguais (*cf.* Caderno de Apoio, GM9-9.1), para concluir que o volume de cada uma dessas pirâmides (uma vez que as três têm o mesmo volume) é igual a um terço da área do prisma, ou seja, já que duas das pirâmides têm uma base coincidente com uma base do prisma e a altura correspondente igual à altura do prisma, o volume de cada uma dessas duas pirâmides é igual a um terço da área da base coincidente com a do prisma vezes a altura correspondente. O que vale para estas pirâmides vale agora para qualquer cone generalizado, considerando um triângulo com área igual à da base do cone (pode ser um triângulo retângulo isósceles com catetos de medida de comprimento igual ao produto de $\sqrt{2}$ pela raiz quadrada da medida da área da base do cone na unidade quadrada correspondente) e uma pirâmide com base igual a esse triângulo e altura igual à altura do cone; em particular vale para qualquer cone e pirâmide. Ou seja, *o volume, em unidades cúbicas, de qualquer cone, pirâmide, ou, mais geralmente, qualquer cone generalizado, é igual a um terço do produto da medida, em unidades quadradas, da área da base pela altura*.

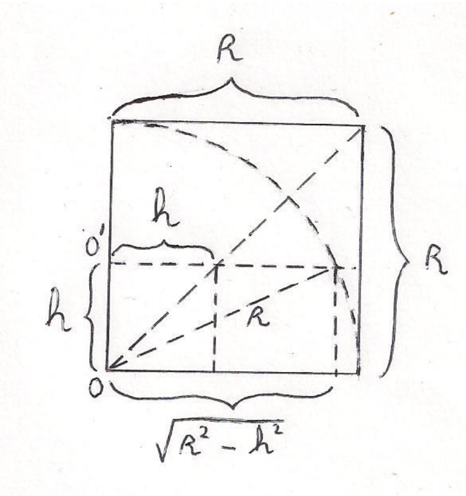
Poderíamos ter começado por verificar esta fórmula apenas para pirâmides triangulares, utilizando as homotetias acima descritas, e a fórmula para o cálculo da área de um triângulo, para obter diretamente as hipóteses do Princípio de Cavalieri no caso de pirâmides com a mesma base triangular e vértices situados num mesmo plano paralelo à base. Entre essas pirâmides podemos sempre escolher uma com uma das arestas laterais perpendicular ao plano da base e portanto suscetível de se identificar com uma das três de uma decomposição em pirâmides com o mesmo volume de um prisma reto com bases iguais à pirâmide considerada inicialmente. Evitaríamos assim o recurso, nesta fase, à propriedade mais complexa da razão entre as áreas de figuras semelhantes em geral; é essa a estratégia sugerida nos descritores 9.2 e 9.3. No entanto é depois necessário utilizar decomposições em pirâmides triangulares de pirâmides mais gerais e, para os cones, aproximações por pirâmides. Ou seja, transferem-se assim os procedimentos mais complexos apenas para o estudo destes sólidos mais gerais, em lugar de se utilizarem conhecimentos mais avançados logo ao nível das áreas de figuras planas.

O volume de uma esfera de raio R pode ser calculado utilizando também o princípio de Cavalieri, começando por calcular o volume de uma semiesfera.

Com efeito podemos verificar que as hipóteses do referido princípio ficam verificadas para uma semiesfera de raio R e o sólido S que se obtém retirando a um cilindro de revolução, com altura e raio da base ambos iguais a R, um cone com base coincidente com uma das bases do cilindro e vértice coincidente com o centro da outra base. Representa-se na figura seguinte uma esfera e o sólido que se obtém unindo dois sólidos como S, correspondentes a duas semiesferas, sendo o centro da esfera coincidente com o vértice dos cones:



Intersetando a semiesfera e S por planos paralelos às respetivas bases e situados a uma mesma distância h destas ($0 < h < R$), considerando para S a base em que se situa o vértice da pirâmide utilizada para definir este sólido, verifiquemos que estas interseções têm a mesma área.



Para o efeito notemos que a interseção da semiesfera com o referido plano é um círculo centrado num ponto do raio da semiesfera perpendicular à respetiva base no centro desta (ver justificação deste facto adiante); qualquer ponto da circunferência desse círculo determina com o centro O da base e o centro O' do círculo um triângulo retângulo em O'. Pelo Teorema de Pitágoras, o raio r do círculo interseção será tal que $R^2 = r^2 + h^2$, pelo que área desse círculo será igual a:

$$\pi r^2 = \pi\,(R^2 - h^2).$$

Quanto à interseção com o sólido S de um plano paralelo à base do cilindro que contém o vértice da pirâmide (que, com o cilindro, determina S) e à distância h dessa base, trata-se de uma coroa circular centrada no eixo do cilindro (ver justificação adiante) cuja área será portanto igual à diferença das áreas dos círculos que a determinam. Ora um deles têm área πR^2, já que é igual à base do cilindro, ao passo que o outro tem área πh^2, já que o cone tem diretrizes unindo a circunferência da respetiva base ao vértice, ou seja, unindo pontos equidistantes do centro dessa base (porque a altura do cilindro e o raio da base são ambos iguais a R); assim o círculo interseção com o cone tem raio igual a h, como é fácil concluir, já que o vértice do cone (a partir do qual se mede a distância h) e os pontos da circunferência desse círculo também têm de ser equidistantes do centro O' do círculo. A área da referida interseção com o sólido S é portanto igual a:

$$\pi R^2 - \pi h^2 = \pi\,(R^2 - h^2),$$

o que termina a verificação da hipótese do princípio de Cavalieri para a semiesfera e o sólido S. Mas este sólido tem volume igual à diferença entre os volumes do cilindro e da pirâmide que o determinam, ou seja, igual a:

$$\pi R^2 \times R - \tfrac{1}{3}(\pi R^2 \times R) = \tfrac{2}{3}\pi R^3;$$

é portanto esse o volume da semiesfera, de onde se deduz que o volume da esfera é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.

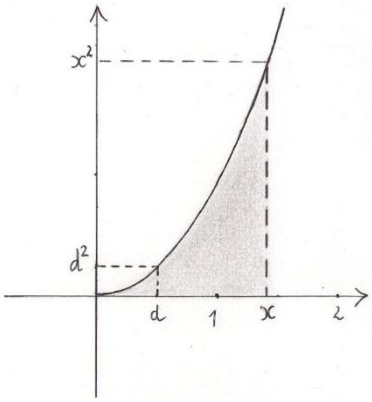
Observação: A interseção com uma esfera de um plano que passa pelo respetivo centro é obviamente, por definição, o círculo com o mesmo centro e raio que a esfera, situado no plano.

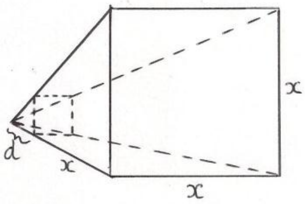
Justifiquemos agora que a interseção de uma esfera com um plano π a uma distância do centro O não nula e inferior ao raio R da esfera é um círculo centrado na projeção ortogonal do centro da esfera no plano. Para o efeito consideremos o ponto O', pé da perpendicular traçada de O para π; como a distância h de O a O', por definição, é a distância de O a π e, por hipótese, é não nula e inferior a R, o plano π interseta a superfície esférica exatamente nos pontos P que determinam com O' e O um triângulo rectângulo em O' com hipotenusa de comprimento igual ao raio da esfera, já que os pontos de π, para além de O', são exatamente os que determinam com O' retas perpendiculares à reta OO' (6.7), e portanto os pontos P da interseção de π com a superfície esférica são os que determinam com O' retas perpendiculares a OO' e tais que os segmentos que os unem ao centro O da esfera (hipotenusas dos referidos triângulos rectângulos) são raios da esfera. Ora, atendendo ao Teorema de Pitágoras, esses triângulos retângulos têm todos o cateto contido em π com o mesmo comprimento $\sqrt{R^2 - h^2}$. Os pontos P são portanto exatamente os pontos da circunferência do plano π de centro em O' e raio $\sqrt{R^2 - h^2}$. Analogamente, a interseção do plano com a esfera é constituída, para além de O', pelos pontos do plano π que determinam com O' e O triângulos rectângulos com hipotenusa de comprimento r inferior ou igual ao raio da esfera, ou seja, os pontos das circunferências de π centradas em O' e raios $\sqrt{r^2 - h^2}$, os quais abarcam todos os valores maiores que 0 e inferiores ou iguais a $\sqrt{R^2 - h^2}$; ora esses pontos, com O', constituem exactamente o círculo de π de centro O' e raio $\sqrt{R^2 - h^2}$, que é assim a interseção procurada.

Quando o plano π está à distância R de O, o segmento que une O à respetiva projeção ortogonal P em π é um raio da esfera (já que tem comprimento R, por definição de distância de um ponto a um plano); então todos os outros pontos do plano estão fora da esfera, pelo que o plano se diz «tangente» à esfera e é exatamente o plano perpendicular ao raio no ponto P da superfície esférica extremo desse raio.

A interseção de um cone reto com um plano paralelo à base e situado a uma distância da base maior do que 0 e inferior à altura do cone, atendendo ao que atrás se viu acerca de cones generalizados, é a imagem da base do cone por uma homotetia de centro no vértice que transforma o centro O da base no ponto de interseção O' do plano com o eixo do cone. Como as figuras semelhantes aos círculos são os círculos e uma semelhança transforma o centro de um círculo no centro da imagem do círculo por essa semelhança, concluímos que a interseção do cone com o plano é um círculo centrado no referido ponto O'.

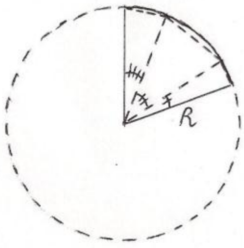
Observação: As ideias intuitivas que motivam o Princípio de Cavalieri podem ser utilizadas para comparar áreas com volumes; podemos, por exemplo, chegar a uma fórmula para a área abaixo do gráfico da função f definida por $f(x) = x^2$ entre a origem e um ponto genérico x do semieixo positivo dos xx (figura delimitada pelo referido gráfico entre esses dois valores, pelo intervalo $[0, x]$ do eixo dos xx e pelo segmento vertical que une o ponto de abcissa x do eixo dos xx ao ponto do gráfico que lhe corresponde), comparando com o volume de uma pirâmide. Como o comprimento de um segmento vertical que une um ponto do semieixo positivo dos xx de abcissa d ao correspondente ponto do gráfico é igual a d^2 e portanto igual à medida, em unidades quadradas, da área de um quadrado de lado d, trata-se afinal da área da interseção por um plano paralelo à base, a uma distância d do vértice, de uma pirâmide quadrangular cuja base tenha lados de medida de comprimento maior ou igual a d. Se tomarmos essa pirâmide com base de lado x, os argumentos utilizados para justificar o Princípio de Cavalieri permitem-nos concluir que a referida área será igual ao volume dessa pirâmide, ou seja, $\frac{1}{3}x^2 \times x = \frac{x^3}{3}$, resultado que se pode demonstrar com rigor utilizando a noção de integral.

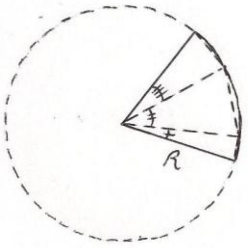




9.5
9.6

O comprimento de um arco de circunferência pode ser definido rigorosamente utilizando a noção de supremo (“menor dos majorantes”) aplicada à soma dos comprimentos de cordas determinadas por decomposições arbitrárias do ângulo ao centro correspondente ao arco em somas de ângulos com um número arbitrário de parcelas.





Ora numa mesma circunferência ou em circunferências iguais (com o mesmo raio), ângulos ao centro iguais determinam obviamente cordas iguais (pelo caso LAL de igualdade de triângulos os dois segmentos interseção dos lados de cada ângulo ao centro com o círculo e a respetiva corda são lados de triângulos isósceles iguais, pelo que as cordas são iguais por se oporem a ângulos iguais nesses triângulos). Assim, no cálculo do comprimento dos arcos correspondentes a ângulos ao centro iguais, as quantidades de que se toma o supremo são exatamente as mesmas, pois as decomposições de ângulos iguais em somas podem fazer-se corresponder uma a uma de modo que têm o mesmo número de parcelas e duas a duas iguais. Destas considerações conclui-se a proporcionalidade entre os comprimentos dos arcos e as amplitudes dos respetivos ângulos ao centro, já que à soma de ângulos (e portanto, por somas de ângulos iguais, ao produto das medidas de amplitude por racionais positivos) corresponde a soma dos comprimentos dos arcos correspondentes (e portanto o produto dos comprimentos desses arcos pelo mesmo racional).

As áreas dos setores circulares podem ser aproximadas, por sua vez, pelas áreas das uniões de triângulos acima referidos, determinados pelas decomposições em somas dos ângulos ao centro correspondentes aos arcos; assim por considerações análogas às anteriores poder-se-ia concluir a proporcionalidade entre as áreas dos sectores circulares e as amplitudes dos ângulos ao centro que os determinam.

9.9

Para justificar a fórmula que permite calcular a área, em unidades quadradas, de uma superfície esférica de raio R, podemos começar por notar que qualquer pirâmide ou cone com vértice no centro da esfera e base tangente à esfera, uma vez que o plano tangente é perpendicular ao raio da esfera no ponto de tangência (*cf.* observação no texto de apoio aos descritores 9.1 a 9.4) terá volume (em unidades cúbicas) igual a um terço da medida (em unidades quadradas) da área da base multiplicada pelo raio da esfera. Admitindo que é possível aproximar a área da superfície esférica com um erro tão pequeno quanto o desejarmos através da soma das áreas de bases de cones, pirâmides, ou outros cones generalizados de vértice no centro da esfera e bases situadas em planos tangentes à esfera, por forma que as somas dos volumes desses cones generalizados aproximam também com erro tão pequeno quanto o desejarmos o volume da esfera, então, desprezando o erro dessas aproximações, a soma A das medidas, em unidades quadradas, das áreas das bases desses cones multiplicada por $\frac{1}{3}$ e por R, que é a soma dos volumes dos referidos cones, será tomada com igual à medida em unidades cúbicas do volume da esfera, pelo que:

$$\frac{1}{3}\, A \times R = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow A = 4\pi R^2.$$

ou seja, a área da superfície esférica (em unidades quadradas) será dada pelo mesmo valor $4\pi R^2$.

Observação: A definição apresentada de comprimento de um arco de circunferência pode estender-se sem dificuldade a qualquer “linha parametrizada”, ou seja, essencialmente, ao conjunto imagem de uma aplicação (frequentemente tomada contínua) definida num intervalo de números reais, não reduzido a um ponto, com valores no espaço. Podemos dizer sinteticamente que a medida do comprimento de uma tal linha é *o supremo das medidas dos comprimentos das poligonais nela inscritas*, conceito cuja formalização é relativamente elementar; mesmo sem qualquer hipótese de regularidade, esta noção traduz adequadamente o que se pretende com um conceito de "comprimento" (que no caso geral pode ser um número real positivo ou "mais infinito") e é possível demonstrar resultados que a tornam operacional, mesmo com este grau de generalidade.

Poderia supor-se que, para definir "área de uma superfície", se poderia utilizar um processo análogo, substituindo o comprimento de poligonais pela "área de triangulações". No entanto, prova-se que, mesmo para uma superfície tão simples como a superfície lateral de um cilindro, é possível considerar triângulos nela inscritos (com os vértices na superfície), dois a dois sem pontos comuns interiores e tais que a soma das respetivas áreas tem medida tão grande quanto o desejarmos. Assim, uma definição análoga à do comprimento, utilizando supremos de medidas de áreas de triangulações daria origem a uma área infinita para essa superfície, a qual se pode planificar, transformando-se num retângulo, que deverá ter, de acordo com a nossa intuição, a mesma área, obviamente finita. De facto este fenómeno ocorre para qualquer superfície "regular" que não esteja contida num plano. Por este motivo, a definição rigorosa de área de uma superfície envolve conceitos e procedimentos mais complexos do que a de comprimento; assim, a motivação acima para a fórmula do cálculo da área de uma superfície esférica não é passível de uma formalização tão direta como a que utilizámos para motivar a fórmula do volume de uma esfera.