

# INDICE

---

## Noções preliminares, pag. 261

N.º 348 a 351 Rectas paralelas no espaço.—352 Angulos diedros.—353 Angulos polyédros.—354 Solidos, em geral.—355 Pyramides.—356 Prismas.—357 Recta perpendicular a um plano.—358 Tres rectas no espaço, perpendiculares a uma recta n'um só ponto.—359 e 360 Perpendicular tirada de um ponto sobre um plano.—361 e 362 Rectas perpendiculares e obliquas a um plano.—363 a 365 Generalidades ácerca da geração das superficies, e da cónica, e da cylindrica, e da spherica.—366 Geração do cone, do cylindro, da sphaera, do ellipsoide, do spherioide, do paraboloido, do sector spherico, da calotte spherica, da zona, do segmento, e do tronco spherico.—367 Solidos redondos.—368 Outras definições de plano, ou, antes, modos da sua geração.

---

## 2.ª SECÇÃO

### FIGURAS NO ESPAÇO

#### LIVRO I

##### CONSTRUCÇÃO DAS FIGURAS

##### CAPITULO I—Pontos, linhas e planos, pag. 279

##### MATERIA DE EXAME

N.º 369 Theorema das tres perpendiculares.—370 O menor dos angulos formados entre uma obliqua a um plano e o mesmo plano, ou inclinação de uma recta sobre um plano.—371 Rectas perpendiculares a um mesmo plano.—372 Intersecção de dois planos conduzidos por duas rectas pa-

\*

rallelas.—373 Projecção de um ponto, e de uma recta, sobre um plano.—374 e 375 Planos perpendiculares entre si.—376 a 378 Planos perpendiculares a uma unica recta.—379 Rectas parallelas, cortadas por planos parallelas.—380 Angulos parallelas no espaço.—381 Rectas cortadas por tres planos parallelas.—382 Perpendicular commum a duas rectas no espaço, obliquas entre si.

## DESENVOLVIMENTOS

Uma construcção simples, da perpendicular commum a duas rectas no espaço.

## CAPITULO II—Angulos diedros, e angulos solidos, pag. 290

## MATERIA DE EXAME

## § 1.º Angulos diedros, pag. 290

N.º 383 Diedros rectos.—384 a 388 Correlação dos diedros com os rectilíneos correspondentes.—389 Diedros verticalmente oppostos.—390 Correlação dos diedros com os rectilíneos formados pelas perpendiculares baixadas de um ponto sobre as faces.—391 Comparação dos diedros.—392 Diedros adjacentes.—393 e 394 Diedros supplementares, e complementares.—395 Plano bissector de um angulo diedro.—396 Planos parallelas cortados por um terceiro.—397 Maior inclinação de um plano sobre outro.

## § 2.º Angulos solidos, pag. 296

N.º 398 Comparação das tres faces de um angulo triedro.—399 e 400 Angulos triedros supplementares.—401 Character dos angulos solidos convexos.—402 Somma dos angulos planos de um angulo polyédro.—403 Somma dos angulos diedros de um angulo polyédro.—404 Triedros tri-rectangulos.—405 a 408 Correlação dos angulos planos de um triedro com os respectivos angulos diedros.

## DESENVOLVIMENTOS

Doutrina que não entra no programma da cadeira, mas que é indispensavel para se estabelecer a verdade em muitos pontos importantes da geometria elemental.

N.º 409 a 411 Variabilidade dos angulos planos (faces) de um angulo solido, correlativa á variação dos diedros do mesmo angulo.—412 e 413 Relação entre o numero dos vertices,

o das faces, e o das arestas, de um polyédro convexo qualquer.—414 Invariabilidade dos angulos diedros de um polyédro convexo qualquer, determinada pela invariabilidade das faces do mesmo polyédro.—415 Razão anharmonica de quatro planos.—Diversas especies de projecções. Perspectiva.

## CAPITULO III—Solidos, pag. 311

## MATERIA DE EXAME

## § 1.º Polyédros, pag. 311

N.º 416 a 419 Propriedades das pyramides, regulares ou quaesquer.—420 e 421 Propriedades dos parallepipedos quaesquer, e, em particular, dos rectangulos.—422 Modo de decompor um polyédro qualquer.—423 Definições acerca dos troncos de pyramide e de prisma.—424 Área da superficie lateral de uma pyramide regular.—425 Área da superficie lateral de um tronco de pyramide, com bases parallelas.—426 Área da superficie lateral de um prisma qualquer.—427 Área da superficie de um polyédro qualquer.—428 Numero dos polyédros regulares.—429 Sphera circumscripta a um tetraédro.—430 A um polyédro regular póde circumscrever-se uma sphera.—431 e 432 Secções parallelas e anti-parallelas da pyramide cónica de base circular.

## § 2.º Solidos redondos, pag. 321

N.º 433 a 436 Planos tangentes ao cone e ao cylindro.—437 Quatro pontos, em planos differentes, determinam uma sphera.—438 a 442 Circulos, e secções da sphera.—443 e 444 Planos tangentes á sphera.—445 Sphera inscripta n'um tetraédro qualquer.—446 Sphera inscripta n'um polyédro regular.—447 e 448 Intersecção, e contacto de duas spheras.—449 Angulo spherico.—450 a 459 Triangulos sphericos.—460 Linha mais breve entre dois pontos da superficie spherica.—461 Área da superficie do cone.—462 Área da superficie convexa do tronco de cone.—463 Área da superficie do cylindro.—464 Área da superficie de revolução, gerada do movimento de uma linha polygona regular ao redor de um diametro da circumferencia circumscripta.—465 Área da calotte spherica.—466 Área da zona spherica.—467 Área da sphera.—468 Área da lunula.—469 a 473 Comparação das áreas dos tres solidos redondos, a saber, sphera, cylindro e cone equilateros.

## DESENVOLVIMENTOS

Alguns pontos essenciaes de geometria spherica, se não como programma do ensino elemental, pelo menos para uti-

lisarem aos principiantes de estudos mathematicos superiores. Factos importantes da geometria dos polyédros regulares, que é util apparecerem incluídos na geometria elemental, a que justamente pertencem. E outros conhecimentos essenciaes para o estudo dos principios de physica, que são contemporaneos dos de mathematica elemental.

N.º 474 Triangulos e polygonos sphericos diametralmente oppostos.—475 Os triangulos sphericos symmetricos são equivalentes.—476 Outra expressão da área da lunula spherica.—477 Área dos triangulos e dos polygonos sphericos.—478 e 479 Principios relativos á intersecção e ao contacto dos círculos maximos da sphaera.—480 e 481 Principios relativos aos polyédros convexos.—482 a 484 Principios relativos aos polyédros regulares.—485 a 492 Discussão acerca dos polyédros regulares estrellados.—493 Helice.—494 Character da helice.—495 Tangente a um ponto da helice.—496 Subtangente da helice.—497 Linha evolvente e linha evoluta.—Observação acerca das expressões: cylindro, sphaera e circulo.

#### CAPITULO IV—Problemas, pag. 369

##### § 1.º Construções ou traçados, pag. 369

N.º 498 e 499 De uma perpendicular a um plano, e de um plano perpendicular a uma recta.—500 a 504 Construção dos polyédros regulares, sobre uma determinada aresta.—505 Achar a altura de uma pyramide triangular.—506 Achar o raio de uma sphaera.—507 Descrever um circulo maximo em certos casos.

##### § 2.º Problemas numericos, pag. 379

N.º 513 Área de um tetraédro, sendo dada a aresta.—514 Área de uma pyramide regular, dado o raio da base, e dada a altura.—515 Dado um polyédro regular, achar o raio da sphaera circumscripta e inscripta.—516 Conhecido o raio de uma sphaera, achar a aresta do polyédro regular inscripto, e o raio da sphaera inscripta neste.—517 Sabido o raio de uma sphaera, calcular a área do polyédro regular inscripto nessa sphaera.—518 a 520 Outros problemas relativos ao cone e á sphaera.

##### § 3.º Problemas de situação, pag. 388

N.º 521 Logar-geometrico das intersecções dos planos em numero infinito, conduzidos por um ponto e tangentes a uma sphaera.—522 Logar-geometrico do vertice de um angulo recto, que se move ao redor de uma linha, conservando um dos lados sobre um plano, e passando o segundo

por outro ponto da dita linha.—523 Logar-geometrico dos vertices dos triangulos sphericos com uma base commum, e cujos angulos têm entre si uma relação dada.—Theorema de Lexell.

#### DESENVOLVIMENTOS

Complemento de geometria spherica.

N.º 508 a 511 Alguns problemas relativos aos círculos maximos da sphaera e aos seus contactos.—512 Construção de um triangulo spherico, em todas as hypotheses.—Observação importante a respeito dos triangulos sphericos.

#### LIVRO II

##### COMPARAÇÃO DAS FIGURAS

CAPITULO I—Propriedades metricas da solidez, e propriedades descriptivas, pag. 391

##### § 1.º Igualdade, pag. 391

N.º 524 e 525 Dos angulos triedros.—526 a 531 Dos tetraédros.—532 Dos angulos polyédros.—533 a 535 Das pyramides.—536 e 537 Dos prismas.—538 a 540 Dos polyédros em geral.

##### § 2.º Equivalencia, pag. 397

N.º 544 Noção preliminar.—542 Dois angulos solidos verticalmente oppostos.—543 a 545 Medição dos angulos triedros e polyédros.—546 a 553 Theoremas fundamentaes, para a medição do parallelepido e do prisma triangular.—554 Definição de volume, e distincção entre o que seja volume e solidez. Volume do parallelepido.—555 Volume de um prisma triangular.—556 Volume de um prisma qualquer.—557 Theorema fundamental da medição das pyramides.—558 Volume do tetraédro.—559 Volume da pyramide.—560 Volume do tronco de prisma triangular.—561 Volume do tronco de parallelepido.—562 Volume do tronco de pyramide qualquer.—563 Volume do cylindro.—564 Volume do cone.—565 Volume de um tronco de cone de bases paralelas.—566 Volume do solido produzido do giro de um triangulo plano ao redor de um eixo passante por um dos seus vertices.—567 Volume do sector spherico.—568 Volume da sphaera.—569 Volume de uma cunha spherica.—570 Volume de um tetraédro spherico.—571 Volume de uma corda spherica.—572 Volume de um tronco spherico.—573 Volume de um segmento spherico.—574 Comparação dos volumes dos tres solidos redondos, sphaera, cylindro e cone equiláteros.—575 Os volumes das sphaeras são proporcionaes aos raicos.

## § 3.º Similhança, pag. 422

N.º 576 Definições.—578 a 582 Similhança dos tetraédros.—583 a 587 Similhança dos polyédros.—588 e 589 Similhança de alguns corpos redondos, e, principalmente, das spheras.—590 Similhança dos polyédros regulares.—591 a 596 Proporcionalidade entre as áreas e os quadrados das linhas homologas, em figuras solidas semelhantes.—597 a 599 Proporcionalidade entre os volumes e os cubos das linhas homologas, em solidos semelhantes.

## § 4.º Symetria, pag. 432

N.º 600 Propriedades das figuras solidas symmetricas.—601 e 602 Propriedades dos polyédros symmetricos.—603 Pyramides symmetricas são equivalentes.—604 Polyédros symmetricos são equivalentes.—605 Alguns principios acerca de figuras symmetricas.

## DESENVOLVIMENTO

N.º 577 **Verdadeiro** caracter da similhança dos polyédros.

## CAPITULO II—Problemas, pag. 437

N.º 606 a 624 Problemas numericos.—625 a 632 Alguns problemas para resolver, e varios theoremas para demonstrar.

N.º 633 e 634 Nota acerca da *Cobção* dos troncos de arvores não esquadros, e da *Arquenção* dos toneis.

## APPENDICE, pag. 445

## § 1.º Coseno e seno, pag. 445

N.º 635 Definição de coseno.—636 Projecção de uma recta sobre um eixo.—637 Projecção de um triangulo sobre um plano.—638 Projecção de um polygono sobre um plano.—639 Projecção orthogonal de um círculo sobre um plano.—640 Projecção orthogonal da ellipse sobre um plano passante pelo seu eixo menor.—641 Área da ellipse.—642 Do compasso elliptico e seu principio fundamental.—643 a 645 Diametros da ellipse, e suas propriedades.—646 Consideração da parábola como sendo ellipse, e consequencias desta hypothese.—647 Seno.—648 Catheto de um triangulo rectangulo em função do seno do angulo opposto.

## § 2.º Continuação dos methodos geometricos, pag. 451

## Methodo centrobárico, pag. 451

N.º 649 a 655 Centro das distancias proporcionaes.—656 Centro de gravidade do perimetro, e da superficie de um triangulo.—657 Centro de gravidade de um polygono.—661 Theorema de Guldin. Applicações.—662 Determinação dos centros de gravidade de algumas figuras planas.—663 Áreas e volumes dos solidos de revolução, pelo emprego do methodo centrobárico.—664 a 666 Applicações do mesmo methodo a proposições de geometria solidá, onde o plano generante se move parallelamente a si mesmo.—667 Proposições de geometria plana.

## Methodo pelos volumes auxiliares, pag. 466

N.º 668 Discussão acerca do centro de gravidade de um polygono.—669 e 670 Exemplos do methodo.—671 Outro exemplo, provando a coincidência entre o centro de gravidade de um polygono e o centro das meias distancias do seu perimetro.

## Complemento da methodo de transmutação das figuras pelos seus rectores reciprocos, pag. 470

N.º 672 a 678 Definições e proposições fundamentaes.—679 Projecção stereographica. Applicações: theorema de Plucker; theorema de Dupuis; spherá variavel tangente a tres spheras fixas.

## Methodo pela projecção cônica, pag. 474

N.º 680 a 682 Definição, e algumas proposições.—683 a 685 Propriedades projectivas das figuras.

## SEGUNDO APPENDICE, pag. 479

N.º 686 a 689 Algumas propriedades da hyperbole; asymptotas; hyperboles equiláteras; conjugadas.—690 Secções planas do cone.—691 Ajustar uma cônica dada sobre um cone regular determinado.—692 Consideração acerca do cylindro.—693 e 694 Superficie empenada de revolução.—695 Apontamentos bibliographicos.

## TERCEIRO APPENDICE, pag. 489

Polo e plano polar, em relação á sphaera, pag. 489

N.º 696 a 700 Pólo e plano polar.— 701 Rectas reciprocas.— 702 a 704 Polares reciprocas.— 705 a 711 Planos radicaes. Eixo radical de tres sphaeras. Centro radical de quatro sphaeras.

Figuras na sphaera, pag. 494

N.º 712 Razão anharmonica de quatro pontos, e de um feixe de quatro arcos de circulos maximos da sphaera.— 713 Systema harmonico; applicação a figuras rectilineas.— 714 e 715 Polo e polar, em relação a um circulo da sphaera.— 716 Eixo radical de dois circulos menores da sphaera.— 717 Dois circulos menores da sphaera cortados, orthogonalmente, por um systema de circulos da mesma sphaera.— 718 Eixos radicaes de tres circulos de uma sphaera, considerados dois e dois. Centro radical de um systema de tres circulos da sphaera.— 719 Dois circulos existentes sobre a sphaera determinam uma superficie cónica. E, reciprocamente; se um cone circular entra n'uma sphaera por um circulo, elle sae por outro circulo anti-parallelo ao primeiro.— 720 e 721 Centros de similhaça de dois circulos da sphaera.— 722 Centros de similhaça de um systema de tres circulos da sphaera.

N.º 723 a 727 Figuras homotheticas no espaço.

N.º 728 a 731 Theoria geral da similhaça e da symetria das figuras no espaço.

N.º 732 Considerações ácerca dos eixos de homothetica de tres systemas de figuras homotheticas entre si.

## QUARTO APPENDICE, pag. 507

Methodos algorithmicos, pag. 507

N.º 733 Considerações preliminares ácerca do methodo.— 734 a 739 Problemas resolvidos por este methodo.— 740 Methodo de duas projecções.— 741 a 755 Homographia.— 756 a 759 Involução de duas divisões.

---

PONTO DE VISTA DIDACTICO DESTA OBRA, pag. 525