A MATEMÁTICA E A MÚSICA

No limiar do terceiro milénio da nossa era a célebre expressão de Leibniz,* "Musica est exercitium arithmeticæ occultum nescientis se numerare animi" *(A música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números), poderá ser tomada em sentido lato numa concepção contemporânea de arte e ciência. Com efeito, na criação, transmissão e entendimento da música, hoje em dia, como antigamente, verifica-se a existência de um conjunto de relações sonoras e simbólicas que, directa ou indirectamente, poderão ser associadas às ciências matemáticas.

JOSÉ FRANCISCO RODRIGUES

A regularidade ou complexidade das vibrações, as relações tonais em melodias e harmonias, o ritmo e a variedade de formas e estruturas musicais, a análise e síntese do som, ou a composição e execução musicais assistidas por computador conduzem-nos a modernas reinterpretações da tradição pitagórica segundo a qual a música seria a "*ciência do número aplicada aos sons*".

Sem ignorar que a música, enquanto "*arte dos sons*", tem uma dimensão artística que não é, naturalmente, redutível à "*ciência do número*", na História da civilização europeia, desde a antiguidade clássica até ao século das luzes, os aspectos eruditos da música foram sempre considerados uma das disciplinas das matemáticas aplicadas. Reflexo desta tradição, Diderot no seu artigo "*Pitagorismo*", publicado no tomo XII da Encyclopédie, em 1765, depois de referir vários aspectos da "*Música de Pitágoras*" numa perspectiva iluminista, escreve literalmente: "*C'est par les nombres et non par le sens qu'il faut estimer la sublimité de la musique. Etudiez le monocorde*" (É pelos números e não pelo sentido que se deve avaliar a sublimidade da música. Estudai o monocórdio).

Matemático formado pela Universidade de Lisboa, onde é professor catedrático na Faculdade de Ciências, José Francisco Rodrigues é actualmente director do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais. Neste centro de investigação, onde exerce a sua actividade científica desde 1981, coordena presentemente o lançamento e a edição do novo jornal interdisciplinar de matemática "*Interfaces and Free Boundaries*" para a *Oxford University Press*. O seu campo de investigação centra-se na Análise Matemática das equações com derivadas parciais e nas suas aplicações e, complementarmente, dedica-se a leituras de História e Matemática. O seu gosto pela Música levou-o a colaborar com a Sociedade Matemática Europeia no Forum Diderot sobre a Matemática e a Música, que se realiza em 1999 simultâneamente em Lisboa, Paris e Viena.

Aritmúsica Pitagórica

"*Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia* (concordiam) *que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia* (modulationis) *estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso.*" Assim descreve Guido d'Arezzo (992 -1050?), no seu pequeno mas influente tratado de música *Micrologus*, a lenda que atribui a Pitágoras (séc. VI AC) a descoberta fundamental da dependência dos intervalos musicais dos quocientes dos primeiros números inteiros, i.e., parafraseando o romano Boécio (séc. VI), "*a grande, espantosa e muito súbtil relação* (concordiam) *que existe entre a música e as proporções dos números* (numerum proportione)".

Em termos dos comprimentos de uma corda esticada, em particular do monocórdio, aquelas proporções simples traduzem-se no uníssono, dado pela razão 1:1, na oitava (*diapason*) por 1:2, na quinta (*diapente*) por 2:3 e na quarta (*diatessaron*) por 3:4. Estas razões podem ser obtidas a partir daqueles quatro números inteiros, correspondendo, respectivamente, a uma corda de comprimento igual a 12 unidades (*uníssono*), reduzida a metade 6 (*oitava*), a 8 unidades (*quinta*) ou a 9 (*quarta*).

Para a Escola de Pitágoras, a harmonia dos sons estava em correspondência directa com a aritmética das proporções: o produto de 2/3

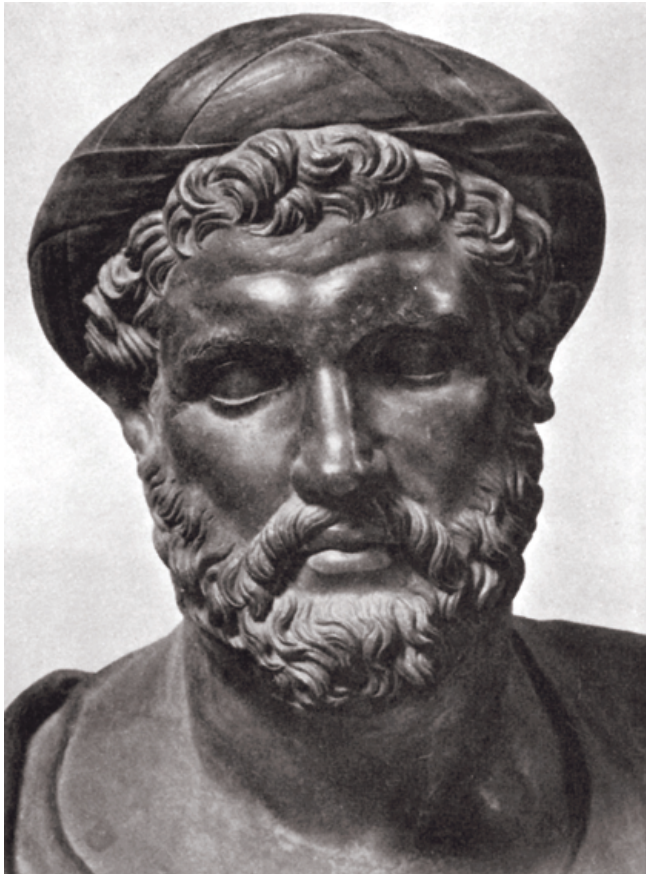


Fig. 1 - Busto de Bronze de Pitágoras (séc. VI AC), cópia de um original grego.

(fracção associada à quinta) por 3/4 (fracção associada à quarta) dá a fracção 1/2 associada à oitava; a sua divisão (subtracção de intervalos) está associada à fracção 8/9 = (2/3):(3/4) que representa um tom, i.e., a diferença de uma quinta e de uma quarta. Analogamente, se obtem que uma oitava é composta por duas quartas e um tom (1/2 = 3/4 x 3/4 x 8/9).

Um dos textos gregos mais antigos que apresenta uma explicação sistemática das primeiras escalas musicais chegou até nós com o título *Sectio Canonis*, ou a "Divisão dum monocórdio", e foi escrito cerca de 300 AC, sendo atribuído, não sem controvérsia, a Euclides. Com uma breve introdução sobre as causas dos sons e suas alturas, enquanto quantidades relativas, e com vinte proposições argumentadas à maneira de teoremas, esse pequeno tratado euclidiano de música expõe o tratamento dos intervalos como razões entre números inteiros e culmina com a divisão do *Kanón*, que lhe dá o nome. Por exemplo, a sua 14ª Proposição estabelece que "*a oitava é menos que seis tons*" e a 15ª que "*a quarta é menos que dois tons e meio e que a quinta menos que três tons e meio*".

Este tipo de resultados, remontando ao tempo de Pitágoras e Euclides, mostram, em particular, a importância do papel da música grega no desenvolvimento da matemática pura, como já observara Paul Tannery no início deste século. É ainda da escola pitagórica a divisão das ciências matemáticas em quatro partes: a aritmética (quantidade discreta estática), a geometria (grandeza estacionária), a música (quantidade discreta em movimento) e a astronomia (grandeza dinâmica). Esta classificação viria a constituir o *Quadrivium*, i.e., uma parte substancial das sete artes liberais do *curriculum* medieval, que se completavam com o *Trivium* (gramática, dialéctica e retórica).

Os números harmónicos 6, 8, 9 e 12 têm ainda particularidades aritméticas notáveis, pois, para além de 6 estar para 8, assim como 9 para 12 (6/8 = 9/12) e 6 para 9 tal como 8 para 12 (6/9 = 8/12), o número 9 é exactamente a média aritmética de 6 e 12 e 8 a média harmónica de 6 e 12, i.e.

$$9 = \frac{1}{2}(6 + 12) \quad \text{e} \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)$$

A *média aritmética* de dois números foi definida pelos gregos como o número que excede o menor duma mesma quantidade de que é excedido pelo maior, i.e., *b-a = a-c*, ou *a=1/2 (b+c)*; e a *média geométrica* de dois números como aquele cuja diferença para o maior dividida pela diferença do segundo é igual ao primeiro dividido por si, ou seja *(b-g)/(g-c) = b/g*, i.e., de modo equi-

Fig. 2 - Ilustração de Franchinus Gafurius (*Theorica musicæ*, 1492), da descoberta de Pitágoras das proporções das consonâncias.

valente à definição actual: $g = \sqrt{bc}$ (a média geométrica de dois números é a raiz quadrada do seu produto).

A *média harmónica* de dois números foi definida como o número cuja diferença para o maior dividida pela diferença com o menor é igual à divisão do maior pelo menor, i.e. *(b-d)/(d-c) = b/c* ou seja

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), \quad \text{ou} \quad d = \frac{2bc}{b+c} \quad ,$$

que são as expressões actualmente usadas.

O estudo das proporções ou das médias (*medietates*) foi transmitido à Idade Média por Boécio, em particular, na sua *De institutione musica*, pois "*esta matéria pode ser útil às especulações relativas à música ou às subtilezas da astronomia, ou ainda ao alcance das considerações geométricas, ou mesmo à compreensão das teorias dos antigos...*". As proporcionalidades aritmética, geométrica e harmónica estão presentes em toda a ciência e música medievais, onde esta é definida como número associado ao som - "*numerus relatus ad sonum*". Por exemplo, no tratado especulativo *Ars novae musicae* (1319), o matemático e astrónomo parisiense Jean de Muris escrevia "*O som é gerado pelo movimento, pois pertence à classe das coisas sucessivas. Por isso, só existe enquanto é produzido, cessando de existir uma vez produzido... Toda a música, especialmente a música mensurável, baseia-se em perfeição, combinando em si número e som*".

A interpretação e a especulação filosóficas baseadas nestes tipos de particularidades matemáticas, como por exemplo, o facto de o cubo ter 6 faces, 8 vértices e 12 arestas, e por isso ser considerado um *sólido harmónico*, juntamente com outros paralelismos mais subtis entre a aritmética e a geometria, conduziu a civilização clássica à doutrina da *música das esferas* e, numa expressão de Aristóteles, a considerar que "*todo o céu é número e harmonia*".

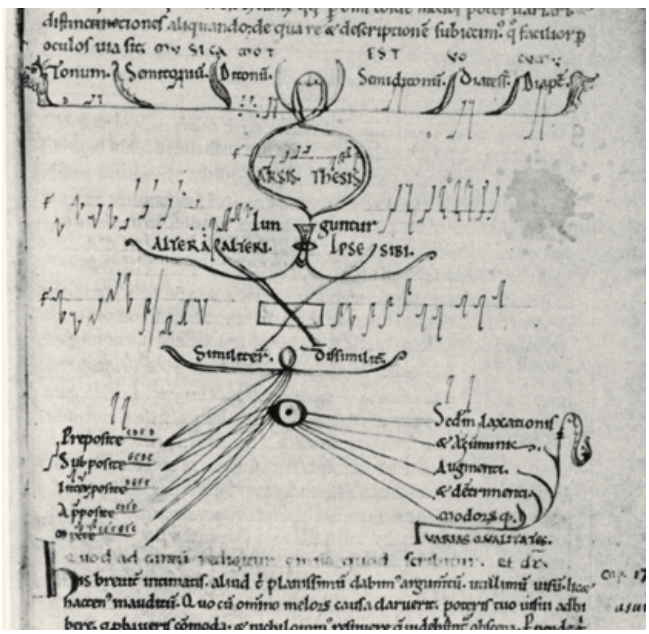


Fig. 3 - Guido d'Arezzo, *Micrologus*, diagrama do capítulo XVI com neumas (Paris, Bibliothéque Nationale, séc. XII).

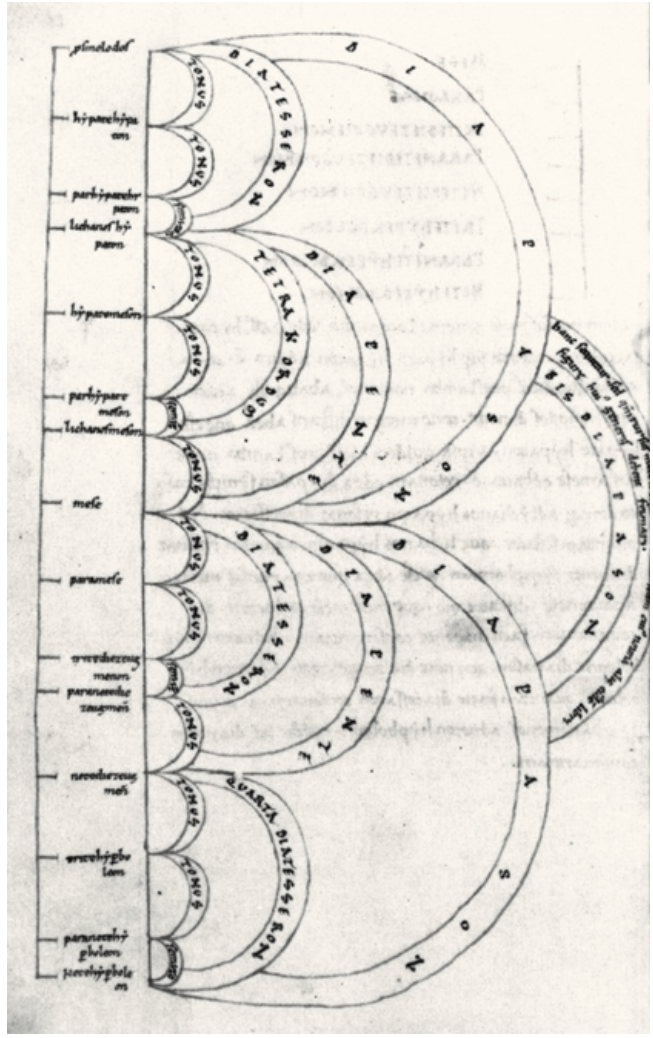
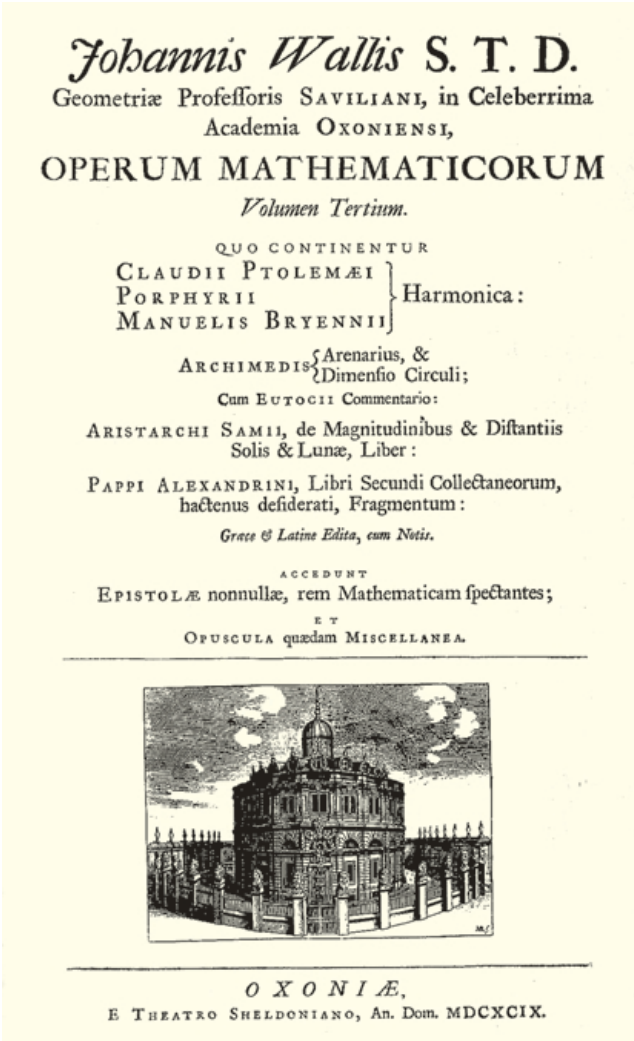


Fig. 4 - Boécio, *De Institutione Musica*. Divisão dos intervalos (Paris, Bibiliothéque Nationale, séc. XII).

Contudo, a filosofia clássica distinguia três tipos de música, a qual foi classificada, em terminologia boeciana, em *musica instrumentalis* (produzida pela lira, flauta, etc.), *musica humana* (inaudível, mas produzida no homem pela interacção entre o corpo e a alma) e a *musica mundana* (produzida pelo próprio cosmos e mais conhecida pela música do universo).

Harmonia Celeste

A astronomia helenística, baseada nos dados empíricos e na geometria grega, atingiu o seu grau mais elaborado em Claudio Ptolomeu (séc. II), que com a sua obra *Mathematike Syntaxis*, mais conhecida pelo nome latino *Almagest*, influenciou a civilização ocidental durante catorze séculos. Para além de outros escritos sobre mecânica e óptica, Ptolomeu foi também autor do notá-



Johannis Wallis S. T. D.
Geometriæ Professoris Saviliani, in Celeberrima Academia Oxoniensi,
OPERUM MATHEMATICORUM
Volumen Tertium.
QUO CONTINENTUR
Claudii Ptolemæi, Porphyrii, Manuelis Bryennii } Harmonica:
Archimedis { Arenarius, & Dimensio Circuli;
Cum Eutocii Commentario:
Aristarchi Samii, de Magnitudinibus & Distantiis Solis & Lunæ, Liber:
Pappi Alexandrini, Libri Secundi Collectaneorum, hactenus desiderati, Fragmentum:
Græce & Latine Edita, cum Notis.
ACCEDUNT
Epistolæ nonnullæ, rem Mathematicam spectantes;
ET
Opuscula quædam Miscellanea.
OXONIÆ,
E Theatro Sheldoniano, An. Dom. MDCXCIX.

Fig. 5 - Frontespício da edição bilingue, grega e latina, da "*Harmónica*" de Ptolomeu, publicada em 1699, com um apêndice sobre música antiga e moderna por J. Wallis, professor de matemática na Universidade de Oxford.

vel tratado *Harmonica*, onde não só apronfundou a tese dos intervalos entre notas musicais enquanto razões entre números, com originalidade musicológica e aplicações às afinações da *lyra* e da *kithera*, como também, no Livro III, elaborou sobre as semelhanças entre o sistema harmónico e o círculo associado ao zodíaco e as modulações tonais e os movimentos dos astros. Ptolomeu transmitiu, desse modo, o mito de como as relações matemáticas subjacentes às estruturas da música audível constituem as formas da essência e causa das harmonias tanto na alma humana como nos movimentos e configurações dos astros.

O modelo ptolomaico só começou a ser posto em causa na Renascença com o retomar da teoria heliocêntrica por Copérnico, com a publicação em 1543 da sua obra capital *De Revolutionibus Orbium Celestium*, e na sequência dos avanços instrumentais e das observações de Tycho Brahe (1546-1601). Contudo, para o seu sucessor como "astrónomo imperial", Joannes Kepler (1571-1630), o movimento dos planetas ainda era uma música imanente da perfeição divina, bem na tradição da cosmologia mítica do Timaeus de Platão. Mas isso não o impediu de chegar às célebres e substanciais três leis do movimento: os planetas giram em torno do Sol, em órbitas elípticas, tendo-o por um dos focos; as suas áreas orbitais são percorridas proporcionalmente ao tempo (o que implica aceleração no periélio e retardamento no afélio); e os quadrados dos períodos de revolução de cada planeta são proporcionais aos cubos das suas distâncias médias ao Sol.

O célebre matemático alemão, no 3º capítulo do livro V do seu *Harmonices Mundi* (1619), considerou que a descoberta da última lei completava uma parte da sua obra *Mysterium Cosmographicum*, publicada em Tubingen, em 1596: "*Com efeito, após ter encontrado os verdadeiros intervalos das Orbes, graças às observações de Brahe, depois de um longo período de trabalho contínuo, a autêntica proporção dos Tempos periódicos em relação com a proporção das Orbes... tardiamente, em verdade, tornou-se evidente para mim [...]; a concordância era tão grande entre o meu trabalho de dezassete anos sobre as Observações Brahenianas e esta meditação, a convergência era tão perfeita, que acreditei inicialmente sonhar e pressentir o que procurava de princípio. Mas a coisa é tão certa e tão exacta: a razão que existe entre os tempos de revolução de dois planetas quaisquer está em proporção precisamente sesquialtera com a razão das suas distâncias médias, isto é das suas Orbes*", o que significa em notação de hoje que $T \sim d^{3/2}$.

Fig. 6 - Joannes Kepler (1571-1630).

No seu *Mistério Cosmografico*, Kepler especulou sobre a "*admirável proporção entre corpos celestes*" e a "*bela harmonia que existe entre as partes do cosmos*". Comparando as razões das esferas inscritas e circunscritas nos cinco sólidos platónicos, o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro (limitado por doze pentágonos) e o icosaedro (facetado com vinte triângulos equiláteros) com as razões das orbitas dos seis planetas então conhecidos (contando com a Terra mas excluindo a Lua) associando-os aos cinco intervalos das respectivas orbes, o jovem astrónomo acreditou ter encontrado a chave do universo.

O seu temperamento místico e especulativo esteve na base da sua constante pesquisa de relações entre diversas grandezas numéricas do Sistema Solar. Na sua descrição da *Harmonia do Mundo*, Kepler concluiu, exactamente no mesmo livro V, após enunciar a sua terceira lei sobre as órbitas dos planetas, que "*os modos ou tons musicais são reproduzidos de uma certa maneira nas extremidades dos movimentos planetários*". Desse modo, considerando os sete intervalos consonantes da oitava do seu tempo: 1:1 (uníssono); 1:2 (oitava), 2:3 (quinta), 3:4 (quarta), 4:5 (tércia maior), 5:6 (tércia menor), 3:5 (sexta maior), 5:8 (sexta menor), Kepler estabeleceu as seguintes harmonias dos seis planetas conhecidos

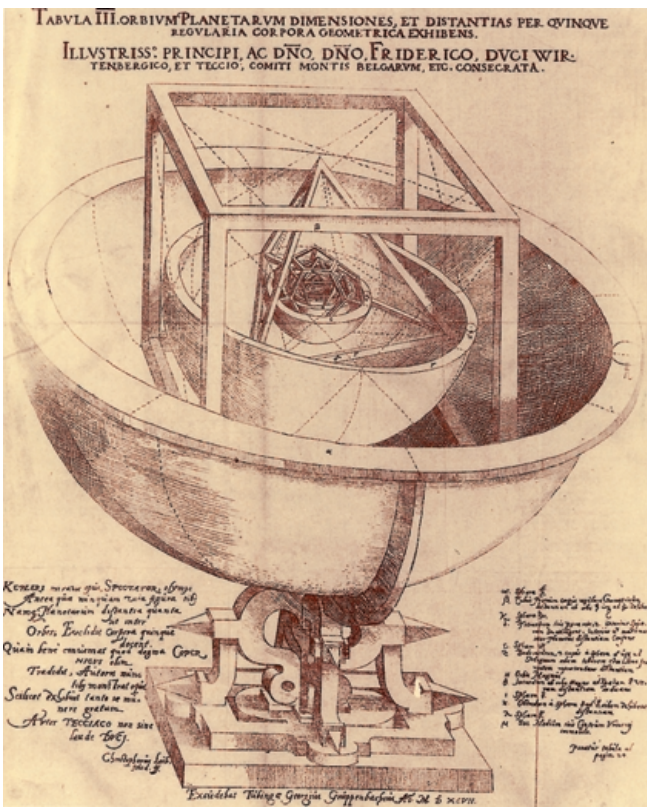


Fig. 7 - Frontespício de "*Mysterium cosmographicum*" (1596) de J. Kepler, com os encaixes do cubo (Saturno-Júpiter), tetraedro (Júpiter-Marte), dodecaedro (Marte-Terra), icosaedro (Terra-Vénus) e octaedro (Vénus-Mercúrio).

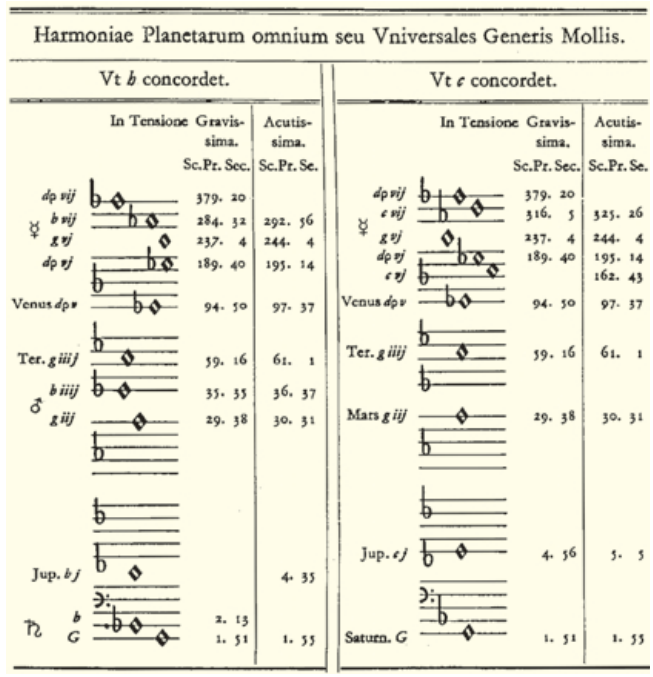


Fig. 8 - Harmonias de todos os planetas ou universais do género mole (do liv. V de *Harmonices Mundi*, 1619).

Saturno	4:5	(uma tércia maior)
Júpiter	5:6	(uma tércia menor)
Marte	2:3	(uma quinta)
Terra	5:16	(um meio tom)
Vénus	24:25	(um sustenido)
Mercúrio	5:12	(uma oitava e uma tércia menor);

calculando as razões afélio/periélio de cada um deles. Por exemplo, Saturno percorre, respectivamente, um arco de 106 ou de 135 segundos por dia quando está no seu ponto mais afastado (afélio) ou mais perto (periélio) do Sol, quando observado do próprio Sol, obtendo-se $106/135 \approx 4/5$.

A metafísica kepleriana vai ao ponto de, nas concordâncias celestes do *Harmonices Mundi*, não só associar Mercúrio ao soprano, Vénus e a Terra ao alto, Marte ao tenor e Júpiter e Saturno ao baixo, como ainda numa pequena nota afirmar que "a Terra canta as notas MI, FA, MI, de modo que delas se possa conjecturar que no nosso seio prevalecem a miséria (MIseria) e fome (FAmes)".

No entanto, Kepler ao basear as suas especulações nos dados experimentais e fornecer, com as suas leis, elementos fundamentais para a teoria da gravitação de Newton, não pode deixar de ser considerado uma figura maior na História da Ciência, apesar de podermos concordar com Laplace, como "*il est affligeant pour l'esprit humain de voir ce grand homme même se complaire avec délices dans ces chimériques spéculations, et les regarder comme l'âme et la vie de l'astronomie*" (como é aflitivo para o espírito humano ver este grande homem real-

mente comprazer-se nestas quimeras especulativas, e encará-las como a alma e a vida da astronomia), numa significativa apreciação de 1821.

Álgebra dos tons

A cultura grega clássica baseou o seu sistema musical na lira, tal como os chineses o haviam baseado na flauta de bambu. No entanto, não dispunham dos instrumentos técnicos ou conceptuais que lhes permitissem o domínio completo do fenómeno vibratório ou da análise da frequência dos sons, para além da simples observação empírica da relação inversa entre a frequência do som fundamental emitido pela corda vibrante (lira) ou pelo tubo longo (flauta) e o seu comprimento, ficando apenas pelas primeiras quatro harmónicas. As escalas pitagóricas baseiam-se assim nos intervalos "racionais" elementares (oitava, quinta e quarta) e respectivas sucessões alternadas, i.e., partindo de um som $f_0 = f$ e do som $f_1 = {}^3/_2 f$ situado uma quinta acima na escala, o som $f_2 = {}^3/_4 f_1 = {}^9/_8 f$ situar-se-á uma quarta abaixo de f_1, o som f_3 uma quinta acima da f_2 e assim sucessivamente. Deste modo, tem-se

$$f_{2n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n \quad \text{e} \quad f_{2n+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{8}\right)^n, \; n \text{ inteiro},$$

e podermos construir, a partir de $f_0 = f$, a sucessão f do seguinte modo:

$$f_{n+1} = \frac{3}{2} f_n \quad \text{se} \quad \frac{3}{2} f_n < 2f$$

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2} f_n \quad \text{se} \quad \frac{3}{2} f_n \geq 2f.$$

Obtemos assim o "ciclo das quintas" na forma

$$f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^p f,$$

sendo p o inteiro tal que $f_n \in [\, f, 2f \,[$, que não é obviamente, um verdadeiro ciclo, pois se assim fosse teriam de existir dois inteiros n e p tais que $3^n = 2^{n+p}$, que é impossível visto que o primeiro é sempre um número ímpar e o segundo par. No solfejo clássico, quando se afirma que "12 quintas correspondem a 7 oitavas" tal não é matematicamente certo, pois correponderia a dizer que "$3^{12} = 2^{19}$". Isso apenas traduz, quanto muito, uma certa tolerância do ouvido àquela afinação pois, de facto, $3^{12}/2^{19} = 531441/524288 \approx 1$.

Esta diferença, a chamada *coma pitagórica*, está essencialmente relacionada com a impossibilidade, encontrada já pelos gregos, de medir a diagonal do quadrado através de uma fracção exacta do seu lado e, portanto, também com a irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Tal impossibilidade explica também o facto de não poder existir uma gama musical "perfeita" ou "bem temperada", i.e., cujas razões dos tons ao tom de referência sejam sucessivamente 1, τ, τ^2, …,$\tau^{12} = 2$, apenas baseadas nos números racionais 3/2 e 4/3. Com efeito, não há nenhum modo "natural" de calcular o número irracional

$$\tau = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463094\ldots$$

que está na base do semi-tom do intervalo elementar da gama temperada de doze notas formando um "circulo perfeito".

É interessante observar que a incongruência resultante da coma pitagórica, que acumula dissonâncias à medida que se sobe ou desce na escala musical, tem uma analogia com as incongruências dos calendários antigos. Os três relógios astronómicos, a sucessão dos dias, das

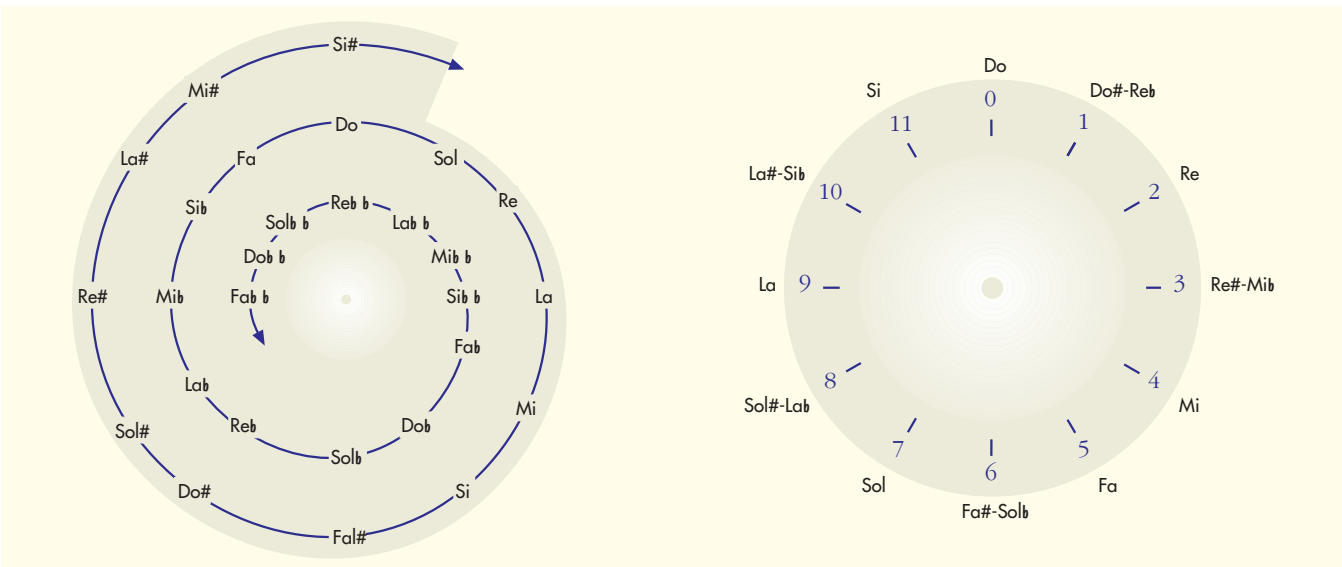


Fig. 9 - Uma espiral de quintas e um relógio cromático de 12 tons.

fases da lua e as deslocações do Sol, com as respectivas estações determinam que o ano composto por 12 meses lunares corresponda a 354 dias e difira, portanto, de cerca de 11 dias do ano solar. Mas como a 19 anos correspondem 235 meses lunares, decompondo 235 = 19x12+7, podemos "acertar" os ciclos solares e lunares, a menos de um resíduo de cerca de 1h30m, considerando 12 anos com 12 meses lunares e os restantes 7 com 13, pois tem-se 235 = 12x12+7x13. Este ciclo, chamado de Meton (ateniense do séc.IV AC), ilustra de um modo grosseiro um certo paralelismo entre o problema de acertar os calendários com as efemérides astronómicas e a divisão da escala musical com a consonância dos sons.

Até à Renascença, a gama cromática de Pitágoras, correspondendo à tonalidade das frequências dos sons do Dó = f, Ré = $^{9}/_{8}f$, Mi = $^{81}/_{64}f$, Fá = $^{4}/_{3}f$, Sol = $^{3}/_{2}f$, Lá = $^{27}/_{16}f$, Si = $^{243}/_{128}f$ e Dó = $2f$, foi utilizada na musica europeia segundo a tradição clássica. No século XVI, a gama diatónica de G. Zarlino (1517-1590), caracterizada segundo as proporções directamente derivadas da sucessão dos primeiros seis inteiros, introduz razões mais simples ao substituir as frequências das notas Mi, Lá e Si, respectivamente, por $^{5}/_{4}f$, $^{5}/_{3}f$, $^{15}/_{8}f$, mantendo as outras inalteradas, sem contudo resolver satisfatoriamente o problema da transposição.

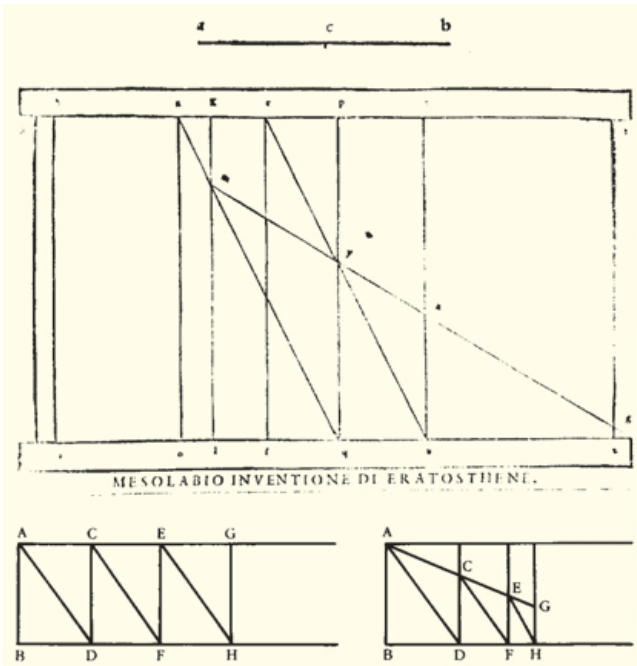


Fig. 10 - O Mesolábio, reproduzido da edição de 1573 de *Institutioni armoniche*, de F. Zarlino, foi um dos três métodos que ele expôs na sua obra "*Sopplimenti musicali*" (Veneza, 1588), para "*dividir a oitava directamente em 12 partes ou semitons iguais e proporcionais*". Este instrumento, descrito em textos gregos antigos, consiste em três paralelogramos rectangulares móveis e permite obter as linhas CD e EF como duas médias proporcionais de AB e GH.

Uma solução matematicamente simples de concepção, mas cuja vulgarização viria a utilizar um novo instrumento de cálculo só construído no início do século XVII, os logaritmos, é o temperamento igual. A sua formulação teórica encontra-se já na obra "De musica", de F. Salinas, publicada em Salamanca em 1577, onde se refere que "a oitava tem que ser dividida em doze partes igualmente proporcionais, as quais serão os semitons iguais". ou seja, se τ é o intervalo separando dois tons consecutivos, $\tau = \sqrt[n]{2}$ representa a razão da respectiva progressão geométrica, sendo n o número da divisão em partes iguais da oitava. No caso particular n = 12, as frequências associadas às sete notas da escala habitual vêm dadas por

$$\text{Dó} = f,\ \text{Ré} = \sqrt[6]{2}f,\ \text{Mi} = \sqrt[3]{2}f,\ \text{Fá} = \sqrt[12]{2^5}f,$$
$$\text{Sol} = \sqrt[12]{2^7}f,\ \text{Lá} = \sqrt[4]{2^3}f,\ \text{Si} = \sqrt[12]{2^{11}}f \text{ e Dó} = 2f.$$

As primeiras aproximações númericas do temperamento igual eram geométricas e mecânicas, como o antigo instrumento inventado pelos gregos para achar mecanicamente médias proporcionais, chamado mesolábio e utilizado por Zarlino ainda no século XVI, ou outros métodos euclideanos que se encontram na *Harmonie Universelle* (1636-7) de M.Mersenne ou na *Musurgia Universalis* (1650) de A.Kircher. No entanto, e apesar das aproximações numéricas do temperamento igual serem atribuídas aos chineses, Simon Stevin (1548-1620) calculou, por volta de 1600, uma divisão igual da oitava em doze intervalos com quatro casa decimais, sem no entanto advogar o temperamento igual no seu tratado sobre a teoria da música que ficou inédito.

Outros cientistas do século XVII abordaram profundamente a teoria da música, nomeadamente Galileu,

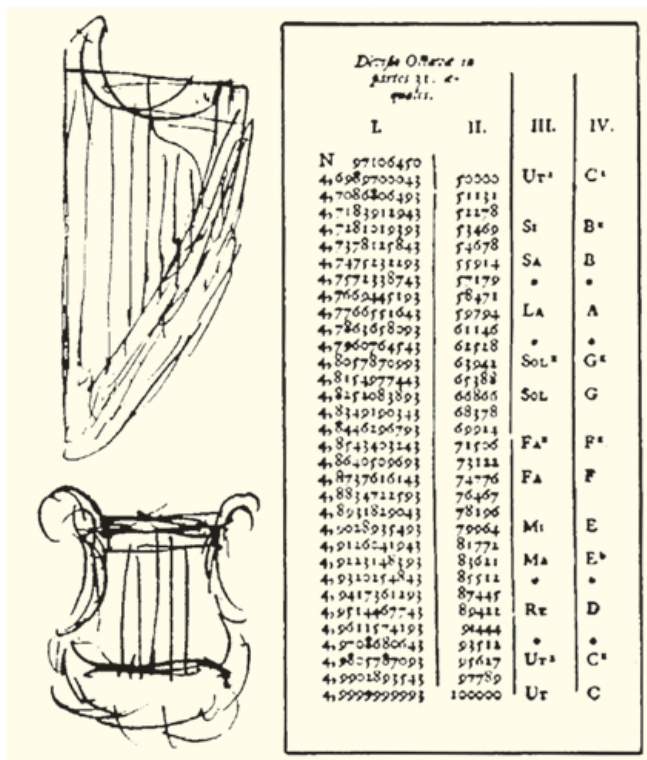
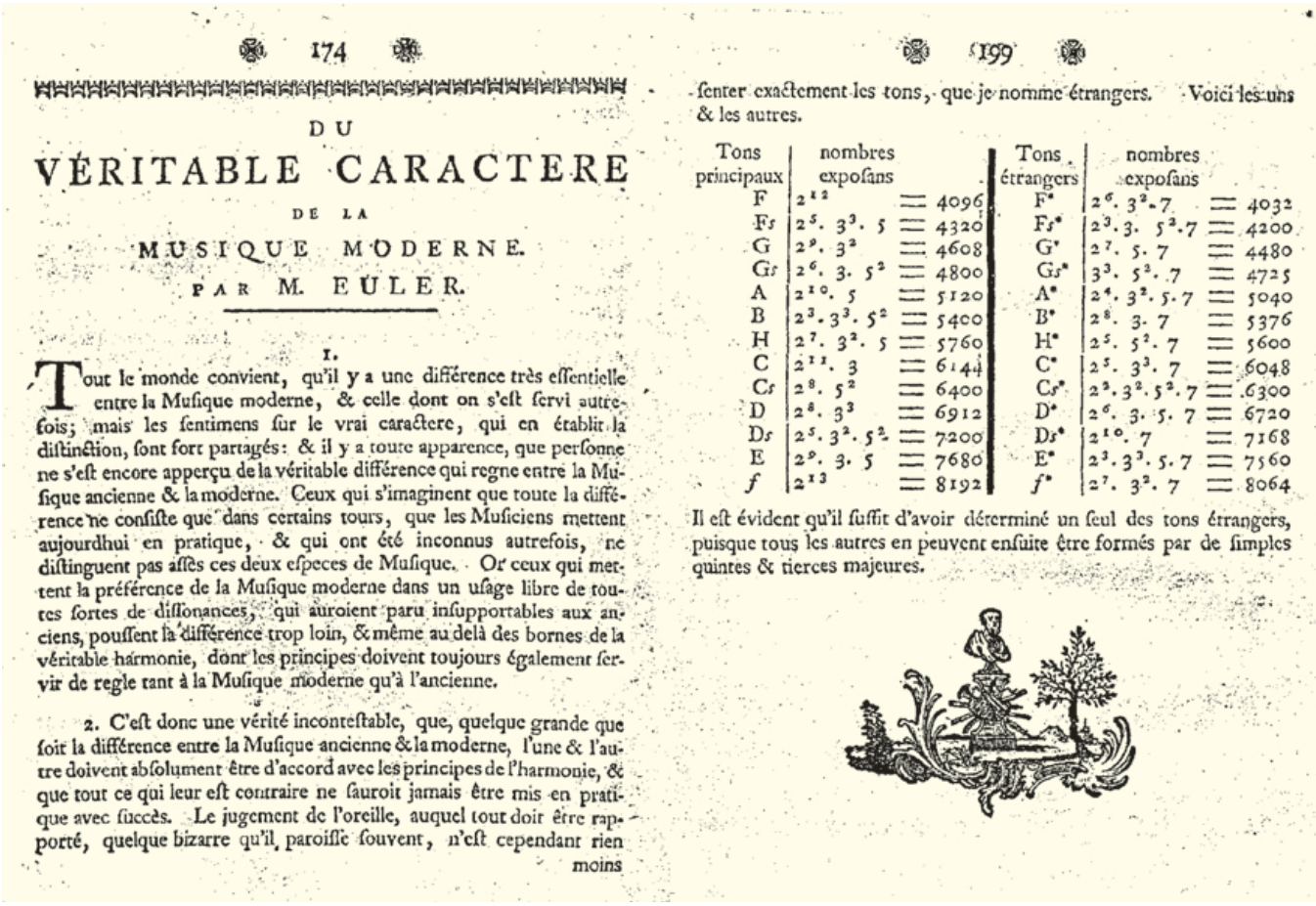


Fig. 11 - Harpa e lira desenhadas por Huygens e divisão da oitava em 31 tons. (Biblioteca da Universidade de Leiden).



174

DU

VÉRITABLE CARACTERE

DE LA

MUSIQUE MODERNE.

PAR M. EULER.

1.

Tout le monde convient, qu'il y a une différence très essentielle entre la Musique moderne, & celle dont on s'est servi autrefois; mais les sentimens sur le vrai caractere, qui en établit la distinction, sont fort partagés: & il y a toute apparence, que personne ne s'est encore apperçu de la véritable différence qui regne entre la Musique ancienne & la moderne. Ceux qui s'imaginent que toute la différence ne consiste que dans certains tours, que les Musiciens mettent aujourdhui en pratique, & qui ont été inconnus autrefois, ne distinguent pas assés ces deux especes de Musique. Or ceux qui mettent la préférence de la Musique moderne dans un usage libre de toutes sortes de dissonances, qui auroient paru insupportables aux anciens, poussent la différence trop loin, & même au delà des bornes de la véritable harmonie, dont les principes doivent toujours également servir de regle tant à la Musique moderne qu'à l'ancienne.

2. C'est donc une vérité incontestable, que, quelque grande que soit la différence entre la Musique ancienne & la moderne, l'une & l'autre doivent absolument être d'accord avec les principes de l'harmonie, & que tout ce qui leur est contraire ne sauroit jamais être mis en pratique avec succès. Le jugement de l'oreille, auquel tout doit être rapporté, quelque bizarre qu'il paroisse souvent, n'est cependant rien moins

199

senter exactement les tons, que je nomme étrangers. Voici les uns & les autres.

Tons principaux	nombres exposans		Tons étrangers	nombres exposans	
F	2^{12}	= 4096	F*	$2^{6}.3^{2}.7$	= 4032
Fs	$2^{5}.3^{3}.5$	= 4320	Fs*	$2^{3}.3.5^{2}.7$	= 4200
G	$2^{9}.3^{2}$	= 4608	G*	$2^{7}.5.7$	= 4480
Gs	$2^{6}.3.5^{2}$	= 4800	Gs*	$3^{3}.5^{2}.7$	= 4725
A	$2^{10}.5$	= 5120	A*	$2^{4}.3^{2}.5.7$	= 5040
B	$2^{3}.3^{3}.5^{2}$	= 5400	B*	$2^{8}.3.7$	= 5376
H	$2^{7}.3^{2}.5$	= 5760	H*	$2^{5}.5^{2}.7$	= 5600
C	$2^{11}.3$	= 6144	C*	$2^{5}.3^{3}.7$	= 6048
Cs	$2^{8}.5^{2}$	= 6400	Cs*	$2^{2}.3^{2}.5^{2}.7$	= 6300
D	$2^{8}.3^{3}$	= 6912	D*	$2^{6}.3.5.7$	= 6720
Ds	$2^{5}.3^{2}.5^{2}$	= 7200	Ds*	$2^{10}.7$	= 7168
E	$2^{9}.3.5$	= 7680	E*	$2^{3}.3^{3}.5.7$	= 7560
f	2^{13}	= 8192	f*	$2^{7}.3^{2}.7$	= 8064

Il est évident qu'il suffit d'avoir déterminé un seul des tons étrangers, puisque tous les autres en peuvent ensuite être formés par de simples quintes & tierces majeures.

Fig. 12 - *Do verdadeiro carácter da música moderna*, de Leonhard Euler, em *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* (1764), 1766, p. 174-199.

Kepler, Descartes e Huygens, entre outros. Em particular, Christiaan Huygens (1629-1695), tal como Galileu filho de um compositor, publicou em 1691 um notável ensaio de musicologia, *Novus Cyclus Harmonicus* onde teorizou a divisão da oitava em 31 intervalos iguais e foi um dos primeiros a introduzir o cálculo dos logaritmos na música. Já numa carta de 1661, Huygens referia que se havia "*ocupado durante alguns dias a estudar a música, e a divisão do monocórdio à qual aplicara felizmente a álgebra*", tendo "*achado que o uso que fizera dos logaritmos fora aí de grande utilidade*". Numa outra, de 1691, após referir Salinas e Mersenne enquanto autores que já haviam considerado aquela divisão sem grande consequência, observa que se os seus antecessores se haviam enganado "*por não terem sabido dividir a oitava em 31 partes iguais (...) porque para isso era necessário a inteligência dos Logarítmos*". Sem entrar em outras considerações de ordem musical, é interessante observar as diferenças de atitude de Huygens, por um lado, ao tentar combinar experiência sonora e análise científica no temperamento de 31 tons que advogou, com o sistema matematicamente atraente, mas musicalmente ainda inaceitável para a época, da divisão igual de 12 tons de Stevin, ou, por outro, com o sistema "*bem temperado*", também de 12 tons, de Werckmeister (1691), cujo objectivo de fechar o ciclo das quintas era conseguido com uma distribuição irregular e empírica da coma pitagórica entre as quintas. De passagem refira-se que Huygens considerava Werckmeister um *author ineruditus ac parvi pretij* (autor sem erudição e de pouco mérito).

Se Kepler havia procurado um elaborado critério geométrico para distinguir a consonância da dissonância, o jovem Descartes no seu tratado, também de 1619, *Compendium Musicae*, limita-se às razões dos intervalos consonantes através de segmentos de comprimentos variáveis, afirmando que apenas as três primeiras bissecções de um segmento de recta são associáveis às consonâncias básicas, i.e., são apenas três os "números sonoros": 2, 3 e 5. Mas é no matemático L. Euler (1707-1783) que se encontra uma das mais engenhosas teorias algébricas da divisão da oitava e do grau da consonância dos intervalos musicais. Com efeito, no seu *Ensaio de uma nova teoria da música (Tentamen novae theoriae musicae, 1739)* Euler desenvolve uma argumentação de influência leibniziana na qual as proporções geram um prazer musical, via a ordem e a perfeição - "*a música é a ciência de combinar os sons da qual resulta uma harmonia agradável*" - de modo que, para este matemático, um objecto musical é um

simples objecto aritmético. Assim, por exemplo, Euler introduz uma medida do grau de consonância (*agrément)* de um intervalo através de uma fórmula algébrica

$$\alpha\left(I\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i p_i - m_i\right) + 1,$$

em que p_i são números primos e m_i expoentes inteiros, tais que o intervalo I esteja associado ao número racional $1/p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$. Para o uníssono (1/1) obtemos 1 como primeiro grau de consonância (*primum suavitatis gradum*), o segundo para a oitava (1/2) e assim sucessivamente, dos intervalos mais simples para os mais complexos.

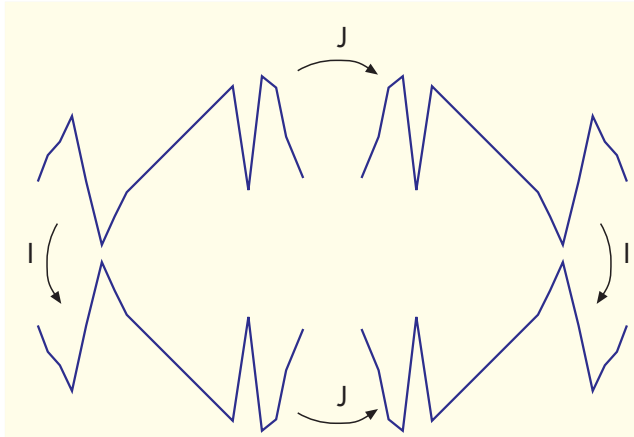
A teoria elaborada por Euler, baseada numa perspectiva hipotético-dedutiva, acabou por não ter uma reacção favorável nos músicos de setecentos, mas não deixa por isso de ser uma notável incursão na teoria da música feita pelo matemático mais marcante do século do iluminismo, no qual a música europeia iria, contudo, começar a fornecer exemplos de composições como o *Cravo bem temperado* de J. S. Bach, cujos dois volumes datam, respectivamente, de 1722 e 1744.

Mas a *álgebra dos tons* não se reduz aos problemas associados ao temperamento. Ela suscita questões mais profundas na estrutura dos sons e na própria composição musical. De facto as notas musicais podem ser agrupadas em classes de equivalência e daí serem chamadas pelo mesmo nome, i.e., duas notas dizem-se equivalentes se estão separadas por um número exacto de oitavas, ou seja, se tiverem frequências p e q, o intervalo entre elas é de forma $p/q = 2^k$, com $k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) e indicaremos por $p \sim q$. Em particular, no sistema temperado de 12 notas, o intervalo é caracterizado pelo número de semitons e as notas podem ser associadas ao conjunto de inteiros $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ módulo 12, que é um grupo para a adição (mod.12). Um grupo é um conjunto de elementos com uma lei de composição interna associativa, i.e., $(a+b)+c = a+(b+c)$, com elemento neutro 0, $a+0 = 0+a = a$, e em que cada elemento a admite um simétrico a^{-1}, tal que $a+a^{-1} = a^{-1}+a = 0$.

Assim, por exemplo, compondo um intervalo de 7 semitons (quinta) com um intervalo de 10 semitons (sétima menor) dá um intervalo de 17 semitons que é uma oitava mais uma quarta, i.e., 7+10 = 5 (mod.12). Analogamente se vê que 5+7 = 0 (mod.12), i.e. uma quinta e uma quarta são inversas uma da outra.

Os grupos podem também ocorrer no modo como um trecho musical foi composto, seja na forma de grupos cíclicos, como o da gama cromática de 12 notas em que as relações musicais entre notas e intervalos estão directamente associadas às leis de composição numérica, seja na forma de grupos de transformação de tipo geométrico. A análise musical tem procurado identificar estruturas de ordem temporal daquele tipo em composições baseadas numa concepção cíclica do tempo em compositores tão distantes como Machaut (na *Messe Notre-Dame*, séc. XIV) ou Alban Berg (na ópera *Wozzeck,* séc. XX), ou estruturas de subgrupo do grupo $\mathbb{Z}_{12}$ em composições de J.S. Bach (*O cravo bem temperado*) ou de Bela Bartok (*Música para Cordas, Percursão e Celeste*). Talvez mais claros são os padrões matemáticos associados às duas dimensões do tempo e das alturas, os quais são susceptíveis de exibir simetrias geométricas dos temas melódicos, i.e., da sucessão de sons de diversas durações.

Um exemplo típico é dado na *Oferenda musical* de J.S. Bach de 1747, a qual apresenta três tipos de transformações: translações (transposições ascendentes, como no canon *Ascendenteque Modulationem ascendat gloria Regis*), simetrias horizontais (inversões melódicas, como no canon *Per Motum Contrarium*) e simetrias verticais (retrogradações, como no canon a 2 que toca o mesmo tema começando na última nota retrocedendo até à primeira).



O - identidade

I - inversão (simetria horizontal)

J - retrogradação (simetria vertical)

K = I + J = J + I (composição de I com J)

+	O	I	J	K
O	O	I	J	K
I	I	O	K	J
J	J	K	O	I
K	K	J	I	O

Fig. 13 - Representações geométrica e algébrica do grupo de Klein.

Estas transformações de simetria, que se podem associar às isometrias do plano, constituem uma estrutura de grupo e podem ser compostas, dando origem a uma terceira simetria relativamente a um ponto, tema que se pode encontrar noutras composições musicais, em particular de Anton Webern, nomeadamente no plano de conjunto do segundo andamento da Sinfonia op. 21, conforme foi observado pelo musicólogo contemporâneo Robert Pascal. Este grupo de quatro transformações (a identidade, a inversão, a retrogradação e a composição destas duas) formam o grupo Klein, o que não é mais do que uma consequência do seu isomorfismo com o grupo das simetrias planas relativamente aos dois eixos ortogonais e à sua intersecção. Esta última simetria relativamente a um ponto é também a dos dois tetracordes

cromáticos (ré, ré#, mi, fá) = (2,3,4,5) e (sol#,lá,lá#,si) = (8,9,10,11) que estão na base do "inesgotável acorde de Tristão", na célebre ópera de Wagner, que tem sido objecto de inúmeras análises e interpretações musicais, ao ponto de até se ter nele encontrado uma alusão metafórica à separação trágica de Tristão e Isolda.

Harmonização da Análise

Galileu Galilei (1564-1642) no fim da primeira jornada dos *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali* (1638) refere a questão das cordas vibrantes e das consonâncias do seguinte modo: "*... a razão primeira e imediata de que dependem as razões dos intervalos musicais não é nem o comprimento das cordas, nem a sua espessura, mas a proporção existente entre as frequências das vibrações, e portanto das ondas que, propagando-se no ar, atingem o tímpano do ouvido fazendo-o vibrar nos mesmos intervalos de tempo*". Mas é, sobretudo, a Marin Mersenne (1588-1648) que se deve o estabelecimento das leis básicas da moderna acústica das cordas. Com efeito, na sua monumental obra "*Harmonie universelle*" (1636), encontram-se as suas leis experimentais sobre a proporcionalidade do periodo de vibração da corda, e portanto do inverso da frequência υ, relativamente ao seu comprimento l, ao inverso da raiz quadrada da sua tensão τ e à raiz quadrada da sua espessura ou área S da sua secção (i.e. $1/\upsilon \sim l\sqrt{S/\tau}$).

A teoria matemática do som só se viria a desenvolver no século XVIII, na sequência da evolução da dinâmica baseada no modelo da mecânica de Isaac Newton (1642-1727) estabelecido nos "*Principia Mathematica*" (1687), tendo sido B. Taylor (1685-1731) o primeiro a calcular o período fundamental de uma corda vibrante, em 1713. Mas foi Joham Bernoulli (1667-1748) quem, numa comunicação ao seu filho Daniel em 1727, estabeleceu a primeira análise da configuração da pequena deformação da corda vibrante com peso. Partindo da equação diferencial do pêndulo simples de comprimento L (a determinar) para um elemento da corda de massa $\rho\, dx$:

$$d^2 v/dx^2 = \left(-g/L\right)\left(\rho/\tau\right) v$$

obteve a solução, entre $x = 0$ e $x = l$, dada por

$$v = A \text{ sen } \omega x, \ (A = \text{constante}),$$

onde $\omega = \sqrt{(g/L)(\rho/\tau)}$, τ é a tensão e g a aceleração da gravidade. Em particular, J. Bernoulli demonstrou que a corda vibrante tem a forma de um seno, de onde fazendo $v = 0$ quando $x = l$, se deduz $L = (g\,\rho/\tau)(l^2/\pi^2)$.

Pela segunda lei de Newton, a pequena vibração do pêndulo vem dada por

$$d^2 v/dt^2 = -(g/L)v,$$

o que nos dá o valor do período $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Assim, substituindo o valor de L atrás calculado, obtem-se a frequência (fundamental) da corda vibrante

$$\upsilon = 1/T = \sqrt{\tau/\rho}\,/2l,$$

reencontrando-se as leis de Mersenne, estabelecidas no século anterior.

Mas é sobretudo com a introdução da equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c^2 = \tau/\rho)$$

na memória de D'Alembert publicada pela Academia de Berlin em 1747, "Recherche sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration", e com os trabalhos subsequentes de Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange, que a teoria matemática da "corda musical" adquire o modelo adequado às pequenas vibrações, o qual vai ser determinante no estudo das oscilações nos meios contínuos, em particular, à própria propagação do som no ar.

É o próprio D'Alembert que determina a solução da equação das ondas na forma

$$u = u(x,t) = \frac{1}{2}[U(x+ct) + U(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} V(s)\, ds$$

a partir das condições iniciais

$$u(x,0) = U(x) \quad \text{e} \quad \partial u/\partial_t (x,0) = V(x).$$

Em particular, considerou soluções do tipo sinusoidal, na forma da solução de Taylor com $\omega = \pi/l$ no caso $V = 0$, ou na forma

$$A \cos \pi\,(x \pm ct)/l$$

quando $U = 0$, e procurou estabelecer as restrições a que as funções U e V teriam de satisfazer para obter a solução geral da corda vibrante. Mas é numa memória de Euler de 1748 "*De vibratione chordarum exercitatio*", que foi estabelecida a relação $\upsilon = k\upsilon_1$, $k = 2, 3, \ldots$ entre as frequências próprias a partir da equação das ondas, obtendo soluções na forma

$$u(x,t) = \sum_n A_n \text{ sen } {}^{n\pi x}/_{l} \cos {}^{n\pi ct}/_{l}$$

não especificando, contudo, se a soma $\sum_n$ é finita ou infinita, mas observando que os modos simples de vibrações podem ser combinados com amplitudes A_n arbitrárias.

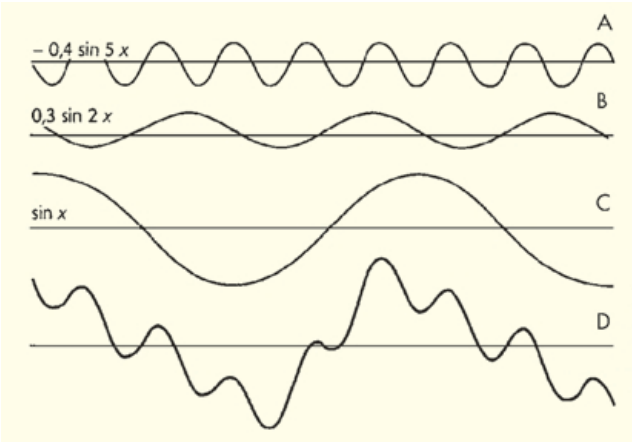


Fig. 14 - A soma dos três senos A, B, e C resulta na função do gráfico D.

No desenrolar da célebre "controvérsia da corda vibrante", uma disputa científica que envolveu os principais matemáticos de setecentos, Daniel Bernoulli, num escrito de 1753, estabelece o princípio da sobreposição das pequenas oscilações harmónicas, enquanto uma lei física e não tanto como um resultado matemático, concluindo que "todo o corpo sonoro contem potencialmente uma infinidade de sons e uma correspondente infinidade de modos de produzir as respectivas vibrações regulares". Mas é numa extraordinária memória do jovem Lagrange (1736-1813), "Recherches sur la nature et la propagation du son", publicada em Turim em 1739, que se encontra a fórmula, a qual em notação moderna se escreveria na forma

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\int_0^l U(s) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi s}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi ct}{l}\, ds$$

$$+\frac{2}{\pi c}\int_0^l V(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi s}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi ct}{l}\, ds,$$

para a solução da equação de D'Alembert. Contudo para Lagrange o sinal integral é empregue "para exprimir a forma de todas estas sucessões" de soluções discretas obtidas pela substituição da corda contínua pela corda partida em *n* secções rígidas, i.e., substituindo a equação com derivadas parciais das ondas por um sistema de *n-1* equações diferenciais ordinárias dos vértices móveis, uma vez que as extremidades são fixas. Como foi observado por vários autores, não podemos, contudo, concluir que Lagrange obteve o que hoje conhecemos como teorema de Fourier, uma vez que o método não só era meramente formal, como não discute qualquer condição sobre as funções *U* e *V* para assegurar a convergência das séries trignométricas nem a passagem ao limite na obtenção do integral. O próprio Lagrange apesar de, posteriormente, ter intuido que os seus cálculos, relativos aos corpos móveis em número finito ou infinito, poderiam demonstrar "la belle proposition de Mr Daniel Bernoulli que: lorsqu'un système quelconque de corps fait des oscillations infiniment petites, le mouvement de chaque corps peut être considéré comme composé de plusieurs mouvements partiels et synchrones chacum à celui d'un pendule simple" (quando um sistema qualquer de corpos efectua oscilações infinitamente pequenas, o movimento de cada corpo pode ser considerado como composto de vários movimentos parciais e síncrones cada qual ao de um pêndulo simples), não insistiu no seu método, pois, tal como Euler, considerava falso que qualquer função pudesse ser representada por uma série trigonométrica infinita.

É de referir que, na memória de 1759, Lagrange não só procura analisar a propagação do som, em particular através do ar, como tenta ainda fornecer uma explicação científica à teoria da combinação dos tons de Tartini, exposta no seu Tratado de Música de 1754. Também Euler, na carta de 23 de Outubro de 1759, em que agradece a Lagrange aquele trabalho, manifesta preocupações de índole musical, nomeadamente no parágrafo em que escreveu: "Pour les sons de Musique, je suis parfaitement de votre avis, Monsieur, que les sons consonants que M. Rameau prétend entendre d'une même corde viennent des autres corps ébranlés; et je ne vois pas pour-

Fig. 15 - J. Fourier (1768-1830).

PODER-SE-Á OUVIR A FORMA DE UM FILME ESMÉTICO?

Introduzido por G. Friedel nos seus estudos sobre os cristais líquidos, o nome *esmético* provém do grego $\sigma\mu\eta\gamma\mu\alpha$ ("sabão") e foi atribuído às mesofases com propriedades mecânicas análogas às verificadas nos sabões.

Em algumas destas mesofases (esmética A ou esmética C, por exemplo), as moléculas são organizadas em camadas, cada camada comportando-se como um líquido bidimensional. Para os materiais termotrópicos (que mudam de fase com a temperatura), a espessura de uma camada é constante e da ordem do comprimento das moléculas utilizadas.

À imagem dos filmes de sabão, os filmes esméticos compostos por camadas líquidas dependem do suporte em que se encontram supensos. Junto à fronteira, forma-se um menisco que, actuando como um reservatório de moléculas, vai ser responsável pelo aparecimento duma tensão superficial.

Como o menisco existe apenas numa região de comprimento desprezável, a espessura do filme (h) pode ser considerada constante e igual ao número de camadas (controlado por técnicas experimentais) vezes a espessura de cada camada. Ao contrário dos filmes de sabão—que mudam facilmente a sua espessura para se adaptarem às frequências da perturbação—os filmes esméticos, mais robustos, mantêm a sua espessura constante para vibrações suficientemente pequenas.

Os filmes esméticos líquidos apresentam-se assim como sistemas bidimensionais ideais para estudar os modos de vibração derivados de uma energia proporcional à área da superfície dA:

$$E_{\mathrm{ts}} = \gamma \int dA,$$

onde γ é a tensão superficial.

A primeira e a segunda derivada da energia em relação a uma perturbação $w(x_1, x_2)$ na direcção normal à superfície dão-nos, respectivamente, a condição de equilíbrio do filme esmético—em forma de superfície mínima (curvatura média nula)—e a equação de onda:

$$(\Delta - 2K + \lambda^2)\, w = 0,$$

onde Δ representa o laplaciano curvilíneo e K a curvatura de Gauss. A frequência de vibração ν do filme esmético é relacionada com o valor próprio λ através de $\nu = \lambda\sqrt{\gamma/\rho h}$, onde ρ é a densidade de massa.

Os filmes esméticos compostos por camadas líquidas foram recentemente utilizados para ilustrar a célebre questão de Kač: "Can one hear the shape of a drum?". Trata-se de saber se duas superfícies diferentes podem ser isospectrais, i.e., ter exactamente o mesmo espectro de vibrações.

Este problema é geralmente estudado no contexto da equação de Helmholtz (a equação de onda dos filmes esméticos, no caso planar onde $K = 0$). Usando estes filmes, a isospectralidade das superfícies descobertas por Gordon, Webb e Wolpert foram experimentalmente verificadas por C. Even e P. Pieranski (*Pour la Science*, Abril de 1997).

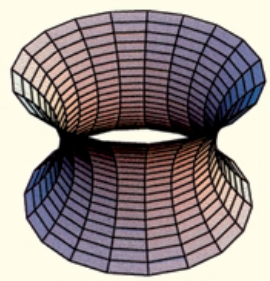
A questão colocada por Kač tem uma resposta mais simples se sairmos do quadro planar e considerarmos a equação de onda anterior, válida para os filmes esméticos curvilíneos.

Com efeito, esta equação de onda depende apenas da métrica da superfície mínima (recorda-se que deriva de uma energia que é proporcional à área da superfície). Se utilizarmos condições de fronteira idênticas, então todas as superfícies mínimas isométricas são também isospectrais.

A existência de famílias de superfícies mínimas isométricas é conhecida. Cada família pode ser calculada a partir da construção de Weierstrass e é formada por um conjunto contínuo de superfícies mínimas parametrizadas por um número complexo $e^{i\tau}$.

Um exemplo de superfícies isospectrais é dado pela família da catenóide, também conhecida pela família *heli-catenoidal* (*heltocat*).

Pedro Patrício



Catenóide

Superfícies isospectrais da família *heltocat* ($\tau = n\pi/6$, $n = 1, 2, 3$)

A família *heltocat*, formada pelo conjunto de superfícies que vão continuamente da catenóide à helicóide, é dada através de

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\tau(\theta,\phi) = (&\cos\tau\cos\phi\cosh\theta + \sin\tau\sin\phi\sinh\theta,\\ &\cos\tau\sin\phi\cosh\theta - \sin\tau\cos\phi\sinh\theta,\\ &\theta\cos\tau + \phi\sin\tau)\end{aligned}$$

(Em "Can one hear the shape of a smectic drum?", M. Ben Amar, P. Patricio da Silva, *Proc. R. Soc. Lond. A* **454** (1998), 2757–2765)

quoi ce phénomène doit être regardé comme le principe de la Musique plutôt que les proportions qui en sont le fondement" (Quanto aos sons da Música, estou perfeitamente de acordo consigo, Senhor, que os sons consonantes que o Sr. Rameau pretende ouvir duma mesma corda resultariam dos outros corpos vibrantes; e não vejo porquê este fenómeno deve ser visto como o princípio da Música em lugar de as verdadeiras proporções que constituem o seu fundamento).

No entanto só no século seguinte, com a publicação em 1822 da obra fundamental de J. Fourier (1768-1830), "*Théorie analytique de la chaleur*", se dá um novo passo decisivo na "harmonização" da análise matemática. Mas apesar de Fourier manter a possibilidade do "développement de une function arbitraire en séries trigonométriques", só ao longo de oitocentos o progressivo esclarecimento das próprias noções de "função arbitrária" e da análise das várias noções de convergência de séries infinitas de funções e, sobretudo, já no século XX com o teorema de Riesz- Fischer (1907) sobre a convergência das séries de Fourier em média quadrática, é que a análise funcional do fenómeno vibratório adquire o estádio actual de rigor e desenvolvimento, com vastas e profundas consequências em toda a Física – Matemática.

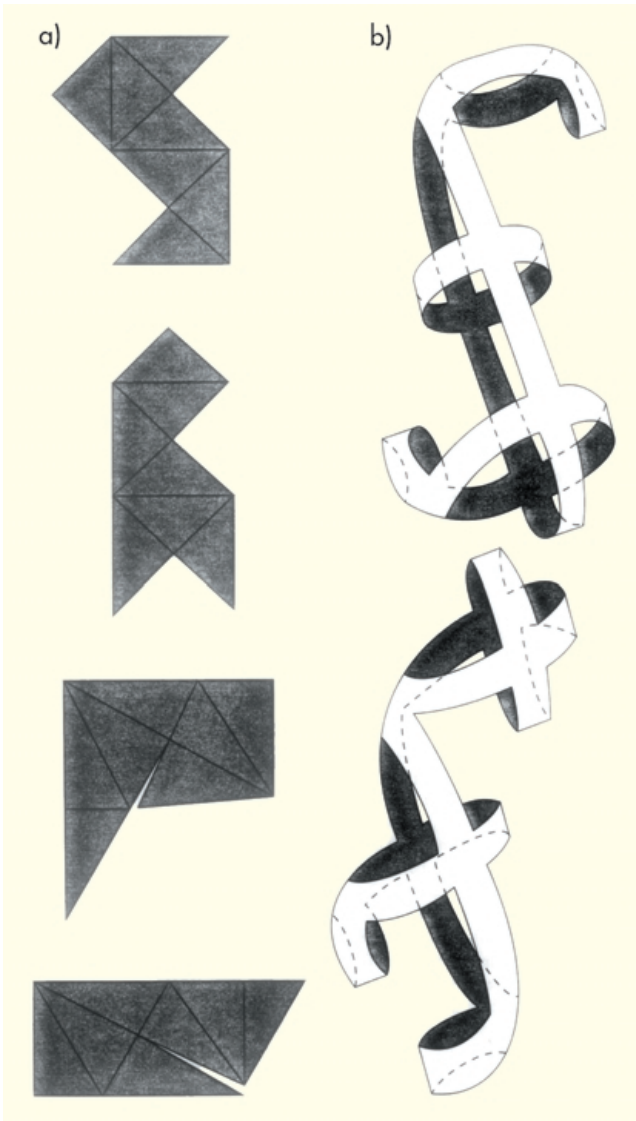


Fig. 16 - **a**) Formas de *tambores* (polígnos planos) isospectrais (que reproduzem o mesmo som) com formas diferentes, do tipo que C. Gordon e D. Webb encontraram em 1991. **b**) Formas espaciais de sinos (superfícies Riemannianas) de P. Buser (1986) isospectrais.

Mas a corda musical não é senão o primeiro exemplo matemático da análise do som. De facto, quer o som produzido pela maioria dos instrumentos musicais, quer o próprio ouvido humano, exigem modelos matemáticos que tenham em conta as várias dimensões do espaço físico e a geometria dos corpos sonoros. Por exemplo, o som produzido pela membrana de um tambor requer a análise da equação das ondas bidimensionais, onde em lugar de segunda derivada espacial se tem de colocar o Laplaciano $\Delta = \partial^2/\partial x_1^{\,2} + \partial^2/\partial x_2^{\,2}$, procurando agora o deslocamento da posição da membrana através duma função $u = u(x_1, x_2, t)$ onde o ponto (x_1, x_2) varia numa região Ω do plano. A geometria de Ω é agora fundamental na determinação dos sons fundamentais do tambor. A célebre questão retomada por Kac em 1966 sobre "se será possível ouvir a forma de um tambor" só em 1991 encontrou uma resposta parcial e negativa e ainda hoje é um tema geométrico de investigação. Com efeito, aquela questão, que tem um significado preciso e profundo em matemática, consiste em saber se a partir de uma mesma família de valores próprios, i.e., de números $\lambda = \lambda_n$, $n = 1,2,\ldots$,que satisfazem o problema

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ em dois domínios } \Omega_1 \text{ e } \Omega_2$$

para funções que se anulam nas fronteiras $\partial\,\Omega_1$ e $\partial\,\Omega_2$, será possível afirmar que as regiões Ω_1 e Ω_2 são congruentes no sentido da geometria Euclidiana. Esta questão, que admite múltiplas variantes e extensões geométricas, tem resposta negativa para domínios com cantos mas permanece em aberto para o caso de domínios com fronteiras regulares. No entanto, é possível demonstrar que Ω_1 e Ω_2 têm a mesma área e o mesmo perímetro e, por exemplo, entre todos os tambores com a mesma área, o de forma redonda é o que tem o som mais grave.

Musurgia digital

A análise de Fourier estabeleceu as bases da ciência do som e permitiu, em particular, que a "revolução eléctrica" viesse a tratar o som na transmissão e no registo da música no último século. Contudo, neste fim do século XX o aparecimento do som digital marca o início de uma nova revolução, pois a codificação numérica permite não só um novo e mais potente instrumento de gravação e de comunicação do som musical, mas também abre novas possibilidades do seu tratamento por com-

putador de uma forma muito mais precisa, fácil e geral que os meios instrumentais ou electrónicos tradicionais, incluindo na própria criação musical.

Já no século XVII, um obscuro matemático alemão K. Schott, seguindo as ideias de Mersenne e de Kircher, de quem foi aluno, sustentava no seu *Organum mathematicum* (1668) que para compor cantos harmónicos bastaria dominar a nova "arte musico-aritmética" que consistia em combinar os *bacilli musurgici* (as fasquias musicais) e utilizar os "*abaci melothetici*" e as "*tabulae musarithmeticae* (as tabelas de cálculo "melotéticas" e "aritmúsicas").

Estas ideias do barroco alemão baseavam-se não apenas na tradição escolástica das relações profundas entre música e números, mas sobretudo na nova arte combinatória explicada por Mersenne, em particular, na *Harmonie universelle* de 1636. Com efeito, este influente autor para quem compôr se reduzia a combinar, distinguira as permutações sem repetição dum número dado de n notas (combinações ordinárias que ele calcula até $n = 64$)

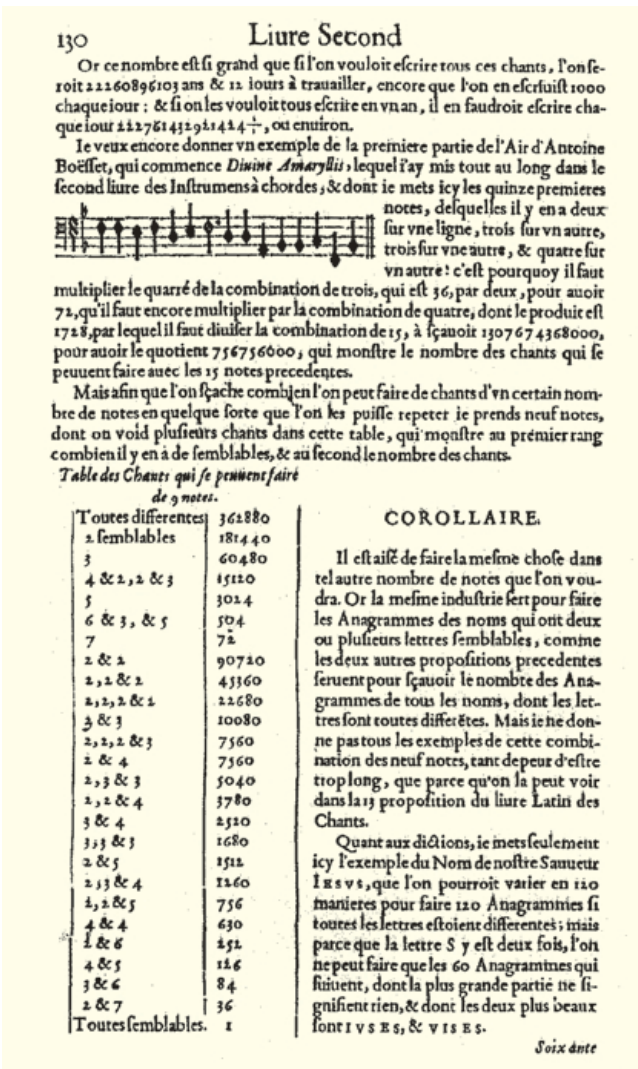
$$S_n = 1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n = n!,$$

das permutações com repetição de n notas das quais p são distintas, que utilizou, em particular, para calcular "a tabela dos cantos que se podem fazer de 9 notas". Mersenne considerou (e calculou exaustivamente) também os arranjos sem repetições de p notas diferentes entre n dadas

$$A_n^p = n(n-1) \ldots (n-p+1),$$

e ainda as combinações sem repetição de p notas entre n, $C_n^p = A_n^p / S_p$, com os quais colocou e resolveu pela primeira vez problemas difíceis de combinatória.

A maneira de conceber a composição musical através da aplicação mais ou menos automática de certas regras combinatórias está na base das caixas de música mecanizadas e foi ilustrada ao nível melódico no célebre jogo dos dados musicais ("Musikalisches Würfelspiel") escrito por Mozart (1756-1791) e publicado após a sua morte, em 1793. Esta composição mozartiana consiste numa escolha aleatória de um dos onze resultados obtidos com o lançamento de dois dados,



130 Liure Second

Or ce nombre eſt ſi grand que ſi l'on vouloit eſcrire tous ces chants, l'on ſeroit 2226089610 3 ans & 12 iours à trauailler, encore que l'on en eſcriuiſt 1000 chaque iour : & ſi on les vouloit tous eſcrire en vn an, il en faudroit eſcrire chaque iour 2227614329214 24 $\frac{1}{7}$, ou enuiron.

Ie veux encore donner vn exemple de la premiere partie de l'Air d'Antoine Boëſſet, qui commence *Diuine Amaryllis*, lequel i'ay mis tout au long dans le ſecond liure des Inſtrumens à chordes, & dont ie mets icy les quinze premieres notes, deſquelles il y en a deux ſur vne ligne, trois ſur vn autre, trois ſur vne autre, & quatre ſur vn autre : c'eſt pourquoy il faut multiplier le quarré de la combination de trois, qui eſt 36, par deux, pour auoir 72, qu'il faut encore multiplier par la combination de quatre, dont le produit eſt 1728, par lequel il faut diuiſer la combination de 15, à ſçauoir 1307674368000, pour auoir le quotient 756756000, qui monſtre le nombre des chants qui ſe peuuent faire auec les 15 notes precedentes.

Mais afin que l'on ſçache combien l'on peut faire de chants d'vn certain nombre de notes en quelque ſorte que l'on les puiſſe repeter ie prends neuf notes, dont on void pluſieurs chants dans cette table, qui monſtre au premier rang combien il y en à de ſemblables, & au ſecond le nombre des chants.

Table des Chants qui ſe peuuent faire de 9 notes.

Toutes differentes	362880
2 ſemblables	181440
3	60480
4 & 2, 2 & 3	15120
5	3024
6 & 3, & 5	504
7	72
2 & 2	90720
2, 2 & 2	45360
2, 2, 2 & 2	22680
3 & 3	10080
2, 2, 2 & 3	7560
2 & 4	7560
2, 3 & 3	5040
2, 2 & 4	3780
3 & 4	2520
3, 3 & 3	1680
2 & 5	1512
2, 3 & 4	1260
2, 2 & 5	756
4 & 4	630
2 & 6	252
4 & 5	126
3 & 6	84
2 & 7	36
Toutes ſemblables.	1

COROLLAIRE.

Il eſt aiſé de faire la meſme choſe dans tel autre nombre de notes que l'on voudra. Or la meſme induſtrie ſert pour faire les Anagrammes des noms qui ont deux ou pluſieurs lettres ſemblables, comme les deux autres propoſitions precedentes ſeruent pour ſçauoir le nombre des Anagrammes de tous les noms, dont les lettres ſont toutes differẽtes. Mais ie ne donne pas tous les exemples de cette combination des neuf notes, tant de peur d'eſtre trop long, que parce qu'on la peut voir dans la 13 propoſition du liure Latin des Chants.

Quant aux dictions, ie mets ſeulement icy l'exemple du Nom de noſtre Sauueur IESVS, que l'on pourroit varier en 120 manieres pour faire 120 Anagrammes ſi toutes les lettres eſtoient differentes ; mais parce que la lettre S y eſt deux fois, l'on ne peut faire que les 60 Anagrammes qui ſuiuent, dont la plus grande partie ne ſignifient rien, & dont les deux plus beaux ſont IVSES, & VISES.

Soixante

Fig. 17 - Página do Livro Segundo de *"Harmonie Universelle"* de Mersenne.

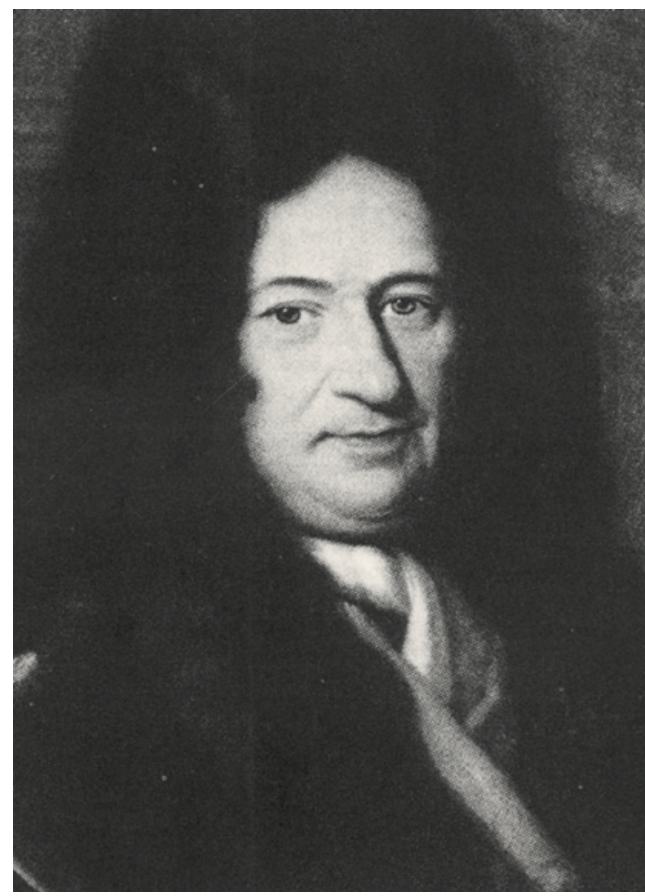


Fig. 18 - G. W. Leibniz (1646-1716).

cada um dos quais determinando por um princípio elementar de combinatória minuetes de dezasseis compassos, com um número gigantesco de melodias possíveis.

Mas se a enumeração exaustiva de todas as combinações possíveis apenas realçou o carácter singular das composições musicais, esse aspecto marcou um outro paralelismo entre a história da música ocidental e a evolução da matemática no século XVII. Nomeadamente para G. W. Leibniz (1646-1716), as ciências matemáticas adquirem um papel mais abrangente, enquanto ciência sobre as representações de todas as possíveis relações e dependências dos elementos mais simples, buscando uma linguagem universal e uma álgebra de raciocínio, aperfeiçoando o cálculo e criando novos algoritmos aos quais se torna necessário dar um simbolismo adequado à essência dos conceitos e operações. Assim, por exemplo, torna-se significativa a proposta simples e funcional da notação leibniziana para o sistema binário, conforme descreveu numa carta de 1701 a J. Bernoulli: "Há muitos anos ocorreu-me uma ideia original sobre um tipo de Aritmética, onde tudo se exprime com 0 e 1".

Fig. 19 - Sistema binário desenhado por Leibniz, onde se lê em cima "*um criou tudo do nada*" e "*um é necessário*" em baixo.

Contudo, este "novo tipo de Aritmética" apenas se veio a concretizar nos modernos computadores, onde cada *bit* representa um estado eléctrico: *on* (corrente) associa-se ao número 1; *off* (ausência de corrente) ao 0; e as sequências de impulsos eléctricos, como por exemplo 01000001 que representa em sistema binário o número 65, e que também pode ser atribuído à letra maiúscula A através de um outro código.

Se podemos considerar como precursoras das modernas calculadoras as máquinas seiscentistas de repercursão limitada, nomeadamente as de W. Schickard (1592-1635) e de B. Pascal (1623-1662) capazes de adicionar e subtrair mecanicamente, ou a de Leibniz de 1671, que também podia multiplicar e dividir, são as máquinas mecânicas de C. Babbage (1791-1871), nomeadamente a *Difference Engine* concebida em 1821, e a *Analytical Engine* desenhada cerca de 1834, que se consideram pelas suas concepções as precursoras dos computadores electrónicos. Com efeito, apesar daquelas máquinas nunca terem sido completamente construídas, os princípios subjacentes ao funcionamento e às potencialidades da *Analytical Engine* foram cedo reconhecidos e, em particular, foram notavelmente comentados por Ada Lovelace (1815-1852), filha de lord Byron e *dear and much admired interpreter* de Babbage. Numa passagem sobre a concepção daquela máquina Lady Lovelace refere especificamente que o seu *mecanismo operativo* (…) *poderia agir sobre outras coisas para além de números, objectos tais que as suas relações fundamentais recíprocas pudessem ser expressas pela ciência abstracta das operações"* e, como exemplo concreto no quadro da notação operativa e mecanismos da *Analytical Engine*, supõe explicitamente "*que as relações fundamentais dos sons determinados na ciência da harmonia e da composição musical pudessem ser expressos e adaptáveis à sua acção; a máquina poderia compor peças musicais científicas e elaboradas, com qualquer grau de complexidade ou extensão*".

Fig. 20 - Ada Lovelace (1815-1852).

Contudo, um mecanismo suficientemente potente capaz de "incorporar a ciência das operações" apenas apareceria com o computador moderno na segunda metade do século XX. Desde logo, surgem as primeiras experiências de composição musical assistida por com-

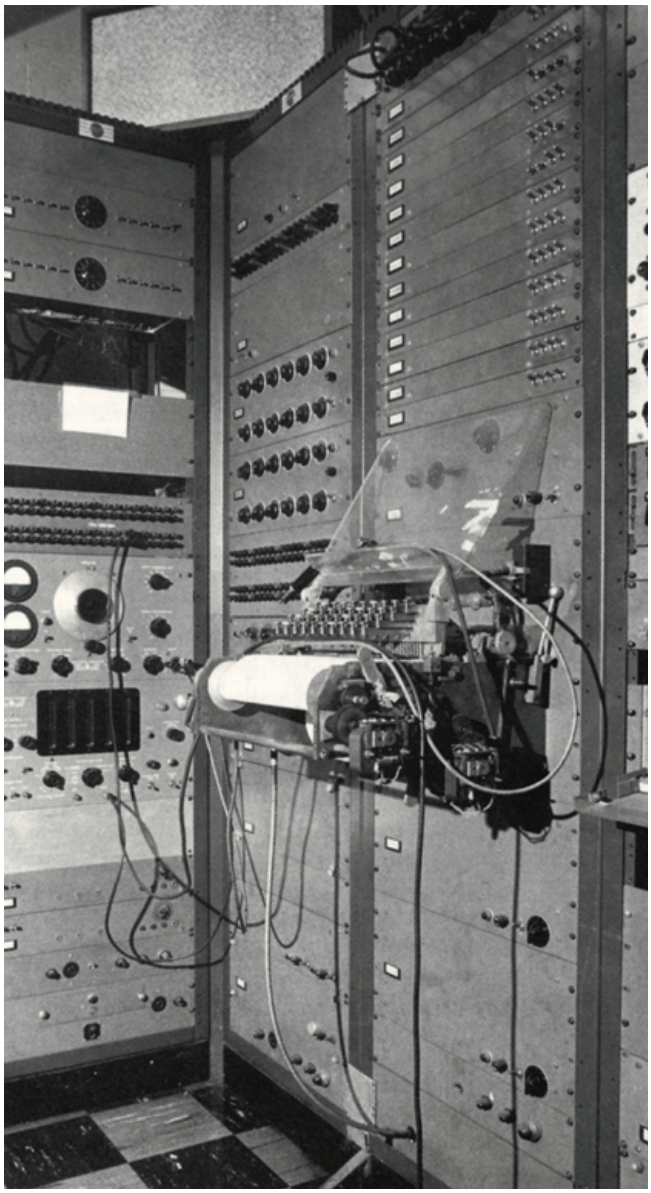


Fig. 21 - Pormenor do *RCA Mark II Electronic Music Synthesizer*, desenvolvido por H. Olson e H. Belar (1957).

putador de L. Hiller em 1956 nos E.U.A., seguidos de P. Barbaud e de I. Xenakis em França e de outras. Nos *Bell Laboratories*, em 1957 M. Mathews e os seus colaboradores realizaram o primeiro registo numérico e a primeira síntese de sons por computador e, em 1965, J.C. Risset simula computacionalmente os primeiros sons de intrumentos musicais.

Em 1973 constrói-se o primeiro sintetizador numérico, o *Synclavier* o qual será então comercializado, e cerca de dez anos depois o público tem acesso à gravação digital dos CD's (compact disc).

O processo complexo de análise do som inicia-se com a captação das ondas sonoras, transmitidas pelo ar, por um microfone que as transforma num sinal eléctrico analógico. Este sinal analógico é medido e convertido numa corrente de números num equipamento de gravação digital. Assim o som numérico é constituído por uma sucessão de dados binários (0's e 1's) e pode ser lido por um computador, armazenado num CD-ROM, enviado pela *internet* e tocado num leitor digital.

Mas se se podem calcular os números sucessivos representando uma onda sonora, efectuando-se a síntese numérica do som e obtendo-se assim uma sonorização com uma precisão e uma reprodutibilidade sem precedentes, pode-se também, através de modalidades diversas especificadas pela programação, compor directamente o som, "inventar" instrumentos e tons artificiais ou tocar música em orquestras virtuais através dos multimedia. Neste processo desempenha desde 1983 um papel fundamental a norma MIDI (*Musical Instrumental Digital Interface*) que permite aos computadores gravar e editar música, do mesmo modo que as notas numa partitura indicam aos músicos como tocar. É claro que neste novo e cada vez mais acessível artesanato informático do som musical a matemática é um instrumento implicitamente omnipresente.

Se hoje em dia temos o domínio da *numerização* na análise e síntese do som musical, se começámos a esboçar a matematização de certas estruturas musicais e os computadores nos permitem *ouvir* os cálculos e as estruturas matemáticas, i.e., parafraseando Saccheri temos *Pythagoras ab omni naevo vindicatus sive Conatus arithmeticus quo stabiliuntur prima ipsa universæ musicæ principia* (Pitágoras liberto de toda a mácula ou a tentativa aritmética de estabelecer os primeiros princípios de toda a música), podemos continuar a concordar com Aristoxenus e aceitar que a justificação da música está no prazer da sua audição e na sua fruição.