GeoGebra 3D
Uma Abordagem para Timor-Leste

Zelina Filomena José Roteiro
Mestrado em Matemática para Professores
Departamento de Matemática
2016

Orientador
Fernando Jorge Soares Moreira, Professor Auxiliar da FCUP

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

AGRADECIMENTO

Agradeço:

- Ao Instituto CAMÕES, IP e UNTL (Universidade Nacional Timor Lorosa'e) por todo o apoio nomeadamente o financeiro prestado.
- Ao meu orientador, Professor Fernando Jorge Moreira, que comigo transformou grandes dificuldades em simples procedimentos, conceitos abstratos em concretos, sempre com a máxima disponibilidade, amabilidade, paciência e competência. Assim construímos esta versão final do trabalho.
- Aos meus estimados professores deste mestrado que dedicadamente me ensinaram, apoiaram em tudo o que eu concretizei nestes dois anos.
- Ao diretor do mestrado, Professor Jorge Paulo Maurício de Carvalho, sempre disponível para responder e apoiar em qualquer problema surgido.
- Ao Diretor da Faculdade e a todos os membros deste invicta Faculdade de Ciências, pelo eficiente e simpático apoio.
- A todos os que contribuíram, seja de que maneira for, durante este percurso académico que culminou neste trabalho.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Daniel e Filomena, pelo carrinho, oração e apoio sem limites.

Ao meu esposo, Júlio, pela aceitação, confiança e amor.

Aos meus filhos, Adai, RubyAbu e RubyOno, pelo sacrifício da minha ausência durante dois anos.

Aos meus queridos irmãos pelo apoio e motivação.

A todos que me apoiaram no tempo difícil, me deram conforto, amizade, casa e felicidade.

Resumo

Em Timor Leste (TL), o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICS) limita-se à utilização pelos professores dos programas de processamento de texto e folha de cálculo (essencialmente o *Word* e *Excel* do *Microsoft*), não sendo usados quaisquer outros programas para o ensino da matemática. Essa situação motivou-me a investir numa ferramenta que pudesse ser usada para obter uma maior interatividade no ensino da geometria, álgebra e análise ao nível do ensino básico e secundário, pois acredito que o uso da TICS no ensino de matemática promove o gosto dos alunos pela disciplina e permite enriquecer a sua aprendizagem.

Neste trabalho partimos de algumas atividades nos tópicos da geometria no espaço que estão nos manuais de matemática do ensino básico [2], [3], [4] e secundário [1] de TL e dar-lhe o caráter mais interativo com o auxílio do *GeoGebra*.

Já existe uma grande base de recursos de apoio para trabalhar na versão bidimensional do *GeoGebra*: tutoriais e exemplos que podem ser usados no ensino da geometria plana [7]. Pelo contrário, para o estudo da geometria no espaço, são escassos os recursos de apoio utilizando *GeoGebra*. Por este motivo, vamos apresentar as características $3D$ do programa *GeoGebra* e exemplificar as suas potencialidades com atividades que se possam inserir no curriculum do ensino da geometria (em particular no que vigora atualmente em TL).

Abstract

In East Timor, the use of Information and Communication Technologies (ICT) by teachers is restricted to the use in processing text and calculus worksheets software (essencially Word and Excel of Microsoft) and no other programs are being used to teach Mathematic. This situation motivated me to invest in an tool that can be used to obtain more interactivity in teaching geometry, algebra and analysis at basic and secondary school grade, since i believe that the use of ICT in math education can promote the students to be like to study the subject and allows to enrich their skills.

In this work we started by some activities with topics of geometry in space that were in the math's manual of basic level [2], [3], [4] and secondary level [1] in East Timor with more interactive behaviour supported by *GeoGebra*.

There is a lot of tools concerning the two-dimensional version of *GeoGebra*: tutorials and examples can be used in teaching plane geometry. On the contrary, for the study of geometry in space, there are a few resources to support *GeoGebra*. Because this reason, we will present the characteristics $3D$ of *GeoGebra* and show its power with activities that can be included in the curriculum of teaching geometry (in particular in the one used in in East Timor).

Palavras Chaves

Ensino da matemática em Timor-Leste, tecnologias no ensino da matemática, visualização de objetos tridimensionais, geometria dinâmica, *GeoGebra*.

Conteúdo

Resumo **iii**

Abstract **iv**

Palavras Chaves **v**

Conteúdo **vi**

1 Introdução **1**

2 *GeoGebra* **7**

2.1 Iniciar o programa 7

2.2 Folha Gráfica $3D$ no desktop 9

2.2.1 Menu Principal 10

2.2.2 Barra de Ferramentas 14

2.2.3 Janela de Álgebra 35

2.2.4 Folha Gráfica 3D 37

2.2.5 Barra de Entrada 41

2.3 Folha Gráfica $3D$ na web 43

3 Exemplo de Atividades **45**

3.1 7º ano 45

3.1.1 Posição relativa de dois planos 45

3.1.2 Interseção de um plano com um cubo 47

3.2 8º ano 56

3.2.1 Planificação de um cubo 56

3.2.2 Decomposição do cubo em 6 pirâmides 66

3.3 9º ano 70

3.3.1 Planificação do cilindro 70

3.3.2 Planificação do cone 81
3.3.3 Ferramenta para rotação de superfícies 86
3.4 12º ano 92
3.4.1 Secções no cone 92
3.4.2 Secções no cilindro 99

4 Conclusão **103**

Lista de construções **105**

Bibliografia **108**

Capítulo 1

Introdução

O *GeoGebra* [8] foi introduzido por *Markus Hohenwarter* em 2001 com o intuito de produzir uma ferramenta computacional que fizesse a ligação entre álgebra e geometria. Este programa tem sido constantemente melhorado e em Dezembro de 2014 surgiu a nova versão 5.0 que permite trabalhar em geometria tridimensional ($3D$). O *GeoGebra* pertence a um grupo de programas que fornecem ferramentas para abordar o que se classifica atualmente como geometria dinâmica. Este programa permite elaborar construções geométricas em que as relações entre os vários objetos se mantém mesmo alterando algumas das condições iniciais. Por exemplo podemos desenhar três pontos e unir estes três pontos por três segmentos de reta, formando assim um triângulo. O *GeoGebra* permite mover os pontos iniciais e os três segmentos ajustam-se automaticamente aos novos pontos de modo a continuar a formar um triângulo, como vemos na figura seguinte[1]

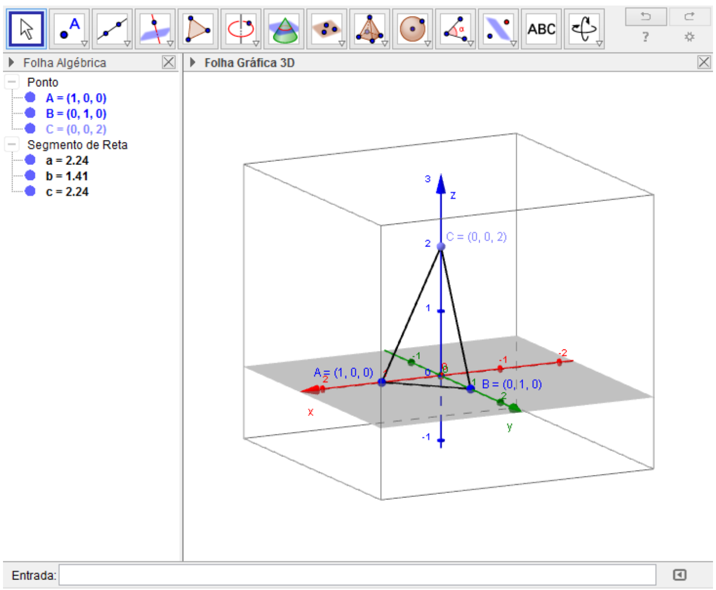


Figura 1.1: Triângulo

[1]Na versão eletrónica desta dissertação todas as figuras têm uma hiperligação que permite abrir a construção diretamente no navegador da internet.

As possibilidades que o programa fornece na área de geometria dinâmica em que vários objetos geométricos são construídos de uma maneira "visual" (ver secção 2.2.2) são complementadas com o módulo algébrico que permite definir os objetos de uma forma analítica. Esta dualidade na criação dos objetos também é acompanhada na sua apresentação. Qualquer objeto criado no *GeoGebra* tem sempre, para além da sua representação gráfica, uma representação algébrica. Por exemplo, os pontos e os segmentos da figura anterior estão também representados algebricamente numa janela que se denomina Folha Algébrica.

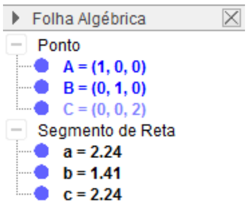


Figura 1.2: Folha algébrica

O programa pode ser obtido gratuitamente e executado num navegador da *web* [5] sem qualquer instalação prévia. Existem também versões, de fácil e rápida instalação, para os sistemas operativos mais utilizados na atualidade [6]. Para instalar este programa no computador, o utilizador deve aceder ao local oficial do *GeoGebra* - " *http://www.geogebra.org*". As figuras seguintes correspondem respetivamente à execução do *GeoGebra* no sistema operativo o *windows* da *microsoft* (fig. 1.3) e à execução numa página *web* (fig. 1.4).

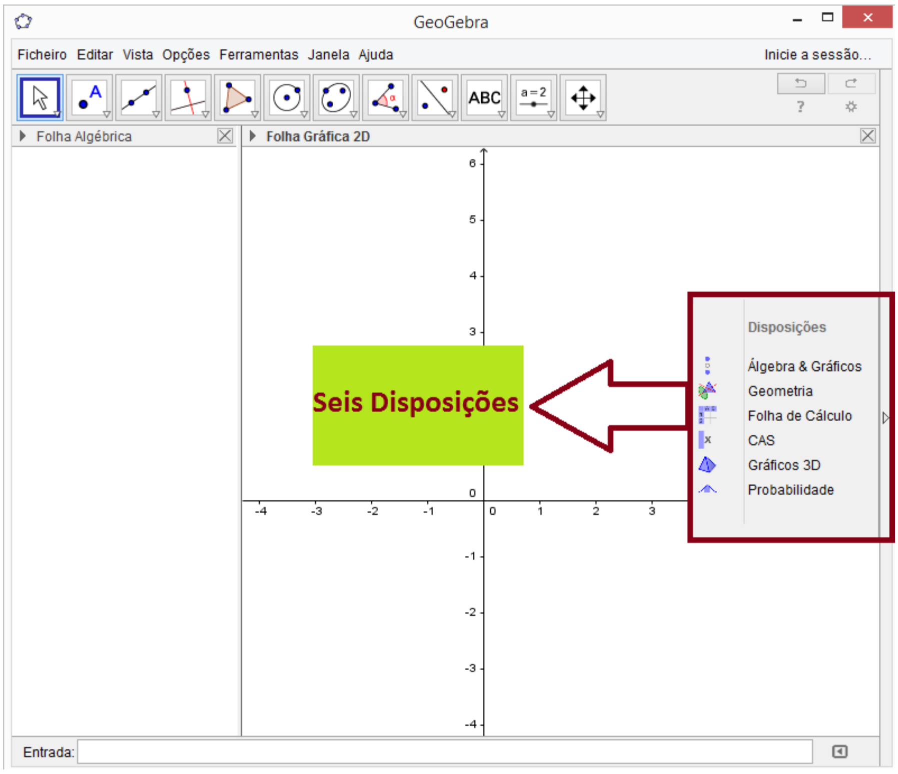


Figura 1.3: Ambiente *GeoGebra* - *desktop*

Figura 1.4: Ambiente *GeoGebra* - web

Cada tipo de folha do *GeoGebra* tem uma barra de ferramentas associada e está disponível quando ativa no menu vista do programa. A barra de ferramentas da folha gráfica $3D$ é apresentada no topo da janela do *GeoGebra* e está dividida em 14 grupos. Em cada instante só é visível apenas um dos ícones de cada grupo de ferramentas. Para aceder a outras ferramentas do mesmo grupo selecionamos o pequeno triângulo existente em baixo e á direita do ícone que está atualmente visível. Desta forma temos acesso a todas as ferramentas do grupo.

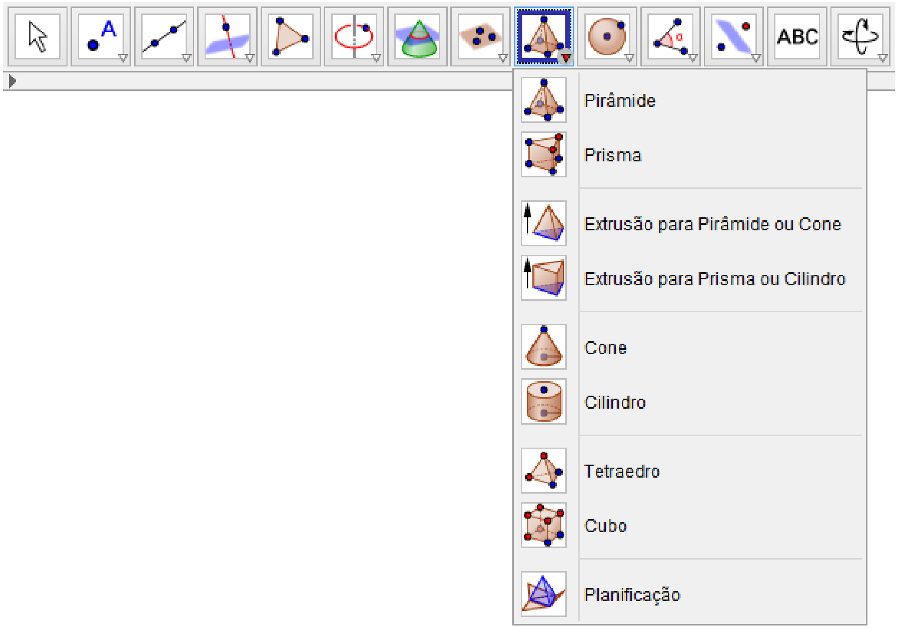


Figura 1.5: Ferramentas para desenhar os sólidos geométricos

Na figura anterior mostra-se um dos grupos das ferramentas que só se encontra na folha gráfica $3D$, que é o grupo de ferramentas sobre sólidos geométricos. As ferramentas da folha gráfica $3D$ segue uma filosofia idêntica às ferramentas associadas à folha gráfica $2D$. Cada ferramenta gera um objeto que depende de algumas condições iniciais e, alterando essas condições, as propriedades dos objetos permanecem. Por exemplo criando uma esfera com centro num ponto A e um raio r, se movemos o ponto que é o centro da esfera veremos que a esfera se ajusta ás novas coordenadas do ponto.

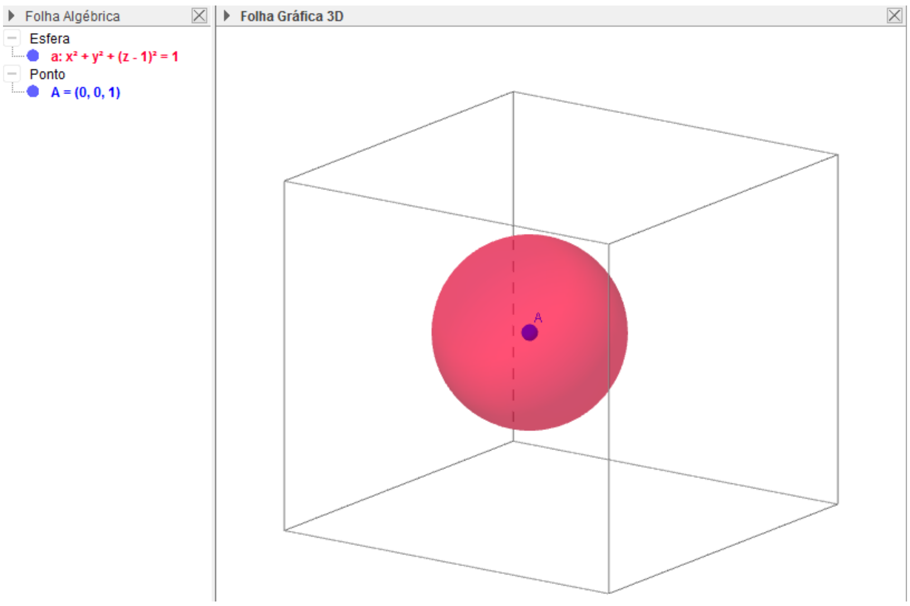


Figura 1.6: Esfera - "Ponto e Raio"

Na folha gráfica $3D$ o utilizador terá de saber como movimentar os objetos no espaço. Enquanto na folha gráfica $2D$ basta apenas arrastar os pontos com o apontador do rato na direção que se pretende, na folha gráfica $3D$ temos mais uma dimensão para controlar. Para escolher o ângulo de visualização dos objetos na folha gráfica $3D$ devemos selecionar a ferramenta com ícone mover e assim arrastando o apontador do rato rodamos o referencial da folha gráfica $3D$. Para mover pontos na folha gráfica $3D$ é possível alternar entre dois modos, clicando no ponto pretendido. No modo plano "xOy" vai aparecer a seta "" que permite deslocar o ponto paralelamente ao plano "xOy" sem alterar a coordenada z. No modo "eixo dos zz" vai aparecer a seta "" é possível deslocar o ponto paralelamente ao "eixo dos zz" sem alterar as coordenadas x e y. Uma descrição alargada de como funciona a folha gráfica $3D$ e as respetivas ferramentas pode ser vista no capítulo 2 (pág. 7).

No capítulo 3 (pág. 45) faremos a construção de alguns módulos que podem ser utilizados como base para diferentes atividades no contexto da sala de aula na área de geometria no espaço. Na secção (3.2.1) podemos ver como as ferramentas já incluídas no *GeoGebra* nos permitem uma abordagem à planificação de poliedros bem mais apelativa do que as atividades existentes nos manuais atuais.

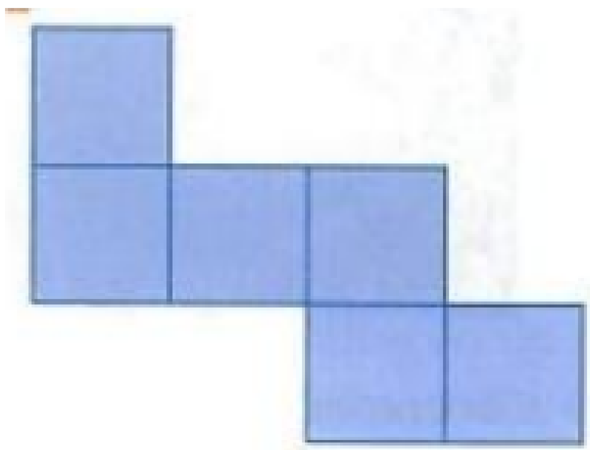


Figura 1.7: Planificação do cubo

Na figura anterior apresentamos uma planificação do cubo constante no manual matemática 8º ano [3] (*pág.126*). A sua total interatividade não pode ser vista na versão impressa da dissertação mas apenas acedendo ao *link*: "*http://ggbtu.be/mesOGafLs*". Na versão eletrónica basta seguir a hiperligação que existe na imagem.

Contrariamente ao apresentado na construção anterior, a obtenção da interatividade na planificação de outros sólidos que não estejam contidas na ferramenta existente no *GeoGebra* é uma tarefa que exige um tratamento mais cuidado e longo na sua abordagem. Por exemplo, na secção (3.3.1) descrevemos como obter um módulo do *GeoGebra* de apoio a uma tarefa proposta no manual matemàtica 9º ano [4] do ensino básico (*pág.135*), que corresponde a uma planificação do cilindro. Nesta secção como na secção (3.3.2) do cone tivemos de implementar as ferramentas de rotação de uma superfície em abstrato. Os comandos existente no *GeoGebra* para rotação não se aplicam as superfícies em abstrato. Embora exista um comando que permite esboçar superfície no espaço, os comandos rotação e translação só se aplicam aos poliedros. Assim fomos obrigados a implementar uma ferramenta que permite a rotação de superfície no *GeoGebra*. Isto pode ser visto na secção (3.3) e é aplicado nas construções (fig. 3.54) e (fig. 3.63).

Na secção (3.4) veremos como uma manipulação adequada das ferramentas do *GeoGebra* permite de uma forma bastante elucidativa abordar o tema das cónicas como a interseção de um plano com um cone (secção 3.4.1) ou um cilindro (secção 3.4.2).

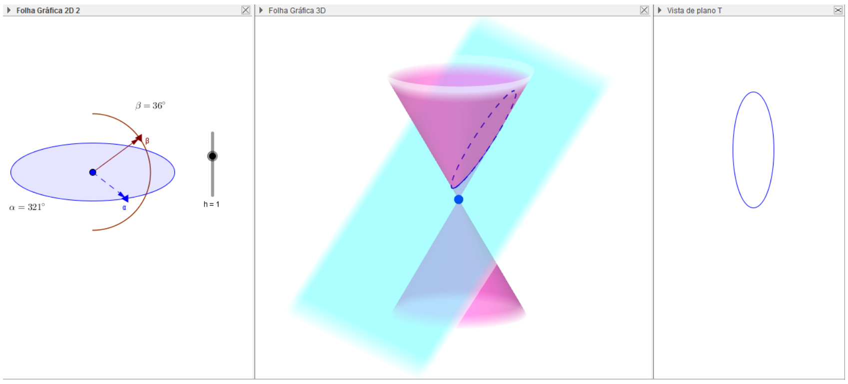


Figura 1.8: Elipse

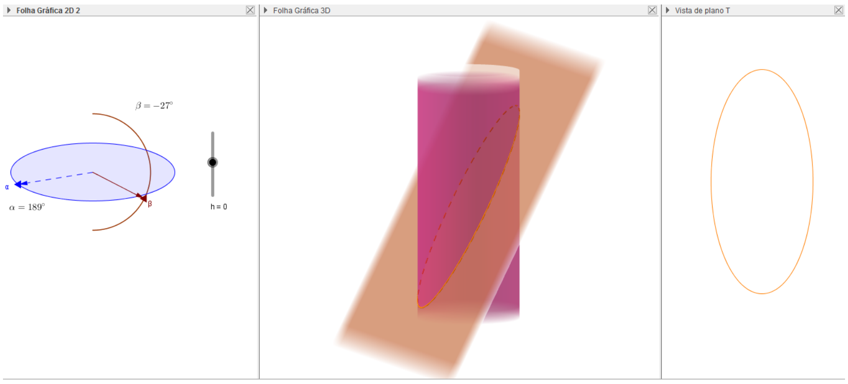


Figura 1.9: Elipse

Como já se referiu, sempre que for elaborada uma construção e apresentada uma figura neste trabalho, a própria figura contém uma hiperligação para a construção. Essas construções estão hospedadas num serviço designado por "*GeoGebraTube*" [9] que corresponde ao alojamento similar ao alojamento de vídeos fornecidos pelo *youtube*.

Capítulo 2

GeoGebra

O *GeoGebra* é um *software* de geometria dinâmica livre, que permite a construção de diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cónicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; os quais podem ser modificados dinamicamente.

2.1 Iniciar o programa

Ao executar o *GeoGebra* irá aparecer uma janela que permite escolher seis maneiras distintas de iniciar o programa que são designadas no *GeoGebra* por "disposições". Como mostra na figura seguinte:

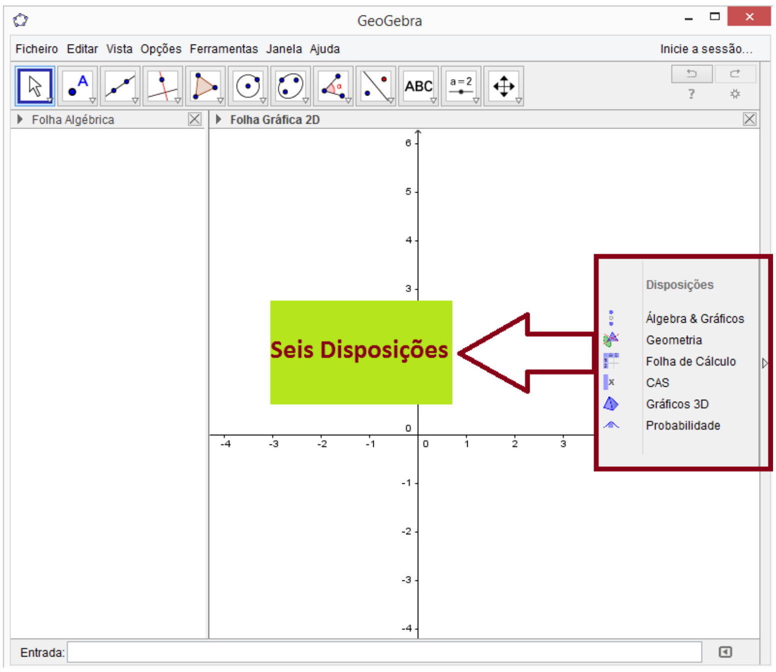


Figura 2.1: Ambiente *GeoGebra* - *desktop*

O *GeoGebra* é constituído por vários módulos como álgebra, geometria $2D$, geometria $3D$, folha de cálculo, probabilidades e estatística. Cada um deste módulos tem associada uma janela própria no *GeoGebra*. Estas janelas podem estar ou não ativas consoante à opção do utilizador. Ao iniciar o *GeoGebra*, ele apresenta várias opções como disposições iniciais destas janelas[1]. As várias opções disponíveis são:

1. Álgebra e Gráficos.

   Selecionando esta opção irá aparecer a folha algébrica e a folha gráfica $2D$. A folha algébrica que como o nome indica contém a representação algébrica dos vários objetos que venham a ser construídos. Na folha gráfica $2D$ pode-se trabalhar com objetos geométricos bidimensionais.

2. Geometria.

   Nesta disposição apenas aparece a janela da folha gráfica $2D$, ficando escondida a janela algébrica. Será útil quando se pretende apenas usar a barra de ferramentas para introdução dos objetos $2D$, e não estamos interessados na sua representação analítica.

3. Folha de Cálculo.

   A folha de cálculo permite trabalhar com objetos geométricos duma maneira similar como se trabalha nas atuais folhas de cálculo tipo *excel*.

   Para qualquer objeto construído no *GeoGebra* é possível fazer com que a sua definição algébrica apareça numa célula da folha de cálculo definindo o nome do objeto com a letra e o número do índice da célula. Por exemplo, se definimos um ponto com o nome $A3$, a sua descrição algébrica aparece na célula da coluna A e linha 3. Reciprocamente, podemos introduzir na própria célula, os comandos que definem o objeto pretendido (precedido de =), tal e qual como se introduz na linha de entrada ficando assim, o objeto com o nome da linha e coluna da célula em questão.

   Por exemplo se digitarmos $\boxed{=(1,2,3)}$ na célula $B2$, será desenhado o ponto $\boxed{=(1,2,3)}$ com o nome $B2$.

4. CAS (Álgebra computacional simbólica).

   A folha CAS permite efetuar no *GeoGebra* álgebra computacional como derivação, integração, etc.

5. Gráficos $3D$.

   A folha gráfica $3D$ é aquela em que este trabalho assenta e corresponde à representação gráfica dos objetos no espaço.

6. Probabilidade e estatística.

   Este é um módulo que foi introduzido na versão 5.0 mas que não será explorado neste trabalho.

[1] Neste trabalho utilizaremos o termo "folha" quando falamos de uma janela do *GeoGebra*

2.2 Folha Gráfica $3D$ no desktop

Se selecionarmos o modo da folha gráfica $3D$ aparecerá uma janela com o aspeto seguinte.

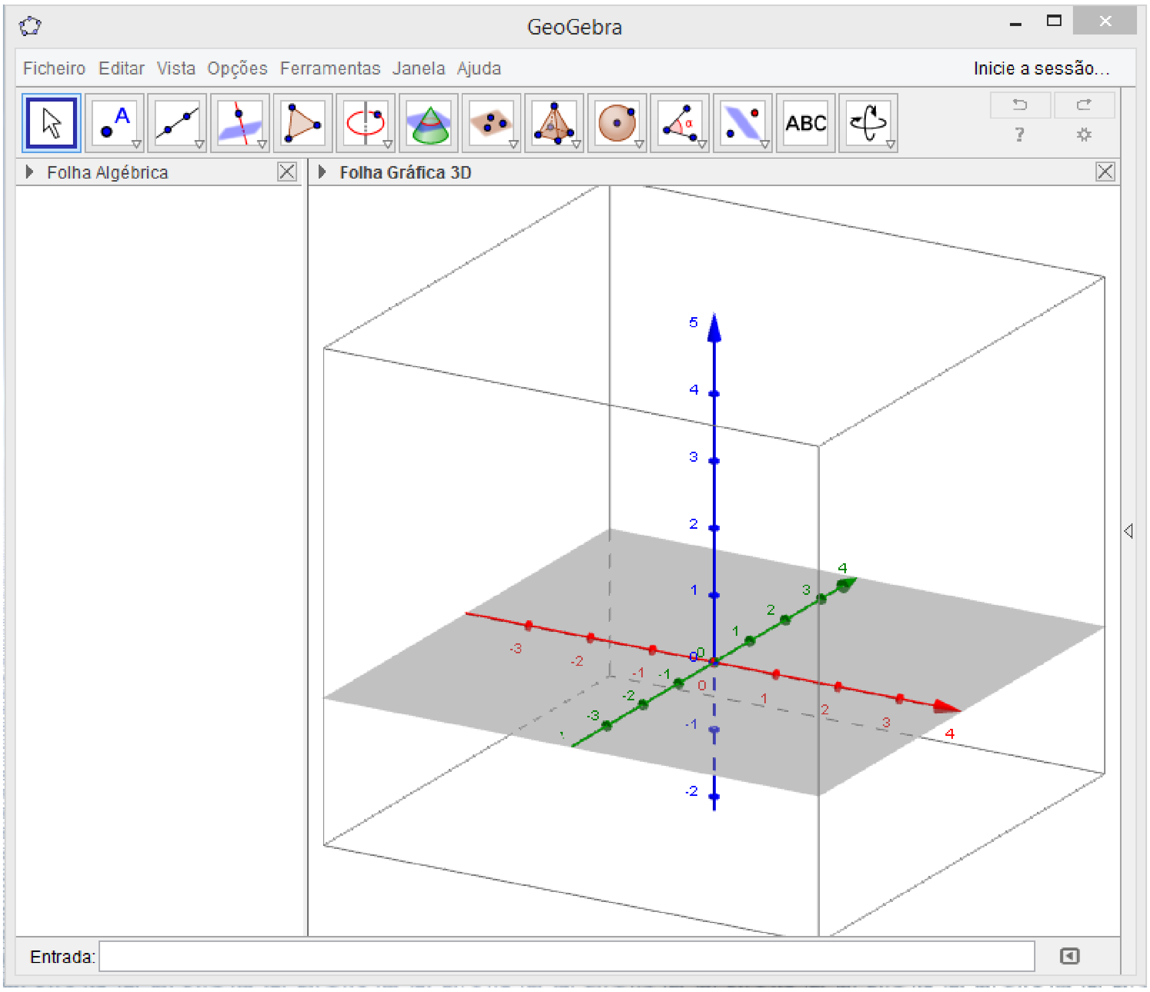


Figura 2.2: Ambiente *GeoGebra* $3D$

Na janela que aparece selecionando folha gráfica $3D$ podemos distinguir cinco zonas de trabalho que passamos a elencar:

2.2.1 Menu Principal

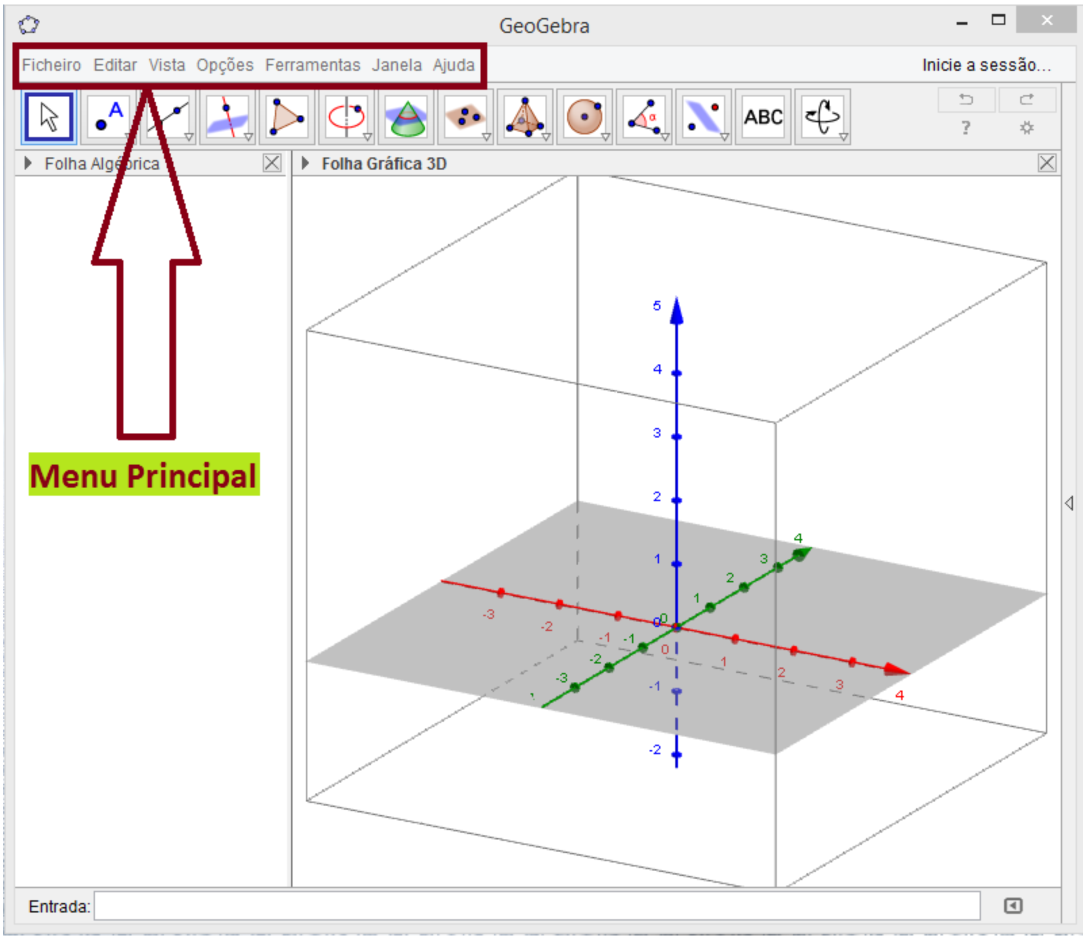


Figura 2.3: Menu principal

A barra de menus fica na parte superior da janela *GeoGebra*, e é composta pelos sete grupos de opções que passamos a descrever.

1. Ficheiro

   O menu ficheiro funciona de modo análogo ao de outros editores tais como o *Microsoft word*. O utilizador pode usá-lo para abrir, gravar e exportar o ficheiro da sua construção. Uma das opções é "Abrir do GeoGebratube". Como referimos na página 6, o *GeoGebraTube* é um serviço de alojamento de construções de *GeoGebra* similar ao serviço de *youtube* para vídeos. Para esta opção, o computador do utilizador precisa de ter acesso à internet, sendo então possível aceder automaticamente aos materiais alojados no *GeoGebraTube*. Outro item que se deve realçar é a função "Exportar". Aqui o utilizador encontra varias opções que permitem guardar a sua construção em diferentes formatos. Neste trabalho todas as construções foram exportadas utilizado a opção "Exportar" como "Folha de Trabalho Dinâmica como Página Web (html)"[2]. Selecionando esta opção de exportação obtemos uma janela idêntica à que se mostra na figura seguinte:

[2]Antes de utilizar esta opção o utilizador necessita ter efetuado o *login* na *GeoGebraTube*. Isto é solicitado na primeira vez que o *GeoGebra* é executado.

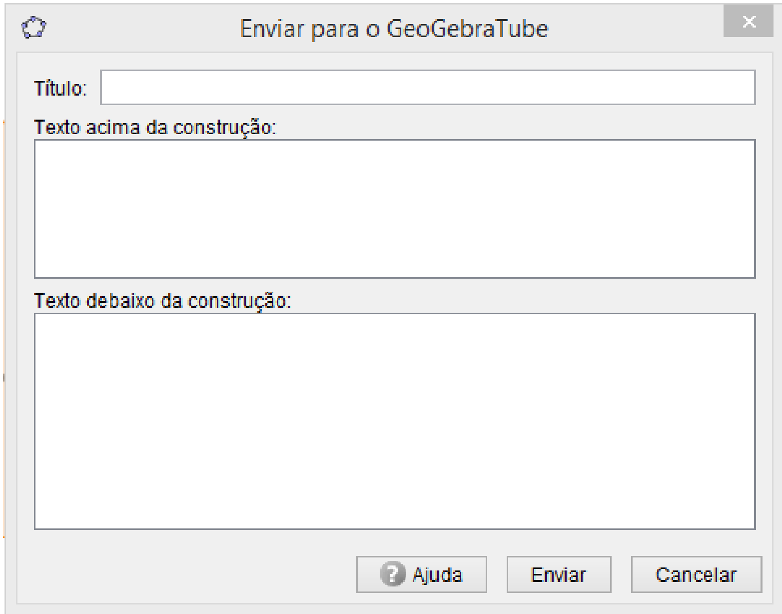


Figura 2.4: Janela enviar construção para *GeoGebraTube*

A informação inserida nos campos da figura anterior vai aparecer na descrição da construção que será inserida no *GeoGebraTube*. A construção será inserida com o mesmo aspeto que apresenta atualmente ao se selecionar a função "Exportar". Assim se tivermos a folha de álgebra e a folha gráfica $3D$ abertas a construção ficará guardada com as mesmas características, ou seja, a folha de álgebra e a folha gráfica $3D$ estarão abertas sempre que se aceder a esta construção no *GeoGebraTube*. Depois de enviar a informação pela janela anterior, o utilizador ainda vai ter que preencher campos adicionais na página *web* do *GeoGebraTube* tais como se o material vai ficar acessível a todo o público ou vai ser restrito; qual a audiência que se acha ajustada: alunos, professor do ensino básico, professor do ensino secundário, etc. Nesta fase também se tem acesso no *GeoGebraTube* a um leque de "Configurações avançadas" onde pode ser selecionado opções adicionais tais como mostrar ou esconder barra de menus, mostrar ou esconder barra de ferramentas, mostrar ou esconder campo de entrada, etc.

2. Editar

   No menu editar temos a possibilidade de aceder ao item propriedades dos objetos. Aqui abre-se uma janela onde o utilizador pode controlar o aspeto dos objetos apresentados nas várias folhas gráficas.

3. Vista

   Neste menu o utilizador tem possibilidade de mostrar e esconder os vários módulos do *GeoGebra*. Salienta-se que todas as construções que se façam na folha gráfica $2D$ serão representadas no plano "xOy" da folha gráfica $3D$. Assim, poderão ser usadas todas as ferramentas conhecidas da folha gráfica $2D$ para construir os objetos no plano "xOy". Se pretendermos efetuar uma construção $2D$ e não quisermos que apareça no plano "xOy" teremos de usar o item "Folha Gráfica $2D$ 2".

4. Opções

   Aqui temos várias maneiras de configurar o comportamento da aplicação do *GeoGebra*. Neste menu o utilizador pode modificar o arredondamento dos valores numéricos, mudar o tamanho das fontes, mudar idioma, rotulagem, etc. A opção "Rotulagem" contêm quatro opções como "Automática" onde mostra automaticamente as rotulagens, "Todos os Objetos Novos", "Nenhum Objeto Novo" e "Apenas Pontos Novo".

   Por exemplo, quando desenhamos um paralelepípedo e a sua planificação, ativamos primeiro a opção "Apenas Pontos Novos". Deste modo desenhamos um poliedro e na sua planificação irá aparecer apenas rótulos para os novos pontos, sem que apareçam rótulos para os outros objetos tais como faces, arestas, etc, ver (fig. 2.5). Na (fig. 2.6) mostra-se a diferença quando se efetua a mesma construção e a opção rótulo automática está ativa.

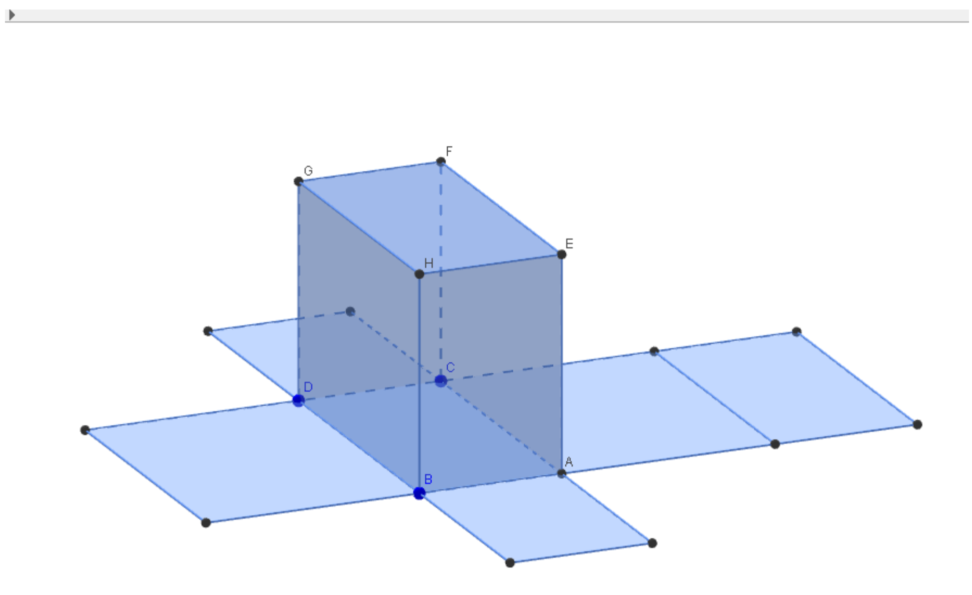


Figura 2.5: Paralelepípedo e sua planificação

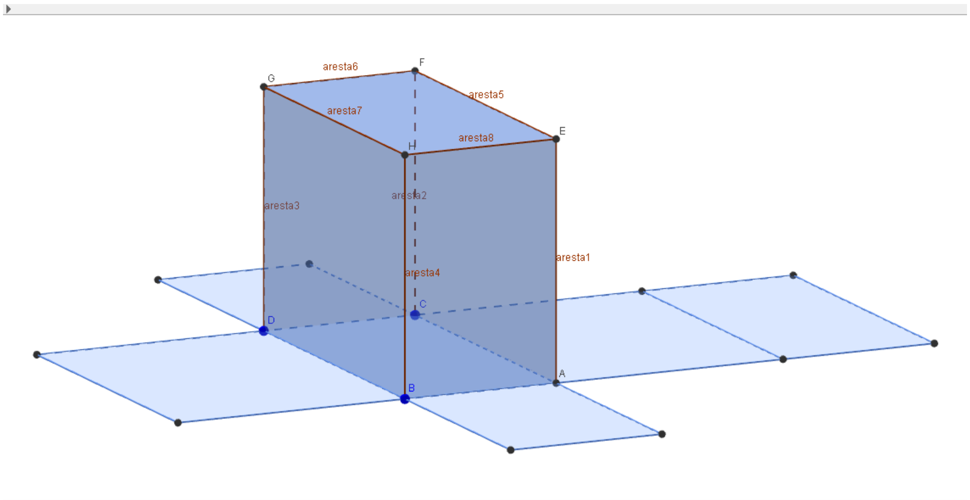


Figura 2.6: Paralelepípedo e sua planificação

Neste trabalho optamos pela opção "Apenas Pontos Novos" antes de elaborar qualquer construção. Quando foi necessário acrescentar rótulos a outros objetos fazemos essa alteração na folha algébrica ou através do menu de contexto, pressionando o botão direito do rato quando a cursor estiver sobre o objeto que pretendemos rotular.

5. Ferramentas

   Neste menu existem três possibilidades. No item "Personalizar a Barra de Ferramentas" é possível gerir e organizar as ferramentas que são mostradas na janela do *GeoGebra*. Na opção "Criar Nova Ferramenta" o utilizador pode criar as suas próprias ferramentas. A opção "Gerir Ferramentas" serve para o utilizador efetuar a gestão das ferramentas que construiu. Este menu é idêntico ao menu das folhas gráficas $2D$.

   Na página 89 poder-se-á ver a criação e utilização de novas ferramentas no *GeoGebra*.

6. Janela

   O *GeoGebra* permite trabalhar em simultâneo em várias construções, podendo ter janelas distintas abertas simultaneamente e cada janela ter uma disposição diferente. É neste menu que se faz a gestão das janelas ativas.

7. Ajuda

   Aqui o utilizador tem acesso direto ao manual alojado na página da internet do *GeoGebra*.

2.2.2 Barra de Ferramentas

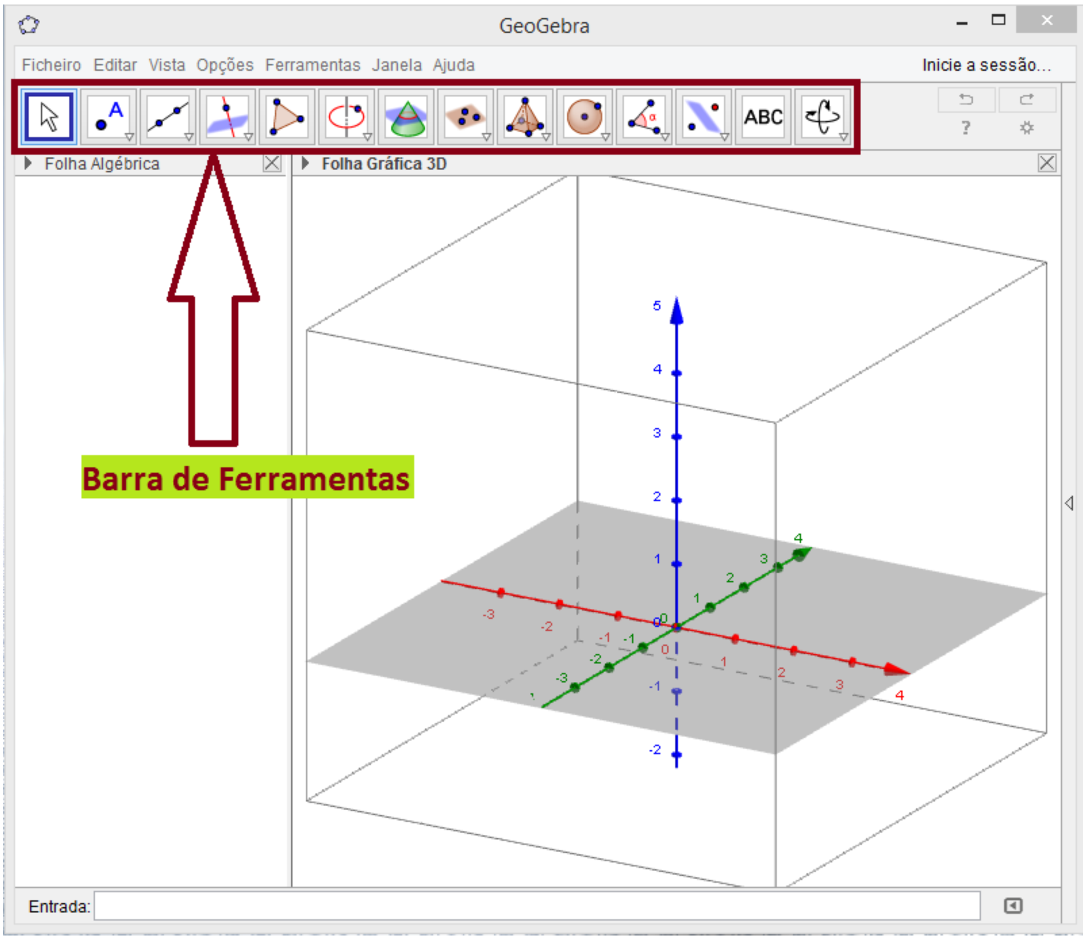


Figura 2.7: Barra de ferramentas

É neste local que se encontram as ferramentas padrão que permitem a construção dos objetos matemáticos $3D$. Ao posicionar o ponteiro do rato sobre cada uma destas ferramentas, aparecerá uma breve descrição de como utilizá-la. Esta barra oferece uma ampla variedade de ferramentas que podem aceder com o rato e que criam objetos tridimensionais diretamente na folha gráfica $3D$. Ela aparece no topo da folha gráfica $3D$ e está dividida em 14 grupos, em que apenas um dos ícones aparece conforme o indicado na figura.

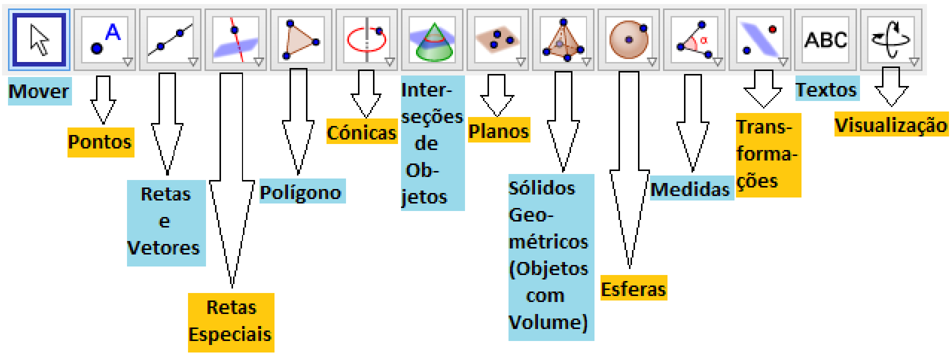


Figura 2.8: 14 grupos na barra de ferramentas

Para se aceder a outra ferramenta do grupo tem que se selecionar o triângulo no canto inferior direito do ícone atual representativo do grupo, ficando assim acessíveis a restantes ferramentas. Podemos então selecionar a que desejarmos. O ícone correspondente à ferramenta assim selecionada vai ser aquele que vai ficar visível como ícone do grupo.

De seguida iremos descrever brevemente as ferramentas disponíveis nesta barra. A filosofia subjacente ao funcionamento desta barra derivam da folha gráfica $2D$.

1. **Mover**

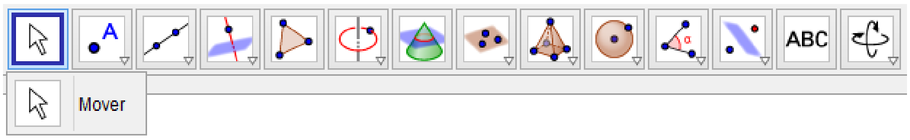


Figura 2.9: Ferramenta para mover

Esta ferramenta é utilizada para arrastar e mover os pontos livres (O ponto de cor azul ou o ponto que não depende de outro valor). Para mover um ponto num sistema de coordenadas $3D$, é possível alternar entre dois modos, clicando sucessivamente no ponto pretendido.

No modo plano "xOy" vai aparecer a seta "" que permite deslocar o ponto paralelamente ao plano "xOy" sem alterar a coordenada z. No modo "eixo dos zz" vai aparecer a seta "" é possível deslocar o ponto paralelamente ao "eixo dos zz" sem alterar as coordenadas x e y.

Na folha gráfica $3D$ é possível usar a tecla "*Page Up*" para mover um objeto selecionado para cima, e a tecla "*Page Down*" para mover um objeto selecionado para baixo.

Ao selecionar um ponto ou objeto no modo "mover", pode-se apagar o ponto ou objeto pressionando a tecla "*delete*". É possível ativar a ferramenta "mover" pressionando a tecla "*esc*".

2. **Pontos**

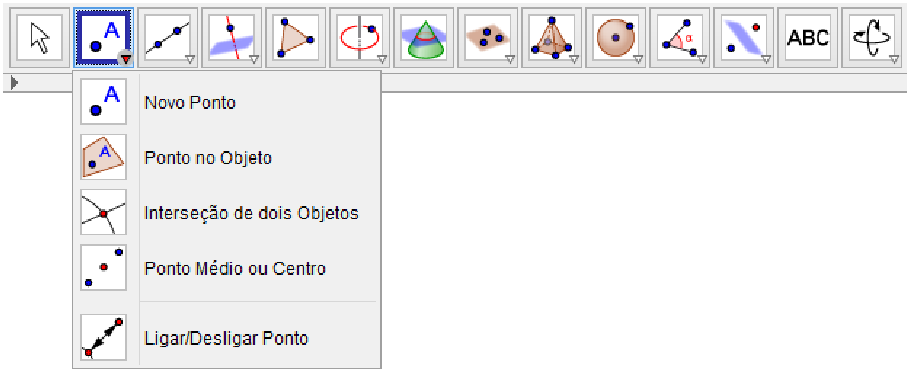
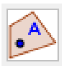


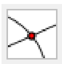
Figura 2.10: Ferramentas para desenhar os pontos

2.1  Novo Ponto

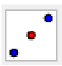
Clicando numa área livre da folha gráfica $3D$ cria-se um novo ponto $(x, y, 0)$ com $x, y \in \mathbb{R}$. As coordenadas x e y do ponto são fixadas quando o botão do rato é libertado. O *GeoGebra* colocará o ponto sobre o plano xOy, cabendo ao utilizador mover o ponto para a cota pretendida. Por omissão, o ponto marcado aparecerá também na folha gráfica $2D$. As coordenadas também podem ser alteradas na folha algébrica.

2.2  Ponto no Objeto

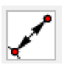
Para criar um ponto sobre um Objeto, clicar primeiro no botão da ferramenta e depois sobre o objeto. Este novo ponto pode ser movido com recurso à ferramenta "Mover" (fig. 2.9), mas o seu movimento fica restrito ao objeto a que pertence.

2.3  Intersecção de dois objetos

Clica-se em dois objetos ou na sua interseção e cria-se um novo ponto correspondente à sua intersecção.

2.4  Ponto Médio ou Centro

Clica-se em dois pontos, num segmento de reta, numa circunferência ou numa cónica e obtém-se o ponto médio ou o centro do objeto.

2.5  Ligar/Desligar Ponto

Permite associar um ponto a um objeto clicando no ponto seguido do objeto.

3. **Retas e Vetores**

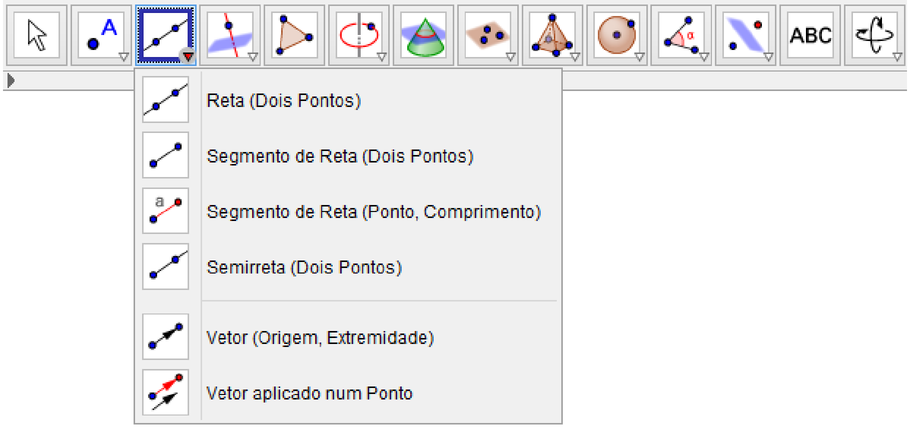
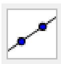
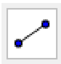


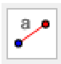
Figura 2.11: Ferramentas para desenhar as retas e vetores

3.1  Reta (Dois Pontos)

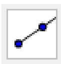
Seleciona-se (ou cria-se) dois pontos para obter uma reta que passa por eles.

3.2  Segmento de Reta (Dois Pontos)

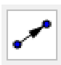
Seleciona-se (ou cria-se) dois pontos para obter um segmento com início e fim nestes pontos escolhidos.

3.3  Segmento de Reta (Ponto, Comprimento)

Seleciona-se um ponto e digita-se o comprimento do segmento no campo comprimento do quadro de diálogo que surge.

3.4  Semi Reta (Dois Pontos)

Selecionar um primeiro ponto que será a origem da semirreta e um segundo ponto pelo qual a semirreta irá passar.

3.5  Vetor (Origem, Extremidade)

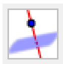
Selecionar dois pontos, em que o primeiro é a origem do vetor e o segundo é a extremidade.

3.6  Vetor aplicado num Ponto

Começa-se por definir um vetor com o comando anterior, de seguida seleciona-se um ponto ou cria-se um novo ponto e aplica-se o vetor a este ponto.

4. **Retas condicionadas**

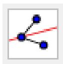
Figura 2.12: Ferramentas para desenhar as retas especiais

4.1  Reta Perpendicular

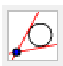
Para criar uma reta que passa por um determinado ponto e é perpendicular a outra reta ou a um plano, começa-se por escolher o ponto e depois seleciona-se a reta ou o plano ao qual a nova reta será ortogonal.

4.2  Reta Paralela

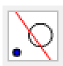
Enviar uma reta que passa pelo ponto A e é paralela a uma reta t, cria-se o ponto A e de seguida seleciona-se a reta t. Assim, o comando cria uma reta s paralela a t que passa por A.

4.3  Bissetriz

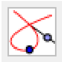
Seleciona-se duas retas concorrentes num ponto ou três pontos não colineares e cria-se a bissetriz associada a estas duas retas ou aos três pontos selecionados.

4.4  Tangentes

Podem-se produzir tangentes a cónicas e gráficos das funções. Para que as retas tangentes estejam definidas é preciso que todos os objetos que definem estejam no plano xOy.

4.5  Reta Polar ou Diametral

Esta ferramenta cria a reta polar ou diametral de uma cónica (circunferência e elipse). Selecionar um ponto e a cónica para obter a reta polar. Selecionar uma reta ou um vetor e uma secção cónica para obter a reta diametral. Este comando também funciona apenas quando os objetos estão no mesmo plano.

4.6  Lugar Geométrico

Seja A um ponto definido num objeto B (linha, curva ou gráfico de função) e P um ponto que depende de A. Esta ferramenta permite visualizar o lugar geométrico que P percorre quando A percorre todos os pontos do objeto B. Depois de selecionar esta ferramenta escolhemos o ponto P e depois o ponto A.

5. **Polígono**

Figura 2.13: Ferramentas para desenhar o polígono

Esta ferramenta permite construir no plano "xOy" um polígono a partir da escolha dos seus vértices. Selecionamos sucessivamente todos os pontos que pretendemos para vértices do polígono e no final escolhemos novamente o ponto inicial e desta maneira o polígono é construído.

Por exemplo, para construir um prisma hexagonal que está no manual matemática 8º ano [3] do ensino básico (*pág. 126*), teremos de recorrer ao mecanismo de ligação entre as folhas gráficas $2D$ e $3D$. No momento da escrita deste trabalho, não existe ferramenta na folha gráfica $3D$ que construa automaticamente um prisma cuja base é um polígono regular, mas existe ferramenta na folha gráfica $3D$ que constrói um prisma dado os vértices da sua base e na folha gráfica $2D$ uma ferramenta que produz um polígono regular. Assim construímos na folha gráfica $2D$ um polígono regular e ele aparece no plano "xOy" da folha gráfica $3D$. Utilizamos depois este polígono como os parâmetros para a ferramenta prisma da folha gráfica $3D$. Obtemos deste modo um prisma, em que a sua base é um polígono regular.

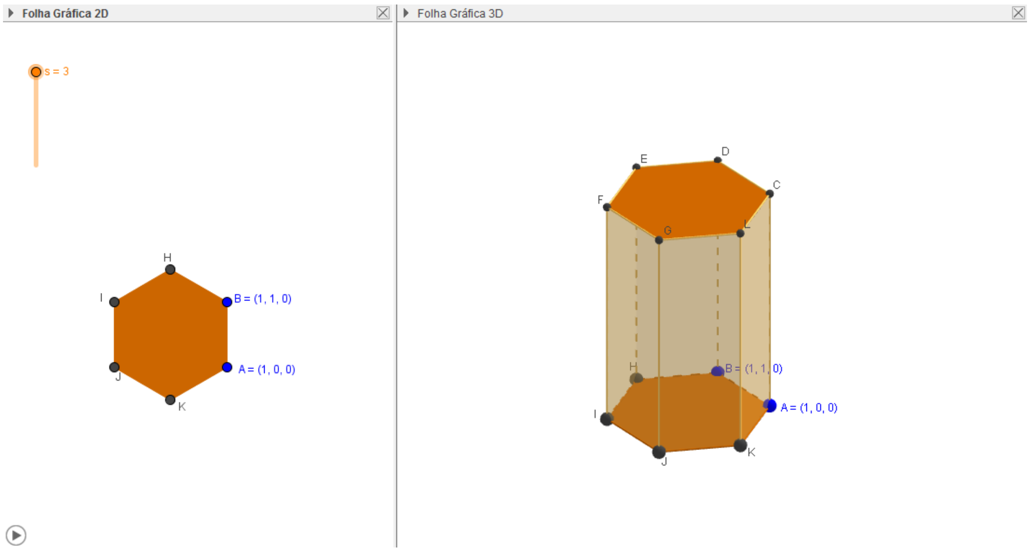
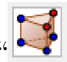


Figura 2.14: Prisma hexagonal

A construção em cima foi assim obtida: criamos dois pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 0)$ e ativamos a ferramenta polígono regular na folha gráfica $2D$. Selecionamos então os pontos A e B (para um lado de um polígono) e de seguida escolhemos 6 para o número de lados do polígono regular. Obtemos assim hexágono regular para base do prisma. De seguida criamos um seletor s na folha gráfica $2D$ que representará a altura do prisma. Por fim com a ferramenta “  Prisma” escolhemos sucessivamente o hexágono e o seletor s para construir o prisma pretendida.

6. **Cónicas**

Neste grupo de ferramentas podemos encontrar várias maneiras distintas de construir algumas cónicas no espaço. Os próprios nomes são sugestivos de qual é a cónica que é construída. Descremos brevemente quais são os objetos que cada uma necessita para gerar a sua construção.

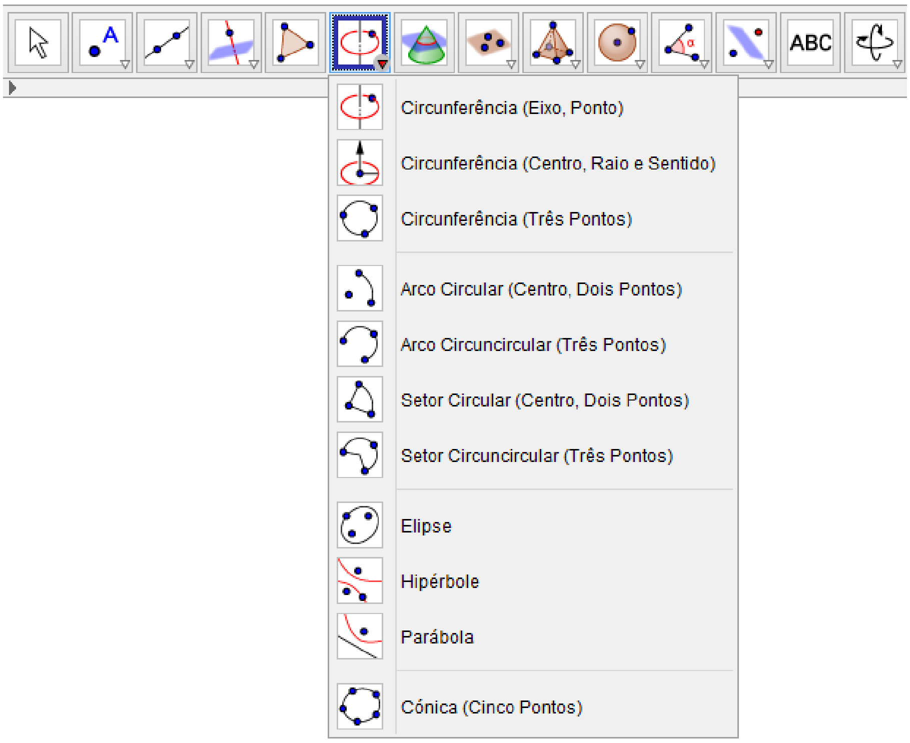
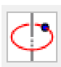
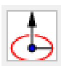


Figura 2.15: Ferramentas para desenhar as cónicas

6.1  Circunferência (Eixo, Ponto)

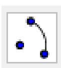
Seleciona-se o eixo em torno do qual será formada a circunferência e um ponto que se pretende que esteja contido nela.

6.2  Circunferência (Centro, Raio e Sentido)

Escolhe-se um ponto para o centro e um número para o raio da circunferência que se pretende. Depois escolhendo uma reta, vetor ou segmento é desenhada a circunferência de centro e raio escolhidos e ortogonal à direção da reta, vetor ou segmento selecionados. Se escolhemos para o terceiro parâmetro um plano então a ferramenta desenha o círculo de centro e raio escolhidos e paralela a este plano.

6.3  Circunferência (Três Pontos)

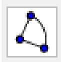
Selecionam-se três pontos por onde passa a circunferência.

6.4  Arco Circular (Centro, Dois Pontos)

Selecionar, em primeiro lugar, o centro e depois os dois pontos que corresponde ao início e final do arco circular.

6.5  Arco Circuncircular (Três Pontos)

Selecionam-se três pontos por onde passa o arco circular, sendo o primeiro ponto e o último os extremos do arco a construir.

6.6  Setor Circular (Centro, Dois Pontos)

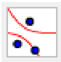
Seleciona-se primeiro o centro de seguida os dois extremos do setor circular. É criado o setor circular a sombreado.

6.7  Setor Circuncircular (Três Pontos)

Selecionam-se três pontos por onde passa o setor circular, sendo o primeiro ponto e o último os extremos do arco. É criado o setor circular a sombreado.

6.8  Elipse

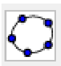
Selecionam-se dois pontos que são os focos da elipse e um terceiro ponto que pertence à elipse pretendida.

6.9  Hipérbole

Selecionam-se dois pontos que são os focos da hipérbole e um terceiro ponto que pertence à hipérbole.

6.10  Parábola

Seleciona-se um ponto (foco da parábola) e uma reta (diretriz).

6.11  Cónica (Cinco Pontos)

Selecionam-se cinco pontos por onde passa a cónica pretendida.

7. **Interseções de Duas Superfícies**

   Esta ferramenta constrói a interseção de duas superfícies que possam ser construídas com a barra de ferramentas do *GeoGebra*. Podemos assim construir a interseção de dois planos, a interseção de um poliedro com um plano, etc.

Figura 2.16: Ferramenta para desenhar as interseções de objetos

   Por exemplo neste trabalho utilizamos este comando na secção da intersecção do cubo com um plano (3.1.2), secção cónicas no cone (3.4.1) e secção no cilindro (3.4.2).

8. **Planos**

   Neste grupo temos acesso às maneiras distintas de construir planos no *GeoGebra*.

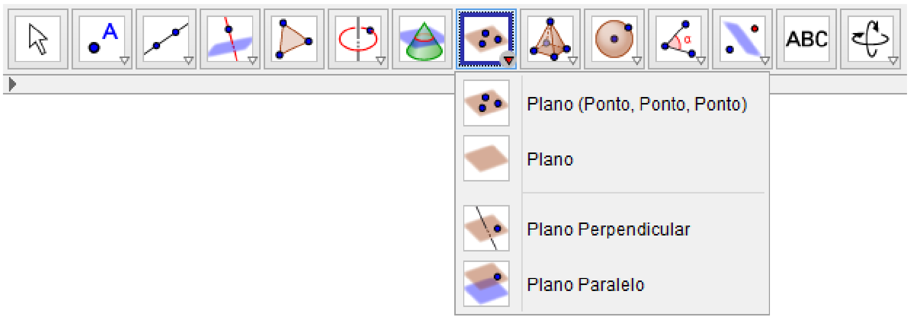
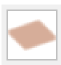


Figura 2.17: Ferramentas para desenhar os planos

8.1  Plano (Ponto, Ponto, Ponto)

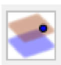
Selecionam-se três pontos por onde passa o plano.

8.2  Plano

Seleciona-se um ponto e uma reta, duas retas ou um polígono e obtém-se o plano em que estes objetos estão contidos

8.3  Plano Perpendicular

Seleciona-se um ponto e uma reta, obtendo-se um plano que passa pelo ponto e é perpendicular à reta.

8.4  Plano Paralelo

Seleciona-se um ponto e um plano, obtém-se um plano que passa pelo ponto e é paralelo ao plano inicial.

9. **Sólidos Geométricos**

Neste grupo temos acesso às construções automáticas de vários tipos de sólidos geométricos, tais como prisma, pirâmide, cilindro, esfera, etc. Quando um sólido é construído com esta ferramenta é apresentado na folha algébrica o valor do seu volume.

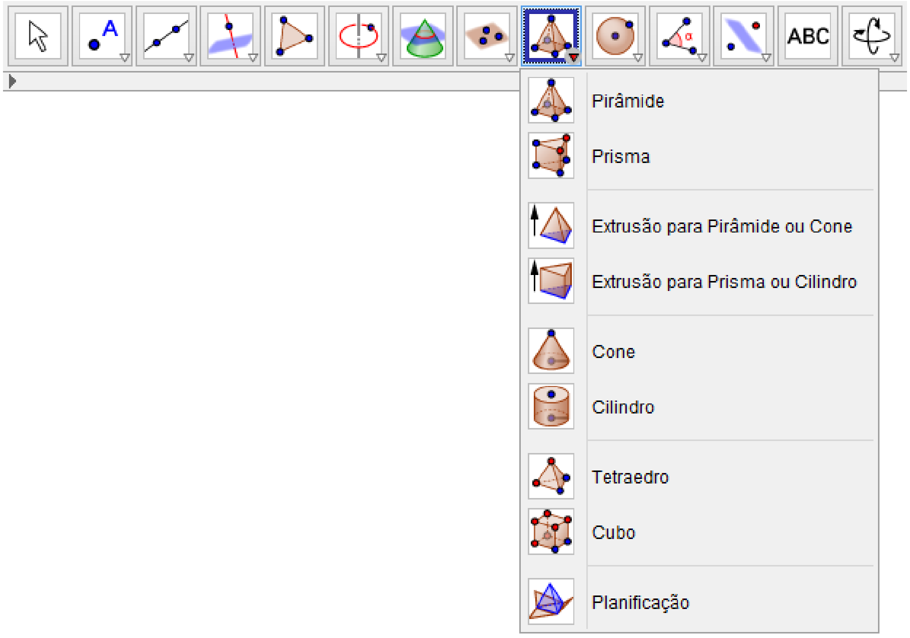


Figura 2.18: Ferramentas para desenhar os sólidos geométricos

A seguir vamos ver a utilidade destas ferramentas na elaboração da tarefa 1 do manual 8º ano [3] (*pág.125*). Ai é pedido para desenhar os sólidos seguintes.

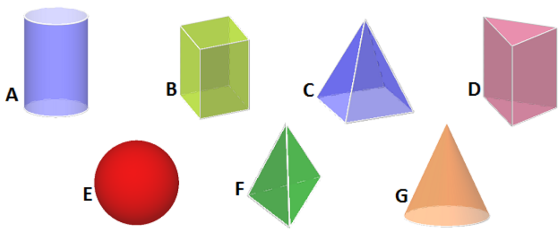
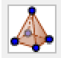


Figura 2.19: Sólidos geométricos

Nas construções dos sólidos que têm superfícies planas como pirâmides, prismas, cubos e tetraedros é necessário o utilizador criar um polígono (n lados) para formar as bases destes sólidos. Nas construções que se seguem recorremos à ferramenta "Polígono" (ver pág. 19) tanto na folha $3D$ como na $2D$ para formar as bases dos poliedros.

9.1  Pirâmide

A figura que se segue mostra a construção da pirâmide triangular, utilizando a ferramenta “Pirâmide”. Criamos um polígono que é a base da pirâmide e de seguida selecionamos um ponto que é o vértice da pirâmide.

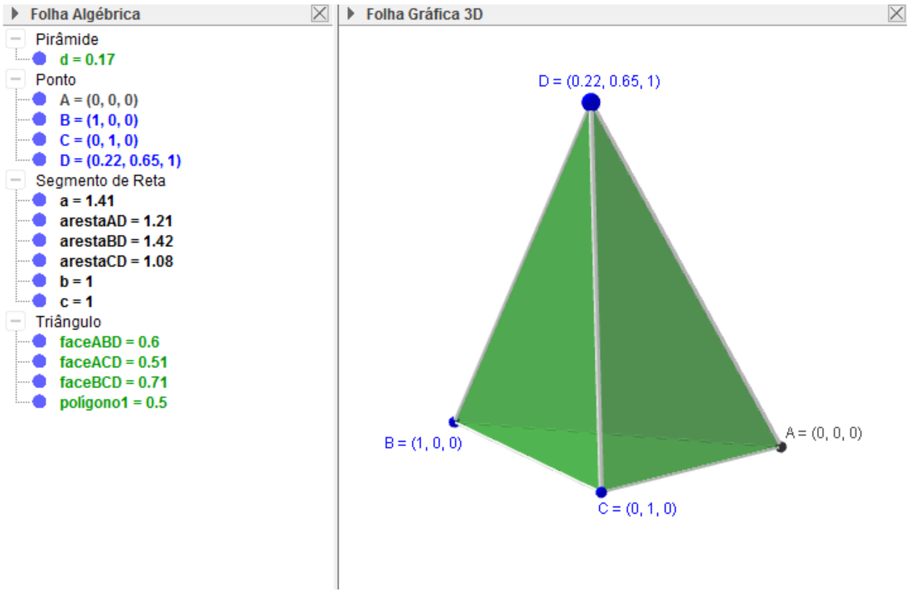
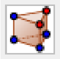


Figura 2.20: Pirâmide triangular

Nesta construção foram criados três pontos A, B, C e depois ativada a ferramenta “Polígono” (ver pág. 19) para ligar os três pontos que vão formar a base da pirâmide. Depois ativou-se a ferramenta “Novo Ponto” (ver pág. 16) para criar o ponto D como o vértice da pirâmide. Finalmente ativou-se a ferramenta “Pirâmide” e selecionou-se o polígono e depois o ponto D. Surgiu assim a pirâmide com o nome d na folha gráfica e algébrica. Em ambas as folhas o nome d da pirâmide é seguido pelo valor do seu volume.

9.2  Prisma

Tal como na pirâmide esta ferramenta necessita um polígono para definir a base e um ponto para definir a altura da prisma.

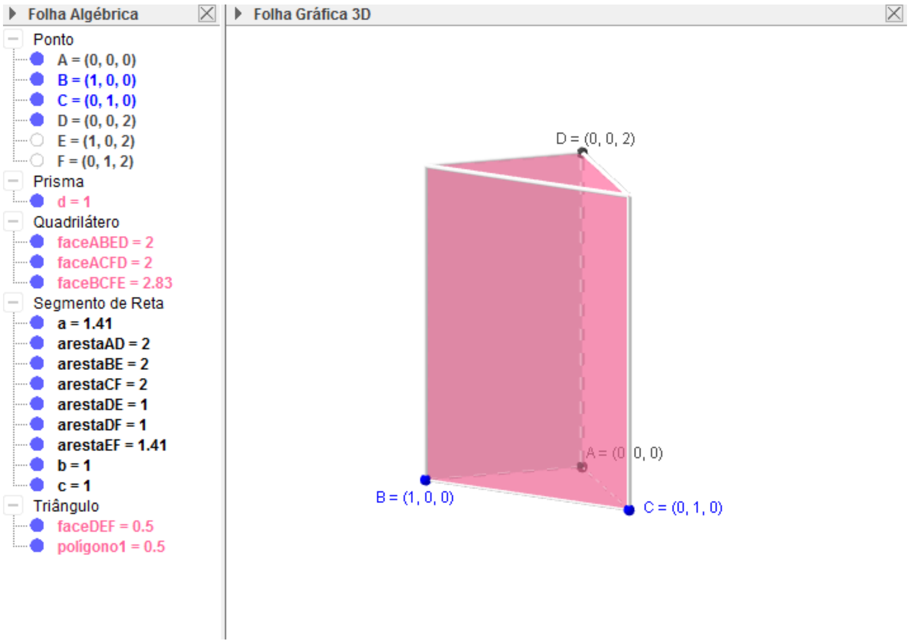


Figura 2.21: Prisma triangular

9.3  Extrusão para Pirâmide ou Cone

Seleciona-se um polígono ou um círculo e em seguida, digite o valor da altura (como um número ou fórmula) na caixa de diálogo que aparece. Será criado uma pirâmide ou um cone de altura h e com geratriz passando pelo baricentro do polígono ou centro do círculo.

9.4  Extrusão para Prisma ou Cilindro

De igual modo à ferramenta anterior selecionar a circunferência ou polígono e introduzir um valor como a altura.

9.5 Cone

Se selecionamos dois pontos (que designamos por A e B), de seguida será pedido um valor para o raio (que designamos por r). A ferramenta constrói o cone cuja o eixo é a reta AB e a base é o círculo ortogonal a AB é de raio r.

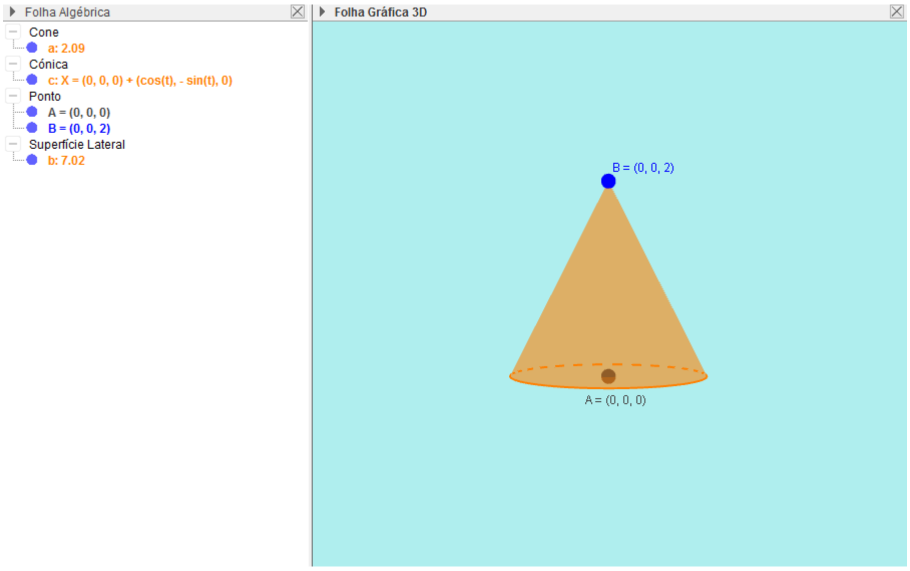


Figura 2.22: Cone

9.6 Cilindro

Ao ativar esta ferramenta será solicitado dois pontos (A e B) e de seguida um valor (r). A ferramenta desenha o cilindro de eixo AB e raio r sendo A e B os centros das suas bases.

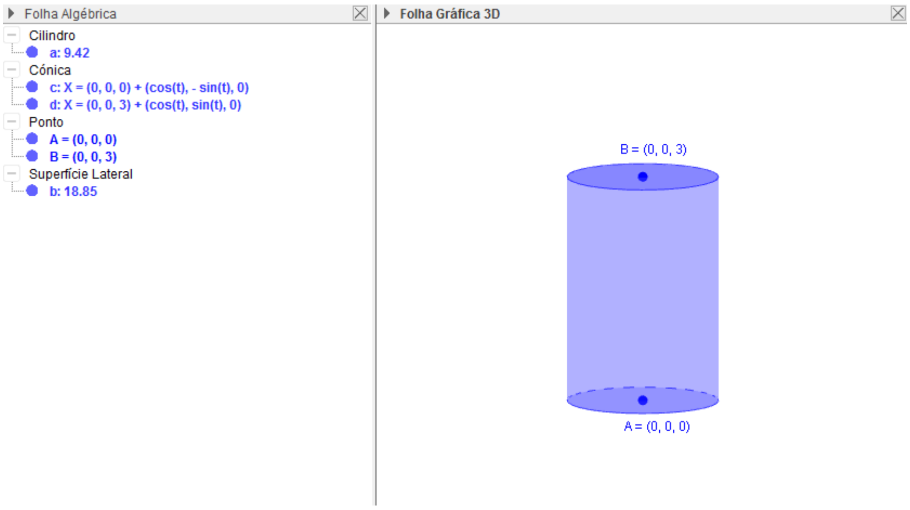
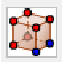


Figura 2.23: Cilindro

9.7  Tetraedro.

Selecionando dois pontos (A e B) obtém-se um tetraedro de aresta AB.

9.8  Cubo

Selecionando dois pontos (A e B) obtém-se um cubo de aresta AB.

9.9  Planificação

Ativando esta ferramenta e escolhendo um poliedro obtemos uma representação da sua planificação. Na folha algébrica aparecerá o nome da planificação seguido do valor da área da superfície do poliedro. Simultaneamente é criado um seletor na folha gráfica $2D$ que permite animar a planificação. Quando o seletor toma o valor 0 temos o poliedro fechado e quando o seletor toma o valor 1 corresponde ao poliedro aberto. Para valores entre 0 e 1 do seletor são produzidas as imagens intermédias da transformação do poliedro na sua planificação.

A seguir apresentamos a construção de um cubo com $5cm$ de aresta que é uma tarefa do manual do 8º ano [3] *(pág.126)*. Com a ferramenta "Cubo" no *GeoGebra* conseguimos desenhar esse cubo e obter o seu volume. Aplicando a ferramenta planificação obtemos a área de superfície do cubo.

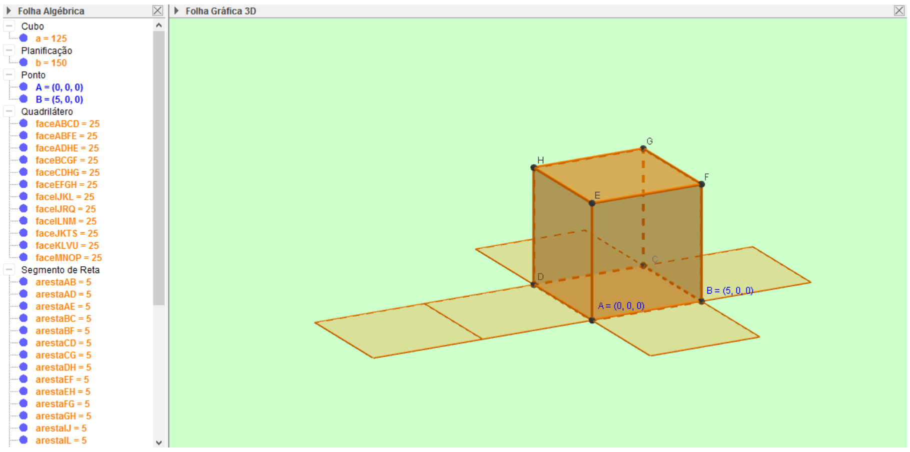


Figura 2.24: Cubo e sua planificação

10. **Esferas**

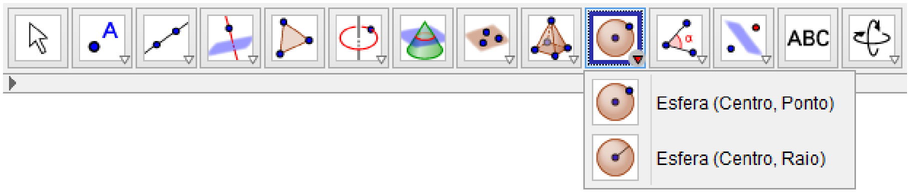


Figura 2.25: Ferramentas para desenhar as esferas

10.1  Esfera (Centro, Ponto)

Seleciona-se o centro da esfera e de seguida um ponto que pertence à esfera.

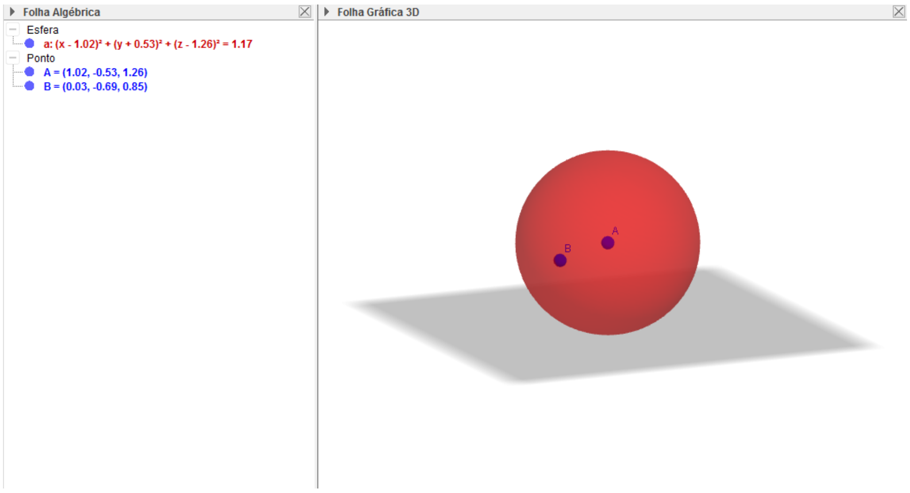
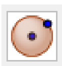


Figura 2.26: Esfera “ponto ponto”

10.2  Esfera (Centro, Raio)

Seleciona-se o centro da esfera e introduz-se o raio pretendido.

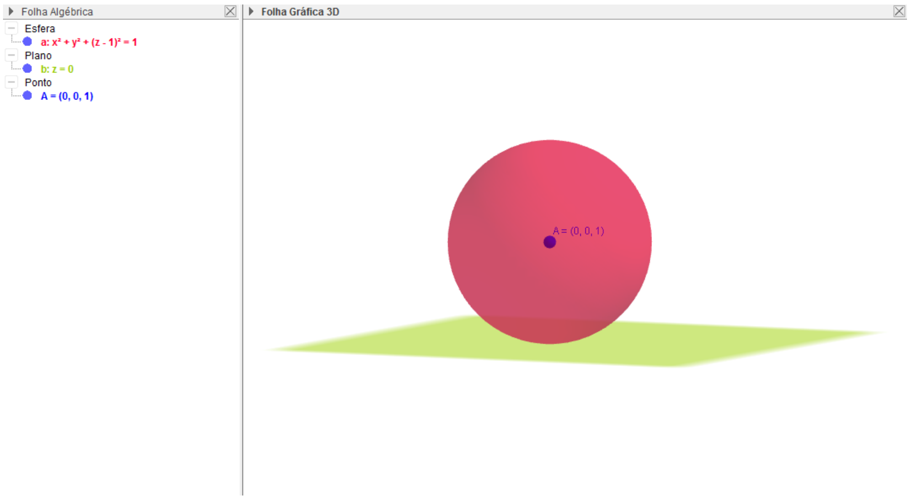


Figura 2.27: Esfera "ponto raio"

11. **Medidas**

Neste grupo temos as ferramentas para efetuar medições nos objetos construídos.

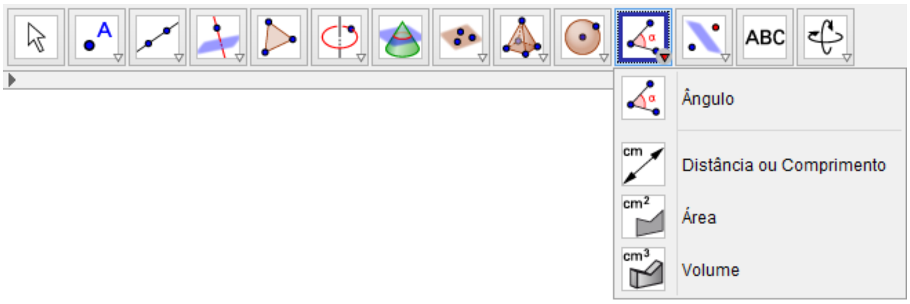
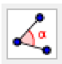


Figura 2.28: Ferramentas para calcular as medidas

11.1  Ângulo

Seleciona-se sucessivamente três pontos (A, B e C) obtemos o ângulo formado pelas semi-retas BA e BC.

11.2  Distância ou Comprimento

Seleciona-se dois pontos obtêm-se a sua distância. Se selecionarmos um segmento de reta obtemos o seu comprimento.

11.3  Área

Seleciona-se um polígono, uma circunferência ou uma cónica fechada e obtemos a sua área.

11.4  Volume

Seleciona-se uma esfera, um cone, um cilindro, um prisma, uma pirâmide ou um poliedro e obtemos o seu volume.

12. **Transformações**

Aqui encontramos ferramentas para efetuar movimentos rígidos dos objetos $3D$ construídos.

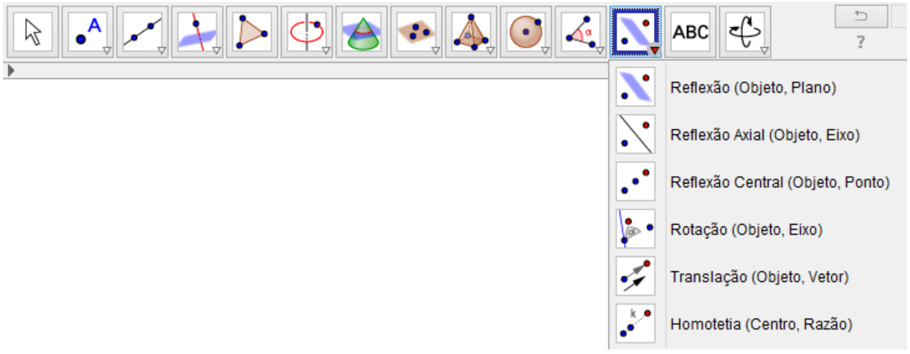
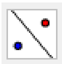


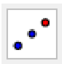
Figura 2.29: Ferramentas para fazer as transformações

12.1  Reflexão (Objeto, Plano)

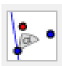
Seleciona-se o objeto que se pretende refletir e em seguida o plano em que será feita a reflexão.

12.2  Reflexão Axial (Objeto, Eixo)

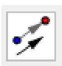
Seleciona-se o objeto que se pretende refletir e em seguida o eixo em que será feita a reflexão.

12.3  Reflexão Central (Objeto,Ponto)

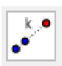
Seleciona-se o objeto que se pretende refletir e em seguida o ponto em que será feita a reflexão.

12.4  Rotação (Objeto, Eixo)

Seleciona-se o objeto que se pretende fazer a rotação, depois o eixo [3] e insere-se o ângulo de rotação.

12.5  Translação (Objeto, Vetor)

Seleciona-se o objeto a translatar e em seguida o vetor de translação.

12.6  Homotetia (Centro, Razão)

Seleciona-se o objeto, depois o centro da homotetia e por fim insere-se a razão da homotetia.

[3] Aqui nas ferramentas seguintes o eixo significa: semirretas, retas, segmentos de reta

13. **Textos**

Para inserir textos no *GeoGebra* utiliza-se esta ferramenta.

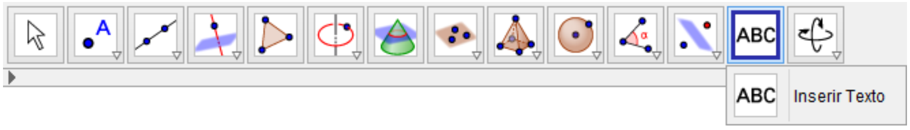


Figura 2.30: Ferramenta para inserir os textos

Depois de ativa basta clicar numa área livre da folha gráfica e aparecerá a janela que se mostra na figura seguinte.

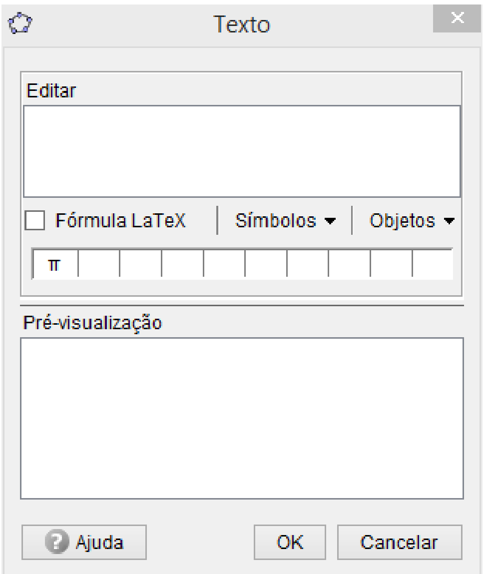


Figura 2.31: Janela para inserir os textos

O utilizador pode usar esta janela para mostrar algumas propriedades matemáticas.

14. **Visualização**

Aqui agrupam-se as ferramentas que permitem alterar a forma como os objetos são visualizados.

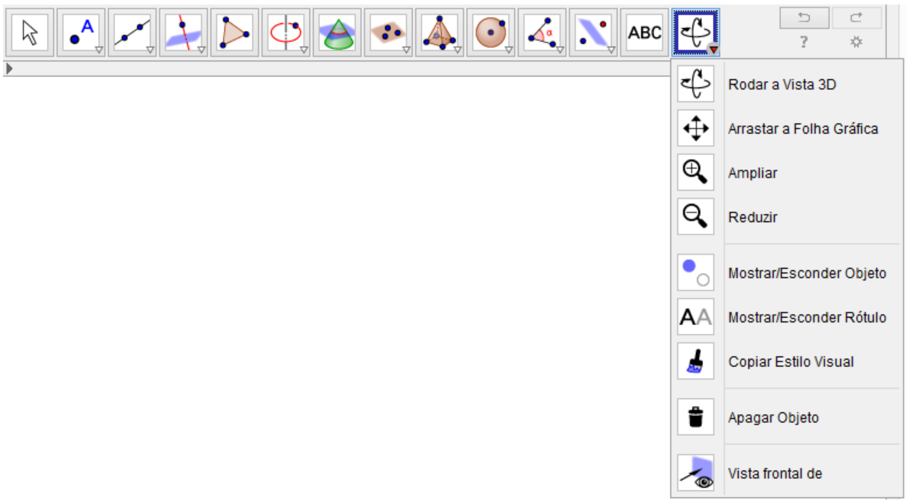
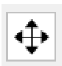


Figura 2.32: Ferramentas para alterar a visualização

14.1  Rodar a Vista $3D$

É possível rodar o sistema de coordenadas utilizando esta opção e arrastando o fundo da folha gráfica $3D$ com o dispositivo apontador. Este mesmo efeito é possível realizar pressionando o botão direito do rato, não necessitando deste modo de ativar esta ferramenta. Se pretende continuar a rotação do sistema de coordenadas quando o ponteiro do rato for libertado, pode dar um pequeno impulso ao movimento de arrastar. Ver secção "Barra de estilos" na página 38 (número 6 e 7) para outras alternativas.

14.2  Arrastar a Folha Gráfica

É possível translatar o sistema de coordenadas utilizando este ferramenta e arrastando o fundo da folha gráfica $3D$ com o dispositivo apontador (botão do lado esquerdo). Assim é possível alternar entre dois modos, clicando no fundo da folha gráfica $3D$:

14.2.1 **Modo Plano "xOy"**: ao clicar no sistema de coordenadas vai aparecer esta seta "" em que se translata a cena paralelamente ao plano "xOy" sem alterar a coordenada z.

14.2.2 **Modo "Eixo dos zz"**: ao clicar no sistema de coordenadas vai aparecer esta seta "" em que translata a cena paralelamente ao "eixo dos zz" sem alterar as coordenadas x e y.

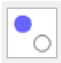
Alternativamente, sem ativar esta ferramenta, pode-se pressionar a tecla *shift* e proceder ao arrastamento da folha gráfica $3D$ da maneira descrita anteriormente.

14.3  Ampliar

Esta ferramenta amplia a folha gráfica $3D$. Ampliação (redução) também pode ser obtida usando o botão *scroll* do rato.

14.4  Reduzir

Reduz a folha gráfica $3D$.

14.5  Mostrar/Esconder Objeto

Estando ativa esta ferramenta, selecionando consecutivamente um objeto, alterna-se entre mostrar ou esconder o objeto.

14.6 

Mostrar/Esconder Rótulo

Estando ativa esta ferramenta, selecionando consecutivamente um objeto, alterna-se entre mostrar ou esconder o nome do objeto.

14.7  Copiar Estilo Visual

Seleciona-se um objeto para copiar o estilo visual desse objeto (cor, espessura de linha, etc) . Selecionando outro objeto, o estilo visual é aplicado a esse objeto, ficando assim com as características visuais do primeiro objeto.

14.8  Apagar Objeto

Seleciona-se o objeto que se pretende apagar.

14.9  Vista frontal de

Quando ativa a ferramenta, permite movimentar uma seta e desta forma selecionar uma face do objeto e pressionando novamente no rato e possível visualizar de frente a face do objeto selecionada.

2.2.3 Janela de Álgebra

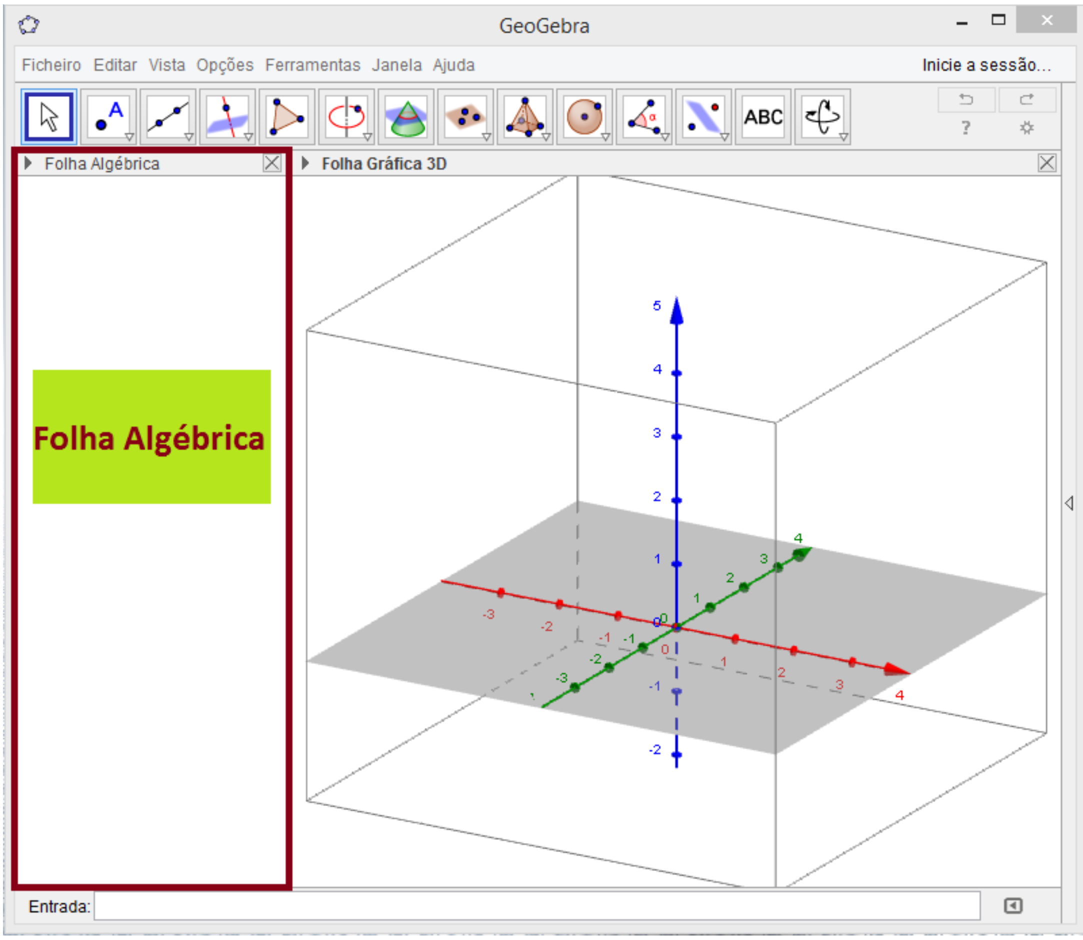


Figura 2.33: Folha algébrica

A janela de álgebra, é a janela onde é apresentada a descrição algébrica dos vários objetos (livres ou dependentes) construídos no *GeoGebra* que podem (ou não) estar visíveis na zona gráfica. Um ponto será representado pelo nome e as suas coordenadas, para um plano será indicado o seu nome e a sua equação cartesiana, para as cónicas também aparecerá a sua equação, etc.

Por exemplo, na construção de uma reta r que passa pelo ponto P e é ortogonal ao plano definida pelos pontos A, B e C, podemos observar os seguintes elementos da janela algébrica:

1. A janela algébrica aparece dividida em secções correspondentes ao tipo de objetos construídos, neste caso, plano, pontos e reta. Esta é a forma que o *GeoGebra* apresenta por defeito. O utilizador pode alternar entre outros modos de disposição (por exemplo por ordem cronológica de construção) dos objetos selecionando a seta indicada na figura seguinte.

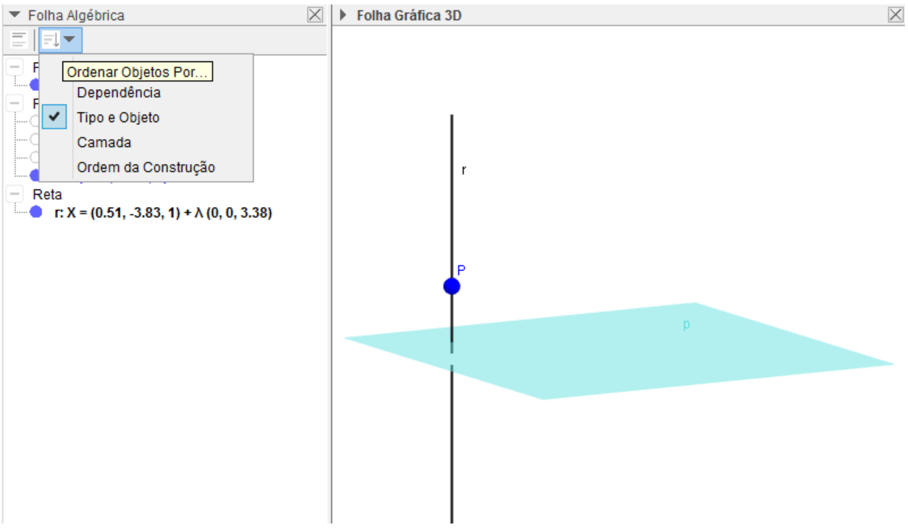


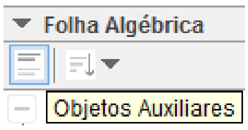
Figura 2.34: Folha algébrica e folha gráfica $3D$

2. Cada objeto é representado por um círculo preenchido de cor azul (quando o objeto está visível na folha gráfica) ou cor branca (quando o objeto está invisível) seguido pelo seu nome e depois a sua descrição algébrica (coordenadas, equações, etc). Pressionando sobre o círculo podemos alternar entre esconder e mostrar o objeto.

3. Os objetos aparecem descritos com a cor em que eles estão representados na folha algébrica. Por defeitos os pontos livres (aqueles que não dependem de outros objetos) são representados a cor azul escuro.

Através da janela algébrica podemos, também, renomear, alterar as propriedades e/ou exibir/esconder um objeto da zona gráfica. Também quando temos ativa uma ferramenta é equivalente selecionar o objeto na folha gráfica $3D$ ou na folha algébrica.

É possível forçar alguns objetos da folha algébrica a não aparecem na folha gráfica, definindo este objeto como objeto auxiliar. Para definir um objeto como objeto auxiliar podemos aceder às propriedades do objeto ou pressionar o botão do lado direito do rato, selecionar a opção objeto auxiliar. Esta opção é útil para construções mais complexas que têm grandes quantidades de objetos. Contudo é sempre possível mostrar também os objetos auxiliares acedendo ao ícone azul



.

2.2.4 Folha Gráfica 3D

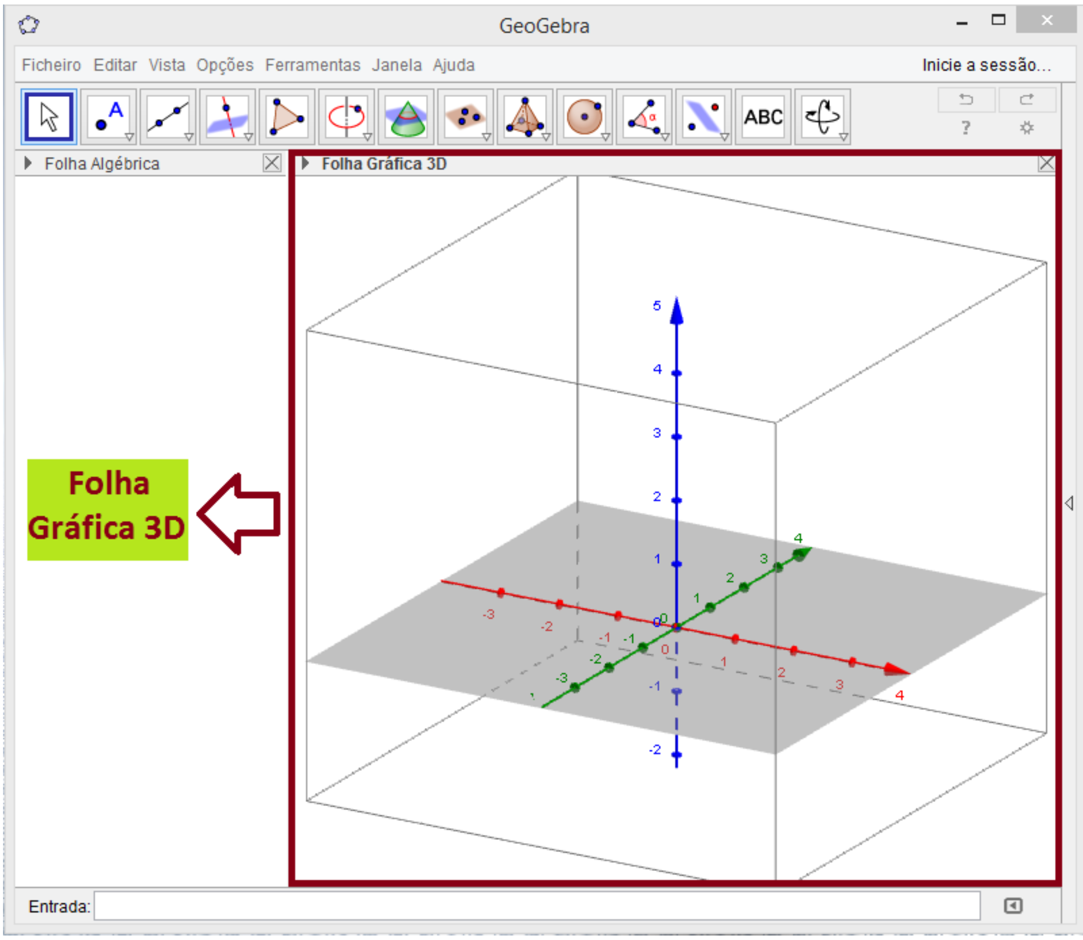


Figura 2.35: Folha gráfica $3D$

Como referimos, neste trabalho, iremos debruçar essencialmente sobre as construções possíveis de efetuar na folha gráfica $3D$ e com correspondentes ligações à folha algébrica. Contudo a folha gráfica $3D$ também está vinculada à folha gráfica $2D$, nomeadamente os objetos que estejam contidos no plano $z = 0$ da folha gráfica $3D$ serão visualizados na folha gráfica $2D$ e reciprocamente, os objetos obtidos na folha gráfica $2D$ também terão uma representação no plano $z = 0$ da folha gráfica $3D$ (ver secção "Vista" pág. 12).

É nesta folha que aparecem as várias imagens construídas, podemos rodar e mover esta zona de visualização utilizando as ferramentas nas secções (pág. 15), (pág. 33) e (pág. 39).

Barra de Estilos

Nesta folha gráfica, além da barra de ferramentas (fig. 2.7) existe também a barra de estilos. Esta barra está contida na própria janela e ocultada por uma seta que está no canto superior esquerdo da folha gráfica $3D$ ou no botão "barra de estilos " no *GeoGebra web* (pág. 43). Ao clicar nela irá aparecer a figura seguinte:

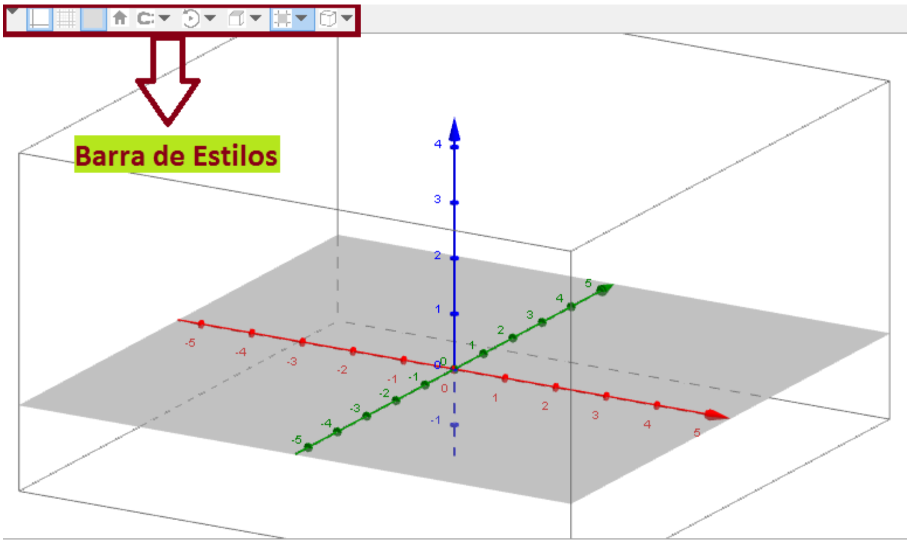
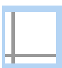


Figura 2.36: Barra de Estilos - *desktop*

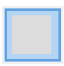
Nesta barra, temos acesso, de uma forma rápida e fácil, a um conjunto de parametrizações básicas da folha gráfica $3D$.

1.  Mostrar ou Esconder os eixos

   Com o rato clicar em cima do ícone para mostrar ou esconder os eixos coordenados.

2. Mostrar ou Esconder Grelha

   Com o rato clicar em cima do ícone para mostrar ou esconder a grelha no plano "xOy".

3.  Mostrar ou Esconder o plano "xOy"

   Com o rato clicar em cima do ícone para mostrar ou esconder o plano "xOy".

4.  Regresso à Vista Inicial

   Quando clicamos neste ícone a visualização vai regressar aos parâmetros iniciais.

5.  Definir o modo de inserção dos pontos

   Permite que os pontos inseridos sejam vinculados a uma grelha predefinida.

6. Rotação da folha gráfica

   Para além da manipulação através do rato descrita na página 33, acedendo a este ícone podemos também manipular a rotação da folha gráfica $3D$.

7. Ângulos de visualização

   Permite visualizar em vários ângulos “ plano xOy”, “ plano xOz”, “ plano yOz” ou “ retomar a visualização inicial”.

8. Caixa Envolvente do Referencial $3D$

   No *GeoGebra* é possível visualizar apenas os objetos que estão dentro de uma caixa que envolve os eixos coordenados. É aqui podemos habilitar esta caixa e definir o seu tamanho.

9. Tipo de Projeção

   Permite escolher o tipo de projeção entre “projeção paralela ”, “perspetiva da projeção ”, “projeção para óculos $3D$ ” e “projeção oblíqua ”.

Menu de Contexto

Podemos usar o botão direito do rato para aceder as propriedades dos objetos da folha gráfica $3D$. Sempre que pressionamos o botão direito do rato sobre um objeto, vai aparecer o menu similar a figura seguinte

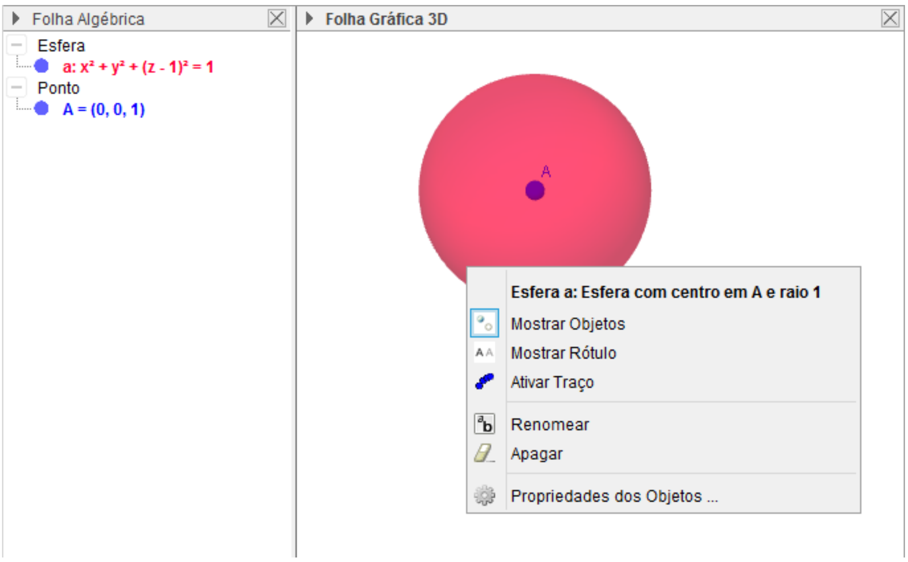


Figura 2.37: Esfera com seu menu de contexto

Entre as opções possíveis de alterar por este processo salientamos:

1. Definir tamanho e estilo de ponto

2. Definir estilo da linha

3. Definir cor

   Permite definir uma cor para o objeto selecionado (por exemplo: pontos, segmentos de reta, polígono, poliedros, etc). Também é possível alterar a opacidade da cor (maior ou menor transparência) para objetos em que faça sentido tais como polígonos e poliedros.

4. Estilo do texto

   Permite definir “a cor de fundo do texto ”, “a cor do texto A ”, “o estilo da fonte para negrito **N** ”, “itálico *I* ”, “tamanho da fonte Extra Pequeno ”.

5. Estilo do rótulos

   Permite escolher entre as seguintes opções de rotulagem: “Esconder” não é exibido o rótulo, “Nome” é exibido apenas o nome do objeto (designação interna que o *GeoGebra* atribui ao objeto), “Nome e Valor” são mostrados o nome e o valor do objeto (exemplo, $A = (0, 1, 0)$), “Valor” apenas o valor do objeto é exibido (exemplo, $(0, 1, 0)$) e “Legenda” permite exibir (na folha gráfica) um nome diferente da designação interna que o *GeoGebra* dá ao objeto (que é aquela que aparece na folha algébrica).

No caso do apontador não estar posicionado sobre qualquer objeto construído, pressionando o botão direito do rato, acedemos ao menu de contexto da folha gráfica $3D$ onde é possível alterar algumas das propriedades descritas para a barra de estilos.

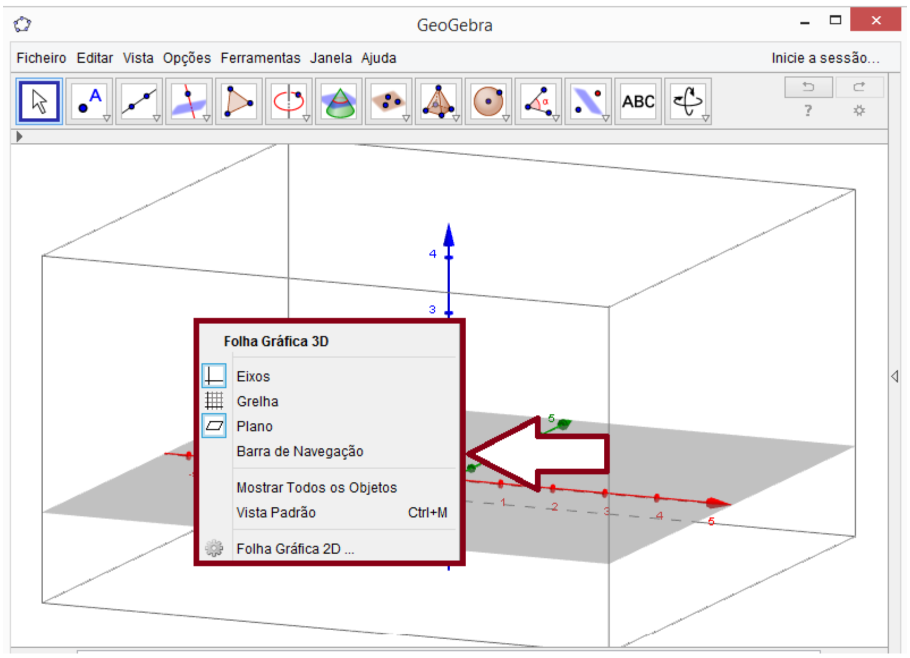


Figura 2.38: Menu de contexto

2.2.5 Barra de Entrada

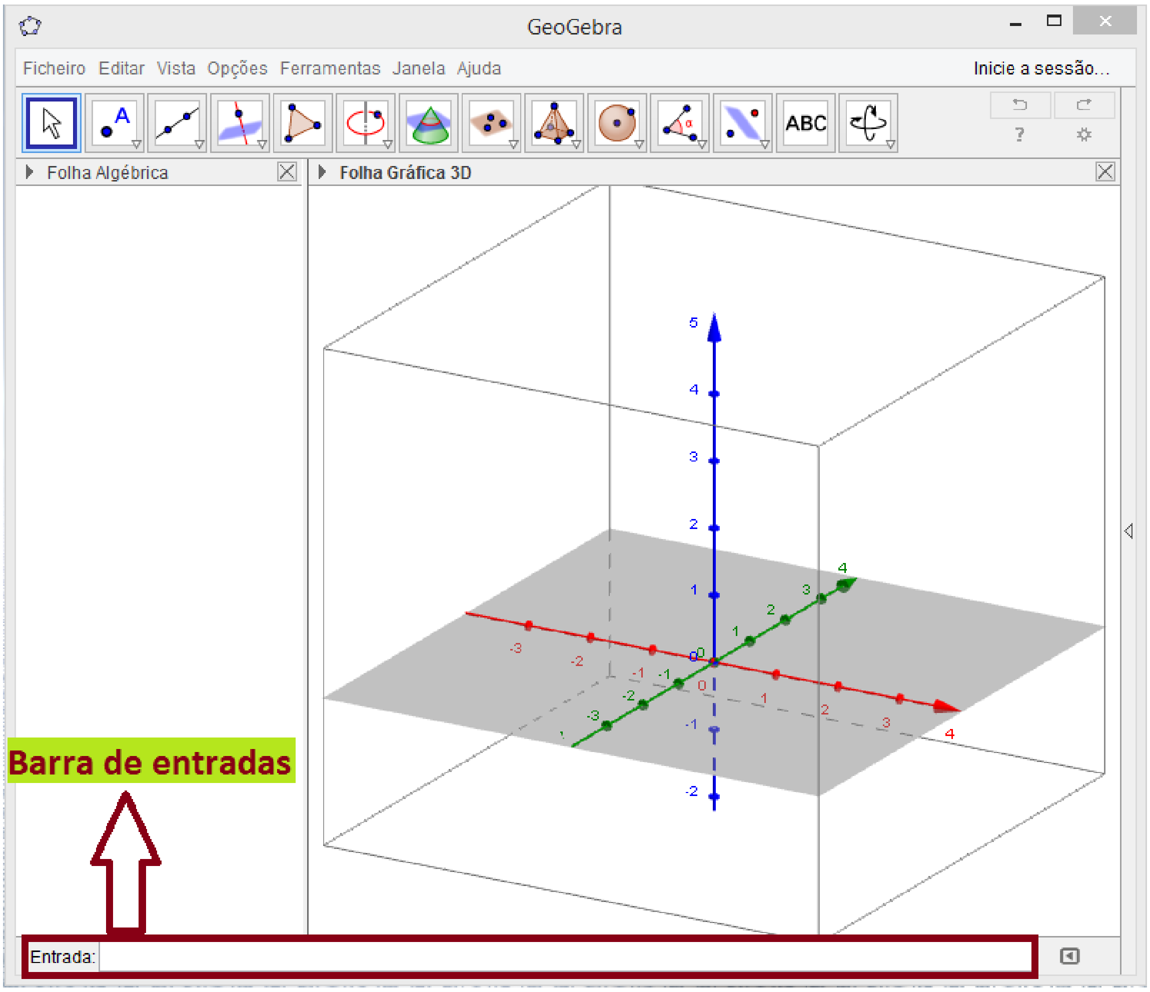


Figura 2.39: Barra de entradas

Todos os objetos do *GeoGebra* são possíveis de construir através de comandos de texto, introduzidos nesta barra, sem recorrer ao modo visual da barra de ferramentas. Por exemplo para inserir um ponto A com coordenadas $(0, 0, 1)$ podemos digitar o comando "A=Ponto[$\{0, 0, 1\}$]". Todos os comandos podem ter a forma:

nome_do_objeto = nome_do_comando[parâmetros]

ou

nome_do_comando[parâmetros]

em que nome_do_objeto é o nome a atribuir ao objeto que se pretende construir (no caso anterior corresponde a A) e nome_do_comando[parâmetros] é o comando que é preciso inserir para construir o objeto (no caso anterior corresponde a Ponto[$\{0, 0, 1\}$]). Os parâmetros a inserir dependem de cada comando, correspondendo no caso anterior a $\{0, 0, 1\}$. No caso de se omitir nome_do_objeto, o *GeoGebra* atribui automaticamente um nome. Tal como no *GeoGebra* $2D$, por vezes existem sintaxes mais intuitivas equivalentes aos comandos com sintaxe descrita anteriormente. Por exemplo podemos escrever $A = (0, 0, 1)$ para obter o mesmo ponto A.

Para facilitar a inserção de comandos no campo de entrada, podemos utilizar a ferramenta de ajuda localizada no canto inferior direito, ao lado do campo da entrada. Neste campo de ajuda acedemos ao menu que contém os tópicos indicados na figura seguinte:

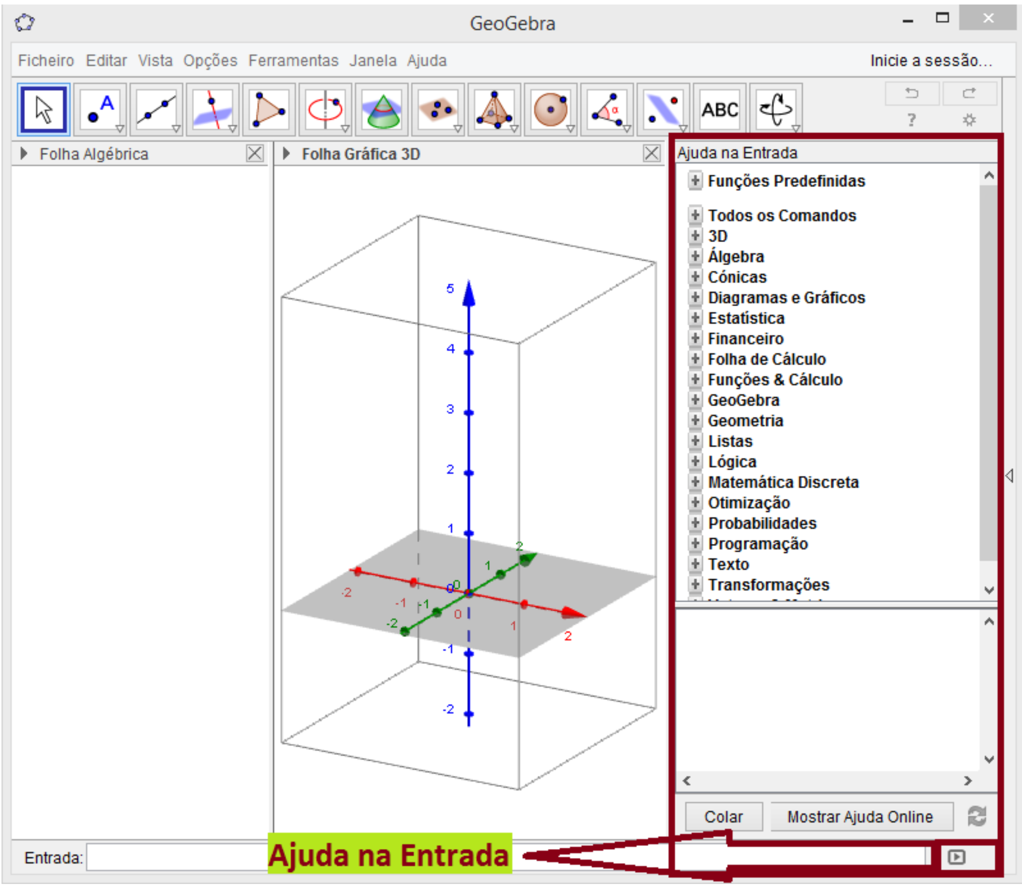


Figura 2.40: Ajuda na Entrada

Selecionando os vários tópicos acedemos a todos os comandos do *GeoGebra*. Selecionando um comando na lista de um tópico podemos visualizar a(s) sintaxe(s) que ele tem de obedecer e os parâmetros que tem que conter. Temos também as opções de ajuda *online* sobre o comando concreto e a possibilidade de o transferir para a barra de entrada através do botão (colar). Uma vez que existe esta ajuda *online*, neste trabalho não faremos a descrição dos diversos comandos existente no *GeoGebra*.

A caixa de entrada dos comandos é exibida no fundo da janela do *GeoGebra* (em *GeoGebra Desktop*) ou é integrado um "campo Entrada", diretamente na folha algébrica no *GeoGebra Web* (como vamos ver na secção seguinte) e *Tablet Apps*.

Para além destas cinco zonas, no canto superior direito são apresentados os botões " desfazer" (que permite anular a última construção), " refazer" (que permite refazer a última construção anulada), " ajuda" (que permite aceder à ajuda *online* do *GeoGebra*) e " configurações" (que permite personalizar algumas das opções do *GeoGebra*).

2.3 Folha Gráfica $3D$ na web

Como já referimos anteriormente, a folha gráfica $3D$ também aparece na versão *web* do *GeoGebra*. No endereço "*https://app.geogebra.org/*" [5] o utilizador vai ver uma janela como indicada na figura seguinte:

Figura 2.41: Ambiente *GeoGebra* - *web*

Como na versão *desktop* (fig. 2.1) aqui também são visíveis seis disposições para iniciar o *GeoGebra*. Escolhendo a opção "gráficos $3D$" aparece uma janela como se mostra na figura seguinte.

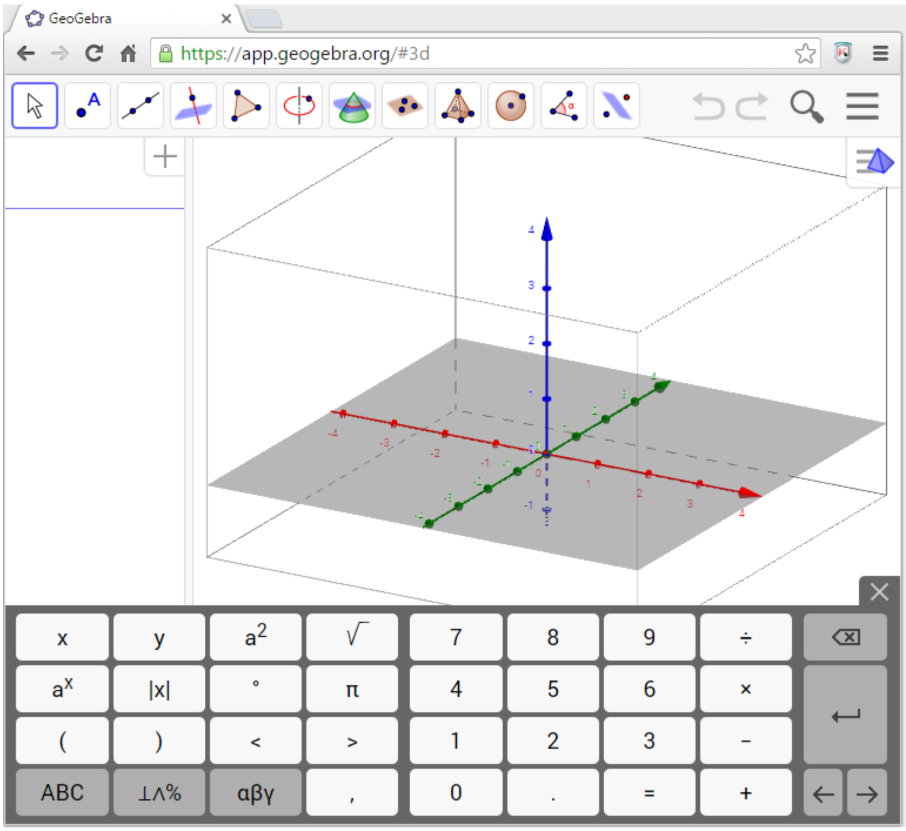


Figura 2.42: Folha gráfica $3D$ - *web*

Esta janela contém as mesmas componentes da folha gráfica $3D$ do *desktop*, dispostas de um modo diferente. No topo da janela, no canto superior direito são apresentados os botões " Desfazer", " Refazer", " Pesquisar nos materiais do *GeoGebra* na *net*", " Barra de menus" e " Exibir ou Esconder barra do estilo". Um teclado virtual pode ser acedido no ícone situado no canto inferior direito.

Na versão *web*, tal como na versão *desktop*, é possível gravar a construção no *GeoGebraTube*. Para isso basta clicar na barra de menus e optar por "Gravar". Para além deste modo de guardar os ficheiros, a própria construção pode ser transferida para o computador acedendo a opção "Exportar" e escolhendo o tipo *ggb*. Um ficheiro será transferido podendo posteriormente ser utilizado na versão *desktop*.

Capítulo 3

Exemplo de Atividades

Depois de descritas as principais características para a geometria $3D$ que à data deste trabalho o *GeoGebra* proporciona, vamos apresentar neste capítulo as construções que podem ser inseridas nas tarefas de geometria constantes dos manuais de matemática de Timor Leste, de modo a tornar essas tarefas mais atrativas no contexto de sala de aula.

3.1 7º ano

Nesta secção vamos abordar a posição relativa de planos e as interseções possíveis de um plano com um cubo.

3.1.1 Posição relativa de dois planos

No estudo de planos, o manual matemática do 7º ano [2] propõem a seguinte ilustração:

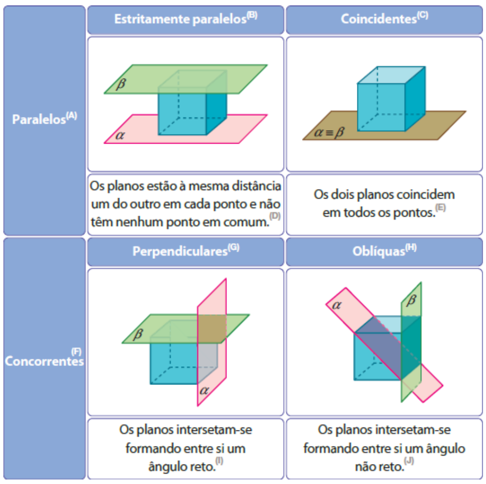


Figura 3.1: Posição relativa de dois planos página 99 do manual

Com as ferramentas fornecidas pelo *GeoGebra* é fácil obter construções que exemplifiquem as posições possíveis de dois planos no espaço.

A abordagem fornecida pelo manual do 7º ano [2] assenta na classificação exposta na figura:

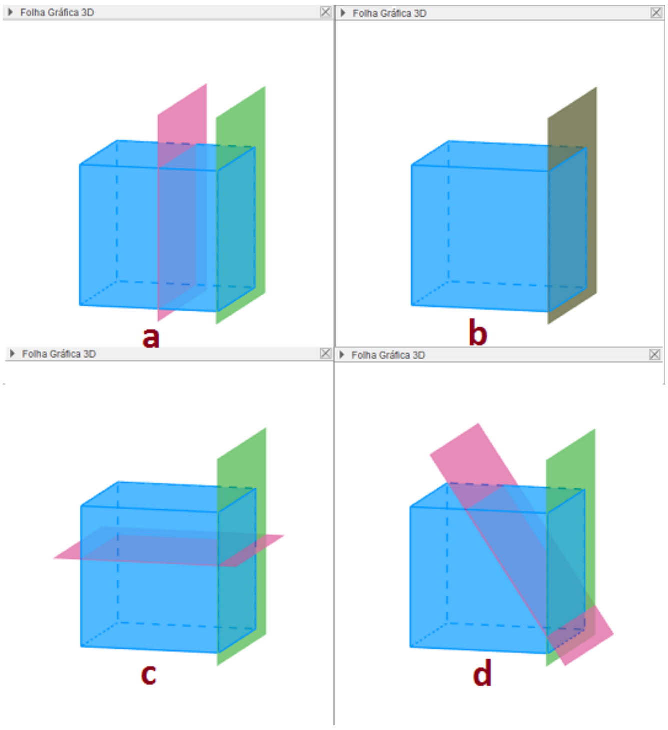


Figura 3.2: Posição relativa de dois planos

Esta figura pode ser obtida pela construção que a seguir se apresenta.

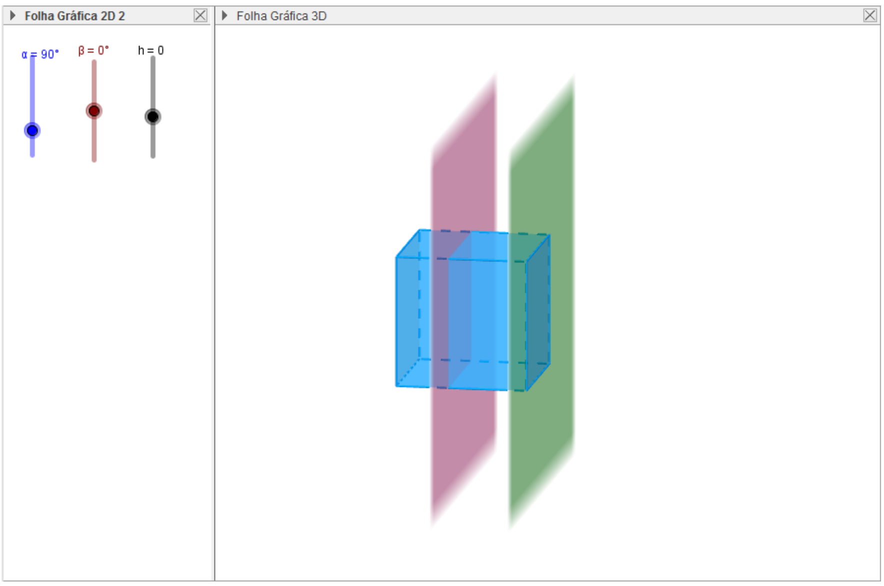


Figura 3.3: Planos paralelos

Ao mexer nos seletores α, β e h[1] podemos obter os casos **a**, **b**, **c** e **d** da seguinte forma:

- **a** Quando $\beta = 0°$, $\alpha = 90°$ e $h \neq 1$ temos (fig. 3.2 **a**). Os planos estão à mesma distância um do outro em cada ponto e não tem nenhum ponto em comum que significa os dois planos estão estreitamente paralelos.
- **b** Quando $\beta = 0°$, $\alpha = 90°$ e $h = 1$ temos (fig. 3.2 **b**), os dois planos coincidem em todos os pontos que são coincidentes.
- **c** Quando $\beta = \pm 90°$ temos (fig. 3.2 **c**), os dois planos intersetam-se formado entre si um ângulo reto.
- **d** Quando $\beta \neq \pm 90°$ temos (fig. 3.2 **d**), os dois planos intersetam-se formado entre si um ângulo não reto.

3.1.2 Interseção de um plano com um cubo

Aqui nesta secção vamos mostrar como podemos utilizar o *GeoGebra* para um estudo das várias possibilidades de interseção de um plano com um cubo.

Para isso elaboramos uma construção com um cubo fixo e um plano que pode ser manipulado pelo utilizador de forma a obter as varias intersecções. Utilizando a ferramenta "Interseção de Duas Superfícies"(pág. 23), conseguimos obter o polígono que resulta da interseção do plano com as faces do cubo.

O utilizador pode rodar o plano T movimentado dois seletores α e β. Definimos também um seletor h que permite alterar a altura (a interseção com o "eixo dos zz") do plano. Alterando estes três parâmetros aparece definido na janela $3D$ o polígono que resulta da interseção do plano com o cubo e simultaneamente, na janela $2D$ aparece a visualização do polígono no plano de interseção.

Vejamos então como a construção foi obtida:

Começa-se por definir dois seletores $0° \leq \alpha \leq 360°$ e $-90° \leq \beta \leq 90°$ e um vetor unitário $u = (\cos\beta\cos\alpha, \cos\beta \operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\beta)$. Pensando que a superfície terrestre tem raio 1, α corresponde à latitude e β corresponde à longitude[2].

[1] Para perceber o papel que desempenham α, β e h consultar secção seguinte

[2] Aqui é utilizada a noção de coordenadas esféricas ([14] pág.598)

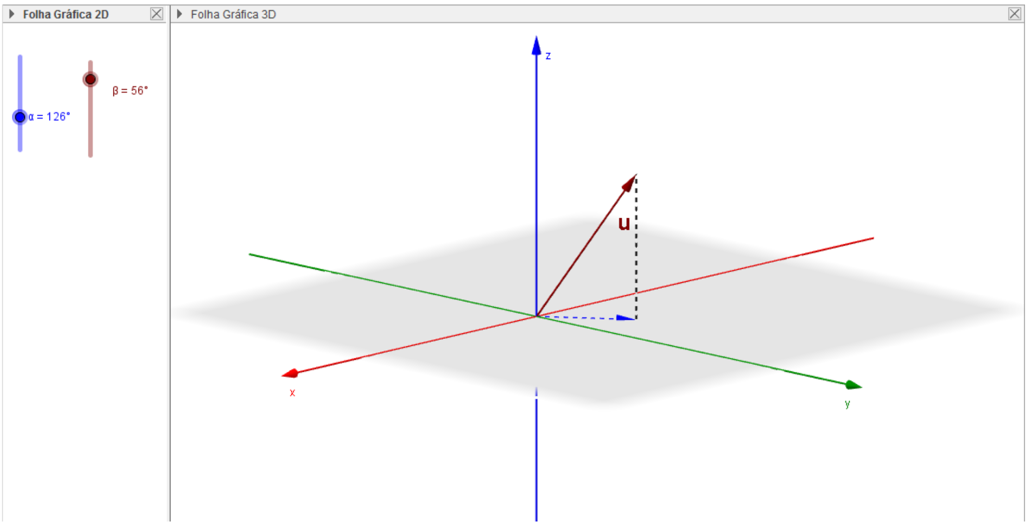


Figura 3.4: Seletores nesta construção

Alterando os seletores move-se o vetor u. O ângulo entre o vetor u e o plano "xOy" é β e a projeção de u no plano "xOy" é um vetor v, que faz um ângulo α com a parte positiva do eixo dos xx. Definimos agora um plano T através da equação $ax + by + cz = h$ em que $u = (a, b, c)$ são as coordenadas do vetor u e $0 \leq h \leq 2$ é um outro seletor. Desta forma obtemos um plano T que é ortogonal a u. Variando o valor de h obtemos planos ortogonais a u e com diferentes interseções com eixo dos zz (exceptuando o caso em que u é ortogonal ao eixo dos zz). Para este efeito digitamos na barra de entrada a equação $ax + by + cz = h$.

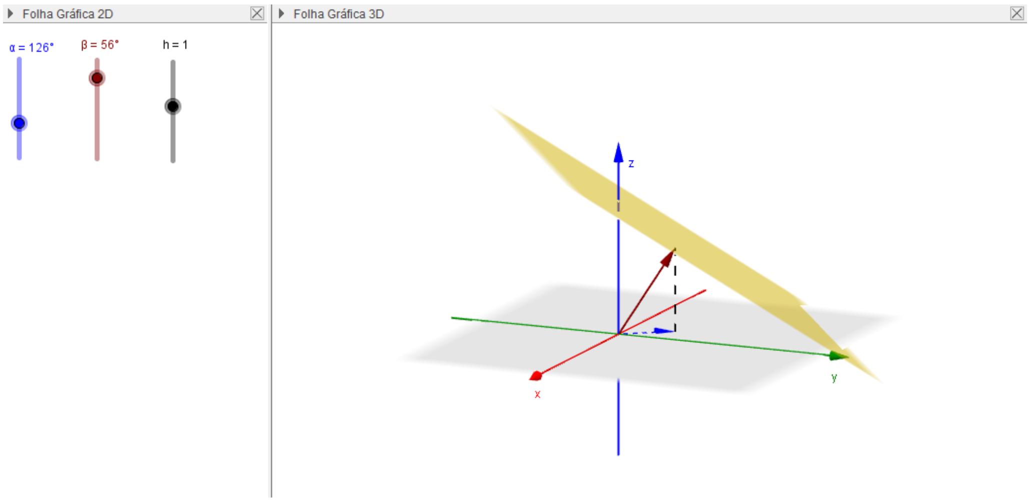


Figura 3.5: Seletores e plano T nesta construção

Depois de termos a construção que permite movimentar o plano T construímos um cubo executando na barra de comandos "Cubo[A, B]" em que A e B são dois pontos previamente construídos por $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 2, 0)$. De seguida ativamos a ferramenta "Interseção de Duas Superfícies"(pág. 23) e selecionamos este cubo e o plano T como seus parâmetros. Vai aparecer o polígono designado por "polígono1" que corresponde à interseção pretendida. Com o botão direito do rato, acedendo ao menu do contexto do plano T, selecionando "Criar vista $2D$ de T".

Vai aparecer ao lado da folha gráfica $3D$ uma folha gráfica $2D$ representativa do plano T e por conseguinte neste folha gráfica $2D$ aparecerá o polígono "polígono1".

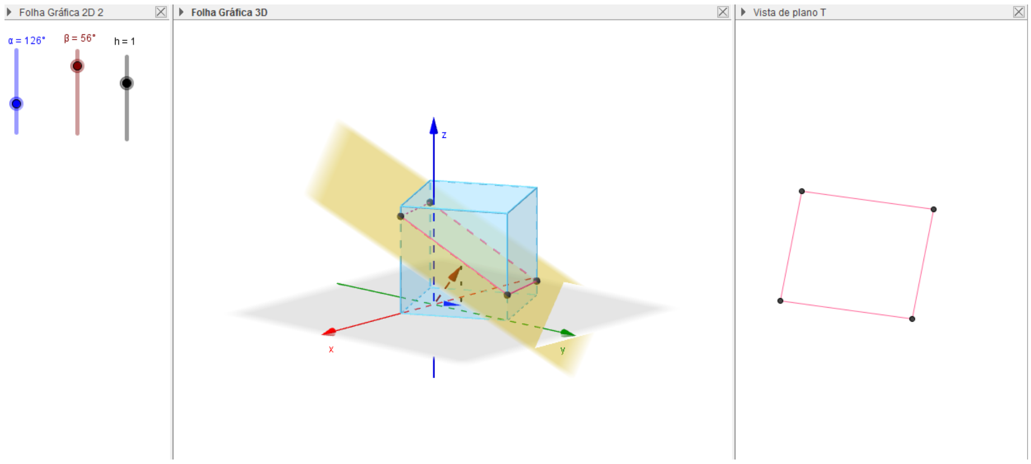


Figura 3.6: Interseção do cubo com o plano T

Por fim para tornar mais intuitivo a movimentação do plano substituiu-se o seletor α por uma elipse mais representativa da noção da longitude e analogamente, o seletor β foi substituído por uma semi círculo para representar a latitude.

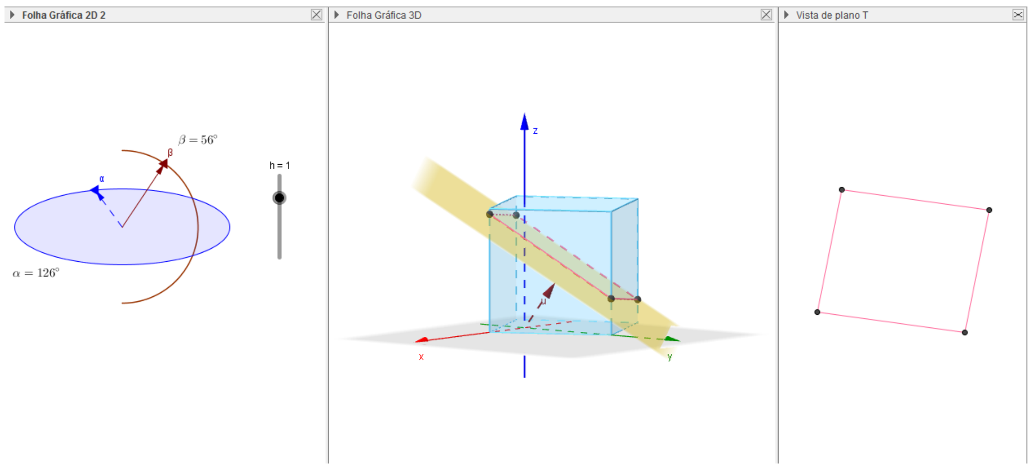


Figura 3.7: Interseção do cubo com o plano T

Esta construção pode também ser aproveitada para rever os vários tipos de polígonos estudados neste ano da escolaridade. Ajustando convenientemente os seletores podemos obter triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

1. Se o plano interseta o cubo apenas em três faces, o polígono obtido é um triângulo.

   1.1 Por exemplo para $\beta = 15°$, $\alpha = 91°$ e $h = 2$, obtemos um triângulo escaleno.

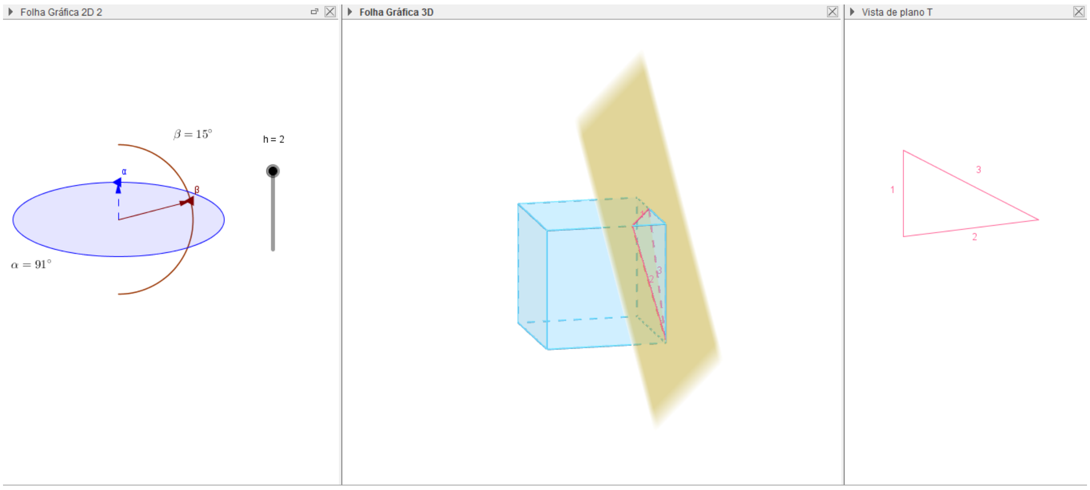


Figura 3.8: Triângulo escaleno

   1.2 Para $\beta = 50°$, $\alpha = 70°$ e $h = 2$, obtemos um triângulo isósceles.

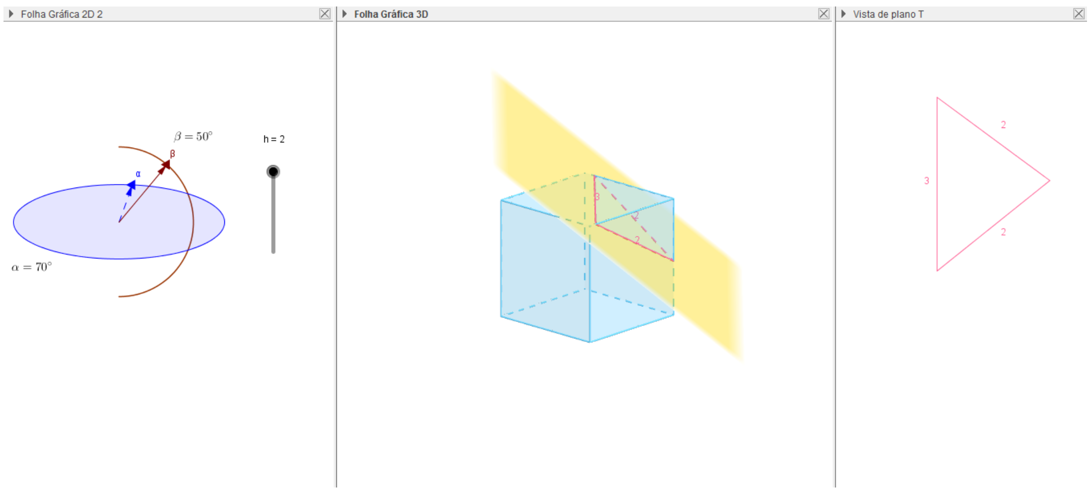


Figura 3.9: Triângulo isósceles

1.3 Para $\beta = 38°$, $\alpha = 70°$ e $h = 2$, obtemos um triângulo equilátero.

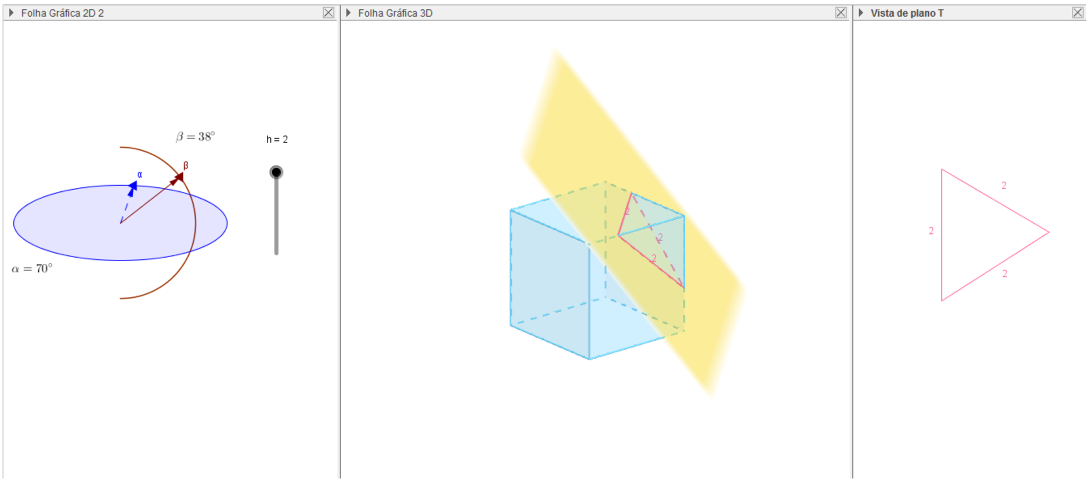


Figura 3.10: Triângulo equilátero

2. Se o plano interseta o cubo em quatro faces, o polígono obtido é um quadrilátero.

   2.1 Temos um paralelogramo para $\beta = 30°$, $\alpha = 100°$ e $h = 1$.

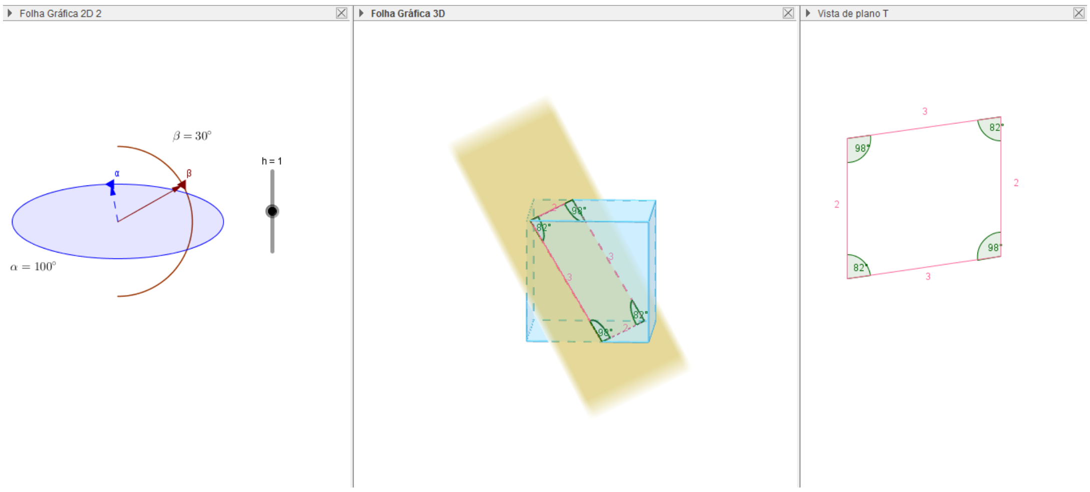


Figura 3.11: Paralelogramo

2.2 Temos um retângulo para $\beta = 0°$, $\alpha = 60°$ e $h = 0$.

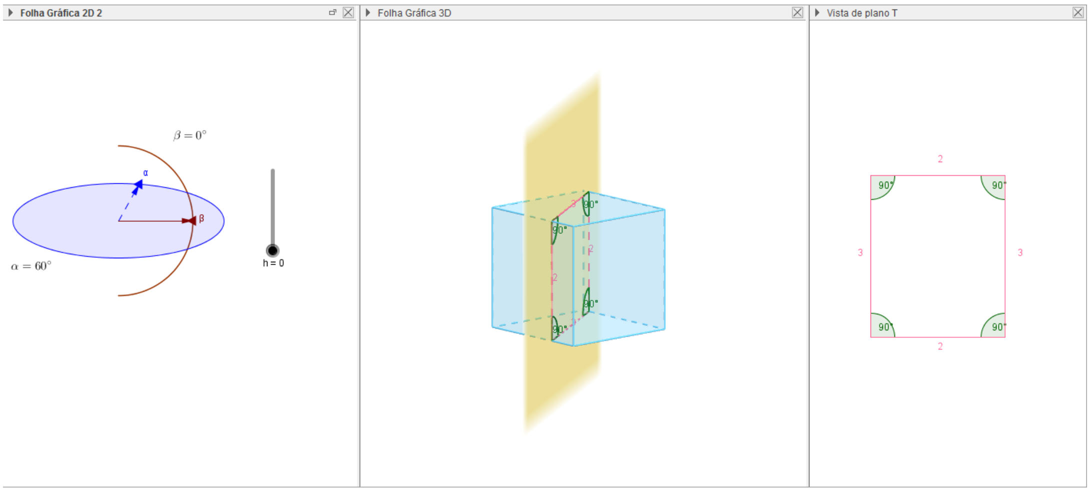


Figura 3.12: Retângulo

2.3 Temos um losango para $\beta = 60°$, $\alpha = 341°$ e $h = 1$.

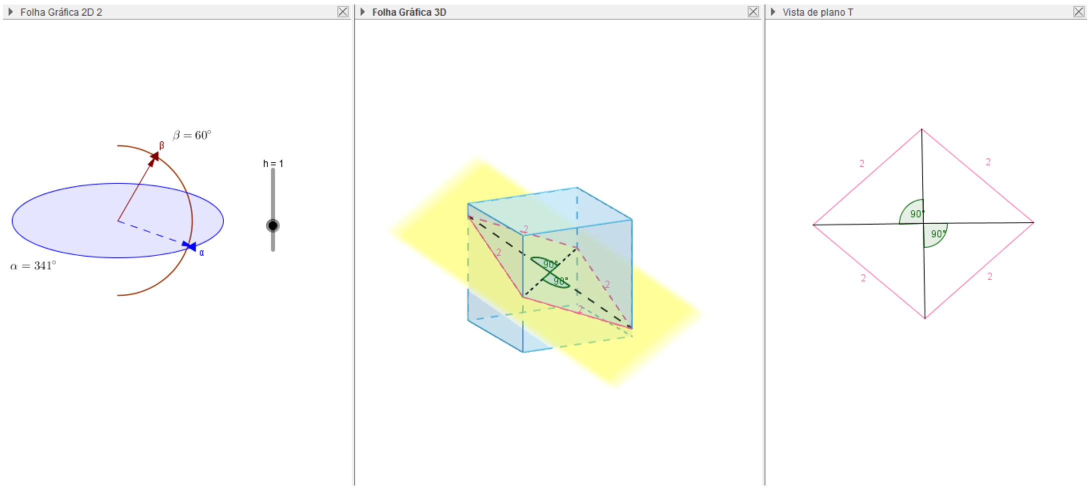


Figura 3.13: Losango

2.4 Temos um quadrado para $\beta = 90°$

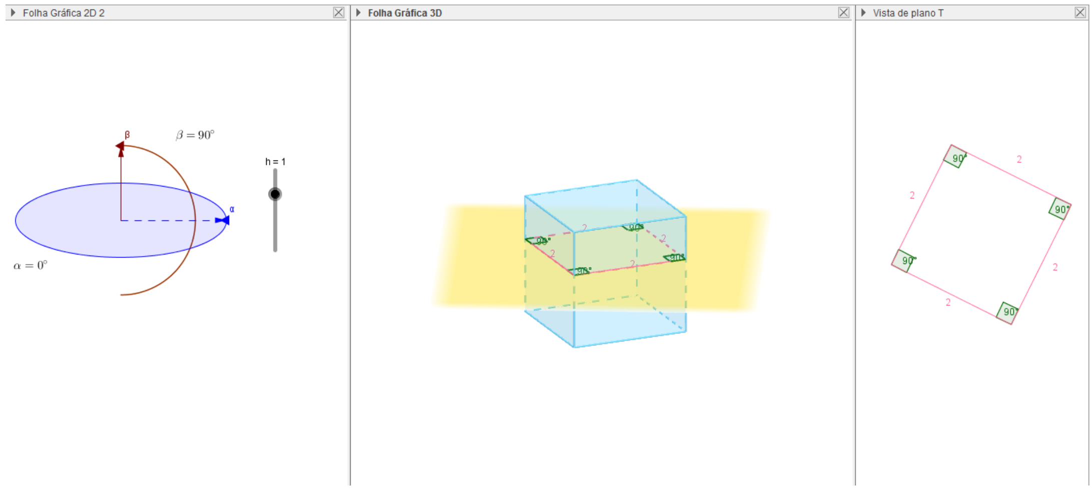


Figura 3.14: Quadrado

2.5 Temos um trapézio $\beta = 10°$, $\alpha = 180°$ e $h = 0$.

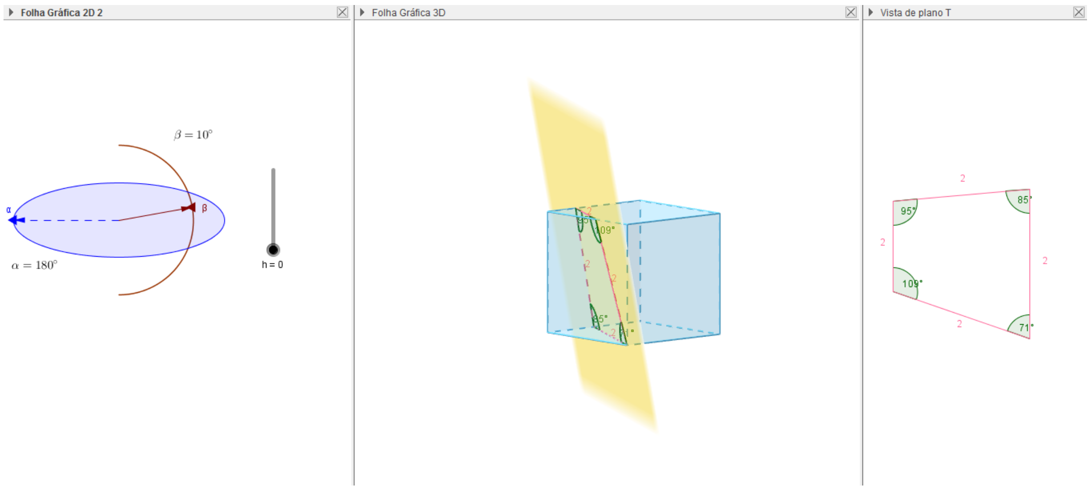


Figura 3.15: Trapézio

3. O plano interseta cinco faces do cubo e a secção formada é um pentágono. Isto acontece, por exemplo, para $\beta = -50°$, $\alpha = 170°$ e $h = 0$.

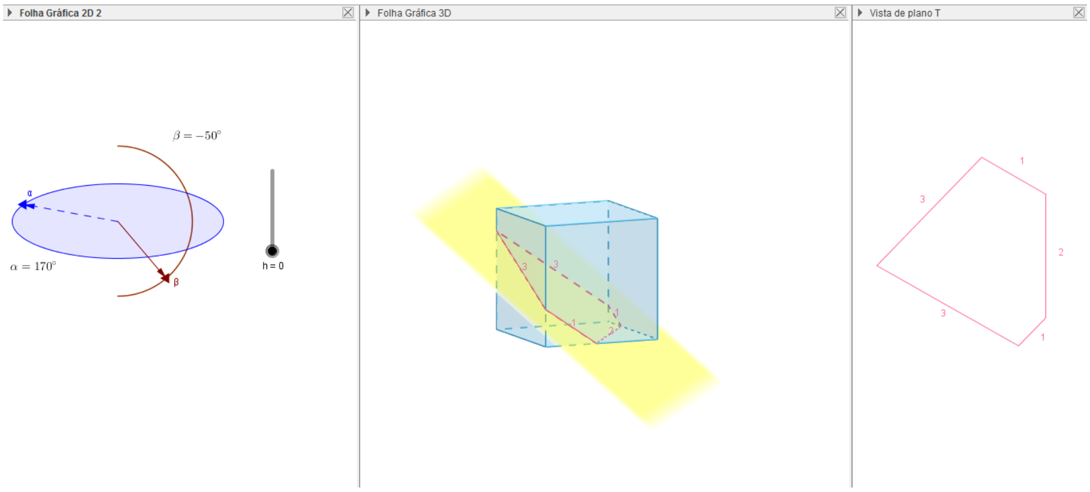


Figura 3.16: Pentágono

4. O plano interseta seis faces do cubo sendo o polígono de interseção um hexágono. Podemos obter esta situação para $\beta = -30°$, $\alpha = 170°$ e $h = 0$.

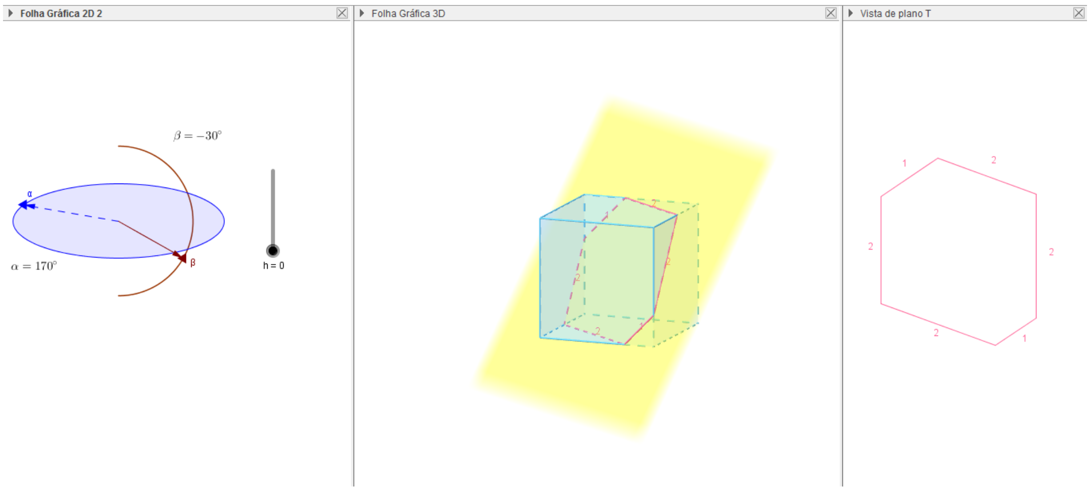
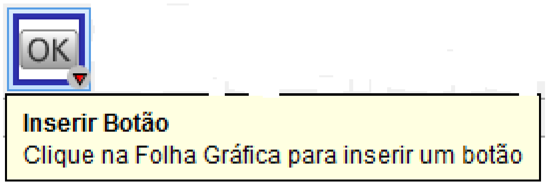


Figura 3.17: Hexágono

Temos quatro modelos de polígono como resultado da interseção do cubo e um plano, o lado máximo são seis e o lado mínimo são três. Além destes casos, temos de ter atenção que ao manipular os seletores se podem obter situações limites em que a interseção é um vértice ou uma aresta.

Os vários casos de interseção descritos podem ser obtido pelos valores anteriormente indicados. Esses valores foram obtidos por experimentação e não por uma dedução analítica. De modo a evitar que o utilizador tenha que inserir valores adequados para obter as situações descritas recorremos a uma ferramenta do *GeoGebra 2D* “Inserir Botão”



de modo que o utilizador pressionando sobre diferentes botões, os seletores sejam automaticamente ajustados para o tipo do polígono que se pretende. Assim na figura seguinte o utilizador pode pressionado o botão triângulo equilátero, losango, pentágono, etc.

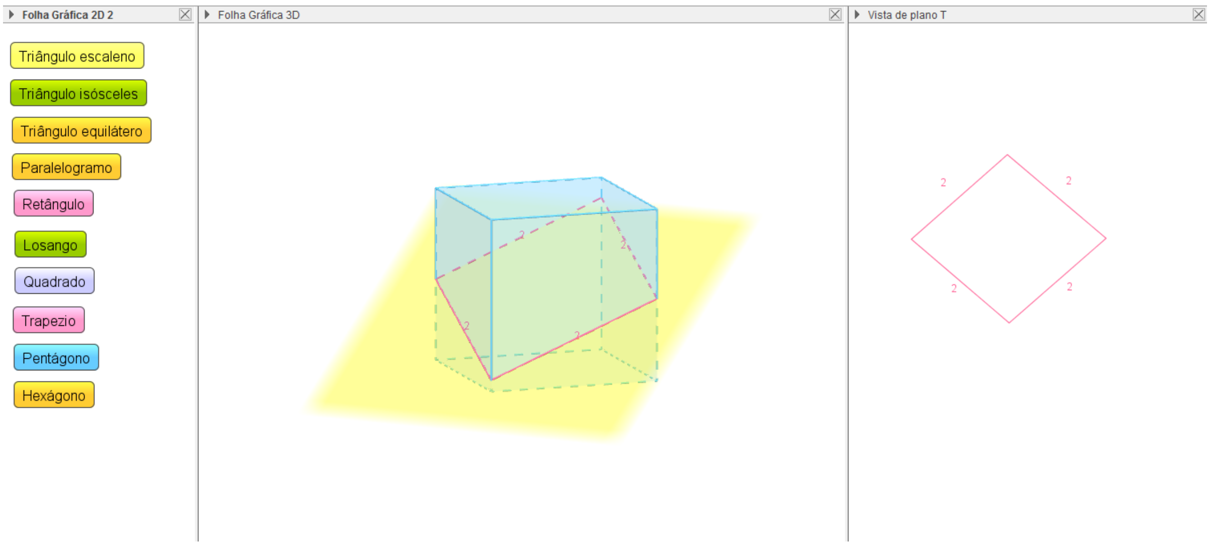


Figura 3.18: Secções no cubo - losango

3.2 8º ano

Neste manual podemos encontrar a noção clássica de planificação do cubo, do prisma e da pirâmide. Com a ferramenta planificação (pág. 28) do *GeoGebra* podemos obter imediatamente planificações (animadas) destes sólidos.

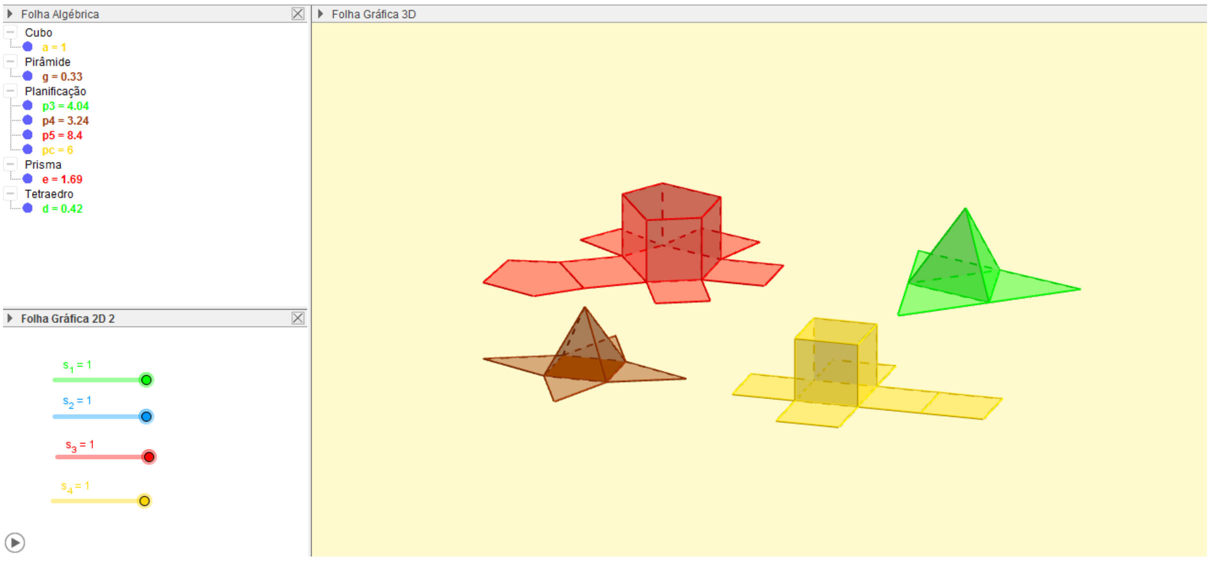


Figura 3.19: Planificações dos poliedros

3.2.1 Planificação de um cubo

Na figura seguinte do manual de matemática do 8º ano [3] é mostrado uma possível planificação do cubo.

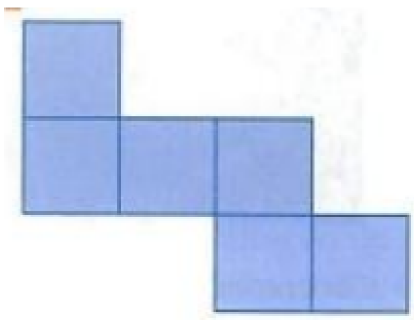


Figura 3.20: Tarefa 8.2 página 126 do manual

A ferramenta planificação (pág. 28) do *GeoGebra* efetua uma planificação padrão distinta do que sugerida no manual. Com objetivo de produzir uma animação da planificação do cubo condizente com a imagem mostrada no manual vamos explorar nesta secção o modo como se pode obter diferentes planificações do cubo.

Quando se utiliza a ferramenta planificação para um poliedro P, o *GeoGebra* cria automaticamente um seletor (vamos aqui designá-lo por s) em que $0 \leq s \leq 1$ e cria um objeto através do comando "Planificação[P,s]". De facto o comando

Planificação[<Poliedro>,<Número>]

cria uma planificação de um poliedro convexo no plano que contém a face utilizada para a sua construção. O <Número> é usado para definir o progresso do processo de desdobramento e deve situar-se entre 0 e 1. A planificação é totalmente desdobrada quando o número é 1. É deste modo que substituindo <Número> pelo seletor s se consegue obter a animação da planificação movimentando o seletor s.

O comando planificação pode ter uma estrutura mais complexas:

Planificação[<Poliedro>,<seletor>,<Face>,<Aresta>,<Aresta>, ...]

Na altura da escrita deste trabalho esta forma do comando planificação aplica-se apenas ao caso do poliedro ser um cubo. Ele permite criar diferentes planificações de um cubo, especificando a face onde vai ser feito o desdobramento e as arestas que precisam de ser cortadas para se obter a planificação pretendida.

Em seguida, vemos como podemos obter a planificação da figura 3.20.

1. Construímos um cubo recorrendo à ferramenta "Cubo" (pág. 28) e escolhendo de seguida dois pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (2, 0, 0)$ (que serão os vértices de uma aresta). Fica assim construído um cubo de vértices $[ABCDEFGH]$. Ao ser criado este cubo além dos vértices, o *GeoGebra* também gera as suas 12 arestas com o nome "arestaXY" em que X e Y são vértices consecutivos e as suas 6 faces com o nome "face $XYZW$" em que X, Y, W, Z são os vértices de uma face.

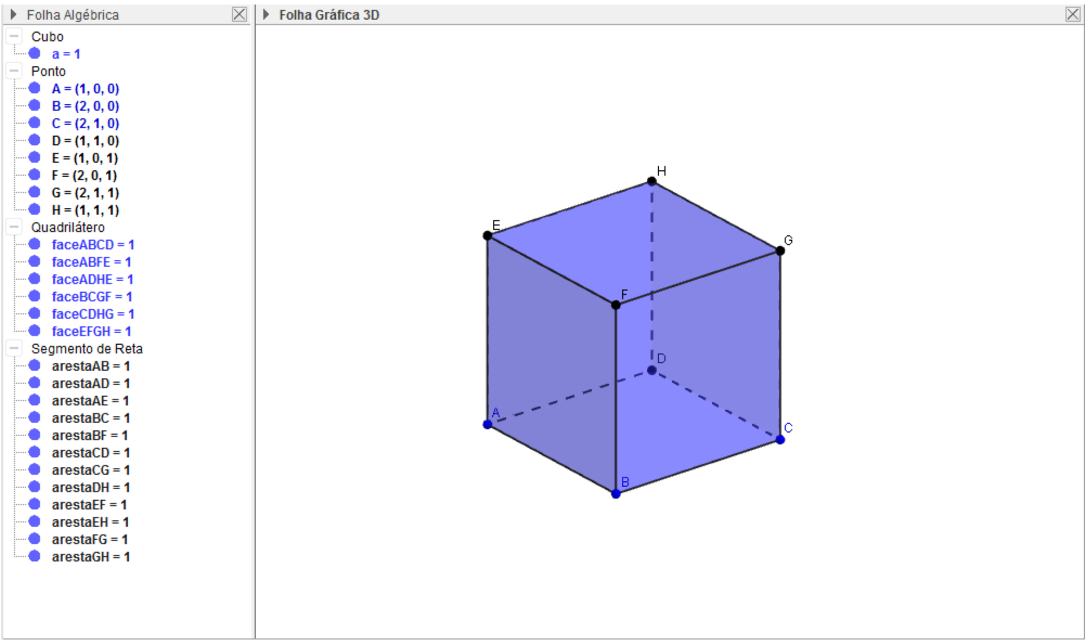


Figura 3.21: Cubo

2. Criamos um seletor $0 \leq s \leq 1$ para representar o progresso do desdobramento da planificação.

3. Introduzimos na barra de entrada da folha gráfica $3D$ o comando

   Planificação[a,s,faceABCD,arestaBC,arestaCD,arestaCG,arestaDH]

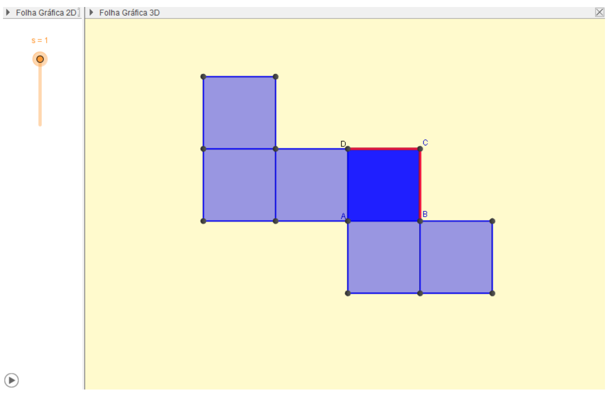


Figura 3.22: Planificação de um cubo no *GeoGebra*

   onde a é o nome do cubo e s o nome do seletor.

Definindo outras arestas e faces no comando definido em 3 da construção anterior, poderemos obter novas planificações.

Apresentamos de seguida diferentes planificações baseadas no mesmo processo mas escolhendo diferentes arestas. Em todos os exemplos aparecem realçadas as arestas em se efetua o corte que se pretende.

1. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaAE,arestaBF,arestaCD]

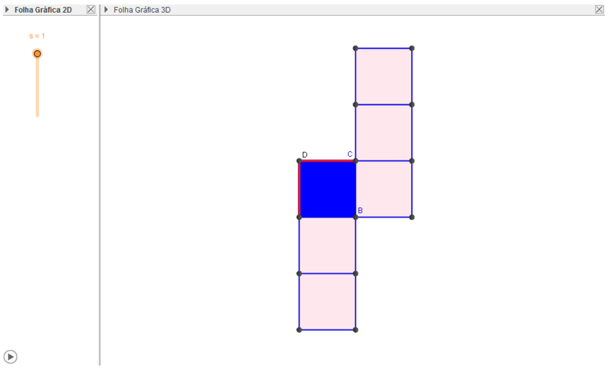


Figura 3.23: Planificação do cubo

2. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaBC,arestaBF,arestaCG]

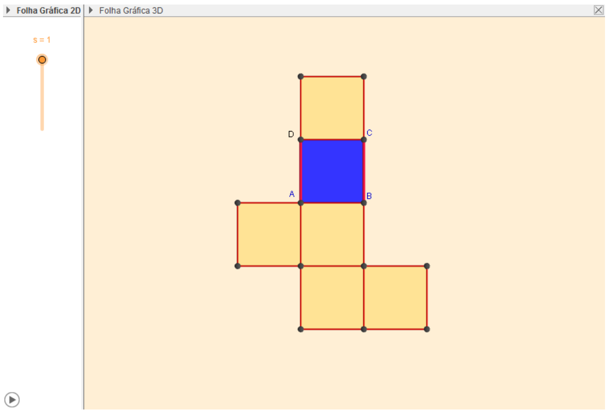


Figura 3.24: Planificação do cubo

3. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaAE,arestaCD,arestaDH]

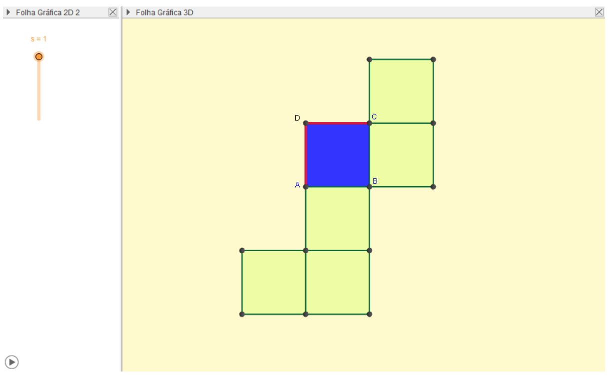


Figura 3.25: Planificação do cubo

4. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaCD,arestaEF,arestaFG]

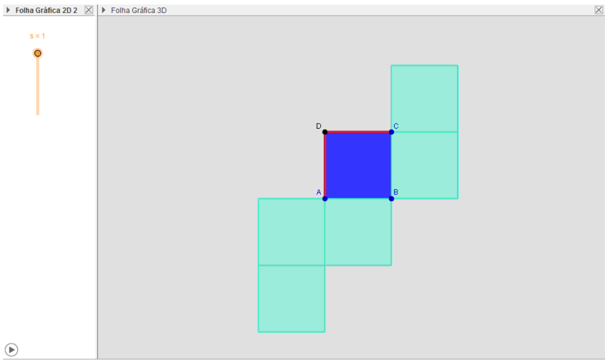


Figura 3.26: Planificação do cubo

5. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaCD,arestaEH,arestaGH]

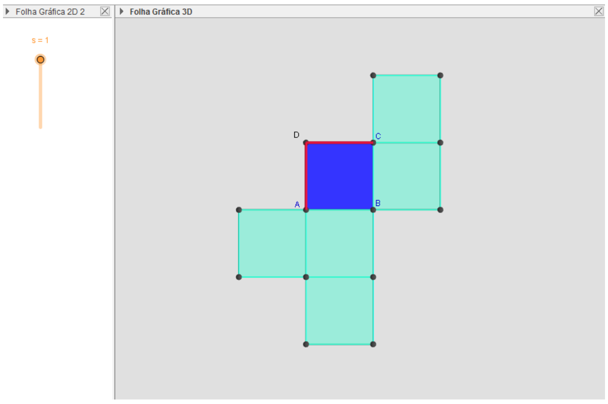


Figura 3.27: Planificação do cubo

6. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaBC,arestaCG,arestaDH]

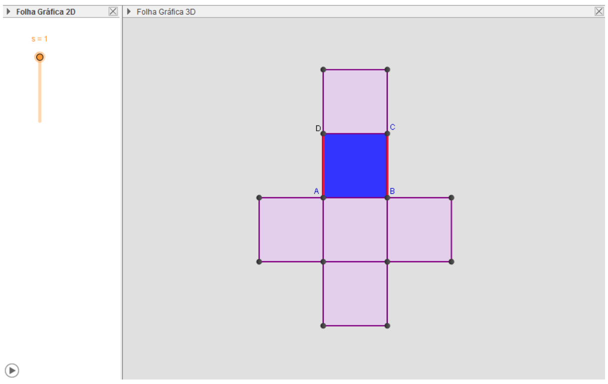


Figura 3.28: Planificação do cubo

7. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAE,arestaBC,arestaBF,arestaCD]

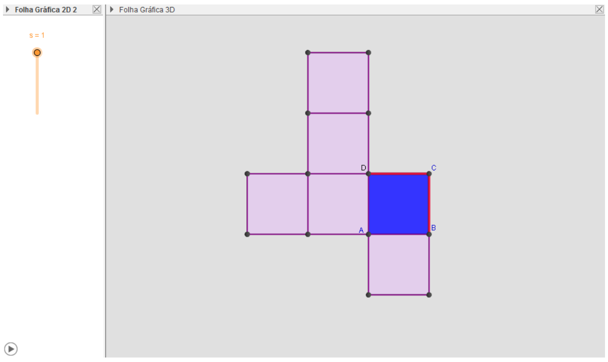


Figura 3.29: Planificação do cubo

8. Planificação[a,s,faceABCD,arestaCD,arestaDH,arestaEH,arestaGH]

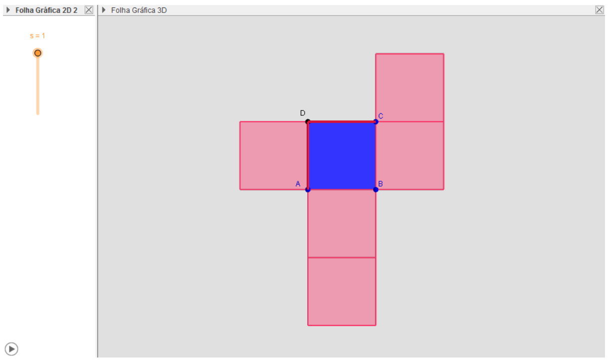


Figura 3.30: Planificação do cubo

9. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAE,arestaDH,arestaEH,arestaGH]

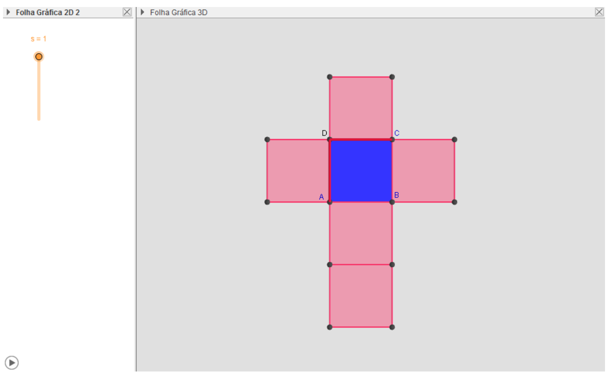


Figura 3.31: Planificação do cubo

10. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaBF,arestaCD,arestaCG]

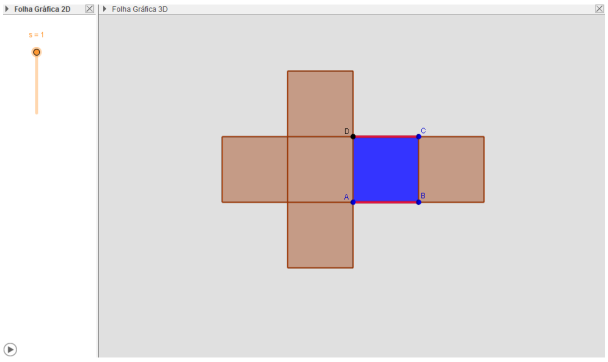


Figura 3.32: Planificação do cubo

Este é a planificação que o *GeoGebra* executa quando se acede ao menu da ferramentas.

11. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaAE,arestaCD,arestaDH]

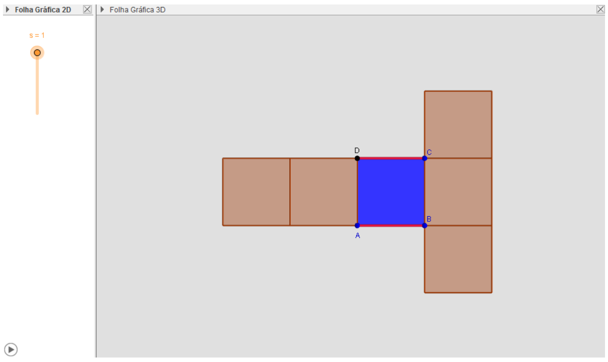


Figura 3.33: Planificação do cubo

12. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaBF,arestaCD,arestaDH]

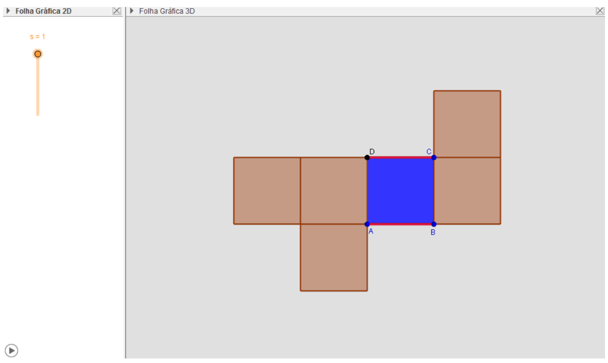


Figura 3.34: Planificação do cubo

13. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaAE,arestaBF,arestaCD]

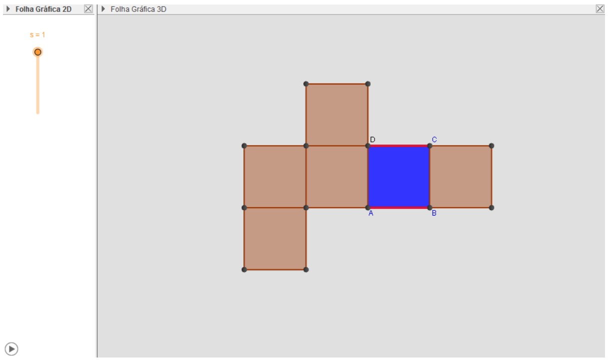


Figura 3.35: Planificação do cubo

14. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaBC,arestaBF,arestaDH]

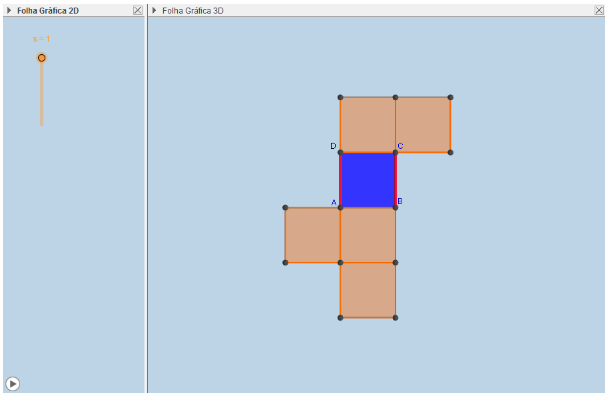


Figura 3.36: Planificação do cubo

15. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaCD,arestaCG,arestaDH]

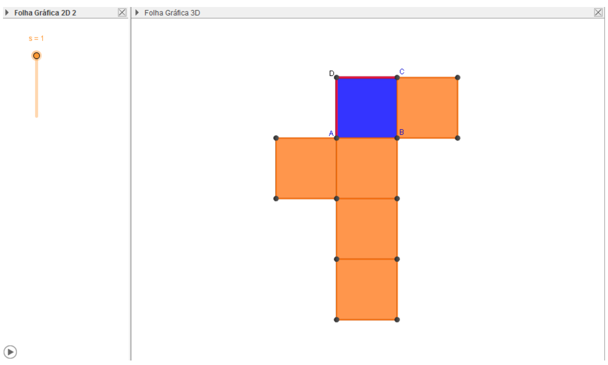


Figura 3.37: Planificação do cubo

16. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaBC,arestaEH,arestaGH]

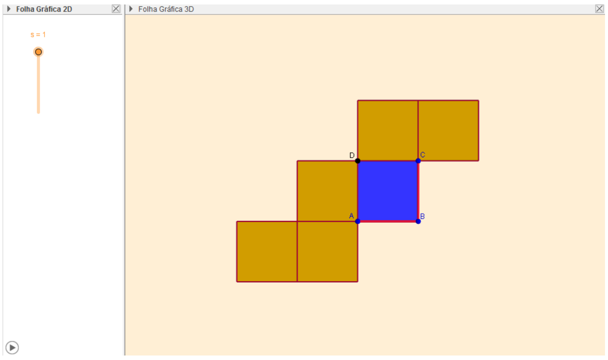


Figura 3.38: Planificação do cubo

17. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaBC,arestaEF,arestaFG]

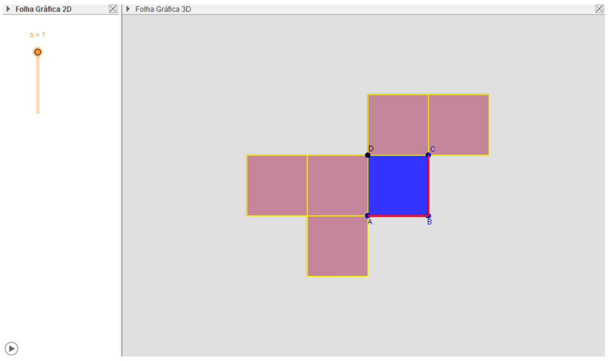


Figura 3.39: Planificação do cubo

18. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaAE,arestaBC,arestaBF]

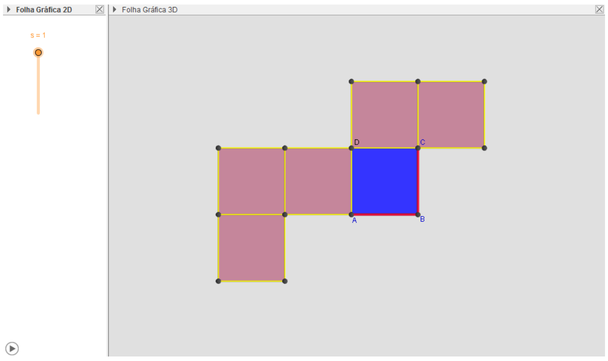


Figura 3.40: Planificação do cubo

19. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaBF,arestaCD,arestaCG]

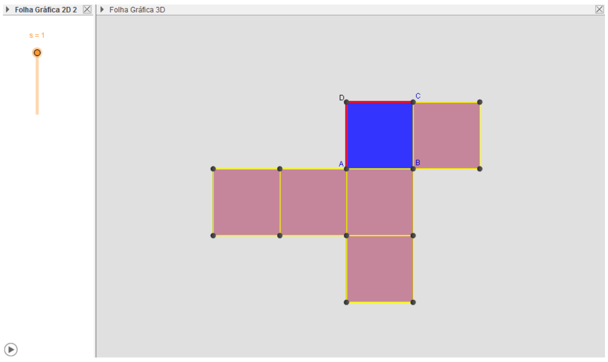


Figura 3.41: Planificação do cubo

20. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAD,arestaAE,arestaBC,arestaBF]

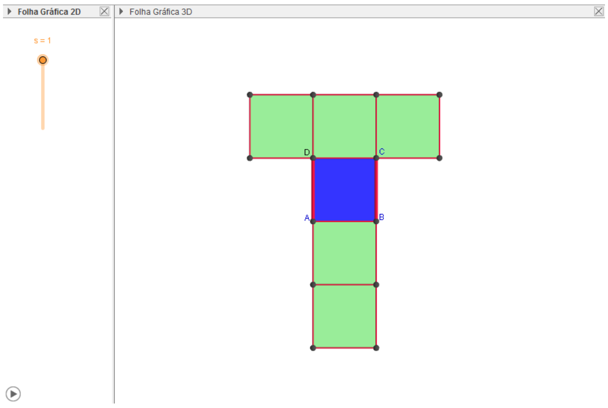


Figura 3.42: Planificação do cubo

21. Planificação[a,s,faceABCD,arestaAB,arestaAD,arestaBF,arestaCG]

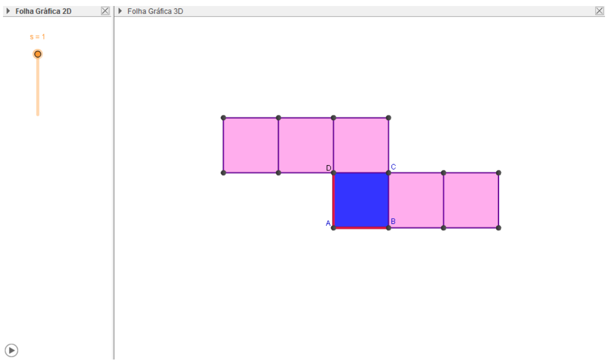


Figura 3.43: Planificação do cubo

3.2.2 Decomposição do cubo em 6 pirâmides

No manual de 8º ano [3] é apresentada uma ilustração que permite decompor um cubo em 6 pirâmides.

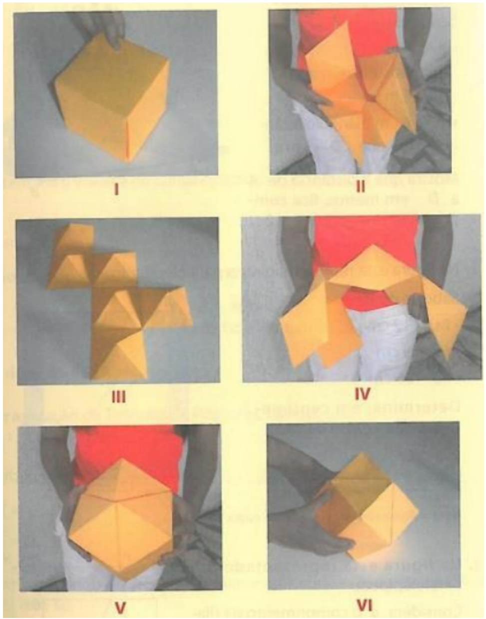


Figura 3.44: Tarefa 5 página 133 do manual

Partindo desta ideia, construindo as 6 pirâmides distintas cujo vértice é o baricentro do cubo e a sua base é uma das faces, podemos facilmente obter uma decomposição animada que transforma um cubo em 6 pirâmides verticais recorrendo ao comando planificação.

Cada uma das pirâmides foi construída com o comando [3]

Pirâmide[face,1]

Em que face é um dos 6 polígonos que são as faces do cubo. Deste modo cada pirâmide depende apenas dos vértices que definem a face e tem uma altura fixa que é metade [4] da aresta do cubo original.

Uma vez que cada pirâmide só depende da face que tem como base, ela acompanhará o movimento que a face possa fazer. Assim utilizando o comando planificação, o movimento exercido nas 6 faces vai então induzir o movimento das 6 pirâmides. De tal forma que quando as faces estão no plano (o seletor da planificação é igual a 1) temos as 6 pirâmides assentes no plano.

[3]Também se podia usar a ferramenta "Extrusão para Pirâmide ou Cone" (pág.26)

[4]Como consequência o vértice da pirâmide é o baricentro do cubo

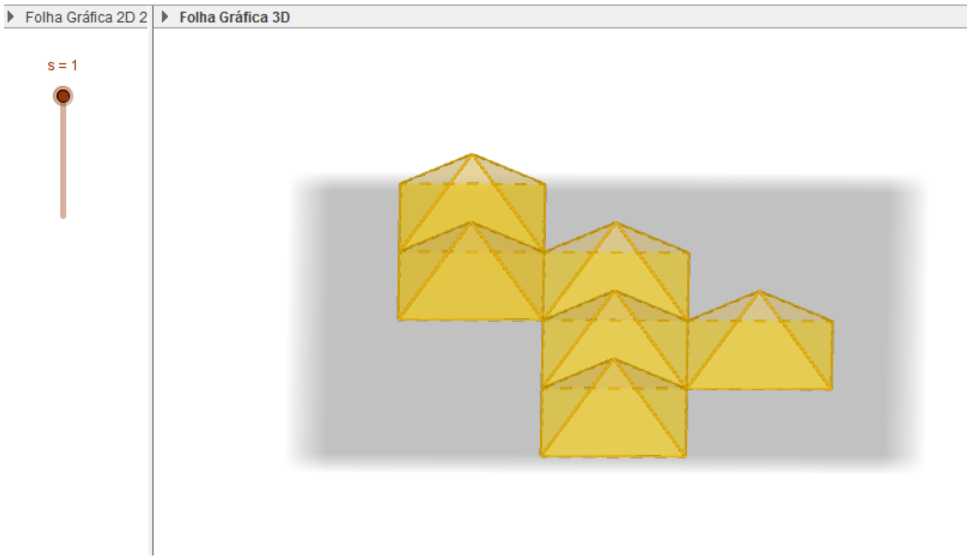


Figura 3.45: Planificação do cubo com 6 pirâmides assentes no plano

Mais concretamente a construção anterior foi obtida aplicando sucessivamente os passos que a seguir se indicam:

1. Definimos três pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (3, 0, 0)$ e $C = (3, 2, 0)$. Usamos o comando

   Cubo[A,B,C]

   para desenhar um cubo.

2. Definimos o seletor s onde $0 \leq s \leq 1$, como seletor que vai ficar associado ao comando planificação.

3. Na barra de entrada definimos a planificação do cubo por

   Planificação [a,s,faceABCD,arestaAD,arestaCD,arestaEF,arestaEH]

   onde a é o cubo e s é o seletor.

4. Ajustamos o valor do s para 1 para termos o desdobramento completo da planificação. Em cada face deste desdobramento da planificação, construímos uma pirâmide inserindo na barra de entrada o comando

   Pirâmide[<face>, 1]

   onde face <face> é o nome de cada uma das 6 faces.

Na construção seguinte podemos observar os sólidos que se obtêm quando se "fecha" uma planificação do cubo e sobre as faces da planificação estão construídas 6 pirâmides com o comando

Pirâmide[<face>, h]

em que h é um seletor tomando valores entre -1 e 1. Utilizamos a ferramenta "Inserir Botão" na página 55, o utilizador pressionando sobre diferentes botões na folha gráfica $2D$ 2, os seletores são automaticamente ajustados para o tipo da figura que se pretende.

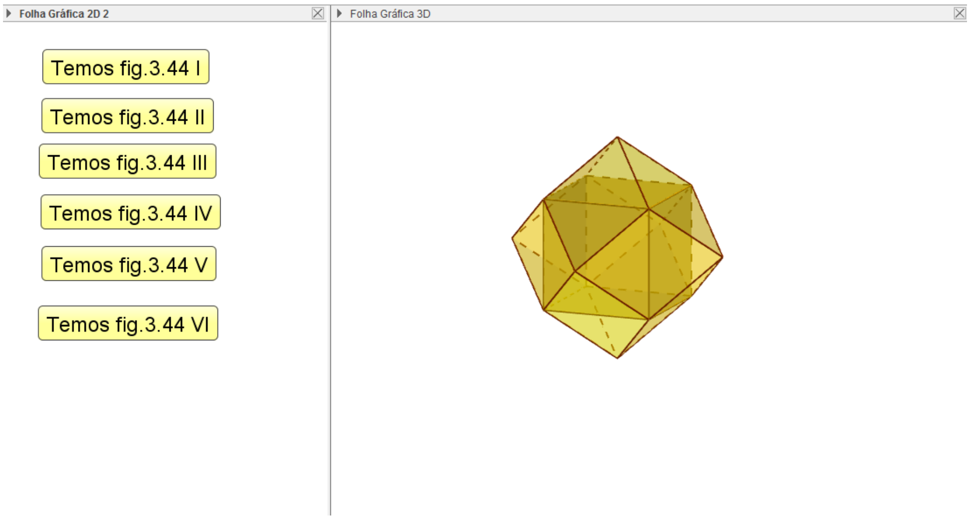


Figura 3.46: Tarefa 5 página 133 do manual

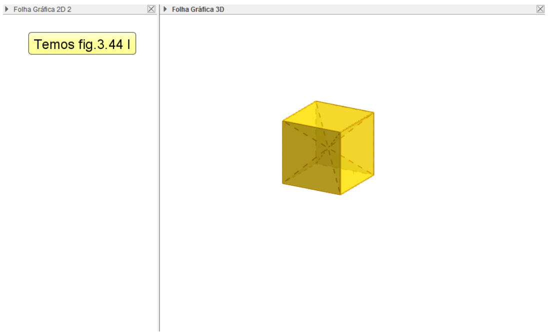


Figura 3.47: I

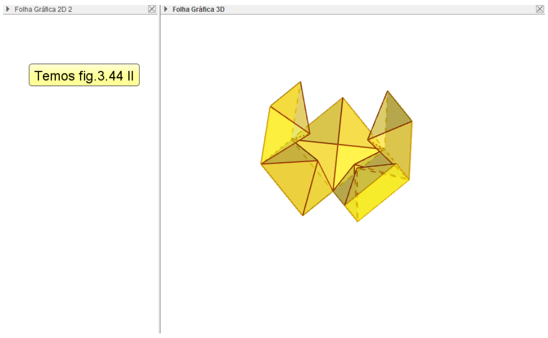


Figura 3.48: II

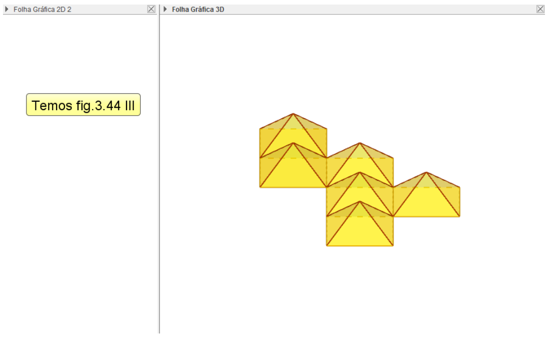


Figura 3.49: III

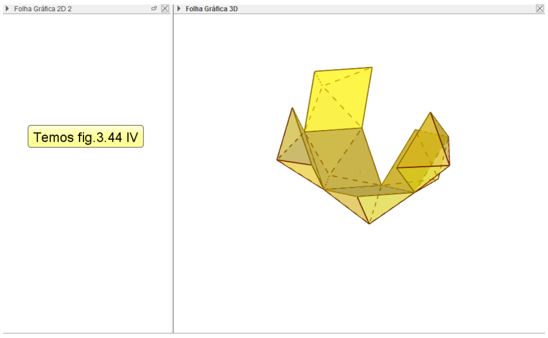


Figura 3.50: IV

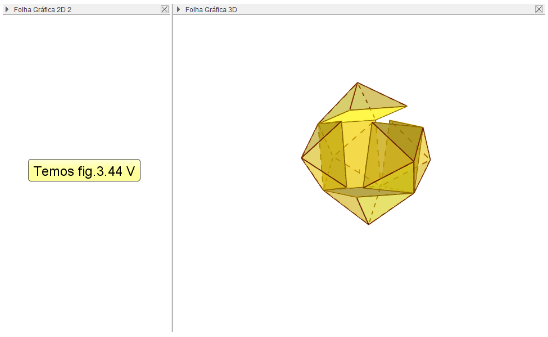


Figura 3.51: V

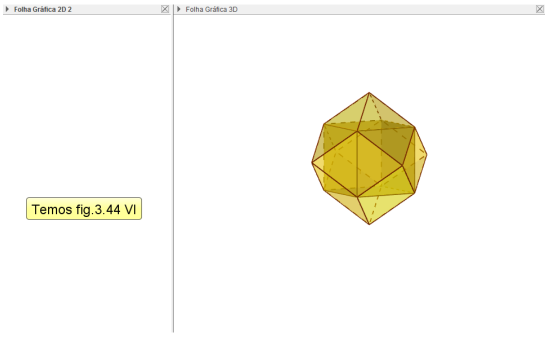


Figura 3.52: VI

3.3 9º ano

Contrariamente ao que acontece no caso do cubo e outros poliedros, o comando planificação não funciona no caso do cone e do cilindro. Assim as técnicas discutidas na secção anterior não podem ser aplicadas para fazer uma planificação da superfície do cone e do cilindro. Vamos, nesta secção, apresentar as estrategias que permitem obter com o *GeoGebra* uma tal planificação. Para isso vamos ter que recorrer a comandos que não estão disponíveis na barra de ferramentas.

3.3.1 Planificação do cilindro

Na figura seguinte apresenta-se um cilindro e uma sua planificação, que é utilizada no manual do 9º ano [4] para introduzir a noção de área da superfície.

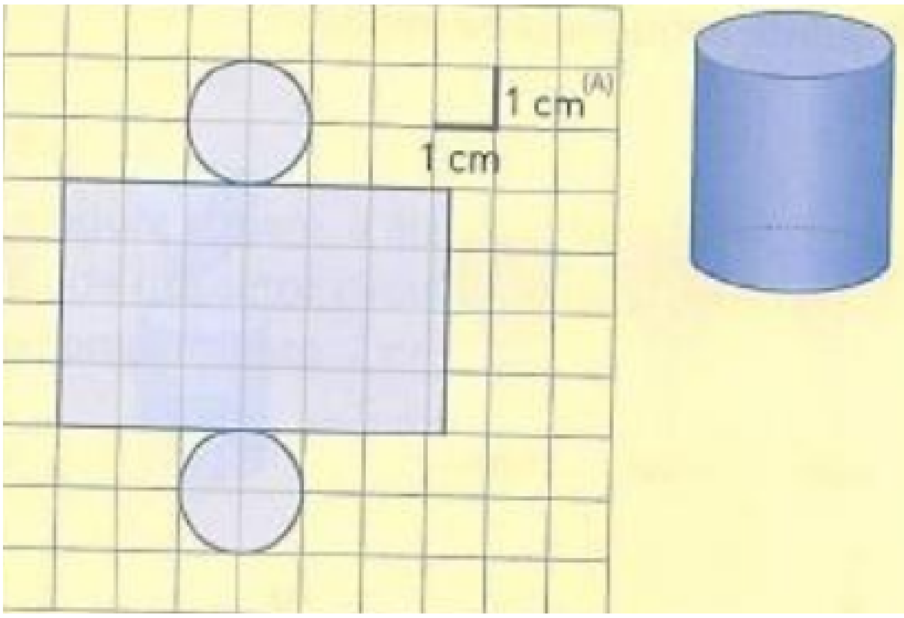


Figura 3.53: Tarefa 1 página 135 do manual

Desta figura estática representativa da planificação do cilindro vamos criar uma animação que transforma o cilindro na sua planificação que pode ajudar os alunos a percepcionar melhor o significado da planificação. Nas construções obtidas, pode-se constatar como incorporar na linguagem do *GeoGebra*, conceitos de álgebra linear e geometria analítica no espaço.

Na construção seguinte o utilizador pode movimentar o seletor s (ou criar uma animação a partir dele) de forma a visualizar os diferentes estágios que a planificação do cilindro obedece.

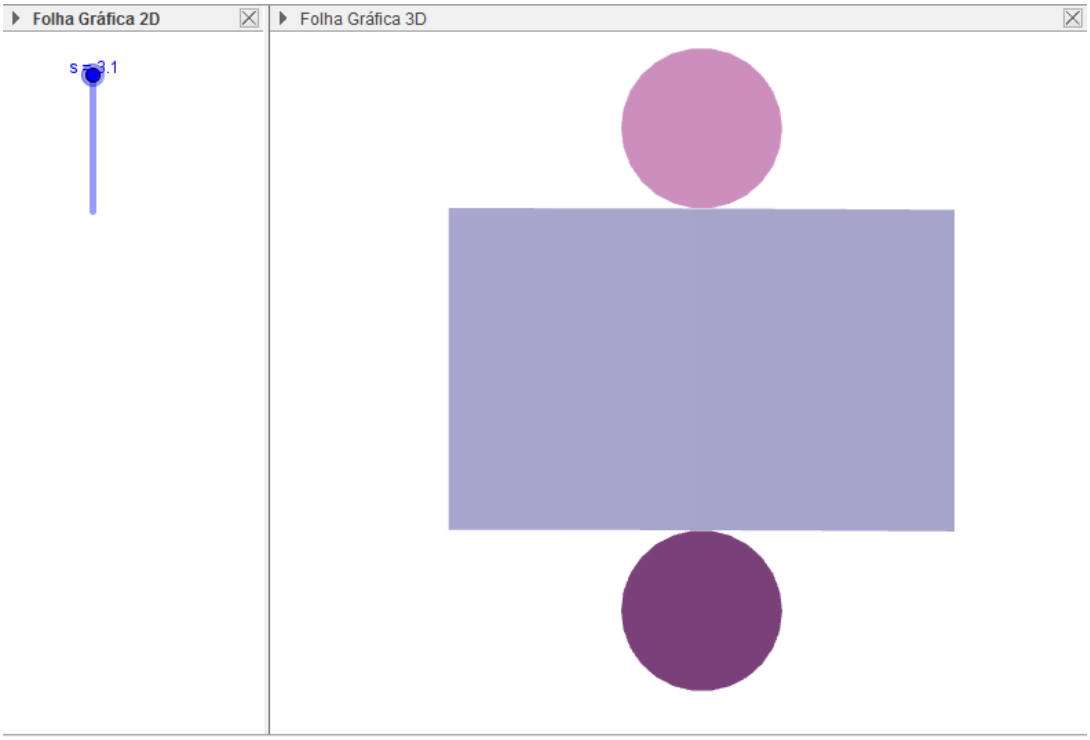


Figura 3.54: Planificação de um cilindro

A construção anterior pode ser separada em duas componentes. Uma das componentes corresponde à deformação da superfície (lateral) cilíndrica e a segunda à rotação dos dois círculos (tampas) que fazem parte da superfície do cilindro.

Deformação de uma circunferência num segmento

Para proceder à deformação da superfície cilíndrica num retângulo começamos por deformar uma circunferência num segmento de reta e de seguida expandimos essa deformação pela terceira coordenada do eixo dos zz.

Na folha gráfica $2D$ do *GeoGebra* vamos construir uma circunferência e deformá-la num segmento de reta recorrendo ao comando

Curva[<Expressão>,<Expressão>,
<Variável 1>,<Valor Inicial>,<Valor Final>].

Este comando esboça uma curva no plano da seguinte forma: se a expressão da curva for $(a(t), b(t))$ então o comando

$$\text{Curva}[a(t), b(t),$$
$$t, t_0, t_1],$$

esboça o traço da curva entre o instante t_0 e t_1. Por exemplo,

$$\text{Curva}[cos(t), sin(t),$$
$$t, -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}],$$

esboça a circunferência centrada na origem e de raio 1.

Devemos notar que para o papel da variável t podemos escolher qualquer outra letra ou mesmo conjuntos de letras. No entanto não poderemos usar x, y ou z uma vez que elas representam internamente funções no *GeoGebra*. Se A for um ponto então $x(A)$ (respetivamente $y(A)$ e $z(A)$) corresponde à primeira (respetivamente segunda e terceira) coordenada do ponto A.

Definindo um seletor $0 \leq s \leq \pi$ temos que o comando

$$\text{Curva}[\cos(t), \text{sen}(t),$$
$$t, -\tfrac{\pi}{2} + s, \tfrac{3\pi}{2} - s]$$

esboça um arco circular de centro na origem e raio 1 passando pelo ponto $(0, 1)$.

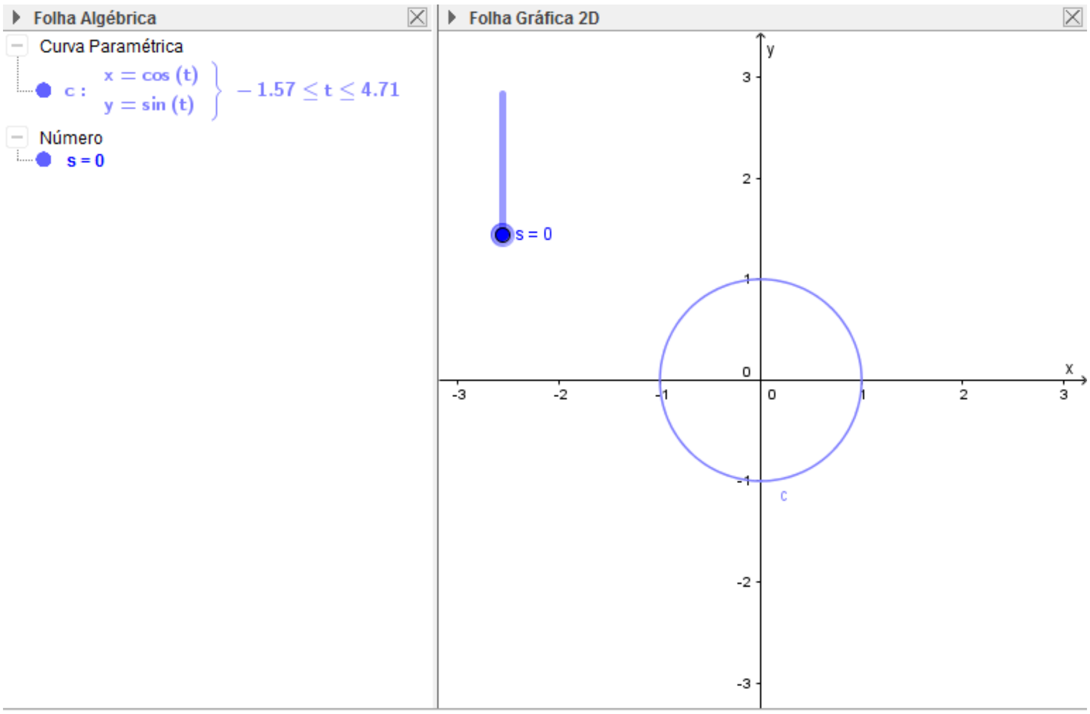


Figura 3.55: Arco circular

Para $R > 0$ o comando

$$\text{Curva}[R\cos(t), R\,\text{sen}(t),$$
$$t, -\tfrac{\pi}{2} + s, \tfrac{3\pi}{2} - s]$$

esboça um arco circular de centro na origem e raio R passando pelo ponto $(0, R)$. O comprimento deste arco circular é dado por

$$R\left(\left(\frac{3\pi}{2}-s\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+s\right)\right) \;=\; R\,(2\pi-2s) \quad .$$

Escolhendo

$$R \;=\; \frac{2\pi}{(2\pi-2s)} \tag{3.1}$$

temos então que este arco circular

$$\begin{aligned}&\text{Curva}[R\cos(t), R\,\text{sen}(t),\\ &\qquad t, -\tfrac{\pi}{2}+s, \tfrac{3\pi}{2}-s]\end{aligned}$$

tem comprimento 2π que é o comprimento do círculo unitário inicial.

O comando

$$\begin{aligned}&\text{Curva}[R\cos(t), R\,\text{sen}(t)+1-R,\\ &\qquad t, -\tfrac{\pi}{2}+s, \tfrac{3\pi}{2}-s]\end{aligned}$$

representa a translação de

$$\begin{aligned}&\text{Curva}[R\cos(t), R\,\text{sen}(t),\\ &\qquad t, -\tfrac{\pi}{2}+s, \tfrac{3\pi}{2}-s]\end{aligned}$$

pelo vetor $(0, 1-R)$, tendo portanto o mesmo comprimento 2π e passando pelo ponto $(0, 1)$ (este é obtido para $t = \dfrac{\pi}{2}$).

Deste modo, com a escolha de R dada em (3.1), o comando[5]

$$\begin{aligned}&Curva[R\cos(t)+0, R\,\text{sen}(t)+1-R,\\ &\qquad t, -\frac{\pi}{2}+s, \frac{3\pi}{2}-s],\end{aligned} \tag{3.2}$$

para $0 \leq s \leq \pi$ fornece uma deformação do círculo unitário centrado em $(0, 0)$ em arcos circulares que passam por $(0, 1)$ e têm o mesmo comprimento 2π, conforme se exemplifica na construção seguinte.

---

[5] De facto o comando que se deve escrever é

```
Curva[R*cos(t),R* sin(t)-R+1,
        t, (-pi/2)+s, ((3*pi)/2)-s].
```

Mas para comodidade do leitor, neste trabalho, usámos uma escrita mais próxima da notação matemática.

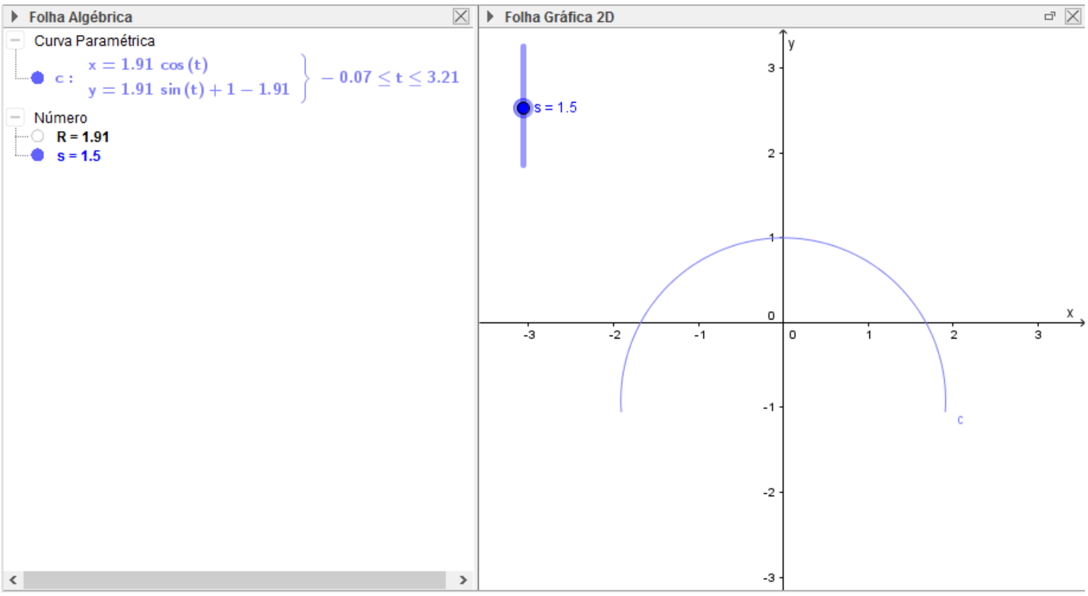


Figura 3.56: Arco circular com raio R

Deformação da superfície cilíndrica

Vamos agora proceder à deformação da superfície cilíndrica "translatando" ao longo do eixo dos zz a deformação da circunferência obtida anteriormente.

O comando

SuperfícieLateral[6] [<Expressão>, <Expressão>, <Expressão>,
<Variável 1>, <Valor Inicial>, <Valor Final>,
<Variável 2>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]

permite esboçar na folha gráfica $3D$ superfícies parametrizadas. Se a expressão da superfície parametrizada for $(a(t,u), b(t,u), c(t,u))$, então o comando

$$\text{SuperfícieLateral}[a(t,u), b(t,u), c(t,u),\\ t, t_0, t_1,\\ u, u_0, u_1]$$

esboça a superfície para $t_0 \leq t \leq t_1$ e $u_0 \leq u \leq u_1$. Assim o comando

$$\text{SuperfícieLateral}[\cos(t), \text{sen}(t), u,\\ t, 0, 2\pi,\\ u, 0, 4]$$

[6] A designação de SuperfícieLateral foi uma tradução não muito feliz de termo inglês surface

esboça a superfície cilíndrica de raio 1 com base no plano $z = 0$ e altura 4. E o comando

$$\begin{aligned}\text{SuperfícieLateral}[&u\cos(t), u\,\text{sen}(t), 0,\\ &t, 0, 2\pi,\\ &u, 0, 1]\end{aligned}$$

esboça o círculo unitário que está no plano $z = 0$ e centrado no origem.

Com a escolha de R dada em (3.1) o comando

$$\begin{aligned}\text{SuperfícieLateral}[&R\cos(t), R\,\text{sen}(t) - R + 1, u,\\ &t, -\tfrac{\pi}{2} + s, \tfrac{3\pi}{2} - s,\\ &u, 0, 4]\end{aligned}$$

efetua a formação da superfície cilíndrica num retângulo conforme se mostra na figura seguinte.

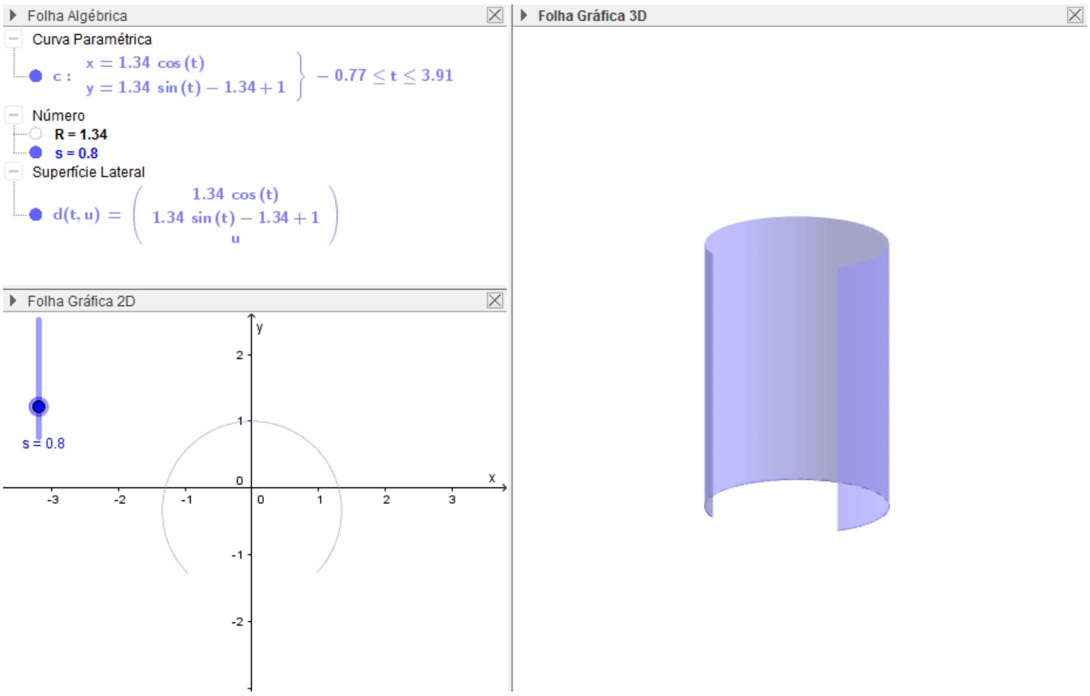


Figura 3.57: Superfície (lateral) cilíndrica

Rotação de superfícies

Para rodar uma superfície definida pelo comando "SuperfícieLateral" não podemos utilizar diretamente a ferramenta descrita na página 31. Para efetuar a rotação das tampas do cilindro vamos ter que implementar no *GeoGebra* a rotações a partir do cálculo matricial. O texto seguido como apoio a esta componente foi no livro [11].

Uma matriz (de entrada reais)

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

pode ser inserida no *GeoGebra* inserindo diretamente na barra de entrada o comando

$$M = \{\{a_{11}, b_{12}, c_{13}\}, \{a_{21}, b_{22}, c_{23}\}, \{a_{31}, b_{32}, c_{33}\}\} .$$

Por exemplo a matriz que representa uma rotação de ângulo θ em torno do eixo dos xx,

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é inserida através do comando

$$\mathrm{R\_x} = \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos(\theta), -sin(\theta)\}, \{0, sin(\theta), \cos(\theta)\}\} .$$

Para efetuar as habituais soma, multiplicação e subtração de matrizes usamos os símbolos "+", "*" e "-". A inversa da matrizes M é obtida com o comando

$$\text{Inversa}[M].$$

Para uma superfície parametrizada

$$F(t, u) = \begin{bmatrix} a(t, u) \\ b(t, u) \\ c(t, u) \end{bmatrix}$$

temos que, rodando esta de um ângulo θ em torno do eixo dos xx, obtemos uma nova superfície parametrizada $G(t, u)$ dada por

$$G(t, u) = R_x \begin{bmatrix} a(t, u) \\ b(t, u) \\ c(t, u) \end{bmatrix}$$

Se rodarmos a mesma superfície $F(t, u)$ de um ângulo θ em torno de uma reta paralela ao eixo dos xx que passa por um ponto (x_0, y_0, z_0) obtemos uma nova superfície parametrizada $H(t, u)$ definida por

$$H(t,u) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + R_x \left(\begin{bmatrix} a(t,u) \\ b(t,u) \\ c(t,u) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right)$$

Note-se que a formula acima não é mais do que a composição

$$T \circ R_x \circ T^{-1} \ ,$$

em que T é a translação dada pelo vetor $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ e portanto

$$T^{-1} = -T.$$

Assim, a superfície parametrizada $C_0(t,u)$ que é a rotação de um ângulo $-\theta$ da base do cilindro em torno da reta $y = 1$ e $z = 0$ (a reta paralela ao eixo dos xx e que passa no ponto $(0,1,0)$) é definida por:

$$C_0(t,u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x \left(\begin{bmatrix} u\cos t \\ u\,\mathrm{sen}\, t \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u\cos t \\ u\,\mathrm{sen}\, t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u\cos t \\ \cos\theta(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \\ \mathrm{sen}\,\theta(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u\cos t \\ 1 + \cos\theta(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \\ \mathrm{sen}\,\theta(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \end{bmatrix}$$

Com o comando

$$\begin{aligned}&\mathit{SuperfícieLateral}[u\cos(t), 1+\cos\theta(u\,\mathrm{sen}\,t-1), \mathrm{sen}\,\theta(u\,\mathrm{sen}\,t-1),\\&\qquad t, 0, 2\pi,\\&\qquad u, 0, 1]\end{aligned} \tag{3.3}$$

obtemos assim a rotação para a base do cilindro escolhendo $\theta = \frac{s}{2}$.

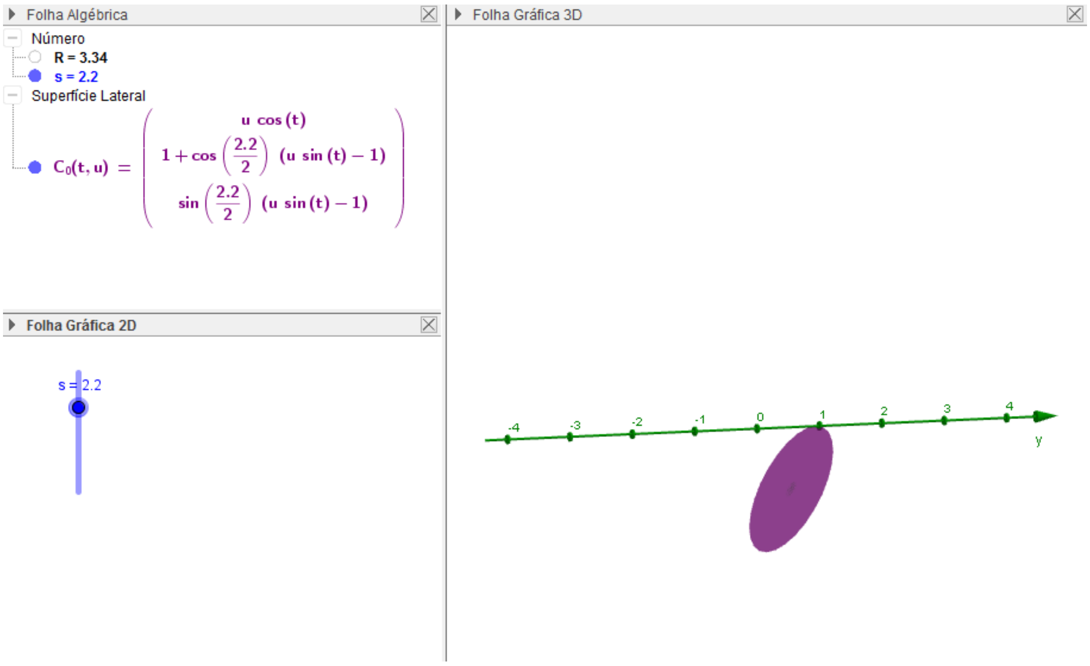


Figura 3.58: Base circular do cilindro

De modo análogo, para rodar a tampa do cilindro, escolhemos $\theta = \frac{s}{2}$. A superfície parametrizada $C_4(t,u)$, que corresponde à rotação de ângulo θ da tampa em torno da reta $y = 1$ e $z = 4$ (a reta paralela ao eixo dos xx e que passa no ponto $(0,1,4)$) é dada por:

$$
\begin{aligned}
C_4(t,u) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + R_x \left(\begin{bmatrix} u\cos t \\ u\,\mathrm{sen}\, t \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{s}{2}) & \mathrm{sen}(\frac{s}{2}) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\frac{s}{2}) & \cos(\frac{s}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u\cos t \\ u\,\mathrm{sen}\, t - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u\cos t \\ \cos(\frac{s}{2})(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \\ -\mathrm{sen}(\frac{s}{2})(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u\cos t \\ 1 + \cos(\frac{s}{2})(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \\ 4 - \mathrm{sen}(\frac{s}{2})(u\,\mathrm{sen}\, t - 1) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Usando o mesmo seletor s da construção (fig. 3.55), que varia entre 0 e π e tomando $\theta = \frac{s}{2}$, conseguimos obter a rotação da tampa do cilindro para todos os valores entre $0°$ e $90°$, escrevendo comando

$$
\begin{aligned}
&\mathit{SuperfícieLateral}[u\cos t, 1 + \cos\left(\frac{s}{2}\right)(u\,\mathrm{sen}\, t - 1), 4 - \mathrm{sen}\left(\frac{s}{2}\right)(u\,\mathrm{sen}\, t - 1), \\
&\qquad t, 0, 2\pi, \\
&\qquad u, 0, 1]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

obtemos assim a rotação para a tampa do cilindro.

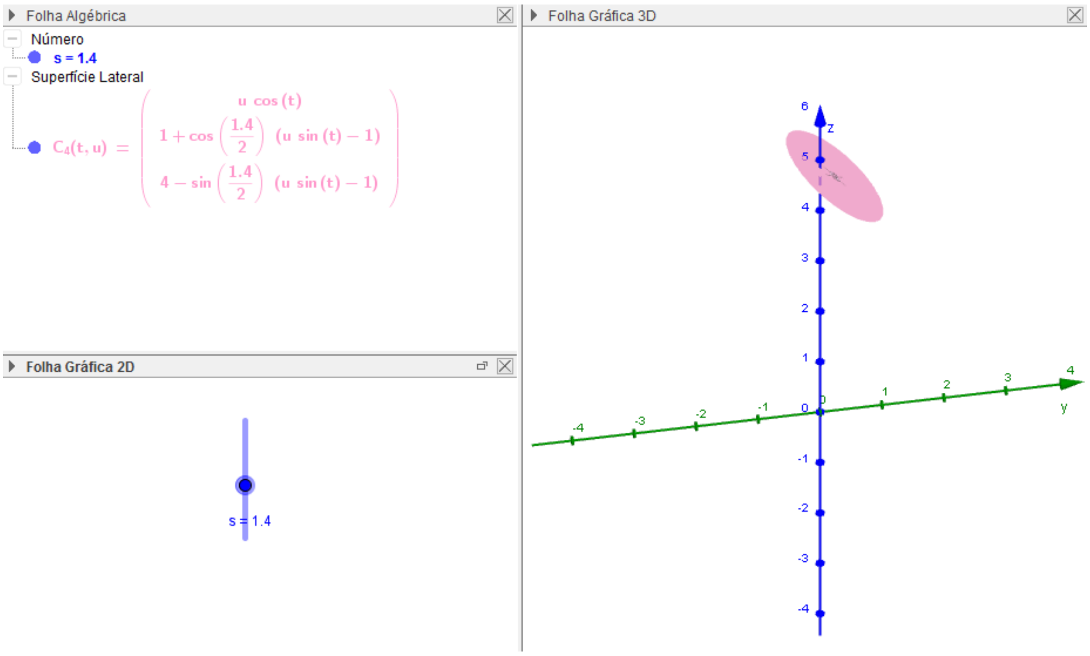


Figura 3.59: Superfície circular da tampa do cilindro

Juntando as construções (fig. 3.57), (fig. 3.58) e (fig. 3.59), obtemos a planificação do cilindro que esta na construção (fig. 3.54).

3.3.2 Planificação do cone

Seguindo a mesma estratégia da planificação do cilindro vamos nesta secção apresentar uma planificação para o cone construída no *GeoGebra*.

Superfície lateral do cone

Vamos considerar um cone em que a base é um círculo unitário e o vértice é o ponto $V(0) = (0, 0, 3)$.

Considerando a circunferência

$$C_0(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \tag{3.5}$$

onde $(0 \leq t \leq 2\pi)$, a superfície lateral do cone é constituída pelos segmentos de reta que unem $V(0)$ a $C_0(t)$. Pelo teorema de Pitágoras temos que a norma

$$||V(0) - C_0(t)|| = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}\ .$$

Deste modo temos que

$$\frac{1}{\sqrt{10}}(V(0) - C_0(t))$$

tem norma 1 e o segmento entre $V(0)$ e $C_0(t)$ pode ser parametrizado por

$$V(0) + u\frac{1}{\sqrt{10}}(C_0(t) - V(0))$$

com $0 \leq u \leq \sqrt{10}$. Assim a superfície lateral pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned}
F(t, u) &= V(0) + \frac{u}{\sqrt{10}}(C_0(t) - V(0)) \\
&= (0, 0, 3) + \frac{u}{\sqrt{10}}\left((\cos t, \operatorname{sen} t, 0) - (0, 0, 3)\right) \\
&= (0, 0, 3) + \left(\frac{u\cos t}{\sqrt{10}}, \frac{u \operatorname{sen} t}{\sqrt{10}}, \frac{-3u}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \left(\frac{u\cos t}{\sqrt{10}}, \frac{u \operatorname{sen} t}{\sqrt{10}}, 3 - \frac{3u}{\sqrt{10}}\right) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

em que $0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq u \leq \sqrt{10}$. No *GeoGebra* o comando

SuperfícieLateral[$\dfrac{u\cos t}{\sqrt{10}}, \dfrac{u \operatorname{sen} t}{\sqrt{10}}, 3 - \dfrac{3u}{\sqrt{10}},$
$t, 0, 2\pi,$
$u, 0, \sqrt{10}$]

constrói a superfície lateral do cone pretendido.

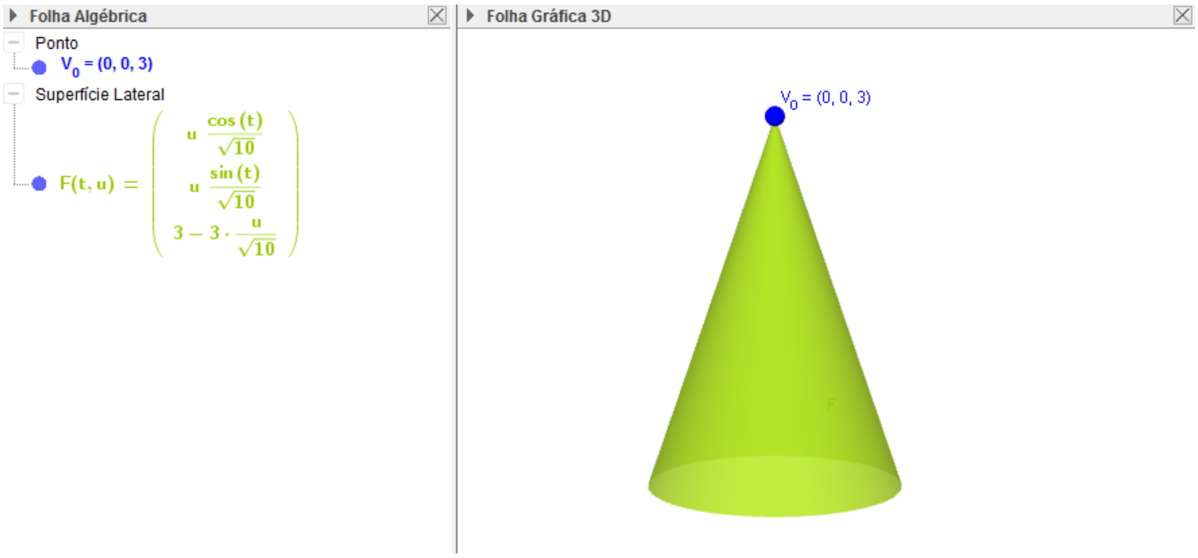


Figura 3.60: Cone

Deformação da superfície lateral

Vamos agora ver como podemos deformar a superfície lateral anterior de modo a obter uma superfície no plano $y = 1$.

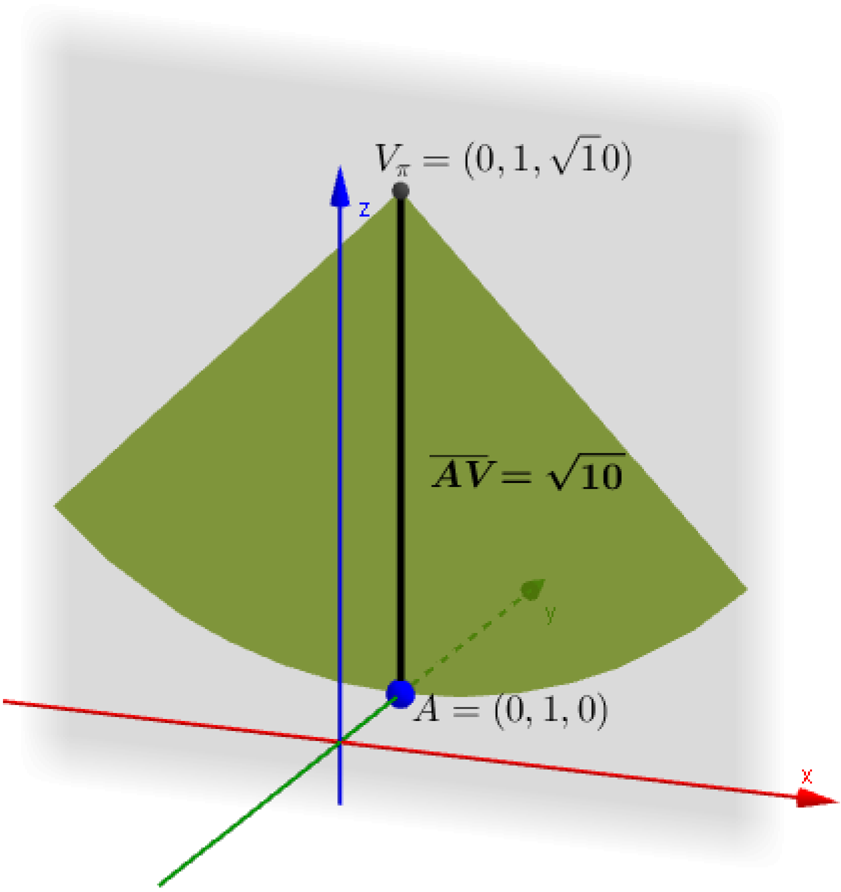


Figura 3.61: Superfície lateral do cone

Com o seletor $0 \leq s \leq \pi$ definimos o ponto $V(s) = V$ tal que $V(0) = (0, 0, 3)$ e $V(\pi) = (0, 1, \sqrt{10})$. Isto pode ser obtido escrevendo

$$\begin{aligned} V &= \left(1 - \frac{s}{\pi}\right)(0, 0, 3) + \left(\frac{s}{\pi}\right)(0, 1, \sqrt{10}) \\ &= \left(0, \frac{s}{\pi}, 3 - \frac{3s}{\pi} + \frac{\sqrt{10}\, s}{\pi}\right) \\ &= \left(0, \frac{s}{\pi}, 3 + (\sqrt{10} - 3)\frac{s}{\pi}\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Na barra de entrada introduzimos o comando

V = (0, s/pi, 3+ (sqrt(10) - 3)*s/pi),

para obter a deslocação de V pretendida quando se altera o seletor s.

A curva $C_s(t) = C(t)$

$$C(t) = \text{Curva}[R\cos(t), R\,\text{sen}(t) + 1 - R, \\ t, -\tfrac{\pi}{2} + s, \tfrac{3\pi}{2} - s]$$

obtida em (3.2) com

$$R \;=\; \frac{2\pi}{(2\pi - 2s)}$$

deduzido em (3.1), vai também servir aqui para a deformação da superfície lateral do cone. O segmento $I = I(0)$ de comprimento $\sqrt{10}$ entre o vértice do cone $V(0) = (0, 0, 3)$ e o ponto da circunferência $C_0(t)$ (3.5), que serve de base ao cone, vai ser enviado num segmento[7] $I(s)$ com o mesmo comprimento com extremidade em $V(s)$ e contido na semirreta $VC(t) = V(s)C_s(t)$, em que $C(t)$ é a deformação da curva obtida aquando da planificação do cilindro. O segmento $I(s) = I$ fica então definido por

$$V + u\,\frac{C(t) - V}{||C(t) - V||}$$

com $0 \leq u \leq \sqrt{10}$. A deformação $G = G_s$ da superfície lateral do cone $F(t, u)$ (3.6) pode ser obtida por

$$G(t, u) = V + u\,\frac{C(t) - V}{||C(t) - V||} \tag{3.8}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq u \leq \sqrt{10}$. Atendendo ao valor de V dado em (3.7) e ao valor de $C(t)$ dado em (3.2) temos que

$$\begin{aligned} C(t) - V &= (R\cos(t), R\,\text{sen}(t) + 1 - R, 0) - \Big(0, \frac{s}{\pi}, 3 + (\sqrt{10} - 3)\frac{s}{\pi}\Big) \\ &= \Big(R\cos(t), R\,\text{sen}(t) + 1 - R - \frac{s}{\pi}, -3 + (3 - \sqrt{10})\frac{s}{\pi}\Big) \\ ||C(t) - V|| &= \sqrt{(R\cos(t))^2 + \Big(R\,\text{sen}(t) + 1 - R - \frac{s}{\pi}\Big)^2 + \Big(-3 + (3 - \sqrt{10})\frac{s}{\pi}\Big)^2} \end{aligned}$$

Definindo na barra de entrada a função

$$N(x) = \frac{1}{||C(x) - V||}$$

dada pela expressão acima temos as expressões necessárias para definir o comando do *GeoGebra* que gera as superfícies que são a deformação da superfície do cone. De (3.8) vem então que

[7] De facto o segmento I depende do s e de t

$$
\begin{aligned}
G(t,u) &= V + u\,\frac{C(t)-V}{||C(t)-V||}\\
&= V + u\ N(t)(C(t) - V\\
&= (x(V) + u\ N(t)(R\cos(t) - x(V)),\\
&\quad\ y(V) +\ u\ N(t)(R\,\mathrm{sen}(t) + 1 - R - y(V)),\\
&\quad\ z(V) - u\ N(t)\ z(V))\quad .
\end{aligned}
$$

Relembramos que $x(V)$, $y(V)$ e $z(V)$ fornecem respetivamente, a primeira, segunda e terceira coordenada de V.

O comando

$$
\begin{aligned}
\text{SuperfícieLateral}[&x(V) + u\ N(t)(R\cos(t) - x(V)), y(V) + u\ N(t)(R\,\mathrm{sen}(t) + 1 - R - \ y(V)),\\
&z(V) - u\ N(t)\ z(V),\\
&t, (-\tfrac{\pi}{2}) + s, \tfrac{3\pi}{2} - s,\\
&u, 0, \sqrt{10}]
\end{aligned}
$$

gera então a deformação da superfície lateral do cone no plano $y = 1$ quando se movimenta o seletor s, conforme pode ser visto na construção seguinte:

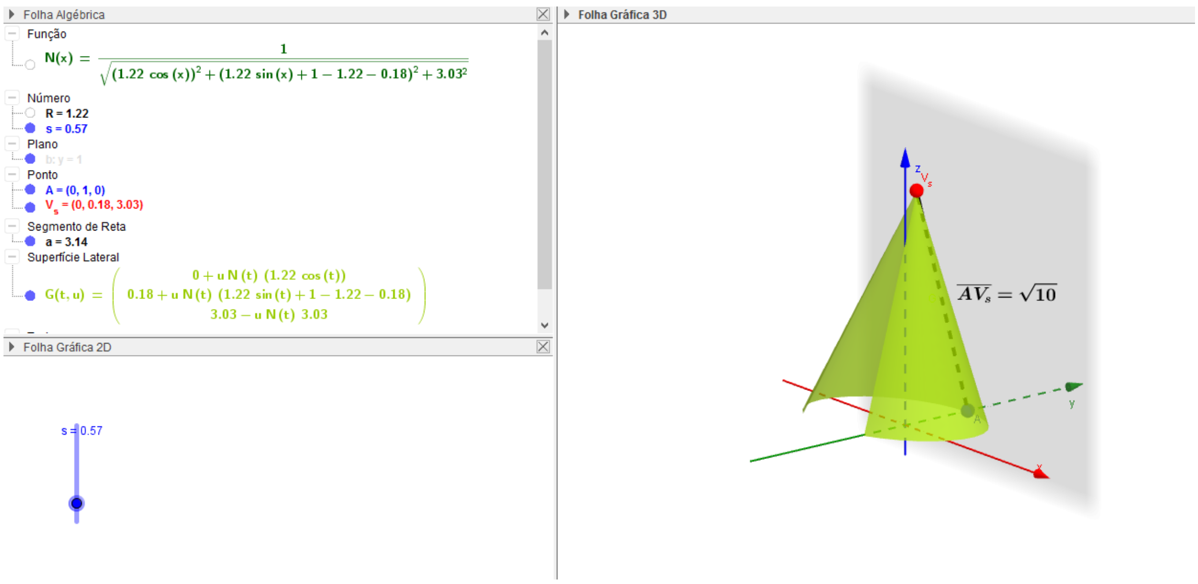


Figura 3.62: Superfície lateral do cone

Rotação da base do cone

A rotação da base do cone é análoga a executada no caso do cilindro (fig. 3.58) e portanto podemos juntar esta construção à construção anterior e obter à planificação do cone pretendida.

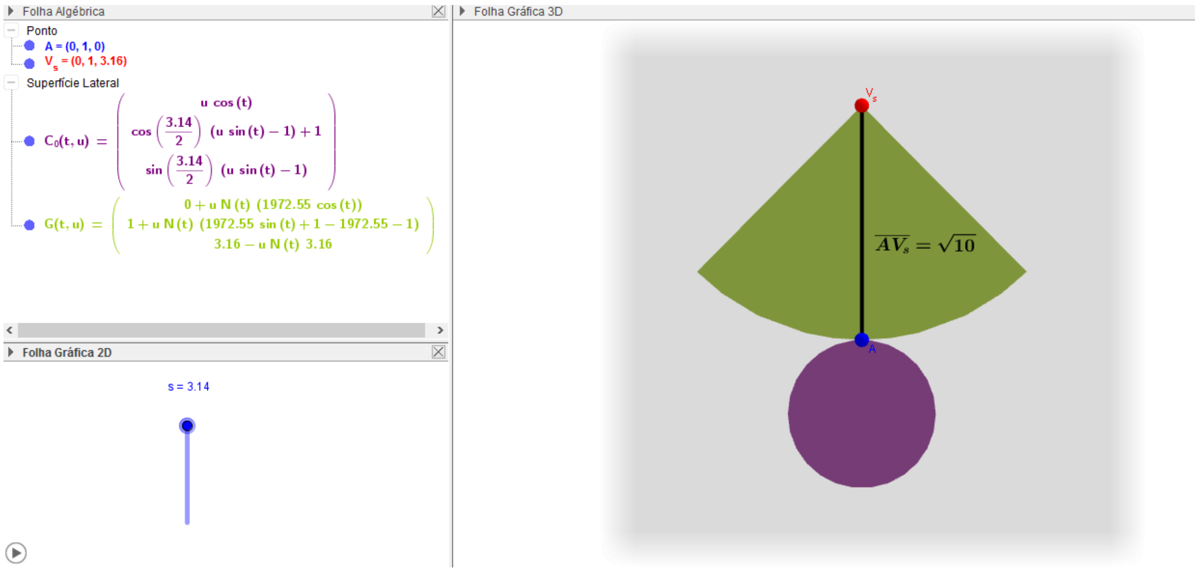


Figura 3.63: Planificação do cone no *GeoGebra*

3.3.3 Ferramenta para rotação de superfícies

Na secção anterior repetimos os procedimentos de rotação utilizados na subsecção (3.3.1) onde é feita a planificação do cilindro. Sempre que no *GeoGebra* se repetem vários passos de uma construção é conveniente agrupá-los na forma de uma ferramenta. Vamos finalizar esta secção apresentando uma ferramenta que permite, dados dois pontos, rodar uma superfície parametrizada em torno do eixo formado por este dois pontos.

Rotação de superfícies parametrizadas

Desenhamos na folha gráfica $3D$ dois pontos A e B não coincidentes. De seguida definimos o vetor unitário

$$u_1 = \frac{B - A}{||B - A||}$$

através do comando

$$u_1 = \text{Vetor[A,B]/Comprimento[Vetor[A,B]]} \; .$$

Vamos acrescentar dois vetores u_2 e u_3 ao vetor u_1 de forma a formarem uma base de $\mathbb{R}^3$.

1. Se $x(u_1) \neq 0$ então escolhemos $u_2 = (0,1,0)$, caso contrário escolhemos $u_2 = (1,0,0)$. No *GeoGebra* podemos utilizar o comando

   Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]

   para obter este tipo de escolhas. Podemos assim definir

   $$u_2 = Se[x(u_1) \neq 0, Vetor[(0,1,0)], Vetor[(1,0,0)]].$$

   Com estas escolhas temos que u_1 e u_2 são dois vetores linearmente independentes.

2. Definindo u_3 por

   $$u_3 = [x(u_1) \neq 0, Vetor[(0,0,1)], Vetor[Se[y(u_1) \neq 0, Vetor[(0,0,1)], Vetor[(0,1,0)]]]].$$

   Obtemos que u_1, u_2 e u_3 são uma base de $\mathbb{R}^3$.

Vamos agora aplicar o processo da ortogonalização de *Gram-Schmidt* para construir uma base (q_1, q_2, q_3) ortonormada de $\mathbb{R}^3$ em que $q_1 = u_1$. Para isso definimos sucessivamente

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \frac{u_2.v_1}{||v_1||^2} \; v_1 \\ v_3 &= u_3 - \frac{u_3.v_1}{||v_1||^2} \; v_1 - \frac{u_3.v_2}{||v_2||^2} \; v_2 \end{aligned}$$

Ao fim destes passos temos uma base (v_1, v_2, v_3) ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em que $v_1 = u_1$.

Definindo

$$\begin{aligned} q_1 &= v_1 = u_1 \\ q_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} \\ q_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} \end{aligned}$$

obtemos que (q_1, q_2, q_3) é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ em que $q_1 = u_1$. Com esta base formamos no *GeoGebra* a matriz

$$M = \begin{bmatrix} x(q_1) & x(q_2) & x(q_3) \\ y(q_1) & y(q_2) & y(q_3) \\ z(q_1) & z(q_2) & z(q_3) \end{bmatrix}$$

cujas colunas são os vetores (q_1, q_2, q_3). Definimos $N = M^{-1}$ através do comando

$$\text{N} = \text{Inversa[M]}.$$

De seguida tomamos

$$S \;=\; M \circ R_x \circ N$$

em que R_x é a matriz rotação de ângulo θ em torno do eixo dos xx

$$R_x \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Como

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; u_1$$

temos que

$$N\ (u_1) \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e por consequência a matriz S representa a rotação de ângulo θ em torno de vetor u_1.

A rotação em torno do eixo AB pode ser obtida pela composição $T * S * T^{-1}$ em que T é a translação dada por $T(P) = P + A$. Como consequência $T^{-1}(P) = P - A$.

Então a função $F(x, y, z)$ que define a rotação de (x, y, z) em torno d AB é dada por (F_1, F_2, F_3) em que

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} x(A) \\ y(A) \\ z(A) \end{bmatrix} \;+\; S \begin{bmatrix} x - x(A) \\ y - y(A) \\ z - z(A) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Para se aceder à entrada da matriz S que corresponde a linha i e coluna j temos o comando do *GeoGebra* "Elemento$[S, i, j]$". Com este comando, atendendo a (3.9), podemos definir as funções (F_1, F_2, F_3) como a seguir se indica

1. $F_1 =$ Elemento$[S, 1, 1](x - x(A))+$ Elemento$[S, 1, 2](y - y(A))+$ Elemento$[S, 1, 3](z - z(A)) + x(A)$.
2. $F_2 =$ Elemento$[S, 2, 1](x - x(A))+$ Elemento$[S, 2, 2](y - y(A))+$ Elemento$[S, 2, 3](z - z(A)) + y(A)$.
3. $F_3 =$ Elemento$[S, 3, 1](x-x(A))+$ Elemento$[S, 3, 2](y-y(A))+$Elemento$[S, 3, 3](z-z(A))+ z(A)$.

Com os passos indicados anteriormente garantimos que as funções (F_1, F_2, F_3) só dependem dos pontos iniciais A e B e do ângulo θ (que pode ser um seletor ou uma constante na construção). Estamos assim nas condições de definir uma ferramenta "Funçõesparararodar" que, quando ativa, nos permite obter as funções (F_1, F_2, F_3) sempre que se selecionar dois pontos e em seguida uma constante ou um seletor.

Para definir esta ferramenta, ativamos o menu "Ferramentas" na folha gráfica 3D e selecionamos à opção "Criar Nova Ferramenta". Irá aparecer uma janela similar à seguinte:

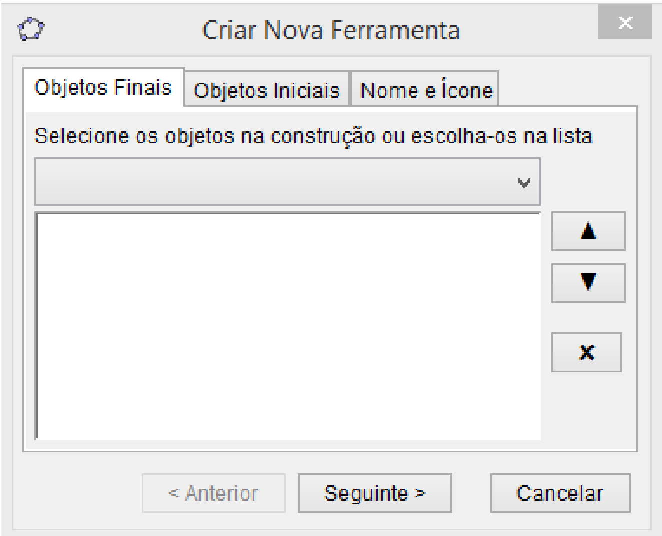


Figura 3.64: Opção "Criar nova ferramenta"

Na opção "Objetos Finais" selecionamos F_1, F_2, F_3. Após selecionar as três funções, podemos verificar que na opção "Objetos Iniciais" temos A, B e θ. Acedendo à opção "Nome e Ícone" preenchemos o campo "Nome das Ferramentas" com "FunçõesParaRodar". Em seguida selecionamos "Concluído" para definir a ferramenta.

Se tivemos uma superfície definida por

$$\begin{aligned}\text{SuperfícieLateral}[&g_1(t,u),\\ &g_2(t,u),\\ &g_3(t,u),\\ &t,t_0,t_1,\\ &u,u_0,u_1]\end{aligned}$$

a rotação desta superfície de um ângulo θ em torno de dois pontos P e Q pode ser obtida começando por criar as 3 funções com a ferramenta "Funçõespararodar", e mudando o seu nome para F_1, F_2, F_3, a nova superfície que é a rotação de ângulo θ em torno de P e Q da superfície anterior é dada pelo comando

$$\begin{aligned}\text{SuperfícieLateral}[&F_1(g_1(t,u),g_2(t,u),g_3(t,u)),\\ &F_2(g_1(t,u),g_2(t,u),g_3(t,u)),\\ &F_3(g_1(t,u),g_2(t,u),g_3(t,u)),\\ &t,t_0,t_1,\\ &u,u_0,u_1].\end{aligned}$$

No caso da base do cilindro temos que

$$\begin{aligned}g_1(t,u) &= u\cos(t)\\ g_2(t,u) &= u\,\mathrm{sen}(t)\\ g_3(t,u) &= 0\end{aligned}$$

Como pretendemos rodar esta superfície em torno do eixo $y = 1$ e $z = 0$, escolhemos então $P = (0,1,0)$ e $Q = (1,1,0)$. A seguir aplicamos a ferramenta "FunçõesParaRodar" a P, Q e $\theta = \frac{s}{2}$. São então geradas 3 funções e, se renomearmos por F_1, F_2, F_3, temos que a rotação do disco pode ser obtida por

$$\begin{aligned}\text{SuperfícieLateral}[&F_1(u\cos(t),u\,\mathrm{sen}(t),0),\\ &F_2(u\cos(t),u\,\mathrm{sen}(t),0),\\ &F_3(u\cos(t),u\,\mathrm{sen}(t),0),\\ &t,0,2\pi,\\ &u,0,1].\end{aligned}$$

Este processo foi aplicado para se reobter a planificação do cilindro, como se mostra a seguir:

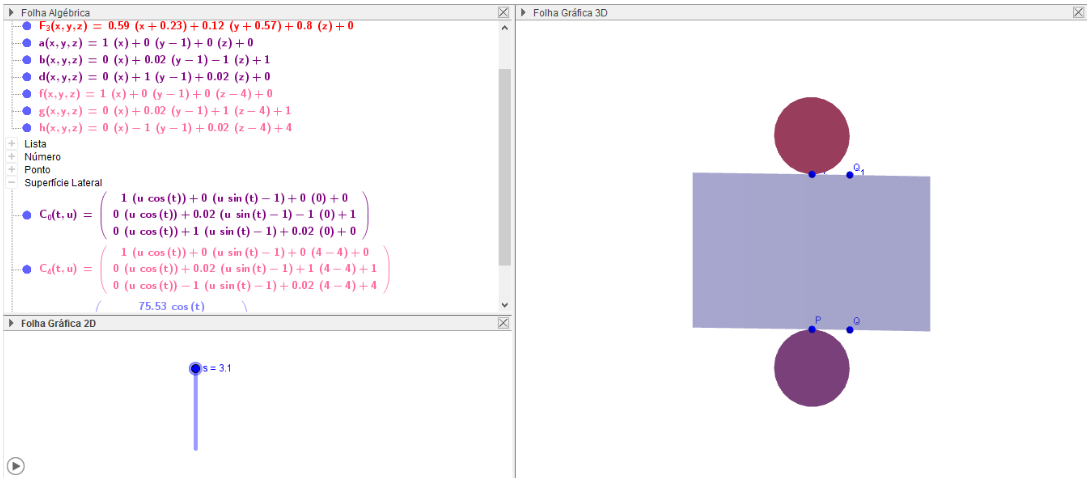


Figura 3.65: Planificação do cilindro com a ferramenta “FunçõesParaRodar”

3.4 12º ano

É no 12º que se faz uma abordagem às cónicas como a interseção de planos com um cone ou cilindro. Nesta secção vamos mostrar como o *GeoGebra* pode ser útil na visualização desses objetos.

3.4.1 Secções no cone

No manual as diferentes secções cónicas são introduzidas aos alunos baseadas em imagens estáticas similares à da figura seguinte:

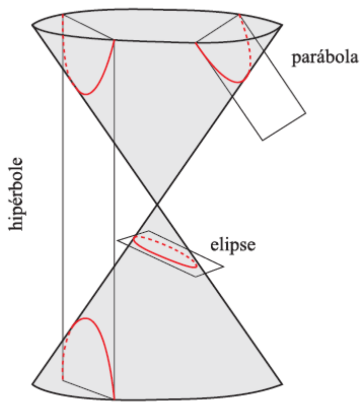


Figura 3.66: Secções cónicas

Tal como na secção (3.1.2), o *GeoGebra* $3D$ contém todos os ingredientes que permitem visualizar as cónicas descritas na figura acima de uma forma mais interativa e apelativa. Para isso elaboramos uma construção no *GeoGebra* em que o utilizador, pela manipulação de seletores, consegue manipular o plano e visualizar as curvas de interseção desse plano com o (duplo) cone.

Ao mesmo tempo que aparece na janela $3D$ a cónica que é a interseção do plano com o cone, numa janela $2D$, pode ser observado se essa cónica é uma elipse, parábola, hipérbole, etc.

Apresentamos de seguida os vários tipos de cónicas, fornecendo a indicação de valores para os seletores a partir dos quais essas cónicas podem ser obtidas.

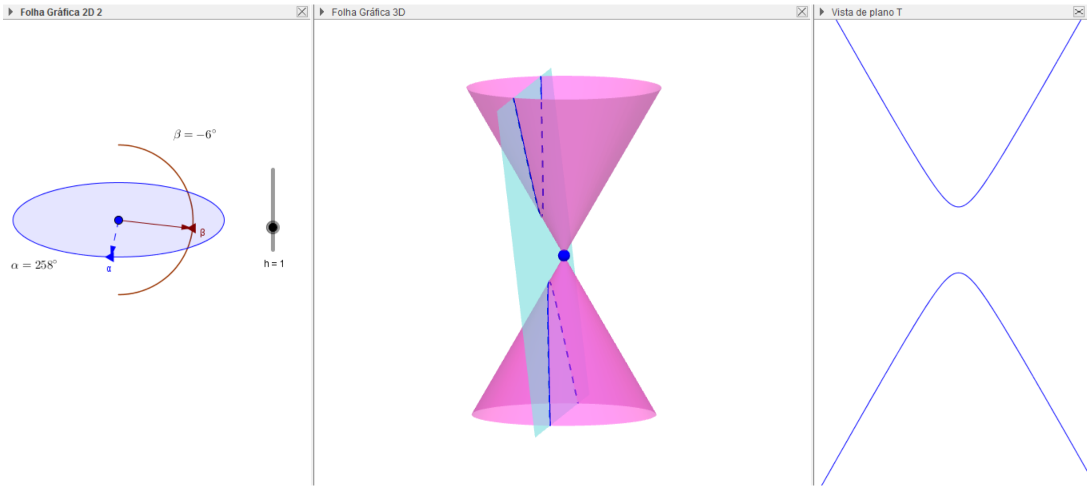


Figura 3.67: Secções cónicas

1. Elipses

   Uma elipse aparece para $\beta = 36°$ e $h \neq 0$.

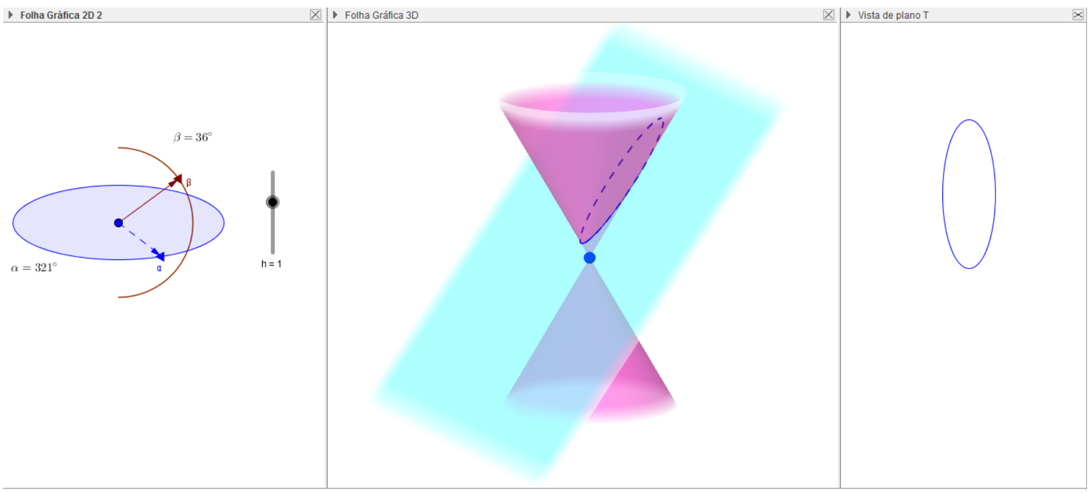


Figura 3.68: Elipse

2. Circunferências

   Uma circunferência pode ser obtida colocando plano na horizontal com $\beta = \pm 90°$ e $h \neq 0$. Para $h = 0$ a circunferência degenera num ponto.

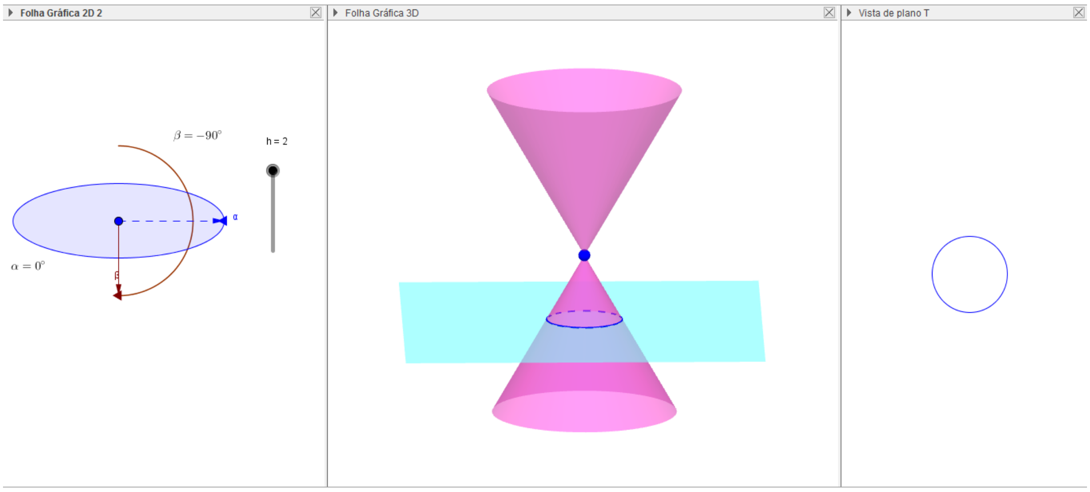


Figura 3.69: Circunferência

3. Hipérboles

   Uma hipérbole pode ser visualizada colocando o plano na vertical ou seja escolhendo $\beta = 0°$ e $h \neq 0$.

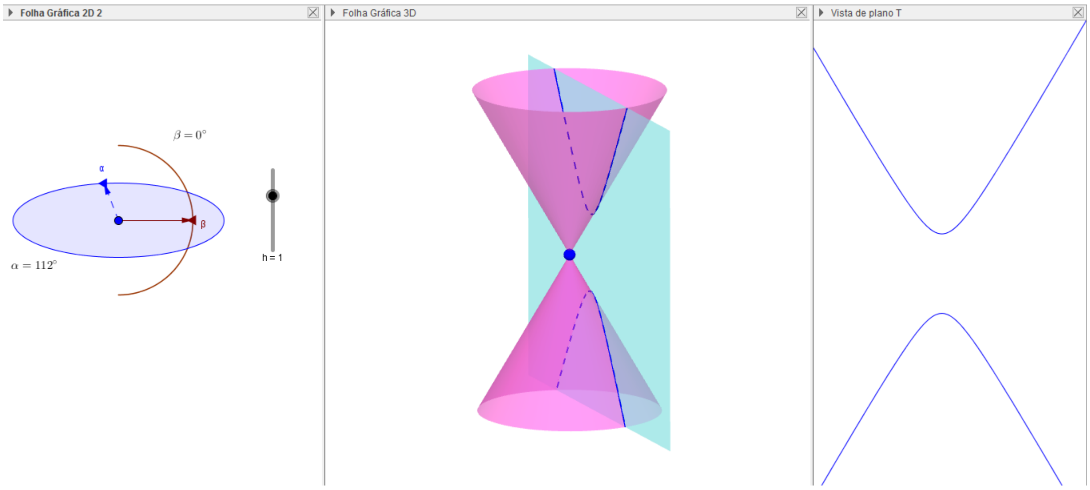


Figura 3.70: Hipérbole

4. Duas retas concorrentes

   Para o mesmo valor $\beta = 0°$ exibido no item anterior, a hipérbole degenera em duas retas quando $h = 0$.

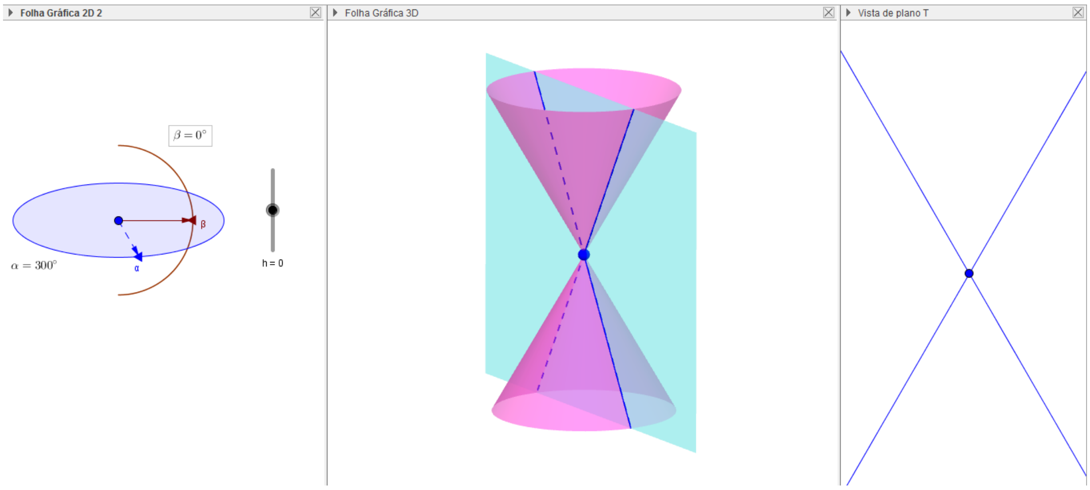


Figura 3.71: Duas retas concorrentes

5. Parábolas

   Uma parábola aparece quando $\beta = \pm 30°$ e $h \neq 0$. No caso de $h = 0$ aparecerá só uma reta.

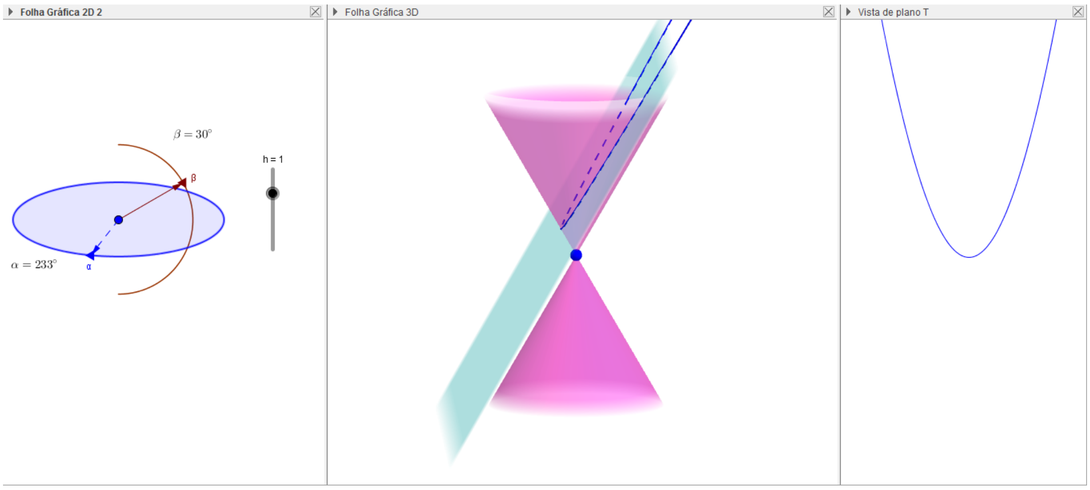


Figura 3.72: Parábola

A construção na figura 3.67 é obtida de modo análogo ao que foi feito na secção (3.1.2). Aqui o cubo é substituído por um cone. O (duplo) cone no *GeoGebra* pode ser obtido pelo comando

$$\text{ConeInfinito}[V, w, \theta],$$

onde V é o vértice do (duplo) cone, w é o vetor que dá a direção do seu eixo e 2θ é o ângulo abertura do cone (o ângulo entre w é uma geratriz é θ). Aqui escolhemos o $V = (0, 0, 0)$, $w = (0, 0, 1)$ e $\theta = 30°$.

Alterando a opacidade do cone e do plano T, podemos realçar a cónica correspondente à sua interseção e deste modo dispensar a janela $2D$ das construções anteriores.

1. Elipses

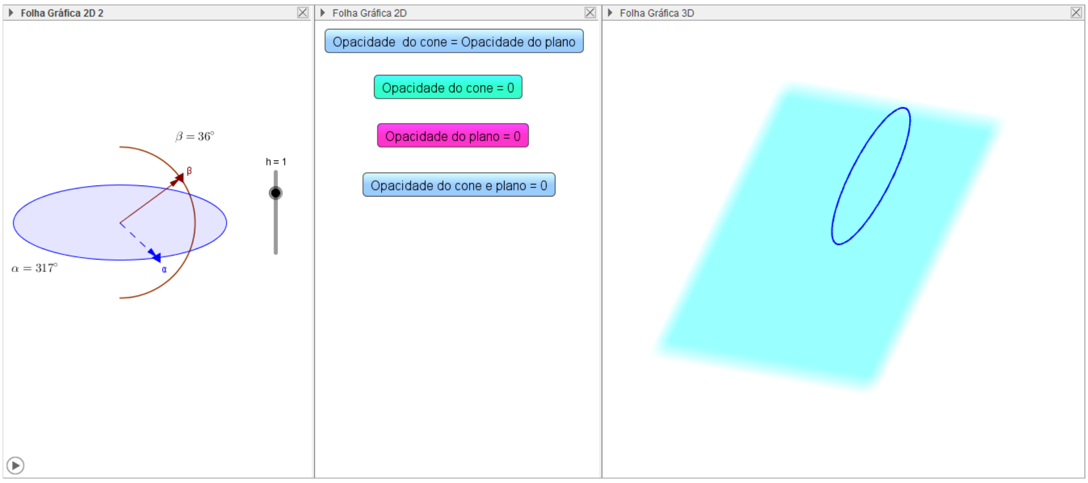


Figura 3.73: Elipse "opacidade do cone = 0"

2. Circunferências

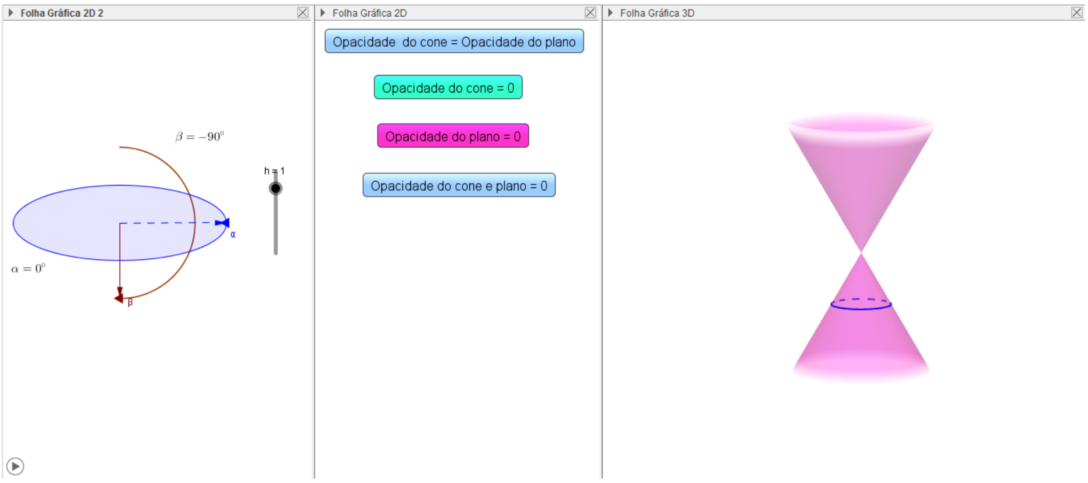


Figura 3.74: Circunferência "opacidade do plano = 0"

3. Hipérboles

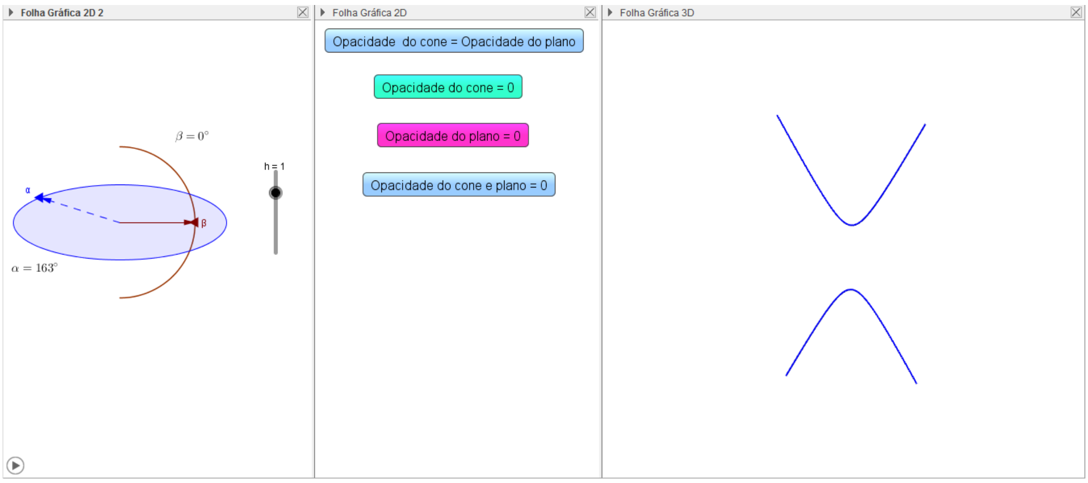


Figura 3.75: Hipérbole "opacidade do cone e plano = 0"

4. Duas retas concorrentes

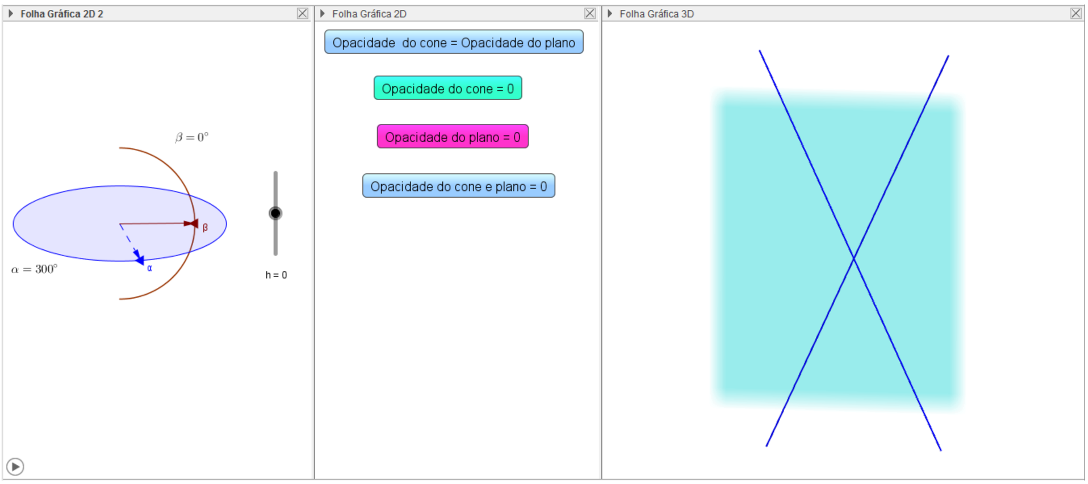


Figura 3.76: Duas retas concorrentes "opacidade do cone = 0"

5. Parábolas

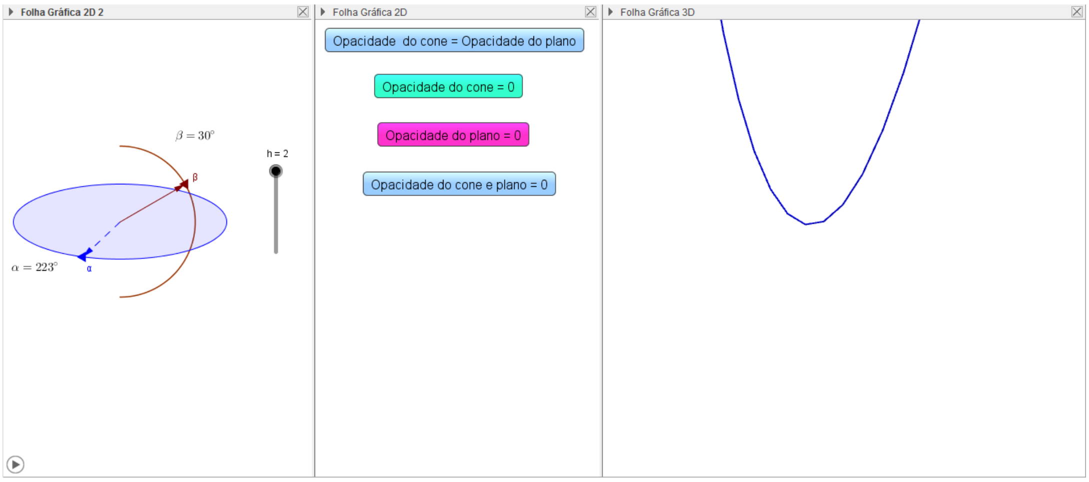


Figura 3.77: Parábola "opacidade do cone e plano = 0"

3.4.2 Secções no cilindro

O caso das secções cónicas do cilindro trata-se de modo análogo ao tratado na secção anterior. As construções seguintes resultam das construções já elaboradas substituindo o comando "ConeInfinito" por "CilindroInfinito[O, w, r]" em que O e w definem o eixo do cilindro e r o seu raio. Nesta secção vamos tomar $O = (0, 0, 0)$, $w = (0, 0, 1)$ e $r = 2$ a que corresponde o cilindro de raio 2 e eixo o eixo dos zz.

1. Circunferências.

   Temos uma circunferência quando o plano é perpendicular ao eixo do cilindro, ou seja para $\beta = \pm 90°$.

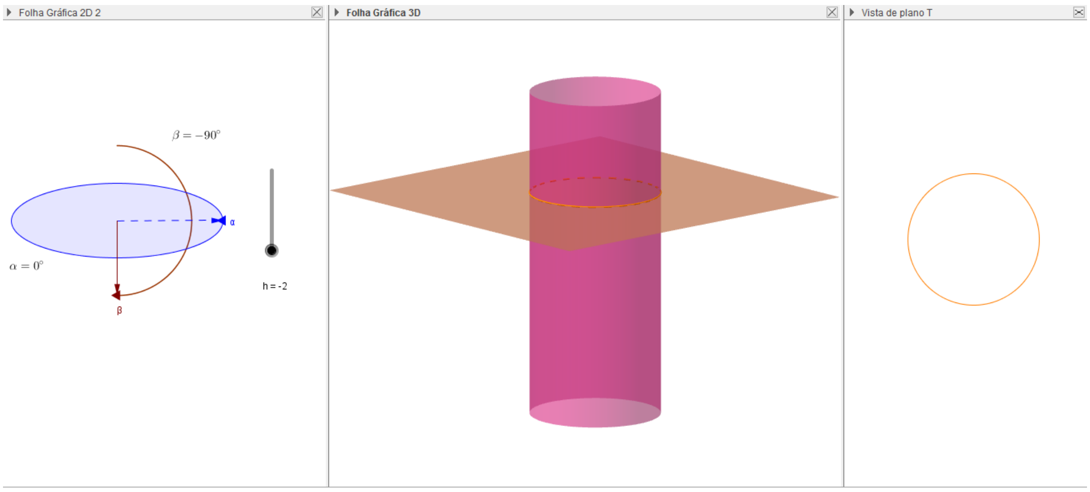


Figura 3.78: Circunferência

2. Elipses

   Uma elipse, que não seja uma circunferência, pode ser obtida desde que o plano não seja nem horizontal nem vertical, ou seja, para $\beta \neq 0°$ e $\beta \neq \pm 90°$.

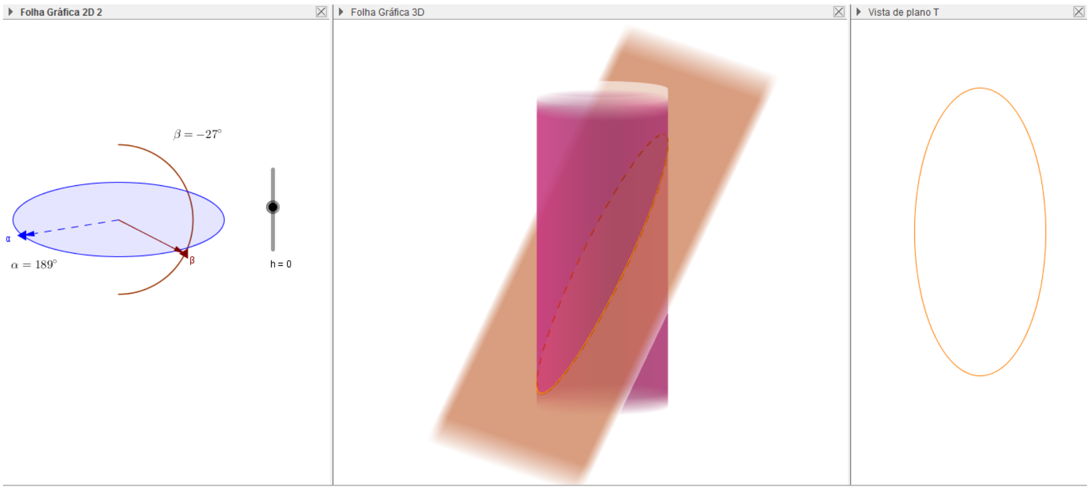


Figura 3.79: Elipse

3. Duas retas paralelas Duas retas paralelas podem ser obtidas colocando o plano na vertical, por exemplo para $\beta = 0°$ e $h = 1$.

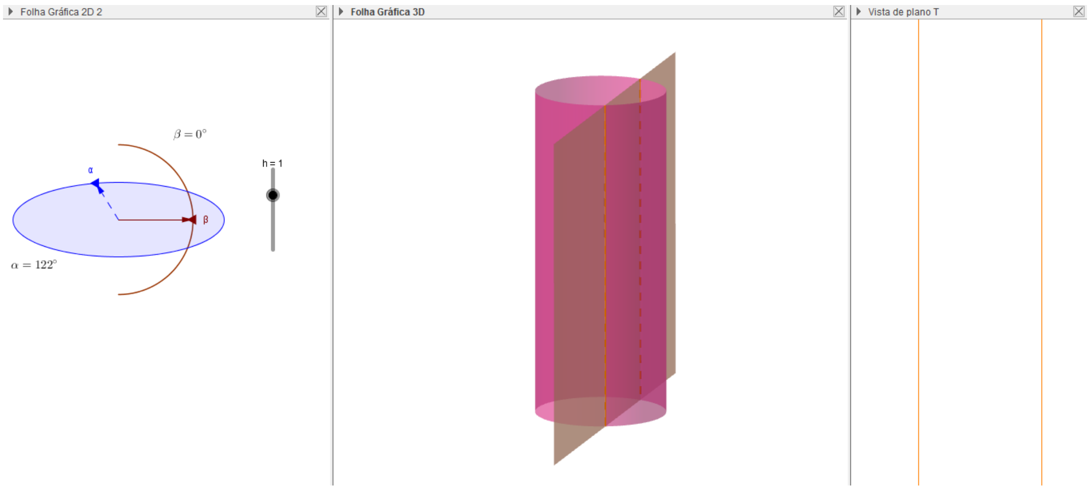


Figura 3.80: Duas retas paralelas

O utilizador pode pressionar os botões “Opacidade do cilindro = 0”, etc, como se mostra na construção anterior e obtém-se as figuras seguintes:

1. Circunferências

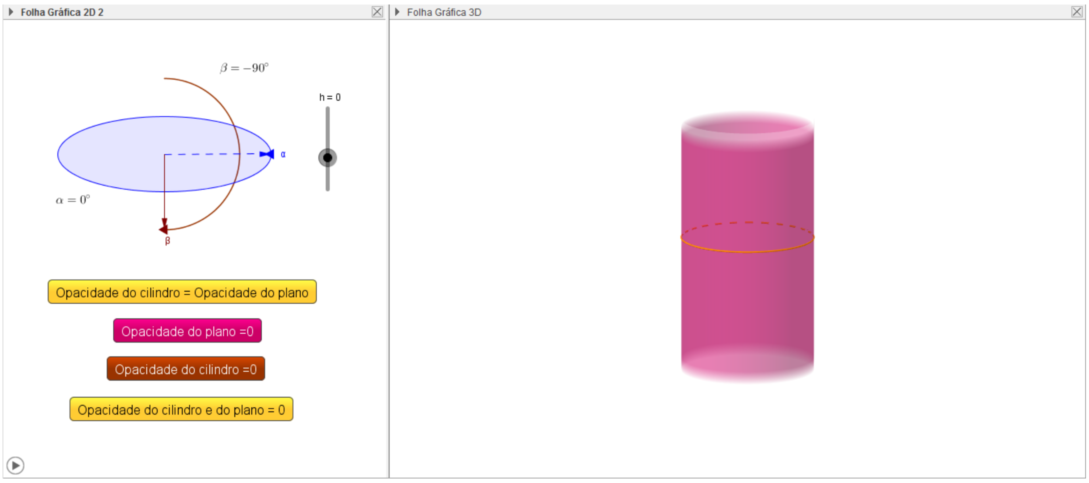


Figura 3.81: Circunferência “Opacidade do plano = 0

2. Elipses

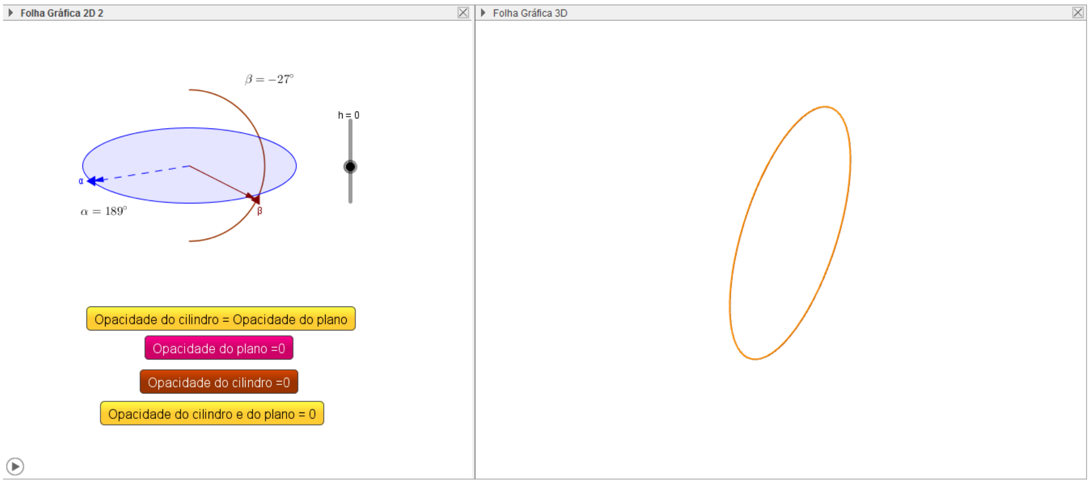


Figura 3.82: Elipse “Opacidade do cilindro e do plano=0”

3. Duas retas paralelas

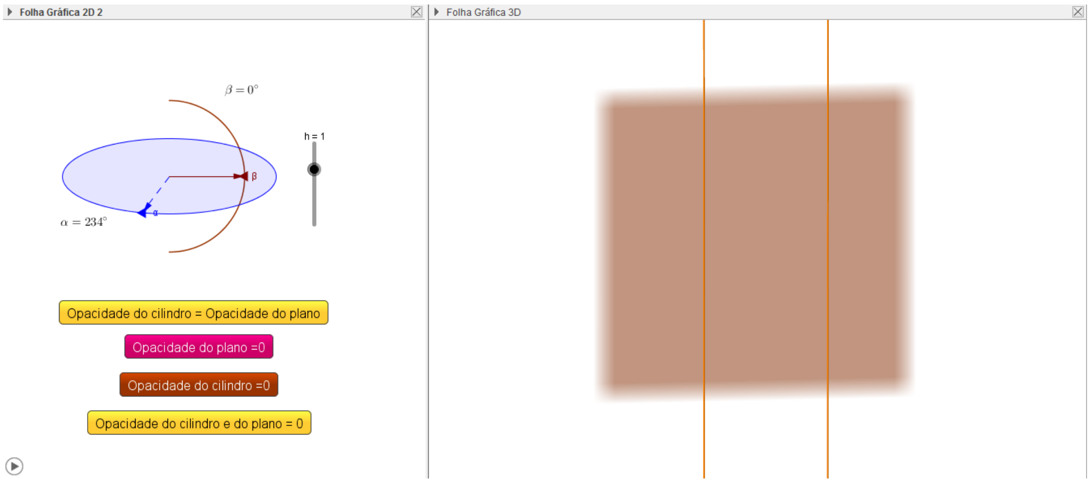


Figura 3.83: Duas retas paralelas "Opacidade do cilindro = 0"

Capítulo 4

Conclusão

O ensino em Timor Leste (TL) é essencialmente baseado na replicação de conteúdos constantes dos manuais. O professor possui um manual e a partir dele transmite o seu conteúdo aos alunos sem recorrer a outra fonte de conhecimento. Os manuais são fornecidos pelo governo aos professores e aos alunos durante as aulas. Fora do horário escolar atualmente as condições econômicas não permitem que os alunos possuam qualquer manual ou livro auxiliar a não ser os apontamentos recolhidos durante as aulas.

A introdução das tecnologias de informação e comunicação (TICS) no ensino e principalmente o acesso à internet pode vir a mudar o paradigma do ensino em Timor Leste. O acesso à informação proveniente das TICS poderá colmatar as lacunas da utilização de manuais únicos e replicação de conhecimento.

Atualmente começa a surgir uma crescente utilização de computadores na formação de professores. Espera-se que as condições econômicas permitam que cada vez mais professores possam introduzir o computador como ferramenta para a docência. No entanto, este crescimento na utilização de computadores restringe-se quase exclusivamente à utilização de processadores do texto.

O querer utilizar ativamente as TICS em contexto da sala de aula foi o que me levou a elaborar este trabalho baseado na ferramenta *GeoGebra*. As várias vertentes deste programa podem tornar o ensino da matemática bem diferente do atualmente praticado em Timor Leste. Acredito que a visualização dos vários objetos (geométricos e não só) que ele fornece, aliada à interatividade da interface gráfica é uma mais valia para o ensino da matemática em qualquer ano de escolaridade.

A vertente da geometria $3D$ aqui abordada é talvez aquela para a qual existe menos informação e materiais disponíveis. Para a geometria bidimensional a base de apoio é enorme. Por este motivo neste trabalho assumimos que o utilizador tem alguma familiaridade com as funcionalidades $2D$ do *GeoGebra*. O capítulo 2 (pág. 7) representa um resumo das funcionalidades do *GeoGebra* $3D$ que tive necessidade de utilizar na abordagem às tarefas propostas no capítulo 3 (pág. 45). Não era possível neste trabalho descrever exaustivamente todas as funcionalidades do *GeoGebra* na área da geometria tridimensional. Espero que um professor que já conheça as funcionalidades do *GeoGebra* $2D$ possa utilizar o capítulo 2 como ponto de partida para a aprendizagem das potencialidades $3D$ do *GeoGebra*.

No capítulo 3 tentou-se criar materiais que pudessem dar uma maior interatividade aos conteúdos $3D$ presentes nos manuais. Estas atividades podem ser utilizadas diretamente pelos professores desde que exista o suporte computacional na sala de aula. O nível de formação da maioria dos professores de TL não lhes permite a compreensão imediata de como as várias construções foram obtidas (por exemplo as planificações do cone e do cilindro). Por essa razão estão disponibilizadas na internet [9] (*http://tube.geogebra.org/*) todas as construções elaboradas neste trabalho.

Quando este trabalho foi iniciado, o *GeoGebra* $3D$ tinha sido lançado há menos de dois meses. Desde esta data, as funcionalidades $3D$ foram sendo melhoradas. As técnicas utilizadas na visualização das secções cónicas e secções de um cubo foram alteradas durante a elaboração deste trabalho. A primeira abordagem recaia na utilização de métodos analíticos para obter as interseções das figuras com diferentes planos. Em Junho de 2015, uma atualização do *GeoGebra* veio a permitir prescindir da abordagem analítica e tornar muito mais fácil a elaboração de construções nesta área. Isto mostra a importância da constante atualização do conhecimento na área das TICS nomeadamente no acompanhamento do progresso do programa *GeoGebra*.

Outras vertentes do *GeoGebra* podem ser aproveitadas para o ensino, nomeadamente em Timor Leste. Dentro da área de probabilidade e estatística (pág. 8), a versão 5.0 do *GeoGebra* de Dezembro de 2014 traz um novo módulo que, tal como a geometria $3D$, pode ser aproveitado no contexto da sala de aula. Por falta de tempo neste trabalho não abordamos este módulo. Espera-se que este trabalho também seja um trampolim para o estudo do módulo de probabilidade e estatística do *GeoGebra*.

Lista de links das construções de *GeoGebra*

Figura 1.1 http://ggbtu.be/mUlLySe2z

Figura 2.5 http://ggbtu.be/mW5uHWtNM

Figura 2.6 http://ggbtu.be/mpy0jbQ2V

Figura 2.14 http://ggbtu.be/mz8NR2yj6

Figura 2.20 http://ggbtu.be/mXGLQOKiS

Figura 2.21 http://ggbtu.be/mAFCFa8fT

Figura 2.22 http://ggbtu.be/mSufeLh0L

Figura 2.23 http://ggbtu.be/mt4Sa7YCJ

Figura 2.24 http://ggbtu.be/mHKIIwVKS

Figura 2.26 http://ggbtu.be/mDTMrx8qj

Figura 2.27 http://ggbtu.be/mKJqeO9QE

Figura 3.3 http://ggbtu.be/mwdLfxwGX

Figura 3.4 http://ggbtu.be/mhK0StbzC

Figura 3.5 http://ggbtu.be/muQmXi1wT

Figura 3.6 http://ggbtu.be/mzIA3JMZx

Figura 3.7 http://ggbtu.be/mgV5qLUKc

Figura 3.8 http://ggbtu.be/mzlsqMupT

Figura 3.9 http://ggbtu.be/mFFLwapg7

Figura 3.10 http://ggbtu.be/mG0d5sJCZ

Figura 3.11 http://ggbtu.be/mh5kv80YE

Figura 3.12 http://ggbtu.be/mpTHlRCI6

Figura 3.13 http://ggbtu.be/mlvD4mYaC

Figura 3.14 http://ggbtu.be/murXzwinS

Figura 3.15 http://ggbtu.be/mulBen3n0

Figura 3.16 http://ggbtu.be/mCgkS1uly

Figura 3.17 http://ggbtu.be/mla3663AZ

Figura 3.18 http://ggbtu.be/mcdANOVgw

Figura 3.19 http://ggbtu.be/muYJSYs2Q

Figura 3.22 http://ggbtu.be/mesOGafLs

Figura 3.23 http://ggbtu.be/mtRURWAKm

Figura 3.24 http://ggbtu.be/mYXKYct2v

Figura 3.25 http://ggbtu.be/mAgN175qd

Figura 3.26 http://ggbtu.be/mkGj4SGLE

Figura 3.27 http://ggbtu.be/mLdzTBhLV

Figura 3.28 http://ggbtu.be/mVnmFZGNd

Figura 3.29 http://ggbtu.be/mDeE1xBCu

Figura 3.30 http://ggbtu.be/mOllC5JqR

Figura 3.31 http://ggbtu.be/mKveZhDjq

Figura 3.32 http://ggbtu.be/mQT4XtQmp

Figura 3.33 http://ggbtu.be/mhTiTZRR9

Figura 3.34 http://ggbtu.be/mrKcyqNJr

Figura 3.35 http://ggbtu.be/mojZDHH21

Figura 3.36 http://ggbtu.be/mjktaDqEw

Figura 3.37 http://ggbtu.be/msU74pjFK

Figura 3.38 http://ggbtu.be/mtGFptija

Figura 3.39 http://ggbtu.be/mhtolLwgy

Figura 3.40 http://ggbtu.be/mLRIzF7Mg

Figura 3.41 http://ggbtu.be/mot1Ufnuo

Figura 3.42 http://ggbtu.be/muNjmlbfs

Figura 3.43 http://ggbtu.be/mk5u0OJKG

Figura 3.45 http://ggbtu.be/msa3Hjqso

Figura 3.46 http://ggbtu.be/mnotn0qr6

Figura 3.54 http://ggbtu.be/mmloZ8WbT

Figura 3.55 http://ggbtu.be/mA08qrK5T

Figura 3.56 http://ggbtu.be/mVoGX4jlW

Figura 3.57 http://ggbtu.be/mtm7ia7mi

Figura 3.58 http://ggbtu.be/mN1NKucAK

Figura 3.59 http://ggbtu.be/mg8TJpOse

Figura 3.60 http://ggbtu.be/mlX5R64Ev

Figura 3.62 http://ggbtu.be/mxwl4eanT

Figura 3.63 http://ggbtu.be/muvpPJVKf

Figura 3.65 http://ggbtu.be/mcpDocieS

Figura 3.68 http://ggbtu.be/mqgYQQgdI

Figura 3.69 http://ggbtu.be/mnVD7gkeg

Figura 3.70 http://ggbtu.be/mLkKESHie

Figura 3.71 http://ggbtu.be/myuOU5ZKH

Figura 3.72 http://ggbtu.be/mznuKvOvM

Figura 3.73 http://ggbtu.be/mHcBKmsXV

Figura 3.74 http://ggbtu.be/mDTwzLZhH

Figura 3.75 http://ggbtu.be/mxRcRkipQ

Figura 3.76 http://ggbtu.be/mEhsiYls9

Figura 3.77 http://ggbtu.be/mKvaaBArb

Figura 3.78 http://ggbtu.be/mlggOXTFN

Figura 3.79 http://ggbtu.be/mNDetLCta

Figura 3.80 http://ggbtu.be/mqOnYj7rS

Figura 3.81 http://ggbtu.be/mwdULVqTL

Figura 3.82 http://ggbtu.be/mwDR3MvYg

Figura 3.83 http://ggbtu.be/mFNWeLp42

Bibliografia

[1] BESSA, José., SERRA, Lucinda e NETO, Teresa. *Matemática-Guia do Professor,.12.ºAno-1ª Edição.*,Universidade de Aveiro., Ministério da Educação de Timor Leste.2014.

[2] COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda. *Novo Espaço Matemática 7.º ano*, Porto, Porto Editora.2013.

[3] COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda. *Novo Espaço Matemática 8.º ano*, Porto, Porto Editora.2013.

[4] COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda. *Novo Espaço Matemática 9.º ano*, Porto, Porto Editora.2013.

[5] *GeoGebra* (aplicação para browser), https://app.geogebra.org (Dezembro 2015).

[6] *GeoGebra* (download), http://www.geogebra.org/download (Dezembro 2015).

[7] *GeoGebra* (site), http://www.geogebra.org/ (Dezembro 2015).

[8] *GeoGebra* (manual), https://www.geogebra.org/wiki/pt/Manual (Dezembro 2015).

[9] *GeoGebra* (material), http://tube.geogebra.org/ (Dezembro 2015).

[10] *GeoGebra* (tutoriais), https://www.geogebra.org/wiki/en/Tutorials?note=pt (Dezembro 2015).

[11] HOWARD, Anton e RORRES, Chris. *Álgebra linear com aplicações - trad. Claus Ivo Doering. 8. ed*, São Paulo, Artmed Editora S.A.2001.

[12] JUNQUEIRA,Isabel.,RAMOS, Ana Catarina.2015. *Manual GeoGebra 3D* Trabalho Final da Disciplina Tecnologias do Ensino da Matemática 2, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

[13] MOREIRA, Vasco Alexandre. 2010. *Utilização do GeoGebra para a Modelação de Curvas estudadas por Gomes Teixeira* Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

[14] R, Adams e C, Essex. *Calculus-Complete-Course - Pearson*, Canada Editora - 2010.