AGRADECIMENTOS

Na elaboração desta dissertação pude contar com a ajuda de pessoas e instituições às quais deixo aqui o meu agradecimento.

Em primeiro lugar uma palavra de enorme gratidão aos dois professores que aceitaram orientar este trabalho, o Professor Antoni Malet e o Professor António Machiavelo, pela confiança que depositaram em mim e pelos profícuos encontros de trabalho que me proporcionaram. Os seus incentivos e apoio foram determinantes para a consecução desta dissertação.

Antoni Malet propôs o tema da tese e tomou a seu cargo a direcção: apontou-me os caminhos da investigação, respondeu às inúmeras questões que lhe coloquei e abriu-me as portas para o contacto com outros investigadores. António Machiavelo acompanhou o desenvolvimento do trabalho, ajudou-me a superar muitas dificuldades e a obter bibliografia. Para eles vai o meu maior reconhecimento.

Agradeço ao Presidente do Conselho Científico, Professor Falcão Moreira, e ao Presidente do Departamento de Matemática, Professor Guedes de Oliveira, por me terem facilitado o apoio logístico na preparação desta dissertação; e ao Centro de Matemática da Universidade do Porto, na pessoa do Professor João Nuno Tavares, que foi seu director ao tempo em que fui elaborando este trabalho, pelo apoio na participação em encontros científicos de grande importância para o meu trabalho.

Estou muito reconhecida a Carlos Sá pelos seus preciosos comentários e sugestões; com ele aprendo, há quase duas décadas, como se investiga em História da Matemática.

Uma menção especial para Jens Høyrup, que sempre respondeu prontamente aos pedidos de ajuda que lhe fiz, quer se tratasse da interpretação de um texto ou da obtenção de um manuscrito.

Agradeço à Maria Carvalho e ao Jorge Carneiro pelas importantes observações feitas na sequência da leitura de algumas partes desta tese. E ao Costa Canas por esclarecimentos que me prestou na Arte de Marear.

A Xabier Docampo, que me ofereceu uma cópia da sua tese de doutoramento sobre a formação matemática dos mercadores catalães entre 1380 e 1521; e, também, a Raffaella

Franci, Salavert Fabiani, Menso Folkert, Samuel Gessner e Armando Dourado, pelo material que me disponibilizaram, o meu obrigada.

Estou grata a Helena Barbosa, da Biblioteca do Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto; a Javier Benitz, da Biblioteca de Estudios Giennenses; a Helena Arjones, da Biblioteca Nacional de Portugal; a Conceição Geada, da Biblioteca do Palácio da Ajuda; a Daniela Oliveira, do Centro de Matemática da Universidade do Porto; e a Clara Couto, da Biblioteca da Faculdade de Letras da Universidade do Porto. E às bibliotecas: Nacional de Espanha, do Escorial, da Universidade Pompeu Fabra, da Catalunha, da Universidade de Barcelona e de Parma.

Foi muito reconfortante sentir o estímulo das amigas Ana Cardoso, Ana Paula Dias, Elisa Mirra, Fátima Ribeiro, Helena Soares Pinto, Leonor Oliveira, Lígia Ribeiro, Luísa Magalhães, Rita Gaio, Rosa Ribeiro, Rosário Pinto e, de um modo geral, dos colegas e ex-colegas do Departamento de Matemática Pura da FCUP.

Finalmente, aos meus pais, à Susana, ao Luís e à Fernanda e de um modo especial ao Rui agradeço todo o apoio que me deram.

Símiles de letrados, os sábios

Dizia Pythagoras que el que no sabe lo que ha de saber, es bruto entre los hombres:
Y el que no sabe mas de lo que ha menester, es hombre entre los brutos:
Y el que sabe todo lo que se puede saber, es Dios entre los hombres.

La sciencia es para pobres riqueza, y para ricos primor, y para viejos contentamiento.

Juan Pérez de Moya, *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes*.

ESTADO DA QUESTÃO

Juan Pérez de Moya foi uma personalidade marcante da cultura espanhola do século XVI. Autor de uma vasta obra literária que inclui matemática, mitologia e homilética, viu a maior parte dos seus trabalhos reimpressos, alguns deles mais de uma vez. Em matemática tratou temas de aritmética, álgebra, geometria, astronomia e cosmografia, iniciando a publicação destes estudos em 1554, com o *Libro de Cuenta*[1], e terminando-a em 1584 com um trabalho, até há pouco desconhecido[2], intitulado *Principios de Geometria*[3]. A sua obra mais divulgada, a *Arithmetica practica, y speculativa*[4], teve mais de 25 edições em castelhano durante o século XVI e os dois séculos seguintes, o que justifica as inúmeras menções ao seu nome constantes na bibliografia espanhola.

Com a presente dissertação pretendemos tornar mais bem conhecidos alguns aspectos da obra matemática de Juan Pérez de Moya e situá-la no contexto dos saberes matemáticos do século XVI na Europa e, em especial, na Península Ibérica. Centraremos a nossa investigação nos seus trabalhos algébricos e geométricos, que até agora não foram estudados com a minúcia que julgamos merecerem, e analisaremos o seu texto manuscrito, *Arte de Marear* [1564], do qual daremos uma transcrição. Incluiremos neste estudo a comparação do conteúdo das obras de Pérez de Moya com o de outras obras contemporâneas similares. No nosso trabalho privilegiaremos os aspectos que permitam responder, entre outras, a questões como as seguintes: Que fontes utilizou Moya quando redigiu estes textos? Reviu-os e melhorou-os em consequência de novas leituras? Como relacionou a álgebra com a aritmética e com a geometria? Que noção tem de número e de grandeza? De que modo usou os *Elementos* de Euclides? Para que público escreveu?

---

[1] O título completo da obra é *Libro de Cuenta, que tracta las cuatro reglas generales de Arithmetica practica por numeros enteros y quebrados, y reducciones de monedas destos reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad.*

[2] Ficámos a saber da sua existência pela referência que o próprio Pérez de Moya faz a este trabalho na dedicatória a Juan Baptista Gentil, da sua *Philosophia secreta,* publicada em Madrid em 1585.

[3] Desta obra encontrámos apenas referência a um exemplar que pertence ao núcleo de reservados da Biblioteca Nacional de Portugal (Res 6553P). O título integral é *Principios de Geometria. Con el orden de medir, y dividir tierras. Ordenado por el bachiller Juan Perez de Moya. Irigido al Illustre Señor Juan Baptista Gentil, hijo d Costantin Genil.* M. Céu Silva e Antoni Malet fizeram um estudo preliminar desta obra, intitulado "A note on Pérez de Moya's *Principios de Geometria* (1584)", que está publicado na *Revue d'Histoire des Mathématiques* [Silva, M. C. e Malet, A., 2008, pp. 113-133].

[4] Trata-se da *Arithmetica practica, y speculativa del Bachiller Iuan Perez de Moya. Agora nueuamente corregida y añadidas por el mismo author muchas cosas, con otros dos libros y vna Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que eneste libro se contiene.*

Para realizarmos o nosso trabalho socorremo-nos das obras de Juan Pérez de Moya, cujos prólogos, dedicatórias e conteúdo nos dão a conhecer alguns detalhes da sua vida, dos seus textos e dos objectivos que pretendia atingir com eles. E, também, de alguns estudos feitos por historiadores de diversos ramos do conhecimento que, desde finais do século passado e até ao presente, se ocuparam da vida e obra do nosso autor. Entre eles, salientamos os estudos recentes de Carlos Clavería na "Introducción" da *Philosofia secreta de Juan Pérez de Moya* [1995], de Valladares Reguero em "El bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes bio-bibliográficos" [1997] e de Chica Arellano em "Juan Pérez de Moya (1513-1596) en su vertiente de orador sagrado" [1999] que deram um importante contributo para um melhor conhecimento de Pérez de Moya e da sua produção literária. O texto de Carlos Clavería inclui uma análise da obra *Philosofía secreta*[5], com a indicação das fontes que serviram de base a esse trabalho de Pérez de Moya. Valladares Reguero faz uma exposição bio-bibliográfica mais completa do que até então existia, reordenando os dados biográficos anteriormente conhecidos. Chica Arellano observa Moya de um ponto de vista moral, enfatizando o seu perfil de pedagogo e reflectindo sobre a repercussão que o tipo de ensino que lhe foi ministrado teve na sua formação. Em especial, debruça-se sobre a obra *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes*[6], que analisa à luz das correntes espirituais da época em que Moya viveu. A leitura destes textos mostra-nos Moya como um espírito polifacetado e eclético que não limitou os seus interesses ao estudo de questões matemáticas; pelo contrário, reflectiu sobre os problemas do seu tempo, aliando de um modo concreto e prático "o humanismo e a teologia, a fé e a ciência, as letras e as técnicas". Norteando a sua vida pelo prazer do estudo e pela divulgação do conhecimento científico, que quis tornar acessível em especial a quem utilizava a matemática na vida quotidiana, Moya procurou, também, apontar caminhos que conduzissem à virtude.

Relativamente à obra matemática de Pérez de Moya, foram-nos úteis os estudos de Rey Pastor em *Los Matematicos Españoles del siglo XVI* [1934] e a reflexão feita recentemente por Consolación Baranda, aquando da edição do texto da *Arithmetica practica, y speculativa* [1998]. Rey Pastor classifica os "Tratadistas Españoles" em aritméticos, algebristas e geómetras e inclui Pérez de Moya no grupo de Marco Aurel, Antich Rocha e

[5] O título completo é *Philosophia secreta: donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina, provechosa a todos los estudios: con el origin de los idolos o dioses de la gentilidad* e a edição princeps é de 1585.

[6] Trata-se da obra cujo título integral é *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes; muy util y necesario para predicadores y otras personas curiosas*. A primeira impressão é de Alcalá de Henares, em 1584.

Pedro Nunes, em que a "Aritmética algebraica" é o único ramo cultivado. Rey Pastor centra-se sobretudo na *Arithmetica practica, y speculativa* salientando a excelência do conteúdo prático, escrito com clareza e de forma agradável, e considerando a parte especulativa pobre e baseada no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*[7] [1552], de Marco Aurel, do qual, como diz, Moya "se limitó a tomar de Aurel parte de lo que éste había tomado de la Summa [de Pacioli]". Por outro lado, Rey Pastor nota que a aritmética do *Tratado de Mathematicas*[8] [1573] está mais incompleta do que a estudada naquela obra, mas não apresenta qualquer estudo que suporte essa afirmação nem indica algum autor que o faça[9]. Entendemos que Rey Pastor não tem razão relativamente às duas últimas afirmações que acima reproduzimos pois, como mostraremos, Pérez de Moya não só recorre à obra de Luca Pacioli, a *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*[10] [Veneza, 1494] para resolver questões que não constam no trabalho de Marco Aurel, como também introduz no *Tratado de Arithmetica* melhoramentos, pelo menos nos conteúdos respeitantes à álgebra.

Na "Introducción" ao seu trabalho, Consolación Baranda aponta as principais características que justificam o êxito alcançado pela *Arithmetica practica, y speculativa*, entre as quais estão os conhecimentos de diferentes níveis que a obra reúne, os aspectos literários e eruditos que inclui, a apresentação de um diálogo literário em que trata um grande número de jogos matemáticos, a exposição clara dos conteúdos. No que toca à parte de álgebra, enfatiza, tal como Rey Pastor, a sua semelhança com a do *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, de Aurel, trabalho que, em seu entender, Pérez de Moya conhece mas não menciona. Baranda observa que o nosso autor possivelmente desconhecia as obras matemáticas de Cardano e de Tartaglia, pois entende que se Moya as tivesse conhecido teria tido em conta as suas contribuições, dado o interesse que sempre manifestara em manter actualizados os seus conhecimentos[11]. Por outro lado, socorre-se da opinião de Rodríguez Vidal para notar que Moya pode ter conhecido o *General Trattato de Numeri, et Misure*

---

[7] O título completo da obra é *Libro primero de Arithmetica Algebratica, enel qual se contiene el arte Mercantivol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Álgebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la cosa: sin la qual no se podra a entender el decimo de Euclides, ni otros muchos primores, assi en Aritmética como en Geometría: compuesto, ordenado, y hecho Imprimir por Marco Aurel, natural Aleman: Intitulado, Despertador de ing*enios.

[8] A obra intitula-se *Tratado de Mathematicas: en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philisophia natural. Con otras varias materias, necesarias a todas artes Liberales, y Mechanicas.*

[9] [Rey Pastor, J., 1934, pp. 104-105].

[10] Esta obra é usualmente conhecida por *Summa*.

[11] Baranda assegura que Pérez de Moya conhecia a *De subtilitate*, de Cardano, pois é o próprio Moya que a cita na sua obra *Sylva Eutrapelias.*

[1556]; e Rodríguez Vidal sustenta esta possibilidade na existência de uma frase mnemónica que Pérez de Moya usa nos "Diálogos" (constituem o "Libro nono", que é o último da *Arithmetica practica, y speculativa*) que é semelhante a uma utilizada por Tartaglia, naquela obra[12]. Além disso, Baranda admite, como Rey Pastor, que talvez Moya conhecesse o *Triparty en la science des nombres*, de Chuquet, através da *Aritmética* que Estienne de la Roche publicara em Lyon, em 1520[13]. Em resumo, relativamente às fontes da álgebra contida na *Arithmetica practica, y speculativa*, Baranda apenas confirma afinidades com a obra de Marco Aurel.

Já em 1915, Angel Rodriguéz num pequeno artigo intitulado "La Regla de la Cosa o Almucabala" encarava a possibilidade de Pérez de Moya ter utilizado, na elaboração do *Compendio dela regla dela cosa, o Arte Mayor* [1558], o tratado, ainda inédito, de Pedro Nunes e o livro de Tartaglia que, segundo diz, "devia ser, então, o mais conhecido". Embora Rodriguéz não mencione os títulos destas obras, não temos dúvidas que se estava a referir ao manuscrito, hoje perdido, que deu origem ao *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*[14] [1567] e que antecedeu em mais de 30 anos a publicação da obra com o mesmo nome[15]; e o *General Trattato* [1556], onde no segundo volume[16] se estudam temas de álgebra[17]. É certo que Tartaglia tinha publicado, em 1546, os *Quesiti e Invenzione diverse*[18], mas a análise que

---

[12] Este livro foi publicado com o título *Diálogos por el Bachiller Perez de Moya*. Anotados y precedidos de un Prólogo de D. Felipe Picatoste. Madrid. Imprenta de F. Iglesias y P. Garcia, 1875. Mais tarde foi novamente publicado com o título *Dialogos de Aritmetica Practica y Especulativa (1562) del Bachiller Juan Pérez de Moya*; Prólogo y notas de Rafael Rodríguez Vidal. Zaragoza: Universidad, Secretariado de Prensas Universitarias, 1987.

[13] O *Triparty* é referido como a melhor das primeiras aritméticas francesas. Smith diz que talvez nenhuma outra aritmética publicada em França no século XVI dê uma perspectiva tão vasta da ciência e arte da aritmética e das suas aplicações [Smith, D. E., 1970, p. 128].

[14] Habitualmente referido como *Libro de Algebra*.

[15] Pedro Nunes refere-o na Dedicatória do *Libro de Algebra* ao Cardeal D. Henrique, onde diz: "Esta obra há perto de .XXX. annos que foy per my cõposta, mas proque despois fuy occupado em estudo de cousas muy differentes, & de mera especulaçaõ, posto que alguãs vezes a revisse, & conferisse com o q outros despois escreveraõ, a deixey de pubricar ategora, que debaxo do nome & tutela de V.A. a mando fora" [Pedro Nunes, 1567, f. a iij].

[16] O título deste volume é *La Seconda Parte del Genaral Trattato de Numeri, et Misure di Nicolo Tartaglia, nella quale in undici libri si notifica la piu ellevata, et speculativa parte della Pratica Aritmética, laqual è tutte le regole, & operationi pratica delle progresión, radici, proportioni, & quantita irrationali.* In Vinegia per Curtio Troiano dei Navo.

[17] As "evidências" a que Angél Rodriguéz recorre para tentar comprovar as relações do trabalho de Moya com os de Nunes e Tartaglia são pouco convincentes. Por exemplo, relativamente a Nunes limita-se a observar a coincidência, pelo menos em parte, dos símbolos literais empregues pelos dois autores nos cálculos [Rodríguez, A., 1915, p. 173].

[18] Os *Quesiti e Invenzione diverse* são constituídos por nove livros e a parte de álgebra está contida no nono (pp. 68-132), que compreende 42 capítulos.

fizémos deste trabalho levou-nos a afastar a hipótese de ter sido uma referência para Moya, pois os problemas que nele se tratam têm um grau de dificuldade bastante maior do que os propostos no texto do autor espanhol[19].

Antes de Rey Pastor e Consolación Baranda, outros autores analisaram na sua generalidade a obra matemática de Pérez de Moya. Em finais do século XIX, Picatoste y Rodríguez fez uma crítica bastante elogiosa ao trabalho do nosso autor, na qual se podia ler, por exemplo, que: "Moya fue grande matemático distinguido y profundo que reunió en sus obras, con gran criterio, cuanto entonces se sabía de estas ciencias, aclarando muchos conceptos y buscando demostraciones ingeniosas y resoluciones breves y sencillas á los problemas de mayor aplicación"[20]. Mas palavras como estas dão-nos apenas uma imagem muito ténue do trabalho de Pérez de Moya!

No que respeita às obras de astronomia e náutica de Pérez Moya, Picatoste transcreve a opinião de Navarrete. Segundo ele, Moya sabia, por exemplo, usar o astrolábio e a balestilha para obter a altura do sol e da polar e deduzir por ela a latitude de um lugar, achar ponto, cartear; tinha conhecimentos sobre as marés, sobre os ventos e as suas causas. Enfim, conhecia o que sobre estes assuntos se fazia no seu tempo[21]. Embora a descrição de Navarrete nos possibilite alguma informação sobre o conteúdo da obra *Arte de Marear*, é no artigo de Leal y Leal, "El Bachiller Juan Pérez de Moya" [1971-72], que encontramos observações mais específicas a propósito deste trabalho de Pérez de Moya. A elas nos referiremos nas notas que apresentamos na quarta parte da nossa dissertação[22].

Há, ainda, uma opinião sobre a obra de Pérez de Moya que queremos deixar aqui. Trata-se de uma das primeiras análises que conhecemos da obra matemática do nosso autor e foi apresentada por Domínguez Berrueta no seu artigo "Estudo bio-bibliográfico del bachiller Pérez de Moya" [1895][23]. Berrueta foca alguns aspectos biográficos de Moya, sublinhando o seu perfil humanista, e faz um apanhado, ainda que incompleto, da bibliografia de Moya. Relativamente à *Arithmetica practica, y speculativa*, Berrueta salienta o papel dos "Diálogos" (constituem, como atrás dissemos, o "Libro nono") e faz uma breve

---

[19] O único ponto em comum entre o *Compendio* e os *Quesiti* é relativo às equações de ordem superior a 2, redutíveis, por uma mudança de variável, a equações completas do segundo grau, que tanto Tartaglia como Pérez de Moya tratam.

[20] [Picatoste y Rodríguez, F., 1868, p. 245].

[21] [Picatoste y Rodríguez, F., 1868, p. 245].

[22] Luís Leal e Leal é Capitán de Navío. Para detalhes sobre *Arte de Marear* ver [Leal y Leal, L., 1971-1972, pp. 34-35].

[23] A análise a que nos referimos é apresentada em [Dominguéz Berrueta, M., 1899, pp. 464-482].

referência aos conteúdos dos outros oito livros; no entanto, as suas objecções ao modo como Moya trata certas questões de aritmética mostram que ele não estuda esta obra à luz dos conhecimentos da época do nosso autor. Talvez isso explique porque é que Berrueta não tem dúvidas em considerar o livro VIII (que trata de diversas numerações, dos caracteres de astrologia antiga, dos sistemas de moedas dos povos antigos com seu valor e equivalências, das moedas antigas castelhanas e da descrição das divisões do ano) como "o mais notável de todos pelo trabalho de erudição" que apresenta[24]. Berrueta tece duras críticas à falta de originalidade e ao modo como são tratados alguns assuntos da *Arithmetica practica, y speculativa* chegando mesmo a mencionar a falta de conhecimentos de Pérez de Moya; diz, por exemplo, "Das progressões bem pouco sabia Moya, até ao extremo de desconhecer a sua importância"[25]. Em particular sobre o livro VII, que diz respeito ao estudo da álgebra, Berrueta refere uns "caracteres que bien necesitan de explicación", pois "no se parecen en nada á aquellos otros de las obras de Boecio, Alsephadi e Roger Bacon", mostrando, com esta afirmação, desconhecer os símbolos utilizados para representar a incógnita e as suas potências nas álgebras alemãs do século XVI. Sobre outros textos matemáticos de Moya a sua crítica é, ainda, mais severa. Assim, comparando a *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos*[26] [1567-1568] com a *Arithmetica practica, y speculativa*, diz que aqueles têm "menor precisão e mais abundância de charlatania" e observa que dos dois livros que compõem esta obra, o de "Geometria" não difere dos tratados elementares e a "Astronomia" funda-se "em todos os erros científicos que acerca da constituição do mundo tinham no século XVI os escritores". Berrueta nota que Pérez de Moya trata de forma correcta algumas questões, como os eclipses, mas não o valoriza porque considera que isso era já conhecido cientificamente por Zacuto, um século antes[27]. Sobre o *Tratado de Mathematicas*, Berrueta indica apenas os dois primeiros volumes (quando, como se sabe, o *Tratado* tem três) e não faz observações relevantes ao seu conteúdo. Além destas obras, Berrueta[28] refere um *Tratado de Arte de Navegar* escrito em 1564, que possivelmente não viu, pois o manuscrito

---

[24] [Domínguez Berrueta, M., 1899, p. 481].

[25] [Domínguez Berrueta, M., 1899, p. 477].

[26] O título completo é *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos. En que se tratam cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Navegación, y Reloxes. Ordenada por el Bachiller Juan Perez de Moya, natural de Santistevan del Puerto. Libro primeiro - Geometria Practica Libro segundo, trata cosas de Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Relojes* [Salamanca, 1568]; *Libro segundo, trata cosas de Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Relojes* [Salamanca, 1567].

[27] [Domínguez Berrueta, M., 1899, p. 480].

[28] [Domínguez Berrueta, M., 1899, p. 482].

que se encontra no Escorial tem por título *Arte de Marear escrita por Juan Pérez de Moya en el año de 1564.* Face a este exame tão pouco rigoroso, estranhamos que López Piñero[29] aconselhe o trabalho de Domínguez Berrueta ao leitor que pretenda fazer um estudo mais aprofundado da obra matemática de Juan Pérez de Moya.

Juan Pérez de Moya é o primeiro autor espanhol a dedicar uma obra completa ao estudo da álgebra, o *Compendio dela regla dela cosa, o Arte Mayor* [1558] que atrás referimos. Este trabalho ainda não foi estudado e, embora se possa conjecturar que o seu conteúdo está reproduzido na *Arithmetica practica, y speculativa*, publicada quatro anos depois, é necessário fazer essa análise detalhada para se poder tirar conclusões acerca da sua aproximação ao *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, de Marco Aurel e da influência que Pérez de Moya pode ter sofrido da *Summa*, de Pacioli. Esse é um dos estudos que nos propomos apresentar. Mas há outros aspectos que queremos investigar. A *Arithmetica practica, y speculativa* foi publicada três anos depois da obra Bento Fernandes, *Tratado da arte de arismetica* [1555], que é o primeiro trabalho português impresso em que a álgebra é estudada[30]. Esta proximidade, territorial e temporal, levou-nos a colocar uma outra questão: a de saber se existem afinidades entre os dois textos que permitam delinear um trajecto comum nas "álgebras" então emergentes na Península Ibérica. Além disso, como os últimos estudos algébricos de Juan Pérez de Moya apresentados no primeiro volume de *Tratado de Mathematicas*, o *Tratado de Arithmetica*, aparecem seis anos depois de publicado o *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes, quisemos saber se existem no texto de Pérez de Moya traços da influência da obra do autor português. As respostas a estas questões incluem a análise comparativa entre os dois trabalhos referidos de Pérez de Moya, que serão, também, objecto do nosso estudo.

Relativamente à geometria, o desafio que se nos apresentou foi diferente pois quando, em 1562, na *Arithmetica practica, y speculativa*, Juan Pérez de Moya tratou este tema, dedicou-lhe meia dúzia de folhas e quando o revisitou, seis anos depois, no *Libro Primero* da *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* apresentou um trabalho muito mais extenso e dirigido a um público mais variado. A nossa investigação centrar-se-á, sobretudo, nos assuntos dedicados à geometria plana, com régua e compasso, e a questões de medida linear. Queremos saber que conhecimentos Pérez de Moya disponibilizou aos utilizadores da

[29] [López Piñero, J. M., 1979, p. 466].

[30] Recentemente, M. Céu Silva fez um estudo do conteúdo algébrico desta obra rara, que está publicado na revista *Historia Mathematica* com o título "The algebraic content of Bento Fernandes's *Tratado da arte de arismetica (1555)*" [Silva, M. C., 2008, pp. 190-219].

geometria numa altura em que a pintura, a arquitectura e a escultura, até então consideradas artes vulgares pela proximidade que tinham com os trabalhos dos artífices, passaram a ter um estatuto de arte liberal[31]; e queremos também saber se o fez com bases sólidas fundadas nos *Elementos* de Euclides.

A nossa contribuição para o estudo do manuscrito *Arte de Marear* consistirá, sobretudo, na identificação das fontes de que Pérez de Moya se serviu e do modo como as usou na escrita deste trabalho. Pérez de Moya recorreu, como nos diz por mais de uma vez, à *Arte de Navegar*[32] [1545], de Pedro de Medina. Mas queremos saber se o seu trabalho reflecte a leitura de outras obras espanholas muito divulgadas naquela época, como a *Suma de geographia*[33] [1530], de Martín Fernandéz de Enciso, o *Tratado del Sphera y del Arte del Marear* [1535], de Francisco Faleiro e o *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar* [1551], de Martín Cortés. E se teria tido notícia do trabalho de outros cosmógrafos, como o *Tratado em defensam da carta de marear*[34] [1537], do português Pedro Nunes, e a *Chronographia o Reportorio de Tiempos*[35][1548], do espanhol Jerónimo de Chaves. Foi para estas questões que procurámos resposta, percorrendo cuidadosamente o texto de Pérez de Moya e comparando-o com os desses autores. Além disso, quisemos inteirar-nos dos conhecimentos técnicos que Pérez de Moya disponibilizava aos marinheiros, numa época em que as viagens marítimas se faziam longe da costa.

A nossa dissertação está organizada em quatro partes. A primeira parte oferece uma biografia de Juan Pérez de Moya (1513-1596), que ajuda a compreender a sua personalidade, a sua formação e os seus interesses. Nela focam-se aspectos relacionados com a sua família e educação, as suas ocupações, os seus protectores, a dedicação que mostrava pela sua terra natal, Santisteban del Puerto, na província andaluza de Jaen. Esta parte inclui, também, uma sinopse da sua produção literária, que vai acompanhada da indicação de todas as reimpressões que conhecemos das suas obras. Ela permite uma

---

[31] Tassinari observa que, na Antiguidade e Idade Média não era feita distinção entre arte e técnica e que só no Renascimento essa diferença começou a notar-se. Em particular refere que a pintura e a escultura recebem, então o estatuto de artes liberais [Tassinari, A., 2001, p. 134].

[32] O título completo é *Arte de Navegar: en que se contienen todas las reglas, declaraciones, secretos y avisos, que a la buena navegacion son necessaros, y se deven saber; hecha por el maestro Pedro de Medina*.

[33] Martín Fernandéz de Enciso [1530]. *Suma de geographia: que trata de todas las partidas e provincias del mundo, en especial de las índias e …del arte de marear … com la espera en romance, com el regimieto del sol y del norte*.

[34] O título da obra é *Tratado que ho doutor Pero nunez Cosmographo del Rey nosso senhor fez em defensam da carta de marear: cõ o regimẽto da altura.*

[35] O título integral é *Chronographia o Reportorio de Tiempos, el mas copioso y precisso, que hasta ahora ha salido a luz.*

percepção fácil, rápida e abrangente dos temas que ocuparam o vasto estudo que Pérez de Moya desenvolveu, durante mais de metade da sua vida.

A segunda parte é dedicada à álgebra. Começamos por descrever, sucintamente, as obras de Juan Pérez de Moya que tratam de conteúdos algébricos, indicando os autores e textos que ele refere. Em seguida, examinamos os temas de álgebra estudados nesses trabalhos, destacando as questões de notação, regras dos sinais no cálculo algébrico, operações com irracionais, equações e sistemas. Por fim, debruçamo-nos sobre a resolução de problemas.

Iniciamos o desenvolvimento de cada tema dando a conhecer o modo como Moya o aborda quando o trata pela primeira vez, que é no *Compendio dela regla dela cosa, o Arte Mayor* [1558], e as modificações que lhe imprime em consequência das leituras subsequentes que faz para compor o *Tratado de Mathematicas* [1573]. Acompanhamos o nosso estudo com a indicação das fontes de Moya, cuja pertinência pretendemos mostrar, incluindo pequenos excertos desses textos. Nesta parte dedicamos alguma atenção ao *Tratado da arte de arismetica* [1555] de Bento Fernandes, com o objectivo de facilitar ao leitor a comparação com o *Compendio dela regla dela cosa* [1558] de Pérez de Moya.

Na terceira parte apresentamos uma panorâmica geral dos trabalhos geométricos de Pérez de Moya e dos objectivos que presidiram à publicação de cada um deles procurando dar maior visibilidade à sua faceta de geómetra que é, em nosso entender, a menos bem conhecida. Tivemos em atenção a escolha e organização dos conteúdos desenvolvidos em cada uma das obras e a metodologia implementada por Moya para os dar a conhecer. Inteiramo-nos das principais diferenças entre os seus textos e os dos principais autores renascentistas que lhe serviram de referência, com o intuito de perceber o tipo e a intensidade das influências que recebeu. Esta última tarefa exigiu um trabalho de pesquisa mais minucioso, pois Pérez de Moya menciona os nomes de diversos autores mas em geral não indica os títulos das suas obras.

A quarta, e última, parte está dividida em três secções: na primeira damos as Notas sobre as convenções de transcrição ortográfica do texto manuscrito *Arte de Marear*, na segunda apresentamos a transcrição do texto manuscrito *Arte de Marear* e na terceira fazemos um estudo desse trabalho. Esse estudo inclui as considerações de Pérez de Moya sobre a natureza e os atributos dos ventos, sobre a agulha de marear, sobre as regras para o cálculo das marés, e as diferentes ferramentas que Moya usa para o cálculo da latitude. Por fim, faremos uma breve comparação entre estes estudos e os que o autor apresenta sobre os

mesmos assuntos no segundo volume da *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos*[36] [1567].

Cremos que o nosso trabalho permite ajuizar da importância das conexões da matemática com as actividades práticas desenvolvidas, no século XVI, noutras áreas do conhecimento e contribui para divulgar procedimentos matemáticos então utilizados.

Muitos dos temas tratados nas obras de Pérez de Moya são, actualmente, leccionados nas disciplinas de matemática do ensino básico e secundário (regra de três, conceito de proporção, mediatriz de um segmento, construção de triângulos, perímetro e área de figuras, resolução de equações, operações com polinómios e tantos outros!) e, por isso, o conhecimento dos seus livros dá-nos sugestões interessantes para contornar as dificuldades que os nossos alunos têm na compreensão de alguns destes assuntos.

No desafio que para nós constituiu a escrita desta dissertação, tivemos presente a mensagem, muito interessante, que Moya nos transmite, de que nada que a natureza cria é supérfluo:

> E basta que una cosa se comunique y use, para entender que en algun tiempo la necesidad (que es maestra, è inventora de todas las artes) la deuio para algo ordenar, cõforme aquello que se dize, que ninguna cosa cria na naturaleza (ministra de la primera causa) que sea superflua [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 59].

[36] Cujo título completo é: *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos*: *Libro segundo, trata de cosas de astronomia y geographia y philosophia natural y sphera y astrolabio y navegación y reloges*.

NOTAS PRELIMINARES

Algumas obras que consultámos neste trabalho não estão escritas em português. Quando transcrevermos fragmentos de textos em castelhano no corpo principal da tese não daremos a tradução para português; dos textos escritos noutras línguas apresentaremos a tradução, em nota de rodapé, apondo-lhe a indicação "nossa tradução livre", sempre que tal nos parecer oportuno.

Quando a fonte que utilizámos estiver numa edição facsimile indicaremos os fólios do documento original.

Usaremos reticências entre parêntesis curvos quando numa transcrição interrompermos a sequência do texto, retomando-a um pouco depois; ou no início de uma transcrição quando esse início não coincidir com o começo de período no texto original.

Se numa transcrição uma indicação estiver errada, mantê-la-emos, seguindo-a da palavra *sic* colocada entre parêntesis rectos; usaremos também estes parêntesis para acrescentar frases, palavras, ou fragmentos de palavras que faltarem no original ou que entendamos contribuam para esclarecer o significado de uma palavra ou frase existente no texto transcrito.

A linguagem retórica usada na generalidade dos textos da época que consultámos coloca, por vezes, obstáculos à sua interpretação; por isso, recorreremos à linguagem simbólica actual sempre que nos parecer necessário transmitir procedimentos que, doutro modo, poderiam ser difíceis de explicar.

Partes do trabalho de Moya mostram grande semelhança com obras de outros autores. Para realçarmos essas analogias, colocaremos, frequentemente, ao lado do excerto do texto do nosso autor, o excerto do texto com o qual estabelecermos comparação.

Na indicação da bibliografia, optaremos por registar as obras publicadas antes do século XVIII começando pelo nome próprio do autor; no caso das restantes obras e de artigos que consultámos usaremos a ordenação habitual.

Nas citações que fizermos do manuscrito *Arte de Marear escrita por Juan Pérez de Moya en el año de 1564*, optaremos por colocar o título *Arte de Marear* em substituição do código que o identifica no Mosteiro de S. Lourenço do Escorial.

Diversas obras que consultámos foram disponibilizadas *on-line* por bibliotecas; nas referências que lhes fizermos acrescentaremos a sua localização na *net* e o dia em que, pela última vez, lhe acedemos.

Na transcrição dos excertos de textos impressos, optaremos por uma escrita tão fiel ao original, quanto possível. No entanto, em alguns casos, isso pode tornar-se inexequível pelas limitações inerentes ao processador de texto que utilizamos. Haverá, portanto, algumas situações pontuais em que precisaremos de fazer ligeiras adaptações: é o que acontecerá, por exemplo, nos casos em que aparece letra "e" com um til em cima, que substituiremos por "en", ou a letra "q" com um traço ou um til em cima, que substituiremos por "que", ou a letra d com um traço, que susbtituiremos por "de". Não modificaremos os sinais de pontuação nem os de acentuação, nem trocaremos maiúsculas por minúsculas, mesmo nos casos em que eles não se ajustem à escrita actual.

Relativamente à transcrição do texto manuscrito *Arte de Marear*, daremos indicações específicas em "Notas sobre as convenções de transcrição ortográfica do texto manuscrito", que incluiremos no capítulo 1 da Quarta Parte do trabalho.

PRIMEIRA PARTE

1. Biografia de Juan Pérez de Moya

1. 1. Família e educação

Juan Pérez de Moya nasceu em Santisteban del Puerto, em 1513, e faleceu em Granada, em 1596[37]. A data do seu nascimento era ainda desconhecida em finais do século XIX e, embora não haja elementos que permitam aos seus biógrafos estabelecê-la com precisão, a partir de 1928[38] é geralmente indicado o ano de 1513. No entanto, esta data não parece ter sido suficientemente difundida, naquela altura, pelo menos fora de Espanha[39]. Não há dúvida que a sua cidade natal é Santisteban del Puerto, vila Jaenense da Andaluzia Espanhola. É o próprio Pérez de Moya quem o refere no frontispício de algumas das suas obras; e como pode, também, comprovar-se em diversas licenças emitidas a favor da publicação de trabalhos seus[40].

Sobre a ascendência de Pérez de Moya são escassos os elementos de que dispomos, sendo conhecido um único documento que pode lançar alguma luz a respeito do nome do pai. Trata-se de um livro de baptismos da igreja de Santisteban onde se regista o baptismo, em Setembro de 1513, de uma criança de nome Juan, filho de Juan Pérez[41]. O que podemos saber de fonte segura, porque é o próprio Pérez de Moya quem o afirma, é que o seu pai seguiu "muchos años la guerra en la capitania de cavallos Ginetes de las guardas de dõ

---

[37] Gómez de Baquero situa a data da morte de Pérez de Moya entre 29 de Outubro e 15 de Novembro, de 1596 [Gómez de Baquero, E., 1928, p. XI].

[38] Nesta data, de 1928, publicou Gómez de Baquero uma edição da *Philosofia Secreta*, de Pérez de Moya. Para a "Introdução" a esta edição, Gómez Baquero realizou uma apurada investigação que permite esclarecer alguns detalhes sobre a vida do nosso autor [Gómez de Baquero, E., 1928]. Por outro lado, Dominguez Berrueta refere-se a Pérez de Moya dando-o como vivo e em actividade literária no ano de 1624, o que não parece ser compatível com o facto de ter nascido em 1513 [Dominguez Berrueta, M., 1899, p. 469]

[39] Verificámos que na segunda metade do século XX, Smith se limitava a observar que "o bacharel nasceu no 1º terço do séc. XVI", sem referir o ano de 1513 [Smith, D. E., 1970, p. 308].

[40] Veja-se, por exemplo, o título da obra *Fragmentos Mathematicos* em cujo frontispício se pode ler *Ordenada por el Bachiller Juan Perez de Moya, natural de Santistevan del Puerto* [Juan Pérez de Moya, 1568]. Veja-se, também, o "Traslado de la licencia" emitido por Francisco de Erasso, em nome do Rei, em Março de 1562, onde se lê: "Por quanto por parte de vos, el bachiller Juan Pérez de Moya, vezino de Sanctistevan del Puerto" [Juan Pérez de Moya, 1562, Traslado de la licencia].

[41] Baquero consultou esse registo, mas considera que ele não diz respeito a Juan Pérez de Moya, pois inclina-se a pensar que ele era filho de Gonzalo de Moya [Gómez de Baquero, E., 1928, p. VI, nota 1]. Reguero não é da mesma opinião de Gómez de Baquero e inclina-se a pensar que Pérez de Moya é, de facto, filho de Juan Pérez. Se Valladares Reguero tiver razão, este documento permite, também, fixar com mais precisão a data do nascimento de Pérez de Moya [Valladares Reguero, A., 1997, pp. 373-374].

Alõso de la Cueva y Benavides", em cuja família Pérez de Moya grangeou grande amizade[42].

Pérez de Moya aprendeu, na sua vila natal, as primeiras letras, tendo sido, depois, mandado para fora estudar[43]. Não sabemos, com rigor, onde Moya prosseguiu os seus estudos e, embora admitindo que tenha feito em Salamanca a sua principal formação académica, não é de excluir a hipótese de ter, também, estudado em Alcalá de Henares. As opiniões dos seus biógrafos, neste ponto, não são consensuais e carecem de argumentos convincentes[44]. É igualmente desconhecido se cursou apenas Artes, o que lhe daria o grau de bacharel, ou também Teologia, mas em qualquer dos casos, fosse na Universidade de Alcalá ou na de Salamanca, certamente estaria sujeito a elevados parâmetros de exigência[45]. Além disso teria tido uma formação abrangente que incluía disciplinas linguísticas, científicas, canónicas e teológicas, e em cuja metodologia de ensino se implementavam o dinamismo e a participação[46]. Em 1536 devia ter já completado o grau de bacharel[47].

Concordamos com Chica Arellano quando afirma que é legítimo supor que esse foi o título mais elevado da sua carreira académica pois se tivesse obtido o grau de licenciado ou de doutor não se teria apresentado nas suas obras como "Bachiller"[48].

---

[42] Juan Pérez de Moya di-lo na dedicatória a "don Luys de la Cueva y Benavides" do "Libro Segundo" da *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos en que se tratan cosas de Geometria y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Reloxes* [Salamanca, 1568].

[43] [Chica Arellano, F., 1999, p. 154].

[44] Assim, por exemplo, Valladares Reguero diz a este propósito o seguinte: "En cuanto a su etapa formativa, parece claro que estudió en Salamanca, ciudad a la que estuvo ligado durante varios años, y posiblemente en Alcalá de Henares, si ben esto resulta mas dudoso" [Valladares Reguero, A., 1997, p. 374]. Fernández de Navarrete afirma "Así es que de las escuelas de Salamanca y Alcalá de Henares salió el canónigo de Granada Juan Pérez de Moya" [Fernández de Navarrete, M., 1846, Tercera Parte, p. 39]. A Jesus de Bregante não lhe parece possível ter Pérez de Moya passado por Alcalá [Jesus de Bregante 2003, p. 735]. Chica Arellano diz-se inclinado a pensar que Moya se formou em Alcalá e que em Salamanca esteve "mais como docente" [Chica Arellano, F., 1999, p. 154].

[45] De acordo com Chica Arellano "Lo mismo que los exámenes y ejercicios académicos incitaban el rigor y profundidad de formación de los alumnos, los profesores estaban sujetos también a una serie de medidas que les obligaba a estar al día. De esta forma, las cátedras no se daban vitaliciamente en propiedad sino por cuatro años. El cardenal Jiménez de Cisneros (1436-1517), fundador de la Universidad Complutense, a quien siguen las Cortes de Castilla en 1528 y 1548, estaba convencido que los catedráticos temporales escribían más, trabajaban con más ahínco y reformaban más regularmente sus conclusiones" [Chica Arellano, F., 1999, p. 155]. Sobre esta convicção do cardeal Cisneros, Chica Arellano não dá qualquer referência sobre a fonte que consultou.

[46] [Chica Arellano, F., 1999, p. 159].

[47] [Chica Arellano, F., 1999, p. 154].

[48] Embora sejam muitos os exemplos, indicamos apenas um: a *Aritmetica, Practica, y Speculativa, del Bachiller Juan Perez de Moya. Agora nuevamente corregida y añadidas por el mismo autor muchas cosas, con otros dos libros, y una Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que en este libro se contien*. En Alcala, en casa de Andres de Angulo. Año 1569.

Embora, como referimos, a formação académica de Pérez de Moya não deva ter passado além do bacharelato, a sua vasta cultura, provavelmente autodidacta, é realçada por todos quantos estudaram a sua obra. Para Domínguez Berrueta, Pérez de Moya era um homem profundamente estudioso, embora não pudesse ser considerado um sábio[49]. Chica Arellano afirma que ele "Leyó y asimiló todo lo publicado en su época" e aponta-o como uma das personalidades polifacetadas e eclécticas do século XVI dizendo que Moya é: "uno de esos espiritús complexivos, polifacéticos y ecléticos del XVI, como un personaje de vasta cultura, como un autodidacta que procura trabajar por la edificación de sus coetáneos, que se mueve siempre por un afán docente sin dejar por ello continuamente de aprender a través de lecturas y viajes"[50]. Rodriguez Vidal sublinha que Pérez de Moya "no fue sólo un buen matemático, sino un ejemplo cabal de humanista completo, uno de los últimos y más ilustres que todavía cupieron en el pos-renacimiento del siglo XVI" [51].

1.2. Sacerdócio

A vida de Juan Pérez de Moya foi, essencialmente, marcada por duas vertentes: o cumprimento das suas obrigações de sacerdote e a sua produção literária; no entanto, como adiante veremos, não pode pôr-se de parte a hipótese de, em alguns momentos, se ter dedicado ao ensino.

O trajecto religioso de Pérez de Moya é mal conhecido. Depois de ter sido ordenado sacerdote, ocupou, com 23 anos, uma capelania criada na sua terra natal por Men Rodrigo de Benavides, pároco de Santistevan[52]. Aí deve ter vivido nos anos imediatamente seguintes, como clérigo secular, cumprindo tarefas relacionadas com o seu sacerdócio em Santisteban e na povoação vizinha de Navas[53].

Valladares Reguero diz-nos que Pérez de Moya usufruiu de benefícios eclesiásticos na paróquia de San Marcelo de Léon e que foi indicado, com cerca de setenta e sete anos, para cónego da catedral de Granada[54]. E assim consta na *Provisão Real*, datada de 10 de

[49] [Domíngeuz Berrueta, M., 1899, p. 465].

[50] [Chica Arellano, F., 1999, p. 149 e pp. 195-196].

[51] [Rodriguez Vidal, R., 1972, p. 403].

[52] [Valladares Reguero, A., 1997, p. 375]. Chica Arellano também se refere a este facto, indicando Rodríguez de Benavides como "párroco de san Esteban" [Chica Arellano, F., 1999, p.153].

[53] [Chica Arellano, F., 1999., p. 157] refere que Moya nunca fez parte de qualquer ordem religiosa, mantendo-se sempre como clérigo secular.

[54] [Valladares Reguero, A., 1997, p. 377].

Setembro de 1590, em que Filipe II determina que a vaga deixada pelo falecimento de Diego de Berdeñoso seja preenchida por Pérez de Moya[55]. Foi em Granada que Pérez de Moya viveu os últimos anos da sua vida, em quase total isolamento, cumprindo as obrigações decorrentes do sacerdócio e passando o seu tempo a ler. Estas informações são-nos dadas por ele mesmo, numa carta datada de 28 de Março de 1594, e endereçada ao corrector de livros designado pelo rei, Juan Vazquez del Mármol[56].

1.3. Vivências e produção literária

São as obras que Pérez de Moya escreveu que nos revelam o essencial da sua própria história, dando-nos a conhecer os lugares por onde ele passou, os seus amigos, protectores e mecenas, os objectivos que pretendia atingir com os seus escritos. No entanto, todas as informações deixam, como é natural, muitas lacunas por preencher, até porque o seu primeiro trabalho publicado saiu à luz quando ele tinha já mais de quarenta anos. As vivências de Pérez de Moya não se limitaram à sua terra natal, Santisteban del Puerto, nem às terras vizinhas de Navas de San Juan e Castellar. Por várias vezes se deslocou, talvez por obrigações decorrentes do seu sacerdócio, ou apenas pela vontade de se instruir, a diferentes cidades, onde passou alguns períodos da sua vida. Da leitura dos diversos "Prólogos" e "Dedicatórias" dos seus livros concluímos que esteve em Salamanca, Madrid, Alcalá de Henares, Sevilha e Granada. Chica Arellano refere, também, como possível que tenha estado em Toledo e Córdoba[57]. Terá sido nestas cidades que tomou contacto com obras de outros autores, cujos reflexos se fizeram sentir nas páginas que nos deixou. Em 1536 Juan Pérez de Moya encontrava-se, ainda, em Santisteban del Puerto, mas os dados que temos não nos permitem saber por quanto tempo terá permanecido na sua terra natal, nem como terá alternado a sua vida entre este e outros lugares. Por um lado, parece possível que aí tenha ficado durante cerca de vinte anos tendo redigido em Santisteban o primeiro trabalho de matemática que nos chegou, o *Libro de Cuenta*, que foi impresso em Toledo, em 7 de Setembro de 1554[58]. É também de admitir a hipótese de, ainda em Santisteban, Pérez de

[55] Em [Pérez Pastor, C., 1907, p. 453].

[56] Juan Vasquez del Mármol aparece, por vezes, indicado como "Corrector general de los livros, por el Rey, nuestro señor", outras vezes como "corrector por el Rey, nuestro señor, de los libros eclesiásticos" e ainda como "de los libros que se imprimem" [Eugénio de Ocho, 1870, Vol. II, p. 39].

[57] [Chica Arellano, F., 1999, p. 154].

[58] O único exemplar do *Libro de Cuenta* de que temos conhecimento é o existente na Biblioteca Nacional de España (R. 14318).

Moya ter composto um outro livro antes mesmo do *Libro de Cuenta*, pois faz-lhe referência no Prólogo deste último trabalho[59]. Mas, por outro lado, se atendermos às palavras de Alexo Venegas, humanista e teólogo de Toledo e professor nessa universidade[60], sobre Moya "es tan diestro y esperimentado: que el a leydo en Salamaca y aqui en la corte: en el tiempo que este libro se examinava", somos levados a concluir que, antes de 1554, ele terá vivido nas cidades de Salamanca e de Toledo, onde na altura se encontrava a corte[61]. Pérez de Moya redigiu, em Salamanca, as dedicatórias de duas das suas obras: *Libro segundo de Arithmetica*, publicada nessa cidade em 1557, e *Sylva Eutrapelias id est Comitatis et urbanitatis ex variis probatae fidei Authoribus & vital experimentis*, publicada em Córdova ("Pineiae") no mesmo ano[62]. Ambas as obras foram reimpressas: O *Libro segundo de Arithmetica* teve duas reimpressões em Salamanca e a *Sylva* teve uma em Sevilha ("Hispalis")[63]. Foi também em Salamanca que escreveu a *Carta aos leitores*, datada de 15 de Fevereiro de 1562, incluída na sua obra *Arithmetica practica, y speculativa*, publicada em Salamanca, em 1562. Não podemos indicar com precisão o número de vezes que este tratado foi impresso, pois meia dúzia de obras de Moya têm este título mas não exibem data ou marca impressora[64]; mas podemos afirmar que depois de 1562, foi reimpressa, no mínimo, mais vinte e cinco vezes até finais do século XVIII: quatro vezes no século XVI[65]; onze

---

[59] Valladares Reguero supõe que Pérez de Moya permaneceu em Santisteban, pelo menos até 1554, apoiando a sua suposição no facto seguinte: na "portada [do *Libro de Cuenta*] aparece como vecino de Santisteban del Puerto" [Valladares Reguero, A., 1997, p. 374]. Da nossa investigação não resultou nenhum esclarecimento do assunto.

[60] [Juan Pérez de Moya, 1562, Prólogo]. Para mais detalhes sobre Alexo Venegas ver [Zuili, M., 1995, p. 20].

[61] Como refere Valladares Reguero, esta citação faz parte da primeira versão do Prólogo que Alexo Venegas redige sobre Pérez de Moya, que se encontra no *Libro de Cuenta* (1554, p. 8) [Valladares Reguero, A., 1997, p. 374, Nota de rodapé (1)]. Só em 1561, cinco anos depois de se iniciar o reinado de Filipe II, a corte foi transferida de Toledo para Madrid.

[62] [Valladares Reguero, A., 1997, p. 387].

[63] São, respectivamente, [Salamanca, 1562], [Salamanca, 1567] e [Hispalis, 1579].

[64] É o caso de uma edição (1ª ed.?) sem local de impressão (s. i.), sem nome de autor (s. a.) e sem data (s. d.), existente no Escorial (Rfe. 39-II-69); de uma outra (s. d) (1624 ?) existente na Faculdade de Derecho de la Univ. Complutense Madrid (3715), Biblioteca Pública de Cádiz (XVII-902), Museo Provincial de Pontevedra (Col. José Luís Basanta 51-65); de um exemplar impresso em Madrid, com data de 1752 existente em Biblioteca Nacional de Madrid (3-20.417), Biblioteca Central de la Universidad de Granada (A-1-273), Biblioteca de la Rioja (FAN 002174), Monasterio de San Millán de la Cogolla de Yuso (B 158/14); de um exemplar de Madrid, décima quinta impressão (s. n.) existente em Abadia Benedictina de Valvanera (FA/780), Seminario Diocesano-Facultad de Teologia de Vitoria-Gasteiz, Araba (CE-202 36); de um exemplar de Madrid (s. d.) existente na Biblioteca Nacional de Madrid (3-20417) e, finalmente, de um exemplar (s. d.) e (s. i.) provavelmente do século XVIII, existente na Universidad Pontifícia de Comillas em Cantoblanco (XVIII-7905).

[65] Em [Alcalá, 1569], [Alcalá, 1573], [Granada, 1590] e [Madrid, 1598]. O exemplar de 1569, que pertence à Biblioteca da Universidade Complutense de Madrid, esteve patente ao público na exposição "*Vida de los*

vezes no século XVII[66]; dez vezes no século XVIII[67]; e uma vez no século XX, quando, em 1998, foi editado por Consolación Baranda o volume II das *Obras* de Moya, que inclui o texto de 1562, da *Arithmetica practica, y speculativa.* Notamos, além disso, que partes do conteúdo da *Arithmetica practica, y speculativa* se encontram em obras de outros autores: por exemplo o manuscrito de Corachán contém algumas regras e questões da edição de Madrid, de 1634[68].

Às publicações que referimos, Valladares Reguero acrescenta ainda duas edições dos *Diálogos*, texto que constitui o livro nono da *Arithmetica practica, y speculativa* e uma edição da parte correspondente ao livro sexto da *Arithmetica practica, y speculativa*, que ocupa os fólios 241 a 245 do *Tractado subtilissimo d arismetica y geometria*, de Juan Ortega[69], impresso em Granada, em 1563[70]. As edições dos *Diálogos* que conhecemos são a de Felipe Picatoste [Madrid, 1875] e a de Rodríguez Vidal de [Zaragoza, 1987], ambas com anotações e prólogo dos respectivos editores.

É possível que, entretanto, o nosso autor se tenha deslocado a Burgos, onde em 1558 foi publicado o *Compendio dela regla dela cosa*. Esta sua obra mereceu-lhe rasgados elogios de Francisco Sánchez de la Brozas ("o Brocense"), a que adiante aludiremos[71].

Tem data de 1564 uma obra sobre navegação, intitulada *Arte de Marear*, composta por Pérez de Moya, que não deve ter chegado a ser impressa, e cujo manuscrito se encontra na Biblioteca do Escorial[72].

---

números com motivo del International Congress of Mathematicians", que decorreu em Madrid, na Biblioteca Nacional, de 8 de Junho a 10 de Setembro de 2006.

[66] Em [Madrid, 1609], [Madrid, 1615], [Alcalá, 1619], [Madrid, 1624], [Madrid, 1631], [Madrid, 1643], [Madrid, 1652], [Madrid, 1663], [Madrid, 1672], [Madrid, 1675] e [Zaragoza, 1694].

[67] Em [Barcelona, 1703], [Barcelona, 17059, [Madrid, 1717], [Madrid, 1723], [Madrid, 1729], [Madrid, 1745], [Madrid, 1761], [Madrid, 1776], [Madrid, 1784] e [Madrid, 1798].

[68] [Corachán, J.B., depois de 1735].

[69] A biografia de Juan de Ortega, ou Juan de Hortega, é mal conhecida. Sabe-se que nasceu em Palência e morreu entre 1540 e 1550 e que foi padre predicador. Formou-se em Paris, viveu em Itália e ensinou aritmética e geometria em Espanha e Itália, durante muitos anos [Rey Pastor, J., 1934, p. 68].

[70] O título completo da obra de Ortega é *Tractado subtilissimo d arismetica y geometria, Cõpuesto por el reverẽdo padre fray Juã de Hortega: agora de nuevo emendado cõ mucha diligẽcia por Juan Lagarto, y antes por Gõçalo Busto; de muchos errores q avia en algunas impresiones passadas. Van Añadidas en esta impresión las pruevas desde reducir hasta partir quebrados. Y en las mas delas figuras de geometría sus pruevas, con ciertos avisos subjectos al Álgebra. Va añadido en esta postrera impressiõ un tractado del bachiller Juã Perez de Moya. Trata reglas para cõtar sin pluma y de reducir unas monedas castellanas en otras. Impresso en Granada año de 1563.*

[71] O único exemplar desta obra de que temos notícia encontra-se na Real Biblioteca del Monasterio de El Escorial (23-VI-12 (2º)).

[72] Esta obra é o manuscrito L-III-24 (ff. 167-200) da Real Biblioteca del Monasterio de El Escorial. Fernández Navarrete lamenta que Pérez de Moya não tivesse revisto o texto da *Arte de Marear*, "incorporando-o na sua

Em 1566, Pérez de Moya estava, de novo, na sua terra natal. Em Castellar, a poucos quilómetros de Santisteban del Puerto, redigiu, em 20 de Agosto desse ano, a dedicatória a Don Diego de Benavides y de la Cueva do *Libro segundo, que trata cosas de Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural*, *y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Relojes* que viria a ser impresso em 1567, em Salamanca; e em Nava, escreveu, a 20 de Outubro desse mesmo ano, a dedicatória a Don Luys de la Cueva e Benavides, do *Libro primeiro que trata de Geometria* impresso também em Salamanca, em 1568[73]. Estes dois volumes constituem a *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos: en que se tratan cosas de geometria y astronomia y geographia y philosophia natural y sphera, y astrolabio y navegacion y reloxes*, da qual se conhece apenas uma edição. Entre 1569 e 1582 todas as suas obras foram publicadas em Alcalá de Henares (exceptuando a 2ª edição da *Sylva Eutrapelias* que saiu em Sevilha), o que levanta a hipótese de Pérez de Moya ter passado a viver na Corte durante parte ou até a totalidade desse período. Há diversos factos que reforçam esta hipótese. Por um lado, é sabido que Pérez de Moya assistiu, em 1573, à impressão e correcção, em Alcalá, da sua obra *Tratado de Mathematicas*[74]; por outro, que dedicou ao rei a parte aritmética dessa sua obra[75]. Mais ainda, sabemos que subscreveu essa dedicatória com as palavras: "De V. M. leal, y fiel vassalo, y Capellan. El Bachiller Iuan Pérez de Moya", que podem sugerir que ele era, na época, capelão de Filipe II.

O *Tratado de Mathematicas* é constituído por três volumes; o primeiro é um *Tratado de Arithmetica,* o segundo é um *Tratado de Geometria practica y speculativa* e o terceiro é um *Tratado de cosas de Astronomia y Cosmographia y Philosofia natural.* Destes volumes existem exemplares em pelo menos trinta bibliotecas espanholas[76], e em diversas bibliotecas

---

grande obra, porque na instrução científica de Moya, que o colocava em vantagem entre os seus contemporâneos, (…) prometia a sua arte de marear tivesse obtido a primazia entre os daquele século, e que talvez a tivesse conservado nos seguintes, como sucedeu com a sua aritmética." [Fernández Navarrete, M., 1846, Parte Tercera, pp. 39-40].

[73] Picatoste explica que o atraso na publicação do primeiro livro, relativamente ao segundo, pode ter ficado a dever-se ao facto de o primeiro livro ter muito mais figuras que o segundo, obrigando, por isso, a um muito maior gasto de tempo na execução dos moldes de madeira para a gravação [Picatoste, F., 1875, Prólogo, p. VI].

[74] Ver Cristóbal Pérez Pastor, *Bibliografía madrileña ó descripción de las obras impresas en Madrid (siglo XVI)*, Madrid, 1907, T. II, p. 1356.

[75] [Juan Pérez de Moya, 1573, Dedicatória].

[76] Bibblioteca Pública Episcopal del Seminário de Barcelona (Barcelona), R. 10512; Biblioteca Nacional (Madrid), R. 31.784 e R. 26.880 e R. 22.928 e R. 11.335 e R. 5.614 e R. 4.818; Biblioteca del Museo Naval (Madrid), C.F.-7; Biblioteca Central Militar (Madrid) 1573-1; Palacio Real (Madrid), VIII-2.010 e XIV-1.148; Real Academia de Bellas Artes de San Fernando (Madrid), C-140; Fundación Lázaro Galdiano (Madrid), Inv. Nº 7.242; Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Madrid), FA-33 e FA-35; Monastério de San Lorenzo del Escorial, 16-IV-1/2; Observatorio Astronómico Nacional; Facultad de Filologia de la Universidad Complutense (Madrid), 23.315; Universidad Pontífica de Comillas (Cantoblanco, Madrid), XVI-

portuguesas, como na Biblioteca Nacional de Portugal e na Biblioteca do Palácio da Ajuda[77], o que deixa perceber a sua importância. Em 1652 foi reimpressa em Madrid[78].

Foi ainda em Alcalá que se publicou, em 1582, a edição prínceps da sua obra matemática *Arithmetica de Moya intitulada manual de contadores,* dedicada a "don Luys Manrique de Lara Capellán mayor de la Majestad del Rey don Phelippe nuestro Señor y su limosnero mayor"[79]. O facto de Pérez de Moya ter publicado a *Sylva* em Sevilha, quando, por esses anos, todas as suas obras estavam a ser publicadas em Madrid e Alcalá, reveste-se de contornos curiosos que Valladares Reguero nos dá a conhecer, mas não permite, por si só concluir que Pérez de Moya tenha vivido nessa cidade[80]. Em 1583 Pérez de Moya escreve o primeiro livro não científico, *Varia historia de sanctas e illustres mugeres en todo género de virtudes*[81]. Com este trabalho inicia-se uma nova fase na escrita do nosso autor, que Clavería descreve como uma "escalada literária de Pérez de Moya em direcção à escrita religiosa-educativa"[82].

1767; Biblioteca Histórica da Universidad de València (València), Z-5/72; Colégio Corpus Christi (València), 1.202, int.1º; Biblioteca Pública del Estado (Burgos), 6.426; Biblioteca General de la Universidad de Salamanca, 1ª -12.899 e 1ª- 36.514; Biblioteca de la Universidad de Santiago de Compostela (La Coruña); Biblioteca Central de Cantábria (Santander), XVI 72; Biblioteca Menéndez Pelayo (Santander), 1206; Biblioteca Pública del Estado (Córdoba), 28/131; Biblioteca Pública del Estado (Palma de Mallorca); Biblioteca Pública del Estado (Burgos), 80/6426; Biblioteca de Castilla-La Mancha (Toledo) e 4-3.788/3.879 e 1007; Biblioteca de la Universidad de Valladolid (Valladolid), 5.362-3; Monasterio de San Millán de la Cogolla de Yuso (La Rioja), B 35/25; Biblioteca de la Catedral (Jaén), D-6-5; Natalio Rivas (Úbeda, Jaén); Biblioteca Pública del Estado (Córdoba); Biblioteca de la Universidad de Granada, A-40-272; Sección de Medicina y Ciencias da Biblioteca de la Universidad de Zaragoza (Zaragoza), 77/31.

[77] Foi na Biblioteca do Palácio da Ajuda que consultámos o exemplar 37-XII-16 (1) Bajada do *Tratado de Mathematicas*. Este exemplar tem um ex libris de "Dom Duarte" e ostenta o seguinte ex donu: "Deu o Auguso Sr Rey D. Pedro 2º ao P^{dre} Luís Gonsaga, quando o tomou para m^{e} de seus filhos". Isto parece significar que, mais de um século depois de ter sido publicado, foi oferecido pelo rei D. Pedro II (1648-1706), de Portugal, ao padre jesuíta Luís Gonzaga, quando o encarregou da instrução dos seus filhos, contribuindo, portanto, para a formação de D. João V (1689-1750), que viria a ser rei de Portugal. Agradecemos à Dra Conceição Geada, bibliotecária da Biblioteca da Ajuda, a informação prestada sobre este assunto.

[78] Marques de Almeida refere um *Tratado de Matemáticas*, em 3 volumes, impresso em Salamanca, mas não encontrámos este exemplar em nenhum catálogo dos que consultámos [Almeida, A. A. M., 1994, II, p. 390]. Pérez Pastor indica um *Tratado de Mathematicas*, impresso em Madrid por Pierres Cosin, em 1578, mas deve tratar-se apenas do 1º volume desta obra [Pérez Pastor, 1891, p. 64].

[79] [Juan Pérez de Moya, 1582, Dedicatória]. Esta obra foi reimpressa em [Madrid, 1589]; existe, além disso, um exemplar na Biblioteca Nacional de Espanha (R. 29209) que, por não ter portada, não é possível assegurar se corresponde a uma das edições indicadas ou se se trata de uma edição diferente.

[80] A presença de Pérez de Moya em Sevilha está, possivelmente, relacionada com o facto de por essa altura o historiador e genealogista sevilhano Gil de Olid estar a recopiar, em terras de Jaén, materiais que viriam a formar a sua obra *Nobleza de Andalucía* [Valladares Reguero, A., 1997, pp. 376-377].

[81] A obra teve apenas esta impressão até ao século XX, quando foi publicada por Consolación Baranda no volume 2 das *Obras de Pérez de Moya* [Baranda, C. (ed.)**,** 1998].

[82] [Claveria, C., 1995, p. 19]. Valladares Reguero também nota esta mudança na temática da obra de Pérez de Moya e salienta que "No obstante, permanecerá el mismo espíritu didáctico y divulgativo presente en las

Em 1584, aos 71 anos de idade, Juan Pérez de Moya publica, em Madrid, o seu último livro científico, *Pincipios de Geometria* que, como nos diz, é um resumo de algumas partes da sua obra maior, o *Tratado de Geometria practica, y speculativa*, impresso em Alcala, em 1573, por Juan Gracian. É possível que Pérez de Moya ainda se mantivesse em Madrid no ano de 1585, pois aí escreveu, com data de 20 de Fevereiro de 1585, a dedicatória a Juan Bautista Gentil[83] da sua *Filosofía secreta donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina provechosa a todos los estúdios*[84].

A última obra que Pérez de Moya compôs foi a *Obligacion del Cristiano* que, ao que se sabe, não chegou a ser publicada, apesar de todas as diligências e da enorme persistência do autor. De facto, numa carta a Juan Vazquez del Marmol, datada de 28 de Março de 1594, Moya exprime o seguinte lamento[85]:

> El libro que vmd. vió, intitulado *Obligación del cristiano*, dí, habrá tres meses, á un librero de Salamanca, que se dice Claudio Curlet, para que le imprimiese, porque aquí no he hallado órden para ello, por falta de papel. Suplico á vmd. vea yo las obras que de mano de vmd. salieren, que serán de grande consuelo para vejez, y se me avise en lo que yo pudiere servir [Eugénio de Ocho, 1870, Vol. II, p. 39].

O pedido de publicação foi formulado novamente a 12 de Setembro do ano seguinte. Pérez de Moya escreveu ao mesmo Juan Vasquez de Marmol comunicando-lhe o seguinte:

---

publicaciones anteriores, todo lo cual responde fielemente al ideal del humanismo renacentista de la época." [Valladares Reguero, 1997, p. 378].

[83] Juan Baptista Gentil, filho de Costantin Gentil, custeou a publicação da *Philosophia secreta: donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina, provechosa a todos los estudios: con el origin de los idolos o dioses de la gentilidad*, de Pérez de Moya, que saiu dos prelos em 1585. Pérez de Moya também lhe dedica a obra *Principios de Geometria* e manifesta, além disso, a intenção de lhe dedicar todas as outras que vier a compor.

[84] Não consultámos este exemplar, mas sim os de [Alcalá, 1611] e de [Madrid, 1673], onde consta esta mesma dedicatória. Notámos que há um outro exemplar com data de 1611, impresso em Madrid por Alonso Pérez. Trata-se de uma obra rara que pertence à Biblioteca Histórica de la Universidad de Valencia (Y-13/108). Esta edição deve ser mal conhecida, pois Valadares Reguero apenas indica a de Alcalá [Valladares Reguero, A., 1997, p. 406]. Registamos ainda a impressão de [Madrid, 1628] e duas do ano de 1599, do mesmo impressor, mas custeadas por diferentes pessoas: [Caragoça, 1599] pelo impressor Miguel Fortuño Sanches, a costa de Joan Bonilla e [Zaragoça, 1599], a costa de Pedro Ibarra. No século XX a obra foi impressa três vezes: [Madrid, 1928], com "Estudio preliminar por Eduardo Gómez de Baquero" (2 vol.); [Barcelona, 1977] e [Madrid, 1995], com "Introducción" de Carlos Clavería.

[85] Juan Vasques de Marmol aparece, por vezes, indicado como "Corrector general de los livros, por el Rey, nuestro señor", outras vezes como "corrector por el Rey, nuestro señor, de los libros eclesiásticos" e ainda como "de los libros que se imprimem" [Eugénio de Ocho, "Coleccion de Cartas de Españoles Ilustres Antiguos y Modernos"] em [Rivadeneyra, M., 1870, Vol. II, p. 39, Nota de rodapé].

> En lo que toca á la merced que vmd. me hace mandando á Claudio Curlet que me envie los libros, digo que estoy con él enojadísimo, porque haiéndose arrepentido de la compra de mis libros ántes que llegase á Salamanca, dejó pasar un año entero par decirme que no los habia de emprimir por no poder [Eugénio de Ocho, 1870, Vol. II, p. 39].

Mas, novamente sem sucesso, pois o editor, entretanto arrependido do compromisso assumido, recusava a devolução da obra recebida. Pérez de Moya ainda insistiu uma terceira vez com o seu protector, lembrando-lhe que as obras tinham sido examinadas pelo Conselho Real, estavam aprovadas para impressão e, além do mais, já tinha comprador para elas[86]. Ao que parece, o desfecho da questão deve ocorrido com a morte de Pérez de Moya, não se sabendo se a obra chegou a ser impressa[87]. Quanto ao texto manuscrito da *Obligación del cristiano* não o encontrámos nos lugares onde julgávamos ser maior essa probabilidade: a Biblioteca do Escorial e a Biblioteca Nacional de Espanha, onde se conservam os manuscritos da *Arte de Marear* (Ms. L-III-24) e do *Tratado de Mathematicas* (Ms. 19.301), respectivamente. Admitimos, por isso, que está perdido.

Além destes trabalhos originais, Pérez de Moya esteve sempre atento à reedição das suas obras, que foram sendo reimpressas num ritmo impressionante. Só assim se compreende que, a partir da publicação do seu primeiro trabalho, quando contava já mais de 40 anos, ainda tenha assistido à publicação de pelo menos 13 das suas obras de matemática, algumas das quais com mais de um volume.

1.3.1. Conteúdo da obra matemática

Nesta secção passamos em revista os trabalhos matemáticos de Pérez de Moya dando a conhecer, dum modo sucinto, a sua organização e o tema que cada um versa. Não incluímos nesta exposição o manuscrito *Arte de Marear*, ao qual dedicamos um capítulo completo da nossa dissertação. Além disso, deixamos para outro momento a análise detalhada dos conteúdos de alguns dos trabalhos.

---

[86] A carta tem data de 9 de Outubro de 1595 e nela pode ler-se: "No puedo dejar de cansar á vmd., pidiendo favor para que vmd avise á Claudio Curlet que me hace la más mala obra del mundo en no enviarme los libros y sus despachos, porque hay aquí quien me los compra y me da priesa (…). Hele escrito que si dentro de treinta dias no los entrega á vmd., ó me los envia, que le haré ejecutar. (…) Yo le dí libros aprobados y examinados por el Consejo Real. Él se obligó a imprimirlos y á darme cien ducados; pleito es claro, y así le haré que deje su pleito y siga el mio…." [Eugénio de Ocho, "Coleccion de Cartas de Españoles Ilustres Antiguos y Modernos"] em [Rivadeneyra, M., 1870, Vol. II, pp. 39-40].

[87] É isso que consta em [Enciclopédia Universal Ilustrada, T. 43, p. 704].

Como atrás referimos, a primeira obra que Pérez de Moya publica é o *Libro de Cuenta*, em 1554, a expensas suas. Trata-se de um trabalho de aritmética, constituído por quatro partes, a que o autor chama "Libros". O primeiro livro expõe um raciocínio em forma de diálogo; o segundo ensina o cálculo com números inteiros, indicando as quatro regras gerais de Aritmética prática com estes números; o terceiro trata de números fraccionários e das operações elementares com eles; o quarto refere regras para contar "sin pluma"[88] e para reduzir umas moedas castelhanas a outras. Os títulos dos capítulos do *Libro de Cuenta* deixam, desde logo, perceber quais são as intenções do autor: por um lado, mostrar a importância da aritmética e, por outro, introduzir o leitor no conhecimento dos conceitos matemáticos elementares.

O *Libro segundo de Arithmetica* impresso em 1557 é um volume mais pequeno do que o *Libro de Cuenta* e está dividido em três partes com o seguinte conteúdo: a primeira parte consiste nas regras gerais da aritmética e nas regras de cálculo; a segunda, trata de proporção, de regra de três e outros assuntos de aritmética, que Pérez de Moya refere como "arte que dizem menor"; a terceira apresenta alguns caracteres de conta e moedas antigas[89].

O *Compendio dela regla dela cosa,* impresso em Burgos no ano seguinte, é o primeiro texto em que o autor se debruça sobre o estudo da álgebra. Pérez de Moya desenvolve este tema ao longo de dezasseis capítulos, distribuídos por cerca de cento e cinquenta folhas. A esta obra vamos dedicar-nos na segunda parte da nossa dissertação.

O facto de as três obras que acabámos de referir terem sido impressas em cidades diferentes, a primeira em Toledo, a segunda em Salamanca e a terceira em Burgos pode estar relacionado com as viagens que Moya fazia, talvez motivadas por ocupações profissionais.

Em 1562 é publicada, em Salamanca, a *Arithmetica practica, y speculatiua*. É uma obra volumosa que está dividida em nove "Libros". Baranda observa que o conteúdo é, em termos gerais, o dos três trabalhos já referidos: o *Libro de Cuenta*, o *Libro segundo de Arithmetica* e o *Compendio dela regla dela cosa*, embora com uma nova ordenação e incluindo diversos acrescentos[90]. Os dois primeiros livros da *Arithmetica* tratam dos números inteiros e fraccionários e das regras operatórias com esses números; o terceiro estuda algumas regras aritméticas, como regras de três e de companhias, aplicadas a diversos

---

[88] Significa que não utiliza material de escrita.

[89] Não vimos esta obra. As indicações que damos são as de [Valladares Reguero, 1997, p. 388]. Sabemos, contudo, pela leitura de outras obras de Moya, que os caracteres de conta são os símbolos usados na cuenta castellana. O *Libro segundo de Arithmetica tem* cerca de 87 folhas.

[90] Juan Pérez de Moya, *Obras* (vol II). Edición y prólogo de Consolación Baranda, 1998, p. X.

assuntos de "arte menor"; o quarto trata de regras de geometria prática necessárias à medição de terras; o tema do quinto livro é a aritmética especulativa; o sexto trata regras para contar sem "pluma" e reduzir moedas; o sétimo é dedicado à álgebra, ou "arte maior"; o oitavo apresenta alguns caracteres de contas, moedas e pesos antigos, juntamente com regras para obter as festas móveis e o nono, constituído por duas partes, expõe uma argumentação na forma de diálogo onde é feita a apologia da aritmética, encarada como ferramenta indispensável ao cálculo numérico. É o próprio Pérez de Moya quem nos dá a conhecer o conteúdo da sua obra e a importância dos assuntos que nela trata, na carta que dirige aos leitores:

> El primero tracta las quatro reglas generales de Arithmetica, cõviene saber, sumar, restar, multiplicar, partir por numeros enteros, cosa muy necessaria para el servicio dela vida humana, y digna de ser sabida de todo hombre que desseare ser puesto en el numero de los que sienten desta razon [Juan Pérez de Moya, 1562, "El Bachiller Ioan perez de Moya al Lector S."].

A preceder o primeiro *Libro* é apresentado um índice alfabético dos principias assuntos, que Moya intitula "Tabla de las cosas más memorables deste Tractado, por la orden del ABC". A *Arithmetica practica, y speculatiua*, pela diversidade dos seus temas, é um trabalho que se destina a públicos com necessidades, conhecimentos e interesses muito diferentes, que vão desde as simples operações aritméticas, ao estudo da resolução de equações. Esta é, aliás, a intenção manifesta do autor ao abordar temas tão elementares como as quatro operações com inteiros, e outros mais complexos como a "regla dela cosa" que permite resolver "infinitas" questões de aritmética e geometria, e que ele dirige a um público mais conhecedor e exigente. Diversos autores sublinham a importância, em termos de divulgação, dos trabalhos de Pérez de Moya[91]. Desses trabalhos, a *Arithmetica practica, y speculatiua* é, em geral, considerada a sua obra mais notável[92]. Os *Diálogos*, a que mais adiante nos referimos, constituem o livro IX da *Arithmetica practica, y speculatiua* e são a primeira colecção de matemática recreativa publicada em castelhano[93]. Neles discute-se a utilidade da aritmética, que naquela altura alguns consideravam uma ciência especulativa e desnecessária à vida prática. Pérez de Moya apresenta-os do seguinte modo:

---

[91] Como [Malet, A. e Paradís, J., 1984, p. 128].

[92] [Rey Pastor, J., 1934, p. 104].

[93] [Rodríguez Vidal, R., 1987, p. 14].

> Un razonamiento en forma de Dialogo: el argumẽto del qual es introduzir dos estudiantes: el uno que dize no aver necessidad de Arithmetica, y tiene por opinion que no ay ninguno, que no sepa contar teniẽdo dineros. El outro alaba la Arithmetica, y defiẽde lo contrario. En la platica destos dos se tocan y tratan algunos avisos agradables y necessarios [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 686].

O livro IX, dos *Diálogos*, está dividido em duas partes. Na primeira intervêm dois estudantes: Antimacho, que contesta a importância da aritmética, admirando-se que haja quem leia livros sobre o assunto, e Sophronio que representa o papel de Moya procurando, com argumentos incontestáveis, convencer o seu interlocutor das vantagens que todos têm em saber matemática. Na segunda parte entram em cena dois novos estudantes, Damon e Lucílio, que colocam mais questões e de maior grau de dificuldade, tornando o diálogo mais rico e mai animado.

A *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* é constituída por dois volumes que são dedicados a assuntos de geometria (o primeiro) e de astronomia (o segundo). O livro de geometria está distribuído por 44 capítulos. Contém, noções geométricas elementares (de ângulo, de corda de arco), construções básicas com régua e compasso (como a determinação de perpendiculares e paralelas), o estudo dos diversos tipos de triângulos, a divisão de um segmento em partes e a determinação da raiz quadrada por via geométrica, conceitos diversos relativos ao círculo e aos polígonos regulares (como circunscrever um círculo a um triângulo, a um pentágono, etc.). Pérez de Moya aborda, também, questões de quadratura, entre as quais a da quadratura do círculo, e trata da duplicação do cubo. O livro contém ainda uma descrição das medidas que usam os cosmógrafos e geómetras, e termina com um conjunto de problemas sobre os assuntos anteriormente apresentados. O segundo livro, de astronomia, está dividido em três partes. A primeira, com 30 capítulos, trata, entre outros, os seguintes temas: fracções astronómicas, regiões do mundo, os céus (nomeadamente a sua cor e provas de que movem em torno do mundo, de que são redondos, etc.), as estrelas, o movimento de Saturno, Júpiter e Marte; eclipses da lua e sol, signos do Zodíaco. Ensina a determinar os dias das festas e feiras, a latitude e a longitude. A segunda parte tem 20 capítulos e trata, entre outros assuntos, questões relacionadas com os elementos (fogo, ar e vento, água, terra), a posição e imobilidade da terra, e a sua divisão nos diversos continentes; ensina a fazer cartas da descrição de uma província e a determinar a distância entre duas povoações. A terceira parte é um estudo sobre relógios e, tal como a segunda, está dividida

em 20 capítulos. Nela, Pérez de Moya ensina, por exemplo: a fazer relógios (horizontais e verticais), mostra como se convertem as horas de umas regiões em horas de outras, como se determina a hora com o quadrante e o astrolábio, como se sabe a hora de noite pela estrela do Norte e pela Lua, segundo Pedro Apiano[94]. A esta obra havemos de nos referir na quarta parte do nosso trabalho, quando tratarmos do estudo do manuscrito *Arte de Marear*.

Numa primeira leitura da lista de conteúdos dos *Fragmentos Mathematicos* observa-se que Pérez de Moya se dedica, aqui, a estudos que não constam na sua *Arithmetica practica, y speculatiua*. Há, no entanto, um ou outro caso pontual que é tratado em ambas as obras. Por exemplo, o problema da determinação da área de um triângulo, conhecidos os comprimentos dos seus três lados, está proposto e resolvido na *Arithmetica practica, y speculatiua* para um triângulo de lados 10, 7 e 14 "tamaños" e a sua resolução envolve a determinação da altura relativa ao lado maior, que é, também, tratada no primeiro livro dos *Fragmentos Matemathicos*.

Já atrás referimos que, em 1573, Pérez de Moya assistiu à impressão e correcção, em Alcalá, do seu *Tratado de Mathematicas*[95]. Pérez de Moya investiu muito neste tratado onde, como nos diz, procura reunir toda a sua obra matemática, ampliando e, em alguns casos, corrigindo os conteúdos de alguns dos capítulos[96].

O primeiro volume do *Tratado de Mathematicas*, o *Tratado de Arithmetica*, é constituído por 10 livros. O primeiro trata de aritmética teórica; o segundo e o terceiro são sobre as operações com números; o quarto estuda arte menor, isto é, regras de três e companhias e testamentos; o quinto trata de raízes de números; o sexto é sobre os modos de provar as regras gerais de aritmética; o sétimo é sobre álgebra; o oitavo propõe e resolve questões sobre algumas regras dos libros precedentes de aritmética; o nono explica como se conta de memória; o décimo trata de vários caracteres de números, moedas, e outros. O livro dos "Diálogos", incluído na *Arithmetica practica, y speculativa*, não consta do *Tratado de*

---

[94] Pérez de Moya não indica o nome da obra de Apiano, mas não há dúvida que se trata da *Cosmographia*, pois esses estudos encontram-se em [Pedro Apiano, 1548, f. 52v]. Pedro Apiano, cujo verdadeiro nome era Bienewitz ou Bennewitz, nasceu na Saxónia em 1495, e morreu em Ingolstad, a 21 de Abril de 1552. Estudou em Leipzig e Viena tendo sido professor em Ingolstad, desde 1527. Em 1541, Carlos V (Carlos I, de Espanha) nomeou-o cavaleiro do império, mantendo com ele uma estreita relação. Pedro Apiano teve grande popularidade na sua época pelos estudos sobre instrumentos astronómicos e geográficos. O seu trabalho mais importante é a *Cosmographia seu discriptio totius orbis*, publicada em 1524, baseada na obra de Ptolomeu [Maroto, M. e Piñeiro, M., 2006, pp. 246-248].

[95] O manuscrito que constitui as provas desta obra encontra-se na Biblioteca Nacional de Madrid (Ms 19.301). Está bastante rasurado, exibindo diversas emendas, com letras que podem não ser apenas da mão do autor. Contém 1443 folhas.

[96] [Juan Pérez de Moya, 1573, El Bachiller Ivan Perez de Moya al lector].

Arithmetica. O segundo volume tem 4 livros. O primeiro introduz os principais conceitos geométricos (ponto, linha, superfície, corpo, ângulo, figura, círculo e suas partes, triângulo, figuras circunscritas e inscritas noutras, etc.); trata da divisão de um segmento em partes e mostra como se fazem construções como a do meio proporcional e a do quarto proporcional, construções relacionadas com o círculo, com diversos polígonos e com ovais. Trata do modo de converter algumas figuras noutras figuras com a mesma área; da duplicação e divisão de figuras; da quadratura do círculo. O segundo livro explora questões de medida linear com diversos instrumentos simples que o autor ensina a construir. O terceiro livro é dedicado às medidas de áreas. O quarto trata de estereometria. Estuda os cinco sólidos regulares e relações entre os comprimentos das suas arestas e o diâmetro da esfera circunscrita; calcula o volume de diversos sólidos; ensina a medir com água ou com areia o volume de um corpo e resolve diversos problemas práticos em que estes conceitos são aplicados; refere a questão da duplicação do cubo. O terceiro volume da obra é constituído por 3 livros. O primeiro livro trata da esfera e das suas partes; da longitude e latitude geográficas; dos céus, estrelas, planetas, signos do zodíaco e órbita do sol; da lua e cálculo dos seus eclipses. O segundo estuda os elementos e a região elementar, os meteoros, o mar e as marés; trata do tamanho, área e volume da terra; dos vulcões, zonas e climas; do modo de determinar a latitude e da construção de cartas. O terceiro diz respeito aos relógios solares horizontais e verticais, cilíndricos, a relógios de água e de areia e expõe vários meios efectuar o cálculo da hora.

Em 1582 Moya compõe a *Arithmetica de Moya intitulada manual de contadores*[97]. É uma obra constituída por 3 livros, com cerca de 200 folhas, aos quais se acrescenta um quarto livro, composto por 36 folhas, cuja numeração é independente das anteriores. O primeiro livro explica o sistema de numeração decimal, chamado "guarismo", e o sistema de "cuenta castelhana", com as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão; ensina a converter moedas e pesos; mostra como se conta com os contadores ou "getones" (espécie de moeda que servia para fazer cálculos). O segundo livro trata de números fraccionários, isto é "quebrados ou rotos"; Moya ensina a reduzir ao mesmo denominador e a efectuar as operações elementares com estes números. O terceiro livro contém regras de três e de companhias, regras para testamentos, divisão de rendas eclesiásticas e de heranças, elementos necessários às contratações de diversos tipos, cálculos da pesagem de carne e peixe, relações entre diferentes unidades de medida. O livro quarto diz respeito a valores de

[97] O significado de contador dado no *Diccionario de la Real Academia Española* é "persona nombrada por juez competente, o por las mismas partes, para liquidar una cuenta".

moedas e pesos de Espanha e outros reinos, e conversão destas unidades noutras. No final, inclui tábuas relativas a conversões expressas em "guarismo" e em "cuenta castelhana". O conteúdo do *Manual de contadores* está incluído nos livros primeiro, segundo, terceiro e sexto da *Arithmetica practica, y speculativa*, publicada em 1562; mas Moya actualiza o tipo e o valor das moedas indicadas nas tábuas de conversão, aumentando a extensão das tábuas e apresentando-as não só em algarismos mas também em "cuenta castellana"[98]. Depois de uma breve alusão aos capítulos que constituem o *Tratado de Mathematicas*, onde estas actualizações também são feitas, Pérez de Moya esclarece que alguns dos assuntos incluídos neste *Manual de contadores* já se encontram naquela obra, e dá indicações ao leitor que pretenda fazer um estudo mais aprofundado sobre os capítulos do *Tratado* que deve consultar:

> Y assi digo que algunas cosas e las que en este manual se tratan, las hallaras en el tratado de Aritmética arriba nombrado, en el libro segundo que hallara a hojas 83. y en el tercero a hojas 177 y en el quarto a hojas 241 y en el nono a hojas 681. Si quiseres saber cosas de Arithmetica teórica especulativa lee el libro primero plana I. Si quiseres modos varios de provar si las cuẽtas que hazes estan falsas o verdaderas, lee el libro sexto, a hojas 399. Para sacar rayz cuadrada, o cubica, o otras varias diferencias de rayzes lee el libro quinto a hojas 327. De una, y de dos falsas posiciones, lee el libro quarto a hojas 314, cap. 13 y 14. Si quiseres tener noticia de la regla que dizen de la cosa, o álgebra, o arte, que sirve de hazer cuestiones o demandas, lee el libro septimo a hojas 429. Si quiseres seber effectos o secretos de numeros, lee en el libro octavo, cap. 12, plana 665. El que quisiere saber las proporciones, de musica especulativa, lea el libro primero plana 25. cap. 15. 16. 17. 18. 19. 25. 28. 33. 35. 36. 37. 38. 40. [Juan Pérez de Moya, 1582, Tabla, página não numerada].

Ao folhearmos a *Arithmetica de Moya intitulada manual de contadores* apercebemo-nos de que com este trabalho Pérez de Moya pretende atingir fins essencialmente práticos. Assim, é possível encontrar, no decorrer do texto, orientações para quem desempenha as mais diversíssimas tarefas, como: "plateros", que trabalham com as ligas de ouro e prata, "lapidários", que trabalham com pedras preciosas, "soldados", a quem são dadas indicações úteis para fazer esquadrões, "labradores" e "carpinteros" a quem ensina a dividir o círculo

[98] Por exemplo, enquanto na *Arithmetica practica, y speculativa* é fornecida uma tábua com a equivalência entre o número de maravedis e o de "reales", "florines", "coronas", "ducados" "dobla zaén", "castellano", "doblón", "cruzado port.", em que o número máximo de maravedis é 900, no *Manual de contadores* a tábua só contém a equivalência entre o número de "maravedis", "reales", "ducados" e "escudos" e vai até 10000 [Juan Pérez de Moya, 1582, (Libro quatro) ff. 23v-24 e 1562, pp. 437- 438].

em partes, "medidores de tierras"; e, ainda, aos que querem "saber cosas del tiempo", aos que pretendem aprender os cálculos para determinar as datas das festas móveis, aos "geometras" para medir alturas, distâncias, profundidades, aos "albañires", aos "reloxeros", aos "marineros o pilotos", aos que precisam de usar o astrolábio, aos interessados em "Astronomia" para entenderem a "sphera" e as "tablas de la Geographia de Ptolemeo"; aos "grãmaticos", aos "legistas", aos "lógicos y philosophos".

No mesmo âmbito de divulgação que presidiu à publicação desta obra, Pérez de Moya compôs, ainda, o *Principios de Geometria*, pequena obra que é o resumo de algumas partes do *Tratado de Geometria practica, y speculativa* (2º volume do *Tratado de Mathematicas*, impresso em 1573). O livro *Principios de Geometria* é constituído apenas por dois livrinhos, ou capítulos, onde o autor trata vários temas de geometria, ilustrando-os com muitas figuras[99]. No primeiro livrinho, Moya define diversos tipos de linhas e de ângulos, mostra como se divide uma linha em partes; ensina a construir triângulos em diversas condições e a decompor um polígono em triângulos; trata do comprimento das diagonais de polígonos regulares; faz considerações sobre o círculo e grandezas relacionadas com ele; ensina a dividir a circunferência em partes. Termina este livro com a determinação da raiz quadrada por via geométrica. O segundo livrinho trata de conhecimentos relacionados com medidas e divisão de terras, que são úteis a geómetras e cosmógrafos. Aí, ensina, por exemplo, como se traçam linhas rectas em certas condições e se constroem figuras elementares; relaciona diferentes unidades de medida; estuda questões que envolvem a medida de figuras circulares e lineares; ensina a medir terras e montes. E, tal como fez no *Manual de contadores*, remete o leitor para o texto do *Tratado de Mathematicas* onde, como diz, se pode complementar o estudo feito.

[99] O "libro primero" tem 137 figuras. No anexo 1 é dada a composição da obra.

Obra matemática de Juan Pérez de Moya (edições *princeps*)	
Libro de Cuenta	Toledo, 1554
Libro segundo de Arithmetica	Salamanca, 1557
Compendio dela regla dela cosa, o Arte mayor	Burgos, 1558
Arithmetica practica, y speculativa	Salamanca, 1562
Arte de Marear	(Mss) 1564
Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos: Libro primeiro, trata de geometría practica y speculativa	Salamanca, 1568
Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos: Libro segundo, trata de cosas de astronomia y geographia y philosophia natural y sphera y astrolabio y navegación y reloges	Salamanca, 1567
Tratado de Mathematicas. Vol 1. *Tratado de Arithmetica* Vol. 2. *Tratado de Geometría practica y speculaticva* Vol. 3. *Tratado de cosas de Astronomia y Cosmographia y Philosofia natural.*	Alcalá de Henares, 1573
Arithmetica de Moya intitulada manual de contadores	Alcalá de Henares, 1582
Principios de Geometria	Madrid, 1584

1.3.2. Conteúdo da obra não matemática

Além das obras com conteúdo matemático que referimos na secção anterior, Pérez de Moya redigiu outras com características e finalidades diferentes. O estudo dessas obras não faz parte do nosso projecto de investigação, mas o conhecimento dos seus conteúdos pode dar-nos uma ideia mais precisa dos interesses do nosso autor e do seu nível cultural. Por isso, deixamos aqui algumas palavras sobre essas obras socorrendo-nos, quando tal for necessário, dos estudos feitos por especialistas nessas matérias. Como atrás foi referido, em 1557 é impressa a *Sylva, Eutrapelias id est Comitatis et urbanitatis ex variis probatae fidei Authoribus & vital experimentis*. O facto desta obra estar escrita em latim, constituiu, para nós, um obstáculo à sua leitura; por isso, as breves indicações que aqui deixamos baseiam-se nos estudos de Valladares Reguero[100]. A *Sylva* é uma miscelânea constituída por dez

[100] [Valladares Reguero, A., 1997, p. 387].

capítulos onde se apresentam saberes e curiosidades sobre temas variados: no 1º trata de experiências diversas; no 2º refere algumas características próprias dos animais; no 3º indica antídotos contra os animais daninhos; no 4º fala de plantas; no 5º trata de frutos e da sua conservação; no 6º fala de jogos e da astúcia dos jogadores; no 7º dá alguns conselhos práticos; no 8º trata do vinho; no 9º refere assuntos de cosmética; no 10º trata da escritura.

Pérez de Moya publica em 1583 a sua primeira e única obra dedicada às mulheres, *Varia historia de sanctas e illustres mugeres en todo genero de virtudes*. Com ela pretende louvar algumas mulheres cujo comportamento constitui, em seu entender, um modelo de virtude. A obra inicia-se com uma indicação do nome das mulheres mencionadas no texto e um prólogo sobre a perfeição das mulheres. Seguem-se três livros: o primeiro trata de santas; o segundo, de mulheres que se notabilizaram por feitos heróicos e o terceiro de mulheres que ficaram famosas em diversas ciências, como as letras latinas e gregas, a história, a retórica, a astrologia, a filosofia, a música, a medicina, a sagrada escritura e a pintura. E termina com um capítulo dedicado às mulheres inventoras e aos seus inventos, de que deixamos aqui alguns exemplos curiosos: Corcirea foi inventora do jogo da pelota; Tritónia, do coche de quatro cavalos; Phemonoe, inventou o verso heróico; Caia inventou o tratamento da lã; Semíramis foi inventora do grande navio. Consolación Baranda estudou esta obra e observa que ela se integra no amplo programa de doutrinamento introduzido na Europa pelo humanismo renascentista, ao qual não é alheia a literatura espanhola[101]. O ponto de partida para os trabalhos deste tipo, diz Baranda, é a aceitação da inferioridade da mulher, tanto por razões biológicas como religiosas. A essa condição acresce a diferença de atitudes e qualidades entre os sexos, o que implica uma educação diferente para mulheres e homens e, consequentemente, uma literatura distinta[102]. Moya dá-nos a entender essa distinção quando refere, na dedicatória da obra, que volvidos 27 anos a escrever sobre assuntos destinados aos homens, decide compor um texto com o qual as mulheres se possam cultivar:

> Y assí, después de aver impreso de veynte e siete años a esta parte algunos libros de materias diversas pertenecientes a varones, me paresció ser cosa digna escrivir algo que perteneciesse a mugeres, moviéndome a ello ver quán pocos libros ay manuales, fuera de los de devoción, en que virtuosamente se pueden exercitar [Juan Pérez de Moya, 1998, p. 625].

[101] [Baranda, C., 1998, p. XXVI- XXXVIII].

[102] [Baranda, C., 1998, p. XXVIII-XXIX].

O estilo de escrita religiosa-educativa de Pérez de Moya mantém-se em *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes; muy util y necesario para predicadores y otras personas curiosas*, publicada em Alcalá, no ano seguinte ao da *Varia historia de sanctas e illustres mugeres*[103]. Este trabalho de Pérez de Moya foi objecto do estudo de Chica Arellano e, embora o tenhamos lido, é a opinião de Arellano que aqui expomos[104]. *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes* não é um tratado sistemático mas um conjunto de máximas que podem ser incluídas em homilias e, por isso, são úteis à predicação. Chica Arellano refere que a elaboração deste texto foi o resultado dos exercícios de oratória sagrada, que eram exigidos no programa de formação teológica ministrado nas três principais universidades espanholas, a de Salamanca, a de Valladolid e a de Alcalá, feitos por Pérez de Moya, ou teve como finalidade ajudar os alunos que tiveram que passar por essa fase académica[105]. O livro desenvolve-se em setenta e um pequenos capítulos, cada um dos quais aborda um tema. A estrutura de cada um desses capítulos é a seguinte: primeiro é dada uma definição descritiva sobre o assunto que se vai tratar e, em seguida, são abordados, por meio de comparações, diversos aspectos sobre os quais ele se centra. Estas comparações constituem-se como máximas: as virtudes convertem-se em guias para atingir o céu e os vícios operam em sentido contrário. Com os seus conselhos, Moya procura oferecer ao homem a via para a felicidade, levando-o a corrigir os abusos que comete e educando-o na virtude. Por isso, Chica Arellano considera que a função desta obra é "claramente educativa, divulgadora e formadora, tendente a fixar e atrair a atenção do auditório para a singularidade do citado. Moya, com as suas frases, quer despertar ou saciar a curiosidade dos ouvintes, vigorizar a sua vontade, estimular a sua inteligência e proporcionar meios adequados para a exercer."[106]. Seleccionámos uma frase desta obra para iniciarmos a nossa dissertação.

O último trabalho não matemático de Pérez de Moya é a *Filosofía secreta donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina provechosa a todos los*

[103] Em 1972, Rodriguez Vidal refere a obra com a data de 1581 e dá-a como constando do núcleo de reservados da BN de Espanha [Rodrigues Vidal, R., 1972, pp. 403-405]. Em 1987 indica a data de 1584, mas acrescenta uma edição da mesma obra com data de 1581, publicada em Lisboa [Rodriguez Vidal, R., 1987, p. 7]. Não a localizámos em nenhum catálogo espanhol ou português Julgamos que se trata de um lapso pois todos os textos que consultámos referem a edição de Alcalá de Henares, de 1584, como sendo a da primeira impressão desta obra. A *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes; muy util y necesario para predicadores y otras personas curiosas* teve ainda duas reimpressões no século XVI, a saber: [Alcalá, 1586], [Valência, 1599] e recentemente foi editada por Consoación Baranda.

[104] Ver [Chica Arellano, F, 1999, pp. 147-198].

[105] [Chica Arellano, F, 1999, p. 156].

[106] [Chica Arellano, F., 1999, p. 180].

estúdios[107]. A obra está dividida em sete livros: o primeiro é como uma introdução geral sobre a idolatria e a multidão ("muchedumbre") de deuses da "Gentilidad"; o segundo trata dos deuses varões; o terceiro, das "deesas" fêmeas; o quarto, dos varões heróicos ou meios deuses; o quinto trata de fábulas propriamente morais, para exortar os homens a fugir dos vícios e seguir a virtude; o sexto contém fábulas de transformações; o sétimo trata de fábulas de conteúdo alegórico, religioso e instrutivo. Na exposição dos conteúdos, Pérez de Moya usa a seguinte metodologia: primeiro expõe a fábula ou relato da vida de algum deus ou herói e depois, em geral, faz uma declaração na qual procura descobrir o sentido alegórico do relato. Em alguns casos junta uma declaração histórica acerca do que pode haver de real sob o disfarce de fábula[108]. Jesús Bregante refere a *Filosofía secreta* como um tratado de tradição humanista, erudito e de intenção moralizadora, sobre a mitologia greco-romana, no qual se descrevem as relações entre os diferentes mitos de que se tira uma lição de moral; e observa que foi uma obra muito divulgada[109]. Para Navarrete Orcera, investigador da Universidade de Jaen, o principal objectivo de Pérez de Moya ao escrever a *Filosofía secreta* não era ser uma referência para eruditos, mas difundir em castelhano, entre os seus contemporâneos espanhóis, uma matéria que já era conhecida no resto da Europa[110]. Orcera sublinha a influência deste trabalho na literatura e na arte, notando que a sua concepção alegórica ou moral o tornava muito adequado para ser usado sem problemas de censura; e refere que ele se encontrava em bibliotecas de pintores consagrados como, por exemplo, Velasquéz. Embora Orcera não indique a fonte onde obteve essa informação, nós podemos adiantar que ela consta no *Inventario de Bienes que dejaron a su morte D. Diego de Silva Velásquez y su mujer D. Juana Pacheco*[111]. A última edição desta obra, em 1995, é da responsabilidade de Carlos Clavería, que usa as palavras de Gómez de Baquero para falar da temática que ela aborda:

---

[107] Esta obra foi traduzida em português, em 1735, pelo cónego António de Cristo, com o título *Filosofia Secreta, donde debaixo de histórias fabulosas se contem muita doutrina proveitosa com a origem dos ídolos ou deoses da gentilidade*. Inicialmente pertenceu à livraria de S. Bento de Xabregas tendo daí passado para a da Biblioteca Nacional de Portugal, onde está identificada como Cod. 1471.

[108] [Cossío, J. M., 1952, p. 66].

[109] [Jesús Bregante, 2003, p. 735].

[110] [Navarrete Orcera, A.R., sd] http://www.ujaen.es/investiga/hum669/Perez_Moya.htm (Consultado em 29 de Setembro de 2010).

[111] Podemos ver, também, que dos cerca de 150 títulos que integraram a biblioteca de Diego Velásquez e de sua mulher, Juana Pacheco, fazem parte três obras de Pérez de Moya: *Astromomia* (catalogada com o número 444), *Arismetica* (catalogada com o número 463) e *Philosophia Secreta* (catalogada com o número 473). http://www.juntadeandalucia.es/cultura /iaph/infopha/03prodinfor/ DonDiego/biografia/bibliot.html (Consultado em 1 de Novembro de 2005). Em Dezembro de 2011, aquando da preparação da publicação desta tese, o endereço estava desactivado.

Es un tratado de Mitologia grecorromana, escrito con el espíritu de los Diccionarios de la fábla, es decir, en el sentido de la ilustración humanística de la literatura antigua, pero también con el intento de sacar una enseñanza moral de las fábulas del mundo clásico [Clavería, C., 1995, p. 20][112].

Obra não matemática de Juan Pérez de Moya (edições *princeps*)	
Silva, eutrapelias id est Comitatis et urbanitatis ex variis probatae fidei Authoribus & vitae experimentis	Pineiae (Córdova), 1557
Varia historia de sanctas e illustres mugeres en todo genero de virtudes	Madrid, 1583
Comparaciones o similes para los vicios y virtudes	Alcalá de Henares, 1584
Philosophia secreta	Madrid, 1585

1.4. Amigos, protectores e mecenas

Ao longo da sua vida, Pérez de Moya soube rodear-se de personalidades influentes, a quem reclamou apoio e protecção. Entre os seus amigos, protectores e mecenas encontravam-se homens de letras e de ciências, professores, figuras eclesiásticas, da nobreza e até da realeza. A alguns destes homens, Pérez de Moya dedicou os seus trabalhos, quer em sinal de reconhecimento, quer procurando protecção para a sua publicação. Na sua terra natal, Juan Pérez de Moya contava com a amizade e amparo dos nobres aristocratas da família de Benavides e Cueva, desde o tempo de seu pai. Por outro lado, os condes de Benavides, D. Isabel de la Cueva e seu marido, D. Francisco de Benavides, tinham tal confiança nos seus conhecimentos e talento de professor, que o encarregaram da instrução em Aritmética do seu filho primogénito, Diego Benavides[113]. A este seu aluno dedicou Juan Pérez de Moya a sua primeira obra impressa, o *Libro de Cuenta* [Toledo, 1554] e, também, o *Libro segundo* da *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* [Salamanca, 1567][114]. O *Libro primeiro* desta obra [Salamanca, 1568] é dedicado a um outro membro da família de

[112] Sobre o tema abordado nesta obra, Claveria transcreve as palavras de Gómez de Baquero na "Introducción" à *Philosophia secreta*, 1928, p. XVII [Claveria,.C., 1995, p. 20].

[113] Os condes de Benavides eram "Condes de Sant Estevan del Puerto, señores de Solera, y villas de Espelui, y Ibros, Caudillos mayores del Reyno de Iaen", como refere Pérez de Moya, no título de *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos*, Salamanca, 1567.

[114] Valladares Reguero conta alguns pormenores curiosos sobre as estreitas relações que ligam Pérez de Moya à família Benavides [Valladares Reguero, A., 1997, p. 374].

Benavides, don Luys de la Cueva y Benavides, "señor de la villa de Vedmar, capitan de ginetes de las guardas de España"[115] e filho de D. Alonso de la Cueva e Benavides, "Capitan general de la Goleta de Tunez". Nesta dedicatória, tal como em diversas outras que dirigiu, é manifestado objectivamente o propósito do autor:

> Al dedicar los autores a los poderosos sus obras, aunque seã pequeñas, y indignas de tãto nõbre (Illustre sñor) suele ser, porque hallã alli una defensa fuerte para lo que de suyo es flaco, para defender se dlas calŭnias y murmuraciones que en semejãte caso nuca suelĕ faltar [Juan Pérez de Moya, 1568, Dedicatória].

Pérez de Moya dedica a Alonso Martinez de Lerma, cónego da igreja de Burgos, o *Compendio dela regla dela cosa, o Arte Mayor* [Burgos, 1558] publicado nessa cidade.

Em 1562, é ao Príncipe D. Carlos, primogénito do Rei Filipe II, que Pérez de Moya dedica a sua obra mais emblemática, a *Arithmetica practica, y speculativa* [Salamanca, 1562] publicada nesse ano, quando D. Carlos era ainda estudante universitário[116]. É muito curiosa esta dedicatória na qual Pérez de Moya chama a atenção para a importância que na divulgação de uma obra pode ter a protecção de alguém ilustre e, simultaneamente, como essa protecção pode constituir encorajamento, mesmo para um autor que já esteja motivado para a escrita, como era o seu caso:

> Reciba, pues, V.A. este servicio de un hijo de criado desta casa real, y no desdeñe de ser amparo de la más illustre arte de las que dizen liberales, porque todas ellas tendrán estima si de tan poderoso príncipe fueren estimadas, y favorezca V.A. mis huérfanos trabajos para que con las alas de tan alto favor crezca cada día mi ingenio con execución de más altas obras [Juan Pérez de Moya, 1562, Dedicatória].

Pérez de Moya dedica a Filipe II o *Tratado de Arithmetica* [Alcalá, 1573], que é o primeiro volume do *Tratado de Mathematicas*. Oferecendo ao rei esta obra, que considera de utilidade pública, Moya procura suprir a falta de o servir pelas armas, como fizeram o seu pai e avô:

---

[115] [Juan Pérez de Moya, 1568, Dedicatória].

[116] Sarton refere-o como estudante na universidade de Salamanca [Sarton, G., 1955, pp. 155-156].

> Obligacion tendre yo de acudir com este reconocimiento, y pues no pude servir (por ser Sacerdote) ene ejercicio de la guerra como mi padre, y aguelos, procuro hazerlo en el de las letras, de que los Reyes no menos tienen necesidad para la governaciõ de sus reynos (…) pues cõ ellas se provee a lo uno, y a lo otro. Para muestra que ha dias tengo voluntad de manifestar mi obligación de servir a V. M. en lo que puedo (…) agora presento este de Aritmética, en donde se contienen muchas materias, y usos necesarios de los numeros, cõ que espero en Dios V. M. sera servido, y la Republica aprovechada. Y pues ninguno se debe reprehender de lo que offrece (ofrecí lo que puede) reciba V. M. este pequeño servivio, y favorescale cõ la Real benignidad que a cosas virtuosas jamas suele faltar, porque de la manera q la templanza del ayre haze tierra fértil, assi el favor del Principe excita, y levanta los ingenios de sus criados a grandes cosas [Juan Pérez de Moya, 1573, Dedicatória].

O *Manual de contadores* [Alcalá de Henares, 1582] é dedicado ao Capelão mor do rei D. Filipe II, e seu esmoler, D. Luys Manrique de Lara, manifestando nessa dedicatória intenções com que o fez:

> Como toda cosa según sentencia del philosopho, se haga por algun fin. La costumbre tã antigua, y de todos autores tã usada de dirigir sus obras, paresce (muy llustre y Reverendissimo señor) ser por una de dos causas principales, La una por eternizar el nombre de alguno: trayendo siempre de tiempo en tiempo a la memoria de las gentes con escriptura las obras, y hechos, que pueden aprovechar, para buen ejemplo de otros: porque no avendo quien los escriviesse, pasaría assi como viento, que solo quando corre se siente. (…) Y assi queda en claro que dirigir yo a VS este libro de Aritmética en que pone solamente lo necesario que han menester saber un contador es tomando por fin principal la otra causa, de buscar un señor y patron de alto estado, y de esclarecido entendimiento, para defenderle de las calunias, y murmuraciones, que en semejantes ejercicios nunca suelen faltar [Juan Pérez de Moya, 1582, Dedicatória].

A última obra matemática de Pérez de Moya, o *Principios de Geometria* [Madrid, 1584], é dedicada a Juan Bautista Gentil. Este mecenas de Pérez de Moya custeou a *Philosophia secreta*, publicada no ano seguinte e o nosso autor dirige-se-lhe nas seguintes palavras:

> (…) aisi el encaminar a v. m. el libro de Geometria que saquê antes deste, no fue para con solo el cumplir con las obligaciones que a v. m. tẽgo, sino para hazer camino, y principio de dedicar al noble nombre de v. m. todos los que de aquí en delante sacaré. Moviendome a

> ellos dos cosas. La una, corresponder con la obligación que tengo, como a mi Mecenas. La otra, por la utilidad que dello a mis escritos se sigue: por que como las piedras preciosas tienen (pudiendo ser falsas y contrahechas) como de la persona en cujas manos estan: assi mis obras con protector en quien se encierran tantas, y tan excelentes virtudes, con tanta aprobación, y satisfacion de todos, podran librar-se de las calumnias y contradicciones, de los que como Momos se ejercitan en inquirir inadvertencias agenas [Juan Pérez de Moya, 1611, Dedicatória].

Pérez de Moya dedica a Matheo Vazquez de Lecca, secretário da Inquisição, que tinha estado ao serviço do cardeal Espinosa e, depois da morte deste, passara a fazer parte do Conselho de Filipe II, a obra *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes; muy util y necesario para predicadores y otras personas curiosas* [Alcalá de Henares, 1584] em agradecimento "pelo favor e mercedes" que recebera dele[117]. A única obra que Pérez de Moya escreve para as mulheres, *Varia historia de sanctas e illustres mugeres en todo género de virtudes* [Madrid, 1583] é dedicada a uma mulher, a imperatriz Maria Infanta de Espanha.

O papel importante que os protectores e mecenas tiveram na publicação e divulgação da obra de Pérez de Moya foi reforçado pelos elogios dos autores que as prefaciaram e escreveram os seus Prólogos. Entre eles, vemos Francisco Sanchez que foi catedrático de retórica na Universidade de Salamanca[118]; Alexo Venegas; o doutor Cornejo, médico[119]; Miguel Sanches de Arayz[120]. Por outro lado, a importância dos seus trabalhos é fortalecida pela categoria dos que os leram para determinar a sua aprovação: como Pedro Juan de Lastanosa e o João Segura, a quem ainda voltaremos a referir-nos nesta parte do nosso trabalho[121].

O prefácio de Francisco Sánchez de Brozas ao *Compendio dela regla dela cosa, o Arte Mayor*, que se encontra também na *Arithmetica practica, y speculativa*, enfatiza o árduo trabalho de Pérez de Moya na realização da sua obra e a sua constante preocupação na divulgação do conhecimento matemático. Tendo examinado alguns trabalhos de Pérez de

---

[117] [Chica Arellano, F., 1999, pp. 168-169].

[118] [Juan Pérez de Moya, 1558, Prólogo].

[119] [Juan Pérez de Moya, 1573, Prólogo].

[120] [Juan Pérez de Moya, 1584, Prólogo].

[121] La censura deste libro, remitio el Real consejo de su Magestad, a la Universidad y Rector de Alcala de Henares. Y el Rector le cometio al Doctor Segura, Canonigo de Sanctiuste, y Cathedratico de Mathematicas de la dicha Universidad. El consejo Real de la Corona de Aragon, le cometio a Pedro Juan de Lastanosa Mathematico de su Magestad, y fue de ambos consejos aprovado. Como todo consta por las peticiones que estã en poder del Secretario Iuan Gallo de Andrada, y del Secretario Miguel Gort [Juan Pérez de Moya, 1573, Aprovação].

Moya, aos quais não regateou elogios, o *Brocense*, como era conhecido, destaca nesta obra o capítulo da álgebra, por nele se justificarem todas as questões que se baseiam no conceito de número e de proporção:

> De manera que en los otros libros de arithmetica, assí del autor como de agenos, unos mejor que otros, enseñan el arte, pero éste enseña por demostración, y evidencia y causas, por donde el que quisiere llegar al cabo (si cabo se puede decir en las ciencias) esta arte y saber siempre la razón de lo que le fuere pedido, si es posible darse, no puede dexar de tener en mucho esta obra. Y porque el curioso della podra ver & alcãçar mucho mas delo que yo aquí podre dezir: no porne aquí otro loor, sino solo rogar a los lectores que veã el libro y se apruechẽ de su doctrina [Juan Pérez de Moya, 1558, Prólogo].

O exame crítico do *Tratado de Mathematicas*, que é a obra mais volumosa de Pérez de Moya, foi dado à responsabilidade de dois matemáticos. Endereçado, por um lado, ao Reitor da Universidade de Alcalá de Henares pelo Conselho Real de Filipe II, este incumbiu o doutor Segura, cónego de Santisteban e catedrático de matemáticas na universidade de Alcalá, da censura da obra. Por outro lado, o Conselho Real da Coroa de Aragão encarregou Pedro Juan de Lastanosa, matemático do rei, da censura da mesma obra. O *Tratado de Mathematicas* foi aprovado por ambos os conselhos e a licença foi dada em Madrid, por Antonio de Erasso, em nome do rei, a 9 de Dezembro, de 1571. O doutor Cornejo foi quem compôs o Prólogo deste *Tratado*, em termos tão elogiosos que não podemos deixar de apresentar aqui um excerto:

> De dõde esta bien claro a mi parecer (amigo lector) que si Pythagoras por darles solo el aviso, merecio mucho entre los suyos, y tal renõbre, y estima, y publica admiraciõ, El Bachiller Iuan Perez de Moya, doctissimo Andaluz, cuyas obras alunbran a España, por aver adestrado cõ millones d'avisos sus Españoles, merece muy mucho mas. Y en fin, de ley humana, y de justicia por este tal beneficio publico, publica hõrra y gloria, inmortal nobre y fama se le deve, y há de dar. Poorque si a los padres que dã el principio y ser, o formã los humanos cuerpos, mãda Dios com particular precepto honrar y reverenciar, a los maestros que los ânimos, e ingenios (donde se assenta y consiste el ser principal del hõbre, que es la razon) alumbran, industriã, cõponen y hermoseã. Con que corona? con que loor? con qual premio, o vassallaje humano, se podra pagar, o satisfazer? Assi, que viniendo a mis manos esta fabrica universal, y trauazõ artificiosa, que en effecto es de Mathematicas la summa, entendendo bien la gran necessidade que a y en España destos princípios y fundamentos, no

solo para las scientificas, mas para todas artes mechanicas [Juan Pérez de Moya, 1573, Prólogo del Doctor Cornejo Medico, a los curiosos lectores].

Moya obteve licença para imprimir o *Tratado de Mathematicas* durante um período de dez anos: a licença aplicava-se à totalidade da obra assim como a cada um dos três livros que a constituiam, conforme Pérez de Moya entendesse. Este privilégio consistia uma espécie de "direitos de autor" concedidos pelo rei Filipe II. No anexo 2 incluímos a cópia da licença dada pelo rei Filipe II para a impressão e privilégio por dez anos do *Tratado de Mathematicas*[122].

1.5. Ensino

Sobre esta faceta da actividade de Pérez de Moya as opiniões dos seus biógrafos não são consensuais, chegando alguns autores a afirmar que ele nunca se dedicou ao ensino. É isso que diz Fernandez Vallin, observando que Pérez de Moya "no fue catedrático, ni aun se dedico à la ensenãnza"[123]; e Domínguez Berrueta, que refere o seguinte: "Pasó el Bachiller Moya más de cincuenta años escribiendo, y en todo esse tiempo no pasó de bachiller ni tuvo cátedra en Universidad, ni se dedicó á la enseñanza"[124]. Pelo contrário, López Piñero baseia-se nas preocupações didácticas que revelam as obras de Pérez de Moya para afirmar que, em algum momento, ele se deve ter dedicado ao ensino[125]. Esta é, também, a opinião avalizada de Alexo Venegas, contemporâneo do nosso autor, que afirma sobre ele o seguinte: "É tão lido e tão experimentado nesta arte de Arithmetica, que com público aplauso a leu em Salamanca, e na corte, e noutros muitos lugares insignes"[126]. Lançamos, ainda, mão de dois testemunhos do próprio Pérez de Moya para assegurar que foi professor, em algum período da sua vida. Um deles, a que já fizemos alusão, consta no *Libro segundo de Arithmetica*, quando diz que D. Isabel de la Cueva, mãe de D. Diego Benavides, o tinha encarregue de

---

[122] O documento que apresentamos encontra-se digitalizado no *Portal de Archivos Españoles*, do Ministério da Cultura de Espanha. Pertence ao *Archivo de la Corona de Aragón* e está no *Archivo Real (Real Cancillería)* em *Felipe I el Prudente. Diversorum 9. Signatura ACA, CANCILLERÍA, REGISTROS, NÚM.4304.* O seu conteúdo não é inédito, pois está reproduzido, como prefácio, na versão impressa do referido tratado.

[123] [Vallin y Bustillo, A. F., 1893, p. 369].

[124] Veja- se [Domínguez Berrueta, M., 1899, p. 466].

[125] [Lopez Piñero, J. M., 1979, p. 176].

[126] Ver o Prólogo "El maestro Alexo Venegas al benevulo y pio Lector", composto em Madrid, em 7 de Outubro de 1561. Este texto é a segunda versão do prólogo anteriormente redigido por Alexo Venegas para integrar a obra *Libro de Cuenta*, como atrás referimos, e está incluído no prólogo da *Arithmetica práctica e especulativa*, publicada em 1562.

"instruir o seu filho em matéria de Arithmetica"[127]; o outro pode ler-se na dedicatória da *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos,* a don Luys de la Cueva y Benavides, quando diz:

> Haviedo pues determinado que este libro de Geometría practica saliesse a luz, parescio-me dedicarle a v.m. por ser tã aficionado a su servicio, quanto Aristóteles lo fue a su Alexãdro Magno. Y porque me parescio tenia algun derecho para pedir a v. m. le favorezca cõ aql calor que se debe al aver yo sido maestro destas disciplinas [Juan Pérez de Moya, 1568, Dedicatória].

Podemos, por isso, afirmar, sem reservas, que Juan Pérez de Moya não só ensinou aritmética, possivelmente em lições particulares, como também, foi mestre de geometria. Não dispomos, no entanto, de qualquer documento que nos permita indicar a instituição onde exerceu esse magistério e, por isso, não podemos confirmar os dados de Alexo Venegas nem os de Sanchéz Pérez, segundo os quais Pérez de Moya ensinou em Salamanca e em Madrid[128].

Chica Arellano diz que onde mais se destacou Pérez de Moya foi na pedagogia: "Assimilou e explicou os seus conhecimentos de forma magistral; tanto que ninguém o superou na sua época, especialmente nas ciências, então esquecidas, para não dizer desprezadas"; e considera esta actividade de Moya como uma "forma de génio"[129].

Pérez de Moya era um estudioso incansável cuja obra foi admirada por personalidades ilustres das letras, das ciências e das artes. Com uma grande diversidade de interesses em campos distintos do conhecimento e produzindo trabalhos sobre temas científicos, filosóficos, teológicos e morais, foi as ciências que ele privilegiou, e em especial a matemática. Praticamente, todos os seus trabalhos foram reimpressos, muitas vezes depois de revistos e acrescentados por ele próprio, sempre com a preocupação de aperfeiçoar o que antes escrevera, como se lê nas suas palavras:

> Deste discurso podra el discreto lector no maravillarse, si en los libros que compuse en el tiempo de mi juventud hallare inadevertẽcias e imperfecciones, pues es tan comun esto en los libros, como entre los que escriven el pedir perdon de lo que pueden errar. Principalmente,

[127] [Valladares Reguero, A., 1997, p. 375].

[128] [Sanchéz Pérez, J. A., 1929, p. 229].

[129] [Chica Arellano, F., 1999, p. 149].

que para que una cosa sea perfecta, se requierĕ muchas mas cosas, que para ser imperfecta: pues para lo primero es necesario, que tenga todas sus perfecciones juntas, y para lo segundo basta que tenga una sola imperfection [Juan Pérez de Moya, 1573a, El Bachiller Ivan Perez de Moya al lector].

SEGUNDA PARTE

1. Introdução

Quando em 1558 Pérez de Moya publicou o *Compendio dela regla dela cosa, o Arte Mayor* existiam apenas dois trabalhos impressos na Península Ibérica que incluíam matérias relativas ao estudo da álgebra. Um deles era o *Libro primero de Arithmetica Algebratica* [Valência, 1552], do alemão Marco Aurel; o outro era o *Tratado da arte de arismetica* [Porto, 1555], do português Bento Fernandes. Quanto a manuscritos ibéricos contendo álgebra, anteriores a 1552, apenas é conhecido o Ms 71 de Sant Cugat[130], que Docampo descreve como um texto catalão de aritmética comercial e álgebra, escrito por volta de 1520, e provavelmente da autoria de Joan Ventallol[131]. Aliás, a situação não é muito diferente daquela que ocorre com os manuscritos ibéricos de aritmética, que não incluem o estudo da álgebra. Docampo refere quatro manuscritos catalães de ábaco, dos quais o mais antigo data de 1390[132], e os outros três são do século XV, e dois manuscritos castelhanos do século XIV. Este número reduzido de manuscritos de conteúdo matemático, escritos em línguas ibéricas, contrasta com as cerca de três centenas de manuscritos italianos de aritmética e álgebra, anteriores a 1500, referidos por Egmond[133] e por Franci[134], e é bastante menor do que os vinte e cinco textos franceses de aritmética mercantil, produzidos nos séculos XIV e XV, que Egmond[135] menciona.

O primeiro livro de matemática impresso na Península Ibérica, a *Summa de l'art d'Aritmètica* [Barcelona, 1482], de Francesc Santcliment, é uma aritmética comercial, em língua catalã, que não contém álgebra[136]. A primeira obra impressa com conteúdo algébrico é a *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* [Veneza, 1494], de

---

[130] [Docampo, J., 2008, p. 2].

[131] [Docampo, J, 2008a, p. 1].

[132] [Docampo, 2008, p. 2].

[133] Van Egmond, W., 1988, p. 129].

[134] [Franci, R., 1992, pp. 59-60]. De acordo com Franci [Franci, R., 1994, pp. 64] estes manuscritos, compostos sobretudo por mestres de ábaco, mas também por mercadores, artistas ou simples cultores do assunto, têm frequentemente a estrutura seguinte: I-Introdução, II-apresentação do sistema numérico indo-arábico, III-indigitação, IV- operações aritméticas com os inteiros, V- cálculo com as fracções, VI- regra de três, regra de falsa posição, VII- problemas mercantis (sistema de moedas, pesos e medidas, companhia, baratos, câmbios, etc.), VIII- geometria prática, IX- matemática recreativa, X- álgebra. Nem sempre todos estes assuntos estão presentes, em particular podem faltar as partes II, III, IV, IX e XI, e por vezes os problemas de matemática recreativa estão misturados com os comerciais, sendo a presença destes últimos o que caracteriza um texto como tratado de ábaco.

[135] [Van Egmond, W., 1980, p. 129].

[136] Antoni Malet publicou uma edição crítica desta obra [Malet, A., 1998].

Luca Pacioli[137]. Este tratado influenciou diversos textos publicados no século XVI e até depois[138]. Na Península Ibérica, são exemplo dessa influência, na primeira metade do século XVI, as obras dos portugueses Gaspar Nicolas[139], *Tratado da Pratica Darismetyca* [Lisboa, 1519], e de Ruy Mendez[140], *Pratica darismetica* [Lisboa, 1540], e a do espanhol Joan Andrés, *Sumario Breve de la pratica darismetica de todo el curso del arte mercantivol* [Valência, 1515][141]. Mas estes livros não compreendem o estudo da resolução de equações.

Vamos descrever brevemente as obras de Pacioli, Aurel e Fernandes. A *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, de Pacioli, foi composta, em grande parte, a partir do *Liber abaci* [1202] de Leonardo de Pisa e dos aportes dos abacistas italianos; estes últimos incluíam a manipulação de fracções algébricas e a exploração de diversas técnicas de resolução de equações de grau superior a dois[142]. Na *Summa*, vemos a

---

[137] A biografia de Pacioli é razoavelmente conhecida pelo trabalho de Rankin [Rankin, F. K. C., 1992]. Pacioli é natural de Borgo San Sepolcro, onde nasceu por volta de 1445. Ainda muito jovem, foi admitido ao serviço do rico mercador veneziano Antonio Rompiasi, como tutor dos seus três filhos; a estes viria a dedicar uma obra sobre aritmética e álgebra que não chegou aos nossos dias. Em 1470 tornou-se frade franciscano. Ensinou em Perugia, Florença e Roma, regressando a San Sepolcro em 1491. Em 1494 ocupou uma cátedra de matemática em Milão, cidade onde se tornou amigo íntimo de Leonardo da Vinci. Em Novembro desse ano foi impressa em Veneza a *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*. Em Milão, Pacioli compôs a *Divina proportine*, ilustrando-a com os desenhos dos sólidos regulares e semi-regulares feitos por Leonardo; a obra manuscrita estava completa em 1497. Em 1499 Pacioli e Leonardo viajaram para Florença e, nos 5 anos que se seguiram, Pacioli ensinou na universidade de Pisa, então sediada em Florença. Quando em 1505 se tornou membro da irmandade de Santa Croce, já trabalhava há algum tempo no manuscrito contendo *De viribus quantitatis*, uma colecção de problemas lúdicos de aritmética e geometria, provérbios e versos, que faz parte do espólio da universidade de Bolonha. Em 1508 Pacioli estava em Veneza, onde deu um curso de leitura à introdução do livro V dos *Elementos* de Euclides. Em 1509 foi impressa em Veneza a *Divina proportine*, que contém em apêndice um tratado de arquitectura, um de proporções das letras maiúsculas do alfabeto romano e a tradução para italiano do *De corporibus regularibus* de Piero della Francesca. No mesmo ano publica a sua edição em latim dos *Elementos*. Em 1510 voltou a Perugia, onde trabalhou como professor, e em 1514 foi chamado a Roma pelo papa Leão X para ensinar na universidade. Morreu em 1517 [Rankin, F. K. C., 1992, pp. 114-122].

[138] É reconhecida a influência da *Summa* nos trabalhos portugueses do século XVII: *Thesouro de Prudentes* (Coimbra, 1612), de Gaspar Cardoso de Cerqueira, e *Flor da Arismetica Necessária* (Lisboa, 1524), de Afonso de Villafanhe Guiral e Pacheco [Almeida, A.A.M., 1994, I, pp. 87-89]. Para os autores espanhóis ver [Docampo, J. R. 2006, pp. 43-62].

[139] O *Tratado da Pratica Darismetyca* é um trabalho extenso que contém assuntos de aritmética prática ligados às actividades comerciais. Foi estudado por Carlos Montes Morais, na tese de mestrado intitulada *A Aritmética em Portugal até aos princípios do século XVI*, apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, em 1997. Ver, também, [Almeida, A. A. M., 1994, I e II]; em especial sobre Gaspar Nicolas ver [Almeida, A.A. M., 1994, I, pp. 77-84].

[140] Marques de Almeida nota que Ruy Mendez, ou Rodrigo Mendes, como também era conhecido, segue de perto Gaspar Nicolas e Luca Pacioli, mas admite que ele não leu directamente a *Summa* [Almeida, A. A. M., 1994, I, p. 85].

[141] O título completo é *Sumario breve de la pratica de la Arithmetica de todo el curso del arte mercantivol bien declarado: el qual se llama maestro del quento.* Para detalhes sobre a composição desta obra ver [Docampo, J., 2004, pp. 101-103].

[142] Por sua vez, Leonardo de Pisa baseou o *Liber abaci* no *Kitāb fi hisāb al-jabr wa'l-muqābalah* (c. 825) (Livro da restauração e oposição), de al-Khwarizmi, obra que Egmond considera como a pedra angular do

definição e operações com raízes quadradas, cúbicas e de grau superior, o estudo de binómios e resíduos, o cálculo com potências da incógnita. Relativamente às equações, Pacioli introduz as seis formas canónicas das equações de grau não superior a dois e indica as respectivas regras de resolução. Classifica-as em simples e compostas[143], dá problemas de aplicação das regras indicadas para essas equações e indica modos de reconhecer se uma equação que não pareça pertencer a um dos seis tipos indicados pode ser resolvida por aplicação das regras dadas[144]. De acordo com Rankin[145], todo o capítulo da "algebra" é ordenado e tratado de maneira muito parecida com os capítulos algébricos do *Liber abaci*, mas frequentemente com mais pormenor, incluindo mais definições preliminares e mais explicações. Sobre a parte de geometria incluída na *Summa*, de Pacioli, daremos detalhes na terceira parte do nosso trabalho, quando este assunto for estudado[146].

O *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, de Marco Aurel, é a primeira obra impressa em língua castelhana, que contém álgebra[147]. Não são conhecidos estudos aprofundados deste trabalho; foi comentado brevemente por Rey Pastor, e por Malet e Paradis, e, mais recentemente, Docampo fez uma análise mais extensa desta obra[148]. A obra *Arithmetica Algebratica* é um texto de aritmética e de álgebra. O conteúdo mais especificamente relacionado com a álgebra começa no capítulo 7, com o estudo dos números quadrados e raízes, e estende-se até ao capítulo 12, tratando, pela ordem seguinte, os

---

desenvolvimento da álgebra no ocidente, pois foi por meio das traduções que dela se fizeram que o uso de equações e incógnitas na resolução de problemas matemáticos entrou na tradição matemática ocidental [Van Egmond, W., 1978, p. 155].

[143] As simples são: "quando li censi se aguagliano ale cosa" ($ax^2 = bx$), "quando li censi sonno equali al numero" ($ax^2 = c$); "quando le cose seranno equali al numero" ($bx = c$);as compostas são: "quando li censi: e le cose se aguagliano al numero" ($ax^2 + bx = c$); "quando cosa e nº se aguaglia a censi" ($bx + c = ax^2$) e "quando el censo [e] el nº se aguaglia a le cose" ($ax^2 + c = bx$) [Luca Pacioli, 1494, ff. 144v-145r].

[144] [Luca Pacioli, 1494, ff. 111v-150r].

[145] [Rankin, F. K. C., 1992, p. 267].

[146] [*Cf.* Terceira Parte, 1].

[147] Antes de imprimir o *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*, Aurel tinha publicado, em Valência, em 1541, uma aritmética intitulada *Tratado muy util y provechoso: para toda manera de tratantes: y personas afficionadas al contar*. Nas noventa e seis páginas que compõem este trabalho, estuda matérias como a equivalência entre as várias unidades monetárias de Valência, Castela, Aragão e Catalunha, regras diversas para gerir gastos caseiros, salários de criados e outras despesas do quotidiano e proporções, referindo Euclides e Boécio; e, a terminar, propõe um conjunto de 21 problemas, dos quais resolve os dezassete primeiros. Na dedicatória a D. Jorge de Áustria, Arcebispo de Valência, Aurel dá a conhecer o conteúdo da obra dizendo que "Consta de regras breves, de reduciones de monedas necessários y provechosos a los q tratã. E los cinco generos de proporciones: a los artistas y otras reglas breves para los que son aficionados a la cuenta" [Marco Aurel, 1541, verso da primeira página não numerada].

[148] Ver [Rey Pastor, J., 1934, pp. 100-103]; [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 127] e [Docampo, J., 2004, pp. 549-556].

assuntos: números irracionais e operações com radicais, números cúbicos, binómios e operações elementares com eles, raiz quadrada e raiz cúbica de um binómio. Nos restantes capítulos, que ocupam mais de metade da obra, estudam-se os caracteres algébricos e operações com eles, e as equações, ou "ygualaciones". Aurel dá a classificação das equações, indicando oito tipos básicos de equações, e o algoritmo de resolução de cada um. Os capítulos 15, 17 a 21, 23 e 24, são constituídos por problemas de aplicação de cada um dos oito tipos de equações estudadas; o capítulo 16 trata de problemas resolvidos com recurso a uma segunda incógnita e o capítulo 22 é sobre a extracção da raiz quadrada de um binómio recorrendo a equações[149]. Tomámos do trabalho de Docampo as indicações que damos a seguir[150], relativamente a esta obra.

Aurel, que conhece a *Summa* de Pacioli, baseia o seu tratado nas álgebras alemãs da época, em especial na de Christoff Rudolff [1525][151]. São, essencialmente, dele as notações algébricas usadas para o número, a incógnita e o seu quadrado. Os símbolos para a soma e para a diferença são os actuais e tinham aparecido na Alemanha nos finais do século XV.

O *Tratado da arte de arismetica*[152], de Bento Fernandes, é sobretudo um trabalho de aritmética para ser usado por mercadores, a quem o autor dirige frequentemente os seus problemas. Esta obra contém uma secção de álgebra, que é a parte que Fernandes considera mais difícil e que destina aos leitores com mais conhecimentos, como pode ler-se na apresentação que delas faz: "as regras da cousa que sam de mais sustancia pera pessoas curiosas y experimentadas na arte".

Bento Fernandes inicia este estudo com uma "tavoada da álgebra": é um conjunto de regras relativas à multiplicação de potências da incógnita, que em notação simbólica se exprimem assim: $x \times x = x^2$; $x^2 \times x^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4$; $x \times x^2 = x^3$; $x^3 \times x^3 = x^6$;

---

[149] Na carta que nesse trabalho dirige aos leitores, Aurel manifesta a intenção de compor uma obra, em três partes, das quais este livro é a primeira, mas, ao que sabemos, só o *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* chegou até nós. A segunda parte destinar-se-ia às demonstrações geométricas – "sera para provar (en parte) por demostracion Geometrica, lo que enesta primera parte (enel arte mayor) lo que digo por numero, podras tambien tomar por linea"– e a terceira seria sobre aplicações práticas de geometria – "La tercera parte sera de Geometria Pratica, para officiales mechanicos" [Marco Aurel, 1552, folio não numerado] Nessa carta, Aurel reflecte sobre o estado lamentável da matemática em Espanha e sublinha que a álgebra contida na sua obra constitui uma novidade, que pretende tornar acessível a todos "para utilidade delos amadores de tener cuenta con la cuenta". Mas, como observa Docampo, a obra de Aurel, com a organização que ele lhe dá, não era um livro para aprendizes.

[150] [Docampo, J., 2004, pp. 549-556].

[151] Julgamos tratar-se da obra *Behend vund Hubsh Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*, escrita em alemão e que apareceu em Estrasburgo, referida em [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 66].

[152] Um estudo do conteúdo desta obra é apresentado em [Silva, M. C., 2008].

$x \times x^3 = \left(x^2\right)^2 = x^4$; $x^2 \times x^3 = x^5$. E trata 27 tipos de equações enunciando as respectivas regras de resolução; contudo, algumas destas regras estão erradas e outras só são válidas em casos particulares. Como mostrámos no nosso artigo "The algebraic content of Bento Fernandes's *Tratado da arte de arismetica (1555)*", a álgebra de Bento Fernandes não é inspirada na *Summa*[153].

No anexo 3 damos algumas notas complementares sobre a biografia de Bento Fernandes e um resumo do conteúdo integral do seu *Tratado da arte de arismetica*, incluindo as equações estudadas e as regras de resolução propostas por Bento Fernandes.

2. Os trabalhos algébricos de Pérez de Moya

Os trabalhos algébricos de Pérez de Moya compreendem três momentos diferentes:

1) O *Compendio dela regla dela cosa, o Arte mayor*, publicado em Burgos, em 1558;

2) O "Libro Séptimo: En que se pone un compendio de la regla de la cosa o arte mayor", da *Arithmetica practica, y speculativa***,** cuja primeira edição foi impressa em Salamanca, em 1562[154];

3) O "Libro septimo", que "Trata de la subtil, y muy ingeniosa regla de Algebra en Arithmetica, que por outro nombre se dize regla de la cosa", incluído no *Tratado de Arithmetica,* que é o 1º volume do *Tratado de Mathematicas*, publicado em Alcalá de Henares, em 1573[155].

Nos dois últimos casos, o livro referido é o mais extenso que cada uma das obras compreende.

2.1. Conteúdo e organização

No estudo subsequente começamos por comparar o conteúdo dos três trabalhos algébricos que acabámos de mencionar para nos inteirarmos das principais diferenças existentes na sua organização. Apresentamos aqui uma visão geral que nos conduziu à escolha dos temas que aprofundámos e determinou a ordem que adoptámos no seu estudo.

Pérez de Moya publicou, em 1558, o *Compendio dela regla dela cosa, o Arte mayor*, que foi o seu primeiro trabalho algébrico e foi, como antes referimos, o primeiro trabalho

[153] Ver [Silva, M. C., 2008].

[154] [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 443-615].

[155] [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 429-605].

unicamente algébrico impresso, de autor espanhol. O *Compendio* é um trabalho totalmente dedicado ao estudo da álgebra. É constituído por cento e cinquenta e nove páginas: as seis primeiras são reservadas à portada, às dedicatórias e ao prólogo, e as quatro últimas mostram um índice e a errata[156]. Está organizado em "capitulos", alguns deles divididos, por sua vez, em "artículos"[157]. Abre com um poema laudatório, em latim, da autoria de Domingo Zapata, intitulado "Dominicus Çapatta Fossiensis, ad lectores", ao qual se segue o prólogo elogioso da autoria de Francisco Sánchez de Brozas, à época Catedrático de Retórica na Universidade de Salamanca[158]. O prólogo é um reconhecimento do esforço incansável de Pérez de Moya pela divulgação do conhecimento matemático e é, também, um indicador da importância do texto que, em seu entender, não se limita a transmitir regras, mas proporciona, ainda, a sua explicação e fundamento:

> Este livro de la cosa dexa atrás todo loor, porque es en nuestra lengua cosa nueva y muy ingeniosa (…) es un libro dõde se da razõ de todas las questiones o sciẽcias que se funda en numero & pporciõ: cosa que todo hõbre tiene natural en querer saber la razõ delas cosas: & no se cõtẽta hasta que la alcãça [Juan Pérez de Moya, 1558, p. IIIv].

A importância que Pérez de Moya atribui ao assunto que trata no *Compendio* está bem clara na dedicatória da obra ao cónego de Burgos, Alonso Martinez de Lerma, onde refere a álgebra "cuja hermosa materia no se puede mas altamente encomendar" e mostra a convicção de que, tal como aconteceu com os seus anteriores trabalhos de aritmética, que já então tinham começado a circular, também este seja admirado pelos leitores[159].

---

[156] Este livrinho está encadernado juntamente com outro intitulado *En chiridion ó manual instrumento de salud, contra el morbo articular, que llaman Gota* [Zaragoza, 189], de D. Bernardino Gómez Miedes, Obispo de Albarracín.

[157] As primeiras 4 folhas da obra estão numeradas apenas pela frente e em numeração romana; as 75 subsequentes são numeradas de ambos os lados de 1 a 149; a obra termina por 2 folhas não numeradas contendo uma *tabla* onde são indicados ordenadamente os assuntos tratados, de acordo com a paginação, e uma *Errata*.

[158] O poema de Zapata foi traduzido para castelhano e consta de uma brochura publicada aquando das comemorações do IV centenário da morte de Juan Pérez de Moya, em 1996. Ver [Moreno Uclés, 1996, folha não numerada]. No [Anexo 4] damos a versão castelhana da autoria de Moreno Uclés. Francisco Sanchez de Brozas (1523-1601), também conhecido por *Brocense*, por ter nascido em Brozas, localidade da Estremadura espanhola, estudou na universidade de Salamanca onde mais tarde veio a ser catedrático de Retórica e Matemáticas. Grande humanista, foi processado pela Inquisição, acusado de ter proferido frases maldizentes durante as suas explicações de Filosofia Natural. Foi autor de uma edição da geografia de Pompónio Mela, *De situ orbis*, e de um livrinho de astronomia, inspirado em Sacrobosco e Iunctino, a *Sphaera mundi ex variis autoribus concinnata*, que publicou em Salamanca, em 1579 [Maroto, M. I. V. e Piñero, M. E., 2006, p. 261].

[159] Moya refere-se, naturalmente, ao *Libro de Cuenta* impresso em Toledo, por Juan Ferrer, em 1554 [Juan Pérez de Moya, 1554] e ao *Libro segundo de Arithmetica*, impresso em Salamanca por Juan Canova, em 1557 [Juan Pérez de Moya, 1558, II].

No *Compendio*, depois da introdução onde explica o significado da álgebra, Moya estuda, por esta ordem, os seguintes assuntos (a que mais tarde nos referimos em detalhe): definição de álgebra e notações; conceito de número quadrado e de número cúbico e operações com estes números; conceito de número medial; operações elementares com caracteres (trata as quatro operações elementares com as potências da incógnita, monómios e polinómios e a extracção da raiz quadrada); classificação de binómios e resíduos e operações com estes entes matemáticos; estudo das equações: equações simples de duas quantidades e compostas de três quantidades; problemas de aplicação da resolução de equações; regra da quantidade (sistemas de equações); resumo e generalização da resolução de equações a casos em que apenas intervêm monómios de dois ou três graus diferentes; equações envolvendo monómios de mais de três graus diferentes; definição e operações com raízes universais. A terminar, inclui um capítulo sobre operações com proporções e proporcionalidade e aplicação destes conceitos. Depois da tábua de conteúdos e da errata, Moya faz ainda um apontamento, onde promete justificar e demonstrar noutro trabalho tudo o que trata na álgebra, dizendo:

> La razon y demostracion de todo lo que se ha tratado en esta regla dela cosa: se pondra en outra parte siendo dios servido [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 153].

Pela leitura do seu *Libro de Cuenta*, publicado em 1554, sabemos que Pérez de Moya tinha intenção de escrever uma obra sobre álgebra, porque entendia que só a álgebra podia permitir um estudo eficaz dos problemas. De facto, no final do capítulo terceiro, ou terceiro *Libro*, desse trabalho, ao propor vinte problemas para exercitar as regras gerais da aritmética, Moya sublinha a importância da álgebra, dizendo:

> Y assi acabo, quanto a este 3. Libro, pues no se puede hazer demãda de primor, a do no se entremete la regla de la cosa. De la qual (Dios mediante) tratare en otro volumen [Juan Pérez de Moya, 1554, p. 301].

A mesma ideia sobre a aplicação da álgebra à resolução de questões aritméticas, e até geométricas, é expressa por Pacioli na *Summa*:

> Non mi pare ormai piu dover diferir se la pte maxime necessaria ala pratica de Arithmetica: e anche de Geometria detta dal vulgo cõmunemente. Arte maggiore: over la regola de la cosa: over Algebra: e almucabala secondo noi detta pratica speculativa. Perche in lei piu alte cose

> che in larte minore: over pratica negotiaria si contiene: cõmo nel pcesso se demostrara[160] [Luca Pacioli, 1494, f. 111v].

E é reforçada por diversos algebristas, entre os quais Pedro Nunes. Na dedicatória do *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* ao cardeal D. Henrique, em Dezembro de 1564, o matemático português sublinha a necessidade do conhecimento da álgebra, não apenas para resolver questões de aritmética e geometria mas também noutras áreas do conhecimento como a cosmografia, a "astrologia", a arquitectura e a actividade mercantil. São dele as seguintes palavras:

> De todollos Livros que nas Sciencias Mathematicas tenho composto, muito alto & muito excellente Príncipe, nenhum he de tanto proveito como este de Álgebra, que he conta facil & breve para conhecer a quantidade ignota, em qualquer proposito de Arithmetica & Geometria, & em toda outra arte que usa de conta & medida, como sam a Cosmographia, Astrologia, Architectura, & Mercantil [Pedro Nunes, 1567, f. a ij].

Na *Arithmetica practica, y speculativa* [1562] o estudo da álgebra é apresentado no "Libro Séptimo", que tem por título "En que se pone un compendio de la regla de la cosa o arte mayor"[161]. Apesar deste título coincidir com o do *Compendio*, o conteúdo de ambos não é o mesmo e os conceitos de proporção e proporcionalidade, que intervêm no estudo das equações, são apresentados no *Compendio* depois de estudadas as equações, enquanto na *Arithmetica* são tratados antes, e até num "Livro" diferente[162]. De facto, Pérez de Moya não integra o cálculo algorítmico da raiz quadrada e da raiz cúbica no *Compendio*, mas inclui-o na parte algébrica da *Arithmetica*, interrompendo o decurso lógico das regras operatórias com raízes quadradas e raízes cúbicas[163]. À parte estas desconformidades, notamos que a organização dos assuntos nos dois trabalhos é a mesma, sendo até coincidentes, na sua

---

[160] A nossa tradução livre deste excerto é a seguinte: "Não me parece que se possa continuar a discordar de que a parte mais necessária à prática de Aritmética, e também de Geometria, [é a] dita comummente pelo vulgo Arte maior, ou regra da coisa, ou Algebra e almucabala, por nós chamada pratica especulativa. Porque nela se contêm mais altas coisas do que na arte menor, ou prática dos negócios como no seguimentose demonstrará."

[161] O "Libro Séptimo" contém, tal como o *Compendio dela regla dela cosa*, o poema de Domingo Zapata e o prólogo elogioso de Francisco Sánchez de Brozas, mas a dedicatória é, desta vez, ao príncipe D. Carlos, ao qual Moya dirige um agradecimento logo no início da obra [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 443-615].

[162] Na *Arithmetica*, o assunto relativo a proporção e proporcionalidade é exposto no "Libro quinto", que "Trata de arithmetica speculativa".

[163] Pérez de Moya não só indica processos de determinação da raiz quadrada e da raiz cúbica exacta, no caso de quadrados e cubos perfeitos, como também mostra como se podem obter valores aproximados da raiz, nos outros casos [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 456 - 467 e 481- 488].

grande maioria, os títulos dos capítulos e a sua numeração. A notação utilizada em ambos os textos é igual, embora no *Compendio* Moya use "cv" para representar o cubo da incógnita e "rv" para a raiz universal[164], enquanto na *Arithmetica* usa "cu" e "ru" para o mesmo fim[165]. Alguns outros detalhes mostram que Pérez de Moya reviu cuidadosamente o texto do *Compendio* antes de o incluir na *Arithmetica*: por exemplo, incorpora referências aos *Elementos* de Euclides[166], apresenta mais problemas, substitui alguns exemplos de aplicação por outros com características diferentes (ou têm cálculos mais simples que não fazem o leitor desviar-se do objectivo da questão, ou são mais abstractos e aumentam a diversidade dos casos apresentados)[167]. No entanto, não se observam diferenças nos métodos utilizados na resolução das questões propostas.

No *Tratado de Mathematicas*, publicado em 1573, o estudo da álgebra faz parte do 1º volume, o *Tratado de Arithmetica*, que contém conceitos e exemplos úteis para todo o tipo de actividades:

> Se pone todo lo que de números, y cuenta se puede dessear, diziendo usos que sirvan a las artes liberales, y mechanicas, de suerte que se pueda dello aprovechar toda suerte de hombres [Juan Pérez de Moya, 1572, al lector].

Quando comparamos, em termos de organização, a parte algébrica do *Tratado de Arithmetica* com a álgebra incluída na *Arithmetica practica, y speculativa*, publicada onze anos antes, notamos mais diferenças, e muito mais relevantes, do que aquelas que se observam entre a *Arithmetica practica, y speculativa* e o *Compendio dela regla dela cosa*. Uma delas consiste no momento em que, em ambas as obras, é feito o estudo das propriedades das raízes universais[168]. Na *Arithmetica* Moya apresenta-as no final do livro sétimo, num momento em que o estudo das raízes dos binómios já tinha, há muitas páginas,

---

[164] Raiz universal é uma raiz que afecta dois ou mais termos.

[165] Nesta época não se fazia diferença entre as letras u e v (nem entre I e J), por influência do latim.

[166] [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 525].

[167] É o que se observa com os três exemplos que inclui na prática das equações do tipo $ax^2 + bx = c$ [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 586-589]; com a substituição do problema 1. de [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 590] pelo problema 1. de [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 99], que é de tipo diferente dos seguintes; com a substituição da questão 1. em [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 102], pela questão 1. em [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 593].

[168] Moya refere-se assim à raiz universal: "Quando en alguna demãda es necessario sacar algun genero de rayz assi como quadrada, o cubica, o outra qualquiera de alguna quantidad binomial, o trinomial, o quadrinomiales, &c. y no tuviessemos regla para saber realmente quãto sea la rayz de la tal quantidad, servir nos hemos de un modo, y orden, que dizen rayz universal" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 524].

ficado para trás, e os casos de equações já tinham sido explorados; no *Tratado de Arithmetica* elas surgem imediatamente depois das operações com "binómios" e "resíduos", precedendo todo o trabalho relativo aos diferentes tipos de equações. Não se trata de uma escolha arbitrária, pois a raiz universal é necessária quando se pretende generalizar as operações que envolvem binómios e resíduos. A estes entes matemáticos referir-nos-emos, com detalhe, mais adiante; por agora, deixamos apenas um exemplo: o cálculo da soma de $\left(3+\sqrt{2}\right)$ com $\left(5+\sqrt{7}\right)$ passa pelo cálculo de $\sqrt{2}+\sqrt{7}$, que recorre à raiz universal, pois $\sqrt{2}+\sqrt{7}=\sqrt{2+7+\sqrt{4\times 2\times 7}}=\sqrt{9+\sqrt{56}}$.

Contudo, há outras diferenças igualmente importantes, de que daremos conta no decurso do nosso trabalho, mas para as quais chamamos, desde já, a atenção.

No *Tratado de Arithmetica*, os assuntos são, em geral, introduzidos de um modo mais sistemático e são explorados com maior desenvolvimento, denotando a preocupação de Moya com aspectos como a justificação e a fundamentação. Por exemplo, o estudo da álgebra é acompanhado de um conjunto de pressupostos e sentenças comuns, que lhe servem de fundamento[169]; são apresentadas as demonstrações geométricas das regras de resolução das equações completas de segundo grau, inexistentes nos seus trabalhos anteriores; são estudados novos tipos de equações; são incluídas operações e exemplos relativos à "quantidade" (equações com mais de uma incógnita)[170]; são corrigidos lapsos cometidos nas obras anteriores.

No contexto da álgebra, a definição e propriedades dos números (que actualmente designamos por racionais) não lhe interessam; elas não são abordadas no *Compendio*. São estudadas na *Arithmetica* e no *Tratado de Arithmetica*, que são trabalhos de conteúdo mais abrangente com os quais o autor pretende chegar a um público mais vasto. Nestas obras, Moya recorre à definição 2 do livro VII dos *Elementos* de Euclides para definir número como "multitude compuesta de unidades"[171], e baseia-se no livro 5 da *Metafísica* de

---

[169] Estes pressupostos e sentenças comuns são os seguintes: "1. Se a números ou quantidades iguais se somarem quantidades iguais, as somas, ou conjuntos serão iguais; 2. Se de números ou quantidades iguais tirares quantidades iguais os restos serão iguais; 3. Se números ou quantidades iguais se multiplicarem por uma mesma quantidade, os produtos serão iguais; 4. Se a unidade multiplicar um qualquer número, o produto será o mesmo número; 5. Se a unidade partir um qualquer número, o quociente será o mesmo número; 6. Se quantidades iguais forem partidas por quantidades iguais, os quocientes serão iguais; 7. As quantidades que a uma terceira forem iguais, todas elas entre si serão iguais; 8. Os números ou quantidades que forem proporcionais entre si, serão iguais." (Nossa tradução livre de [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 429-430]).

[170] No *Compendio* e na *Arithmetica* não são indicadas as operações com a quantidade.

[171] Y assi digo que numero (segun Euclides) es una multitude cõpuesta de unidades, como .2.3.4.5.6.&. [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 3].

Aristóteles para invocar o princípio de que a unidade não é um número mas o princípio, fundamento e medida dos números. Aos números que hoje chamamos naturais Moya chama "numeros" ou "enteros"; às fracções designa-as por "quebrados" ou "rotos" e aos números com parte inteira e parte fraccionária refere-os como "entero y quebrado". No entanto, frequentemente, e sobretudo nas soluções de problemas, qualquer deles é chamado indistintamente "numero"[172]. Na parte especulativa faz a caracterização dos números à luz da teoria boeciana (par, impar, supérfluo, diminuto, perfeito, etc.), mas esta não tem implicações no estudo da álgebra.

Moya faz, também, uma classificação "geométrica" dos números que inclui números lineares, ou laterais, superficiais, sólidos, etc. Para ele, um número "linear" ou "lateral" é aquele que multiplicado por si mesmo ou por outro número produz uma superfície da qual ele é o lado (por isso se lhe chama lateral), e é, também, uma "linea" (por isso tem o nome de "linear"). Em particular, o resultado do produto de dois números lineares iguais é um número quadrado, do qual o número linear é a raiz ou lado. Todos estes números se exprimem por raízes ou potências e são, como veremos adiante, muito utilizados no domínio da álgebra.

Um dos pontos importantes do trabalho algébrico de Moya é o que se relaciona com a resolução de sistemas. No *Tratado*, ele introduz melhorias significativas na terminologia e notação anteriormente adoptadas para as incógnitas e considera a possibilidade de aumentar, tanto quanto for necessário, o número de incógnitas a utilizar na resolução de problemas. Moya propõe o uso dos termos "primera posicion", "segunda posicion", "tercera posicion", etc. para designar as incógnitas e introduz a combinação de números e letras "1.a", "1.b", "1.c", "1.d", etc., para as representar. Esta ideia é semelhante à que vemos na *Arithmetica* de Michael Stifel, onde as letras A, B, C,… são utilizadas para indicar as incógnitas e o autor admite a possibilidade de recorrer a outros símbolos, quando estas letras forem insuficientes.

Pérez de Moya confere aos polinómios o estatuto de entes matemáticos de pleno direito. O estudo dos polinómios (nem este termo nem o termo monómio são usados, embora ocasionalmente Moya se refira, por exemplo, a quinómio e a quadrinómio, com o significado que hoje lhes damos), que já tinha sido objecto de estudo num capítulo do

[172] É isso que se verifica, por exemplo, no problema que se segue em que chama "numeros" a números não inteiros: "Dame .2. números, que el quadrado del uno exceda al del outro en .12. o en lo que quisieres. Divide los .12. en .2. partes tales, que la diferencia dela una ala outra sea uno, assi como .5. y $\frac{1}{2}$ y 6. $\frac{1}{2}$ y estos seran los .2. números, que sus quadrados excederan en .12." [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 218].

Compendio dela regla dela cosa[173]*,* é muito desenvolvido no *Tratado de Arithmetica*. Moya dedica-lhe cinco capítulos em que trata da adição (intitula-se "Muestra summar characteres, o quantidades diversas, mediãte las dictiones, mas y menos"), da subtracção, da multiplicação, da divisão e da radiciação, respectivamente[174]. E, noutros dois capítulos[175], trata da definição, simplificação e operações com "quebrados de caracteres", salientando a sua importância na álgebra.

> Sea cosa muy necessária a la regla del Algebra, summar un quebrado com outro, o alguna quantidad, o character, com algun quebrado, como si dixessen. Summa $\frac{2co.}{3ce.}$ con $\frac{12n.}{4co.}$ [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 494].

Finalmente, um outro aspecto que a comparação destes textos evidencia é o que se relaciona com as referências de Pérez de Moya às suas fontes. É dele que tratamos a seguir.

2.2. Fontes

No *Compendio*, Moya é bastante parco em referências, mencionando apenas Euclides e, ocasionalmente, Pacioli, a quem trata por "Frater Lucas"[176]. Mas sobre este último autor limita-se a indicar o número de "ygualaciones" (ou seja, tipos de equações) que ele considera. Por outro lado, não cita o nome de qualquer obra que possa ter exercido influência sobre o seu trabalho, embora na alusão a Euclides esteja subentendido que se trata dos *Elementos*[177].

É natural aceitar que Moya conhecesse o livro *Arithmetica Algebratica* [1552] de Marco Aurel, obra que, na opinião de Rey Pastor, exerceu tal influência em Espanha que "todas las Algebras españolas conocidas, excepto la de Nuñez, salieron del libro de

---

[173] Capítulo VIII em [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 31– 46].

[174] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 467- 497].

[175] Capítulo XXXI: "Muestra abreviar caracteres, quãdo vienen cõ quebrado, o en las ygualaciones" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 490] e Capítulo XXXII: "Trata de las quatro reglas generales de quebrados, cõpuestos de caracteres" [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 491-497].

[176] [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 113].

[177] Por exemplo, Moya explica como se calcula a soma de $\sqrt[4]{10}$ com $\sqrt[4]{12}$ com base na proposição de *Elementos* II, 4 [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 26]. Esta proposição diz o seguinte: "Se um segmento de recta é cortado ao acaso, em duas partes, o quadrado sobre o todo é igual à soma dos quadrados sobre cada uma das partes com o dobro do rectângulo contido pelos segmentos" (Nossa trad. livre de [Heath, T. L., 1956, I, p. 379]). Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 97]).

Aurel"[178]. Mas nem Aurel nem o nome da sua obra são mencionados neste ou noutro trabalho matemático de Moya. É possível que, como Baranda afirma, Moya omita deliberadamente a referência a Aurel por recear a sua concorrência[179].

Sesiano, por outro lado, refere que Moya possivelmente conhecia a literatura francesa daquela época e estava familiarizado com a obra de Ortega[180]. E chama mesmo a atenção para o facto de um dos trabalhos de Moya ter sido impresso, em 1563, juntamente com uma reimpressão do *Tratado subtilissimo*, de Juan Ortega[181].

Na parte algébrica da *Arithmetica*, Moya alude às mesmas fontes que constam no *Compendio*; contudo, além do livro II dos *Elementos*, cita os livros VII, VIII, IX e X[182].

Pérez de Moya recorre a notas, que tanto são inseridas no texto como destacadas à margem, para chamar a atenção para a importância do conhecimento de certo assunto, de determinada obra ou de um dado autor[183]. Por exemplo, na definição aritmética de "numero cubo", Moya insere no texto a indicação de *Elementos* VII, 2, onde Euclides dá a definição de número, dizendo: "Numero cubo es (segun Euclides en la segunda del septimo) un numero que procede dela multiplicacion de tres números iguales en quãtidad y género", e quando explica que um número cubo é um corpo de iguais lados, aconselha, em nota de

---

[178] Referindo-se ao conteúdo algébrico da *Arithmetica practica, y speculativa*, Rey Pastor afirma que Pérez de Moya seguiu Marco Aurel, mas sem usar as notações modernas deste autor, o que, como diz, constitui um retrocesso [Rey Pastor, J., 1934, p. 105]. Sobre a obra de Aurel pode ler-se [López Piñero, J. L., 1979, p. 176]; [Malet, A. e Paradís J., 1984, p. 127]; [Salavert Fabiani, V., 1990, p. 77] e, mais recentemente, [Docampo, J., 2004, pp. 549-556].

[179] [Baranda, C., 1998, p. XVII].

[180] [Sesiano, J., 1988, p. 38].

[181] Trata-se do *Tractado subtilissimo d arismetica y geometría,* a que já nos referimos [*Cf.* Primeira Parte, 1.3] Contém um tratado aritmético de Pérez de Moya, constituído por 255 folhas e intitulado *Tratado e Reglas de Arithmetica compuesto por Ioan Perez de Moya. Impresso en Granada año 1563 en .8. dias de Abril.* A obra de Moya não constitui uma extensão da obra de Ortega; consiste no "Libro sexto", em que Moya "Trata reglas de contar sin plum: y de reduzir unas monedas castellana en otras". Começa na página 241 (v) [que está mal numerada, pois diz 141] e vai até 254v. Contém regras para converter diversas moedas castelhanas noutras: "maravedis", "ducados", "doblones", "coronas", "doblas zaenes", "reales", "quartillos", "medios reales", "reales de dos, "reales de tres", "reales de quatro", "reales de ocho", "tarjas"; regras para reduzir "cruzados portugueses" a "maravedis" e vice-versa. Regras para quando um compra tecidos saber de memoria quanto custa a vara; reglas para saber fácilmente quanto um criado ganha por hora, dia e mês, e qual é o salário por ano, ou ao contrário.

[182] Por exemplo, *Elementos* II, 4 é referido a propósito da aplicação do algoritmo da raiz quadrada, da soma de raízes de índice quatro e da raiz quadrada de binómios [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 457, 501 e 532]. *Elementos* IX, 8 é citado a propósito da raiz quadrada e da raiz cúbica em [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 454 e 482] e a leitura de *Elementos* X é aconselhada em nota de margem, no estudo da composição e origem do binómio em [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 525].

[183] No *Compendio dela regla dela cosa* não existem notas de margem; na *Arithmetica practica, y speculativa* são poucas as notas de margem e no *Tratado de Mathematicas* são bastante frequentes.

margem, a leitura da proposição 17 do Libro VIII dos *Elementos*, dizendo: "Lee la 17. dl. 8 de Euclid"[184].

As margens são, também, frequentemente utilizadas para reencaminhar o leitor para outras partes da obra, onde se expõem assuntos relacionados com o que está a ser tratado; Moya chega mesmo a aproveitar esse espaço para incluir uma ou outra indicação que chamam a atenção do leitor para o assunto que aí é tratado. Assim, é possível ver na margem apontamentos como: "Advierte esto", "Nota esta regra para sacar partes de quebrados de caracteres", "Lee as definiciones antes de la prop. 42 del 10, de Euclides", "Pruevase por la primera del segũdo de Euclid", etc. Estas notas de margem reflectem o carácter didáctico da sua obra, mostrando a preocupação em que o leitor siga a par e passo o seu raciocínio na explicação dos assuntos e em que recorde um ou outro conteúdo relacionado com o seu desenvolvimento.

No que se refere às fontes, uma das diferenças mais notórias entre o último texto de álgebra de Pérez de Moya, o que está incluído no *Tratado de Arithmetica*, e os trabalhos precedentes que publicou sobre o mesmo assunto é a frequente alusão feita ao livro X dos *Elementos*, no estudo de proposições relacionadas com o conceito de irracional. No caso das raízes de números da forma $a \pm \sqrt{b}$, Moya cita Pacioli e aconselha a leitura de diversas proposições do livro X de Euclides, como as proposições 86, 87, 88, 89, 90 e 91[185]. Estas alusões mostram que o nosso autor conhecia o livro que chegou a ser apelidado como "a cruz dos matemáticos"[186]. E mostram, além disso, que ele reconheceu a sua importância no contexto da álgebra, usando-o para justificar passagens de carácter mais especulativo do seu trabalho. Por outro lado, o *Tratado de Arithmetica* contrasta com os textos algébricos anteriores de Moya pela indicação precisa de obras que aponta como referência; é esse o caso da *Arithmetica*, de Cardano, cujo livro X Moya menciona explicitamente, e do *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes, cuja leitura aconselha aos que quiserem aprofundar o estudo das

---

[184] [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 479]. A proposição que Moya refere diz o seguinte: "Se um número cubo não mede um número cubo também o lado não medirá o lado, e reciprocamente" (Nossa tradução livre de [Heath, T. L., 1956, II, p. 370]).

[185] A alusão a Pacioli é a seguinte: "El origen destas rayzes universales (ultra dicha algunos, como frater Lucas); le derivan del summar, o restar rayzes de numeros irracionales" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 525].

[186] Sobre a dificuldade do livro X, Smith transcreve em [Smith, D. E., III, pp. 8-9] uma frase muito curiosa, devida a Simon Stevin, que Gino Loria cita na sua obra, *Le scienze esatte nell' antica Grécia* (1914). Diz o seguinte: "A dificuldade do Livro décimo de Euclides tornou-se em horror para várias pessoas, que lhe chamam até a cruz dos matemáticos, assunto muito difícil de digerir, e no qual não encontram nenhuma utilidade".

equações. Mas, há outros autores, como Oronce Finé, Nicolo Tartaglia e Simon Stevin a que Moya também alude.

3. A álgebra nas obras de Moya

3.1. Significado e objectivos da álgebra

Pérez de Moya inicia o estudo das equações no *Compendio* explicitando o significado e objectivos da álgebra. A álgebra, diz Moya, é conhecida por diversos nomes, como "algebra", "almocabola", "regla dela cosa", "regla del cos", "reglas reales", "arte mayor", que lhes deram os autores que a estudaram; "algebra" significa restauração, "almocabala" quer dizer oposição, "regla dela cosa" ou "del cos" permite determinar a quantidade desconhecida operando com ela:

> Diversos nombres tiene esta regla, acerca de varios autores. Unos la llamã regla de Algebra, que quiere dezir, restauratio, o almucabola, que quiere dezir, aposicion, o solucion: porque por ella se hazen & absuelven infinitas cuestiones (& las que son imposibles nos las demuestra) assi de Arithmetica, como de geometria, como dela demas artes (que dizẽ) mathematicas. Otros la nombram: regla dela cosa, o del cos: porq obrando el nombre bien se allega. Otros reglas reales o arte mayor, llama-se como cada uno quisiere: su fin no es otro, sino mostrar hallar algũ numero proporcional, dudoso, demandado [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 1 e 1562, p. 448].

A primeira vez que trata da álgebra, nas suas obras, Moya chama-lhe "regla dela cosa" ou, simplesmente, "regla" e refere-a como sendo mais uma ferramenta que possibilita a resolução de problemas, tal como as outras regras aritméticas que fazem parte da "arte menor"[187]. Esta ideia está ainda presente no *Tratado de Arithmetica* quando Moya define álgebra como um meio de determinar um número "dudoso" (isto é, desconhecido) sujeito a alguma proporcionalidade geométrica[188]:

---

[187] As mais importantes são as regras de três, as regras de companhia e as regras de falsa posição.

[188] "Y porque esta posicion, en varias lenguas se nombrava variamẽte, de aqui sale la diversidad de sus nombres. Buteon la llamo Quadratura, no se porque, pues no solamente trata de quadrados, mas de cubos, y de otras rayzes. No lo uso nadie este nobre, llamase como cada uno quisiere que su fin no es outro, sino mostrarmos a hallar algun numero, o números proporcionales, ignotos demandados, si es possible darse: y de avisarnos las questiones que no sõ possibles, tomado para ello por medio, la proporciõ de ygualdad. El inventor desta arte, segũ Leonardo Pisano, fue un Maumetho hijo de Mosis Arauigo. Alfragano (como refiere Juan de Monte Régio) dize que [fue] Diophanto, y que escrivio treze libros della. Otros dizen que el inventor, fue un

> Algebra, es un modo de hallar algun numero dudoso demãdado subjecto a alguna proporcionalidad, por lo qual por outro nõbre le dizen cuẽta hecha por progressiones de proporcionalidad Geometrica [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 429].

As quantidades com que se trabalha em álgebra são o "numero", a "rayz" ("lado" ou "cosa"), o "censo" (ou "quadrado"), o "cubo", o "censo de censo", etc., e são obtidas por uma progressão geométrica cujo primeiro elemento é o "numero". Todos os elementos, à excepção do primeiro, se denominam "dignidades"; o "numero", cujo papel é semelhante ao da unidade em aritmética, não é considerado uma dignidade:

> Como esta regla de la Cosa, haga fundamento en proporcion, y proporcionalidad, los antigos ordenarõ unos characteres, o dignidades, que se ponen por quãtidades de una continua progression proporcional, a cada uno de los quales dierõ el nõbre segũ el effecto, o propriedad que tenia. Y porque el principio natural de los numeros, es la unidad, a este principio le dixiron numero. Y assi como la unidad no es numero, assi este nombre numero, no se toma por character [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 430].

Moya é muito cuidadoso no modo como explica a criação das dignidades, aconselhando, em nota de margem, a leitura de *Elementos* IX, 8[189]. Em notação simbólica usual, esta proposição permite afirmar que, estando $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 ...$ em progressão geométrica, como $\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a^3}{a^4} = ...$, então a^3, a^6, a^9 são cubos, a^4 é quadrado, etc. Moya diz assim:

> Nota, asi como dezimos que poniẽdo algunos numeros en qualquiera progression Geometrica, começando de la unidad, siempre el tercero numero es quadrado, y el quarto es cubo, y el quinto es censo de censo, y el sexto primero relato, y el septimo censicubo, &. assi el primer numero que siguiere tras la unidad, sera rayz del tercero, y del quarto y del quinto, y de todos los demas. Y por esto dezimos, que la cosa, es rayz de todos los characteres que despues de si se pusieren [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 431].

Arauigo, dicho Geber, y que deste nombre se derivo Álgebra. La utilidad desta regla, el que tratare con Euclide, lo podra bien entender" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 429].

[189] A proposição *Elementos* IX, 8 diz: "If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, the third from the unit will be square, as will also those which successively leave out one; the fourth will be cube, as will also all those which leave out two; and the seventh will be at once cube and square, as will also those which leave out five" [Heath, T. L., 1956, vol. 2, p. 390].

Na época, a álgebra era considerada uma "arte" (uma técnica) que permitia resolver alguns tipos de problemas que as regras aritméticas então conhecidas não permitiam; e isso reflectia-se no modo como os diversos autores a designavam nos seus trabalhos. Cardano chama *Artis Magnae* (genitivo de *Ars Magna*, ou seja, Arte Maior) à sua obra sobre equações; Chuquet refere-se à "rigle" (a regra) como uma técnica especial[190]; Tartaglia considera a álgebra como "regra das regras e mãe ou rainha de cada uma delas", pela importância que lhe reconhece na resolução de problemas:

> A regola di Algebra è di tal qualita, che meritevolmente la puo esser comparata all'arte integra del calcolare (…) perche con questa tal regola non solamente si puo risolvere tutti quei casi, over questioni, che per qual si voglia altra regola se risolveno, ma infiniti altri, che per alcuna dele dette altre regole sin hora date non si potriano resolvere (…)[191][Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 1r].

Pedro Nunes, no início do *Libro de Algebra*, esclarece o significado da palavra álgebra, e explica em que consiste proceder por álgebra, dizendo[192]:

> He Algebra nome Aravigo que significa restauraçaõ, porque tirando o sobejo, & restaurando o diminuto, vimos em conhecimento do que buscamos. A outros paresce que se chama assi, porque dizen que ho inventor desta arte foy hum Mathematico Mouro, cujo nome era Gebre, & há em alguãs Livrarias hum pequeno tractado em Aravigo, que contem os capitulos de que usamos [Pedro Nunes, 1567, f. a ij][193].

---

[190] [Spiesser, 2006, p. 19]. No entender de Egmond, a designação *rigle* parece ser uma tradução directa do nome italiano *regola della cosa*, onde Chuquet substituiu *cosa* por *premier*, censo por *champs,* etc. [Van Egmond, W., 1988, pp. 137-138].

[191] A nossa tradução livre deste excerto é a seguinte: A regra da álgebra é de tal qualidade que merecidamente pode ser comparada com toda a arte de calcular (…) pois com esta regra não só se podem resolver todos os casos ou questões que por qualquer outra regra se resolvem, mas infinitas outras, que não se poderiam resolver sem ela [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 1r].

[192] Sobre a álgebra de Nunes ver [Bosmans, H., 1907-1908] e [Bosmans, H., 1908]; [Malet, A. e Paradis, J., 1984, pp. 132-137] e [Malet, A., 1985]; [Silva, M. C., 1999, pp. 72-73] e [Silva, M. C. e Ribeiro, R., 1999]. Para o estudo das proporções na obra de Nunes ver [Malet, A., 1990, pp. 193-196].

[193] A dedicatória ao Cardeal D. Henrique tem data de 1 de Dezembro de 1564.

3.2. Notação

Imediatamente depois das considerações sobre o significado e objectivos da álgebra, Moya apresenta no *Compendio dela regla dela cosa* uma lista de dez caracteres manuscritos (figura 1) e explica como eles podem ser usados na representação das sucessivas potências da incógnita.

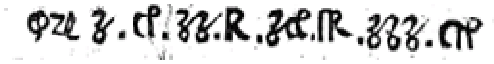


Figura 1: Formas manuscritas, indicadas por Moya, que podem ser usadas para representar as sucessivas potências da incógnita [Juan Pérez de Moya, 1558, p.1].

Estes caracteres não são os italianos usados, por exemplo, na *Summa* de Pacioli e, embora sejam semelhantes aos alemães, não são exactamente iguais[194]. Por outro lado, não coincidem com letras de qualquer alfabeto corrente na época[195]. Se exceptuarmos os caracteres que Moya indica para as potências de expoente 5 e 7, todos os outros são semelhantes aos utilizados por Aurel no seu *Libro primero de Arithmetica Algebratica* [1552][196]. Para as primeiras seis potências da incógnita, os caracteres de Aurel coincidem com os que foram adoptados por Christoff Rudolff na sua obra *Die Coss* [1525] e divulgados por Stifel na *Arithmetica Integra* [1544][197].

Aurel usa os sinais " +" e " – " para indicar a soma e a diferença, e o símbolo √ , para indicar a raiz quadrada[198]; mas Moya não usa estes sinais em nenhum dos seus trabalhos, o que constitui um retrocesso em relação à obra de Aurel[199].

No *Compendio dela regla dela cosa*, Moya invoca o argumento da "brevidade" para introduzir os símbolos para as potências da incógnita (acima indicados na figura 1), mas sublinha que essa escolha não é única. Fá-lo no início do capítulo intitulado "Enel qual se ponen algunos caracteres que sirven por quantidades proporcionales", dizendo:

---

[194] Pode ver-se a notação mais característica para as potencias da incógnita na escola alemã em [Paradis, J. e Malet, A., 1989, pp. 165-166].

[195] [Rodriguéz, A., 1915, p. 174].

[196] [Marco Aurel, 1552, f. 69v].

[197] [Michael Stifel, 1544, p. 228].

[198] Os sinais "+" e "−", característicos da escola alemã, empregues para indicar a adição e a subtracção, aparecem impressos pela primeira vez, em 1489, na aritmética mercantil de J. Widman [Cajori, F., 1980, p. 139].

[199] Rey Pastor já havia chamado a atenção para este ponto [Rey Pastor, J., 1934, p. 105].

> Algunos caracteres se declaran en este capitulo, dando a cada uno el nõbre y valor que le conviene: los quales son inventados por causa da brevedade. Y es de saber que no es de necessidad que estos y no otros ayã de ser, porque cada uno puede usar delos que quisiere, & inventar muchos mas, procediendo conla proporcion que le paresciere [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 1].

Mas, apesar de considerar estes "caracteres" mais "breves" e de aconselhar o leitor a usá-los na resolução de problemas, Moya usa outro conjunto de símbolos, diferente dos manuscritos apresentados, que designa igualmente por "caracteres"; e justifica esta opção pelo facto de não existirem na imprensa símbolos iguais aos primeiramente indicados[200]. Cada um dos novos "caracteres" é constituído por uma ou mais letras do alfabeto latino, seguida de um ponto, como mostra a figura 2, abaixo.

n. co. ce. cv. cce. R. cecv. RR. ccce. ccv.

Figura 2: Caracteres impressos, usados por Moya, para representar as sucessivas potências da incógnita [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 35].

Os nomes destes "caracteres" são, da esquerda para a direita, os seguintes: "numero", "cosa", "censo", "cubo", "censo de censo", "primero relato" ou "sursolidum", "censo y cubo", "segundo relato" ou "bissursolidum", "censo[201] de censo de censo", "cubo de cubo". Estes nomes para as potências da incógnita têm origem na álgebra dos árabes[202]; são geralmente adoptados pelos algebristas italianos e estão presentes em textos de autores ibéricos[203]; por exemplo, na *Arithmetica*, de Antich Rocha[204], e no *Tratado da arte de arismetica*, de Bento Fernandes, que é o primeiro trabalho português onde estes nomes são referidos. Notamos, contudo, que apesar de os nomes utilizados por Bento Fernandes para

---

[200] Não pudemos confirmar se, nessa altura, esses caracteres existiam em Burgos, onde se imprimiu o *Compendio dela regla dela cosa*. Observamos que Aurel os usou no *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*, impressa em Valência seis anos antes [Marco Aurel, 1552, f. 70v].

[201] Em vez de "censo" está escrito um "e" com um til em cima.

[202] [Høyrup, J., 2007, p. 7, Nota de rodapé 4]. Franci e Rigatelli notam que Leonardo de Pisa começa o seu estudo da álgebra estabelecendo que na *composição da álgebra e almuchabala* devem ser consideradas três quantidades: *radix, quadratus, numerus simplex*. A palavra *radix* (o autor também lhe chama *res*) significa *coisa*, é a incógnita; *quadratus* significa o quadrado da incógnita; *numerus simplex* é uma quantidade numérica [Franci, R e Rigattelli, T., 1985, p. 19]. Gandz observa que o uso destes termos de Leonardo mostram a influência da matemática árabe [Gandz, S., 1936, p. 273].

[203] Docampo refere a sua existência no manuscrito Ms. 71, de Sant Cugat, escrito cerca de 1520 [Docampo, J., 2004, p. 439].

[204] [Antich Rocha, 1565, f. 253r].

designar os caracteres serem praticamente iguais aos de Pérez de Moya – "numero", "cousa", "çeço[205]" ("censso", "çenso", a ortografia não é uniforme), "cubo", "censso de censso", "censso de cubo", "cubo de cubo"[206] – o significado desses nomes coincide apenas para as quatro primeiras potências da incógnita, pois Moya utiliza um sistema gerador multiplicativo na formação dos nomes das potências, enquanto Fernandes usa um sistema aditivo[207]. A diferença entre estes dois sistemas é a seguinte: no sistema multiplicativo a justaposição de x^a e x^b significa, em notação simbólica actual, $\left(x^b\right)^a$, ou seja, x^{ba} enquanto no aditivo significa x^{a+b}; portanto, enquanto no primeiro caso o "censo e cubo" denota x^6, no segundo traduz x^5. O sistema multiplicativo não permite, por exemplo, obter deste modo as potências da incógnita de expoente primo ≥ 5 e, por isso, os que o utilizam necessitam de termos especiais para designar essas potências da incógnita. Apesar disso, o sistema multiplicativo foi o mais frequente, possivelmente por ter sido o adoptado na *Summa* de Pacioli, obra muito divulgada durante o século XVI[208]. Este é o sistema utilizado pelos tratados do século XVI que se baseiam na notação italiana; e é, também, o que segue a maioria dos autores alemães[209]. Na Península Ibérica o único caso de aplicação do sistema aditivo que conhecemos é o de Bento Fernandes.

De acordo com o princípio multiplicativo usado na terminologia das potências da incógnita, Moya teve de indicar nomes especiais para os caracteres que representavam as potências cujo expoente não era divisível por 2 nem por 3; estes baseavam-se na ordem do número que lhe correspondia; assim, o "primo relato" significa x^5; o "segundo relato" significa x^7, e assim sucessivamente. A construção de cada nome está relacionada com a decomposição do expoente da potência da incógnita que lhe corresponde; assim, o nome

---

[205] Nesta palavra existe um til em cima da letra "e", que não colocamos por não dispormos dessa opção no nosso processador de texto.

[206] Ver [Silva, M. C., 2008, pp. 197-198].

[207] Sobre os sistemas aditivo e multiplicativo na composição das potências da incógnita, Cajori observa que o princípio aditivo era o usado pelos gregos (e menciona Diofanto) enquanto o sistema multiplicativo era utilizado pelos hindus; e nota que essa diferença existiu na Europa, durante o período Árabe e a Idade Média e até ao século XVII [Cajori, F., 1993, p. 342]. Leonardo de Pisa também exprime as potências superiores da incógnita usando o princípio aditivo [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 42].

[208] Ver [Luca Pacioli, 1494, ff. 143r-144r].

[209] [Docampo, J., 2004, p. 438].

correspondente a x^8 é "censo de censo de censo", porque "denota um numero tres vezes quadrado"[210].

No *Compendio dela regla dela cosa*, sempre que trata questões de álgebra[211], Moya utiliza os símbolos n. co. ce. cv. cce. R. cecv. RR. ccce. ccv. para indicar as potências da incógnita; e volta a usá-los no *Tratado de Arithmetica*, introduzindo apenas pequenas modificações. A mais importante é, certamente, a que consiste em substituir os símbolos "R." e "RR." por "1R." e "2R.", pois possibilita uma generalização eficaz[212]. Pacioli e Tartaglia recorrem, neste caso, a uma opção semelhante: Tartaglia usa "rel", "2. rel"e "3. rel" para indicar as potências de expoente 5, 7 e 11, que designa por "primo relato", "segundo relato" e "terzo relato"[213].

Os "caracteres" utilizados no *Compendio* são, com ligeiras diferenças, os que existem na *Summa*, de Luca Pacioli [1494], no *General Trattato*, de Nicolo Tartaglia [1556-1560] e no *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes [1567] (quadro 1)[214]. Em Espanha gozaram de grande popularidade podendo ver-se, por exemplo, na *Arithmetica* de Antich Rocha[215], publicada em 1565, e na *Arithmetica Especulativa, y Practica; y Arte del Algebra*, de Andrès Puig, impressa em 1715[216]. Como pudemos constatar da leitura que fizemos destas obras, há algumas diferenças entre os caracteres adoptados pelos seus autores. Além do uso de uma letra minúscula em vez de maiúscula, que não nos parece relevante, referimos as que dizem respeito aos caracteres utilizados para as potências de expoente quatro e nove; Pérez de Moya usa "cce" e "ccv" enquanto Pacioli usa "cece" e "cucu". Não encontrámos a notação de Pérez de Moya em nenhuma outra obra castelhana das que consultámos e, por

---

[210] [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 3].

[211] E, também, na *Arithmetica practica, y speculativa.*

[212] Veja-se, por exemplo, [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 35] e [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 478].

[213] [Nicolo Tartaglia**,** 1560d, f. 1r].

[214] Pacioli nem sempre usou para *censo* a abreviatura *ce*. No texto de aritmética que escreveu para os seus alunos de Perugia (Vat. Lat. 3129), texto esse que não chegou a ser impresso, usou a letra *l* com um pequeno quadrado no expoente para significar o quadrado da incógnita [Sesiano, J., 1985, p. 144, nota 79]. Num artigo publicado recentemente sobre o mesmo manuscrito, Albrecht Heeffer inclui a digitalização dos símbolos matemáticos e das abreviaturas escritas pela mão de Pacioli [Heeffer, A., 2009, p.3].

[215] [Antich Rocha, 1565, f. 253r]. Antich Rocha foi professor da cátedra de filosofia em Barcelona, aí publicando a obra *In Aristotelis philosophorum principis Octo libros Physikes akroaseos exactissimae, & elegantissimae praelectiones,* Barcinone, 1573 (Esta obra e a *Arithmetica* de Antich Rocha encontram-se digitalizadas em *Cervantes Virtual*). Além destes trabalhos, traduziu uma obra francesa de cálculo mercantil. Ver [Salavert, F., 1990, p. 80], [López Piñero, J. M., 1979, p. 177] e [Rey Pastor, J., 1934, pp. 109-113].

[216]A obra de Puig teve uma edição em 1670, como refere Carme Narváez Cases na sua tese de doutoramento *El tracista Fra Joseph de la Concepció i l'Arquitectura Carmelitana a Catalunya* [Carme Narváez Cases, Tesis UAB, 2000].

isso, pensamos que a sua criação pode ter constituido um esforço do nosso autor no sentido de conseguir uma simplificação. De qualquer modo veremos, quando mais adiante estudarmos as regras dos sinais, que a opção de Moya não mostra ter vantagens sobre a de Pacioli, por não permitir uma leitura inequívoca.

Notação Actual	Luca Pacioli [1494]		Pérez de Moya [1558]	[1562]	[1573]		Pedro Nunes [1567]	
numero	nº	nũo	n.	n.	n.	numero	-	-
X	co	cosa	co.	co.	co.	cosa	co	cosa
x^2	ce	censo	ce.	ce.	ce.	censo	ce	censo
x^3	cu	cubo	cv.	cu.	cu.	cubo	cu	cubo
x^4	ce.ce	censo de censo	cce.	cce.	cce.	censo de censo	ce.ce	censo de censo
x^5	pºrº	primo relato	R.	R.	R. ou 1R.	primero relato	Re.pº	relato primo
x^6	ce.cu	censo de cubo	cecv	cecu.	cecu.	censo y cubo	ce.cu cu.ce	censo de cubo
x^7	2ºrº	secundo relato	RR.	RR.	2R.	segundo relato	-	-
x^8	ce.ce.ce	censo de censo de censo	ccce.	ccce.	ccce.	censo de censo de censo	-	-
x^9	cu.cu	cubo de cubo	ccv.	ccu.	ccu.	cubo de cubo	-	-

Quadro 1: Correspondência entre os símbolos usados por Pacioli, Moya e Nunes para designar potências da incógnita[217].

No início do *Compendio* são, também, indicados os símbolos para representar os radicais e é explicada a presença de "r", de "rr" e de "rrr" imediatamente antes de um número. Esta constitui uma forma abreviada de indicar a raiz quadrada do número, ou a sua raiz quarta, ou cúbica. Quando no lugar do número estiver uma expressão, cada um dos símbolos anteriores é substituído por "rv", "rrv" e "rrrv" designando, respectivamente, a raiz quadrada universal, a raiz quarta universal e a raiz cúbica universal[218]. Além dos símbolos que mencionámos, Moya usa as abreviaturas "q" e "qs" com o significado de "quantidade" e "quantidades" (plural de quantidade), respectivamente, e utiliza a letra "p" e a letra "m",

[217] Por vezes, Moya omite os "pontinhos" que seguem os caracteres.

[218] Pode observar-se que a raiz quadrada da soma de 10 com a raiz de 40 é indicada do seguinte modo: rv 10 p r 40 . [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 52].

colocando cada uma delas entre duas quantidades, para indicar a soma e a diferença dessas quantidades. O texto seguinte esclarece o que acabámos de dizer:

> Esta figura r, quiere dezir rayz quadrada. Esta figura rr, denota rayz quadrada de rayz quadrada. Exemplo rr 16 quiere dezir rayz de rayz quadrada de 16, que es 2. Esta rrr, denota rayz cúbica. Exemplo rrr 8, quiere dezir rayz cúbica de 8 que es 2. (…) Quando despues de r, se pone v, denota rayz quadrada universal. Y assi rrv, rayz de rayz quadrada universal. Esta figura, ig, quiere dezir ygual. Esta, q, denota quãtidade y assi, qs, quãtidades [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 5].

O uso de símbolos no contexto da álgebra, que é muito anterior ao século XVI, é, por vezes, interpretado como uma primeira aproximação ao simbolismo algébrico[219]. No *Libro di Ragioni*, escrito em 1328 pelo florentino Paolo Gerardi, considerado o mais antigo texto de álgebra conhecido em língua vernácula europeia, é representada a raiz quadrada de um número pela letra *R* seguida desse número[220]. E o mesmo acontece noutros manuais de ábaco da mesma época. Mas, por outro lado, como observam Franci e Totti Rigatelli, nas álgebras dos séculos XIV e XV todos os procedimentos matemáticos eram explicados por palavras e não existiam símbolos para denotar a incógnita e as suas potências[221]. Quando comparadas com estas álgebras quase completamente retóricas, a de Moya mostra um grande avanço a nível de notações; no entanto, como já observámos, a notação utilizada pelo nosso autor não é tão evoluída como a que se vê no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, e noutras obras como o *Triparty*, de Chuquet, e a *Coss* de Rudolff, esta última publicada em 1525[222]. Símbolos como "r" e "rr", por exemplo, usados para representar um

---

[219] Nem todos os autores partilham desta opinião. Franci e Rigatelli observam que o recurso a abreviaturas era muito frequente, mesmo fora do contexto matemático, em obras manuscritas medievais e até nos primeiros textos impressos do Renascimento [Franci, R. e Rigatelli, T., 1985, p. 66].

[220] Sobre este trabalho de Paolo Gerardi ver [Van Egmond, W., 1978, pp. 155-189]. A resolução de equações por Paolo Gerardi pode ver-se em [Høyrup, J., 2007-1, pp. 161-163]. Sobre "Due Trattati di Paolo Gherardi Matematico Fiorentino" ver [Arrighi, G., 2004, pp. 81-98].

[221] [Franci, R. e Rigatelli, T., 1985, p. 66].

[222] O *Triparty* foi concluído em 1484, mas só foi impresso em finais do século XIX, circulando, entretanto, em manuscrito. Em 1520, o matemático Estienne de la Roche, que conheceu uma das cópias do trabalho de Chuquet, editou a *L'arismetique nouvellement composée*, onde divulgou o simbolismo das potências da incógnita com base nos expoentes, apresentada no *Triparty.* Em 1880, Aristide Marre publicou no *Bulletino di Bibliografia e di Storia della Scienze Matematiche e Fisiche* (Tomo XIII, pp. 593-658 e 693-814) a transcrição da primeira parte da obra de Chuquet, num artigo intitulado "Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien d'apres le manuscrit Fond française nº 1346"; e, em 1881, Marre publicou na mesma revista (Tomo XIV, pp 413-460) o "Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet Parisien", com a transcrição de parte dos problemas recreativos contidos no referido trabalho de Chuquet [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 71]. Muitas partes do manuscrito estão traduzidas em inglês por G. Flegg, C.

radical, presentes na 1ª edição da *Arithmetica* [1562], continuaram a ver-se nas sucessivas reedições desta obra; como na que foi publicada em 1798, quando estavam já praticamente em desuso em Itália, onde tinham tido a sua principal implantação e onde o símbolo actualmente usado ganhava já supremacia[223]. No quadro seguinte (quadro 2) pode ver-se a notação usada por Moya no *Compendio* [1558], na *Arithmetica* e no *Tratado de Arithmetica* [1573] e as que lhe correspondem na *Summa* [1494] e no *Libro de Algebra* [1567].

Hay e B. Moss (eds), em *Nicolas Chuquet, Renaissance mathematician* (Doldrecht: Reidel, 1985). Malet nota que o *Triparty en la science des nombres*, de Chuquet, é uma das álgebras renascentistas mais originais e de maior importância. É um texto inovador no que se refere aos números negativos, ao simbolismo algébrico, ao tratamento do cálculo radical e com incógnitas e aos métodos de resolução de equações. Sobre a notação eficaz de Chuquet e a sua importância no estudo das raízes ver [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 158].

[223] [Cajori, F., 1993, p. 363].

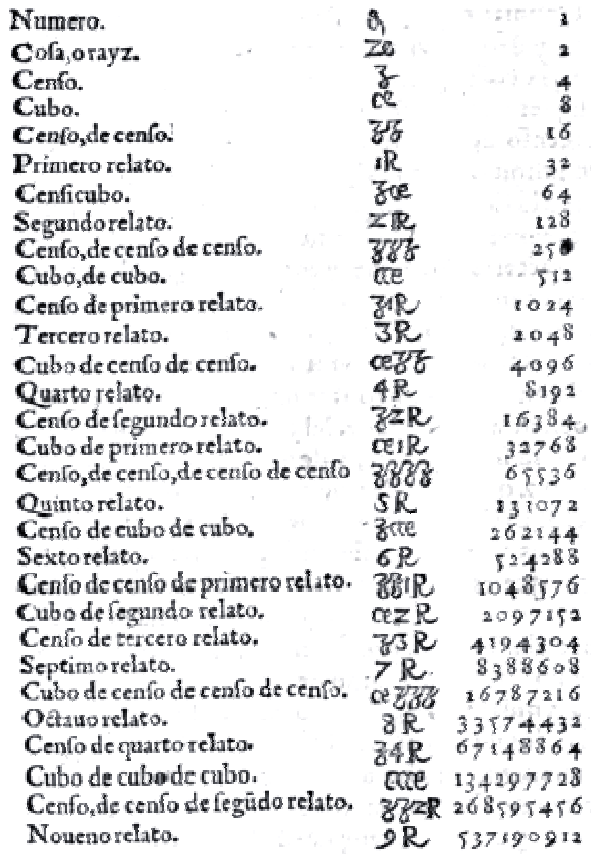
Notação usual	Luca Pacioli [1494]		Pérez de Moya [1558-1562-1573]				Pedro Nunes[224] [1567]	
$\sqrt{}$	ℝ	radici	r	r	R	rayz quadrada	R.	raiz quadrada
$\sqrt[3]{}$	ℝ*cu*	radici cuba	rrr	rrr	Rrr	rayz cubica	R.cu ou 3R.	raiz cubica
$\sqrt[4]{}$	ℝℝ	radici de radici	rr	rr	Rr	rayz quadrada de rayz quadrada	RR. ou 4R.	raiz quarta ou raiz de raiz
$\sqrt[5]{}$	-	-	-	-	-	-	5R.	raiz relata
-	-	-	-	-	-	-	LR.	raiz ligada
-	ℝ*v*	radici universale	rv	ru	Ru	rayz quadrada universal	R.v.	raiz universal
-	-	-	-	rru	Rru	rayz de rayz quadrada universal	-	-
-	-	-	-	rru	rrru	rayz cúbica universal	-	-
+	$\tilde{p}$	piu	p	p	P	mas	$\tilde{p}$	mas
−	$\tilde{m}$	meno	m	M	M	menos	$\tilde{m}$	menos
=			ig	ig	yg ⁀	ygual		ygual
	q^{a}	quantita	q	q	Q	quantidade		
				qs	Qs	quantidades		

Quadro 2: Notação usada para indicar os diversos tipos de raízes, na *Summa*, de Luca Pacioli, no *Compendio dela regla dela cosa*, na *Arithmetica practica, y speculativa* e no *Tratado de Arithmetica*, de Juan Pérez de Moya, e no *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes.

No *Compendio*, Pérez de Moya indica dez símbolos correspondentes às potências da incógnita até ao expoente 9 (ver figura 1), mas não os usa no seu trabalho, argumentando que eles não existem na imprensa. No *Tratado de Arithmetica* aumenta esta lista, oferecendo uma mais completa, com 30 símbolos, que correspondem às potências da incógnita até à 29ª (na 2ª coluna do quadro 3); mas, pelo mesmo motivo, Moya também não os usa, utilizando outros aos quais atribui os mesmos nomes. Não deixa de ser curioso que estes sejam os símbolos que vemos no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, embora Aurel indique apenas os das potências da incógnita até ao expoente 9. Por outro lado, os nomes que Moya

[224] Para Pedro Nunes as raízes "compuestas são as declaradas por esta palabra mas o menos". Nunes distingue dois tipos de raízes compostas: a "raiz ligada e a raiz universal", que define assim: "Raiz ligada es una composicion de dos raizes o muchas, o de numero com raizes, o com dignidades, como diziendo $L.R.9.\tilde{p}R.4.$ que significa una ligatura o composicion de .3. que es R.9. y de .2. que es R.4.y por tanto la dicha raiz ligada valdra .5. [em notação usual significa $\sqrt{9}+\sqrt{4}$]. O diziendo $L.R.7.\tilde{p}R.4.\tilde{p}.3.$ [em notação usual significa $\sqrt{7}+\sqrt{4}+3$] que significa una quantidad sorda compuesta de .3.y .2. que son .5. con la R.7. [em notação simbólica usual é $5+\sqrt{7}$]. O diziendo assi: $L.R.3.\tilde{p}2.co.$ [em notação simbólica usual é $\sqrt{3}+2x$]. Raiz universal es raiz de raiz ligada con numero o con otra raiz o dignidad. Como se dixessemos assi: $Rv.22.\tilde{p}.R9.$ [em notação usual significa $\sqrt{22+\sqrt{9}}$]" [Pedro Nunes, 1567, ff. 45r-45v].

dá aos caracteres são os que vemos no *General Trattato*, de Tartaglia. Não excluímos a hipótese de que Moya conhecesse algum texto alemão em que estes caracteres existissem; mas admitimos, como mais provável, que tivesse sido ele a construí-los, pois o seu texto é muito claro a respeito deste assunto. Moya explica minuciosamente como cada caracter se obtém e como se calcula o seu valor quando a *cosa* vale 2.

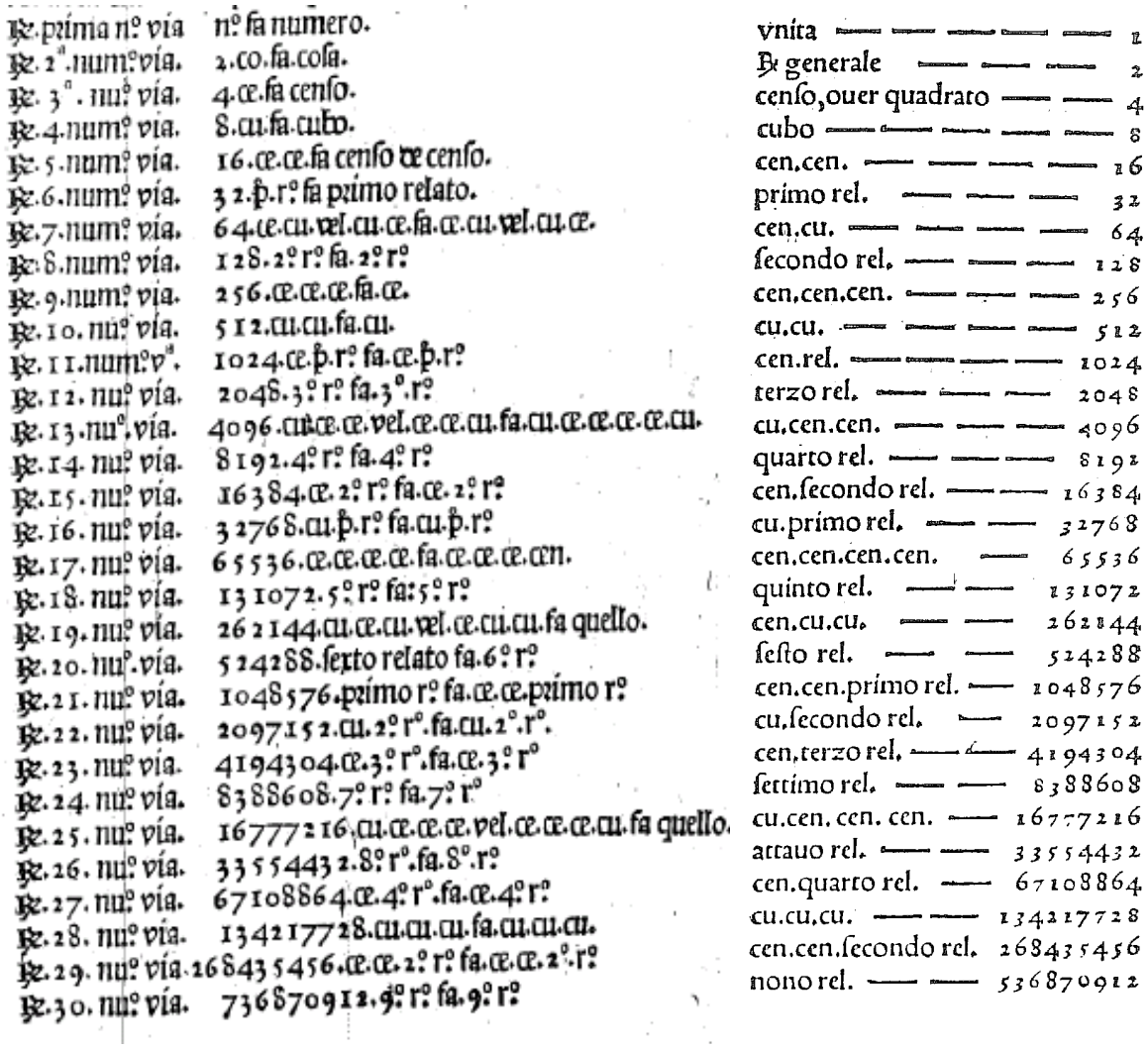


Numero.	9	1
Cosa, o rayz.	Z9	2
Censo.	ȝ	4
Cubo.	cȣ	8
Censo, de censo.	ȝȝ	16
Primero relato.	1R	32
Censicubo.	ȝcȣ	64
Segundo relato.	2R	128
Censo, de censo de censo.	ȝȝȝ	256
Cubo, de cubo.	ccȣ	512
Censo de primero relato.	ȝ1R	1024
Tercero relato.	3R	2048
Cubo de censo de censo.	cȣȝȝ	4096
Quarto relato.	4R	8192
Censo de segundo relato.	ȝ2R	16384
Cubo de primero relato.	cc1R	32768
Censo, de censo, de censo de censo	ȝȝȝȝ	65536
Quinto relato.	5R	131072
Censo de cubo de cubo.	ȝccȣ	262144
Sexto relato.	6R	524288
Censo de censo de primero relato.	ȝȝ1R	1048576
Cubo de segundo relato.	cc2R	2097152
Censo de tercero relato.	ȝ3R	4194304
Septimo relato.	7R	8388608
Cubo de censo de censo de censo.	cȣȝȝȝ	16787216
Octauo relato.	8R	33574432
Censo de quarto relato.	ȝ4R	67148864
Cubo de cubo de cubo.	cccȣ	134297728
Censo, de censo de segũdo relato.	ȝȝ2R	268595456
Noueno relato.	9R	537190912

Quadro 3: Representação das potências da incógnita até à potência de expoente 29, e correspondentes valores supondo que a base é 2, que Moya refere assim: "Siguense las figuras de los characteres, y sus nombres, y valores, presuponiendo valer la cosa dos" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 432].

Pacioli inclui na *Summa* uma enumeração semelhante, mas os valores indicados por Moya no *Tratado de Arithmetica* não coincidem com os de Pacioli para as potências de expoente superior a 23 (quadro 4)[225]. As "figuras" dos caracteres, como Moya lhes chama, não são as indicadas por Pacioli, mas sim uma extensão das que Moya tinha apresentado no *Compendio*; e, também aqui, se repete o argumento ("no aver otros en la emprenta") para justificar a sua não utilização ao longo do *Tratado de Arithmetica*.

[225] Moya erra o cálculo de 2^{24} e Pacioli erra o cálculo de 2^{29}.



℞.prima nº via	nº fa numero.	vnita	1
℞.2ª.numº via.	2.co.fa.cosa.	℞ generale	2
℞.3ª.numº via.	4.ce.fa censo.	censo,ouer quadrato	4
℞.4.numº via.	8.cu.fa.cubo.	cubo	8
℞.5.numº via.	16.ce.ce.fa censo de censo.	cen.cen.	16
℞.6.numº via.	32.p.rº fa primo relato.	primo rel.	32
℞.7.numº via.	64.ce.cu.vel.cu.ce.fa.ce.cu.vel.cu.ce.	cen.cu.	64
℞.8.numº via.	128.2º rº fa.2º rº	secondo rel.	128
℞.9.numº via.	256.ce.ce.ce.fa.ce.	cen.cen.cen.	256
℞.10.numº via.	512.cu.cu.fa.cu.	cu.cu.	512
℞.11.numºvª.	1024.ce.p.rº fa.ce.p.rº	cen.rel.	1024
℞.12.numº via.	2048.3º rº fa.3º.rº	terzo rel.	2048
℞.13.numº.via.	4096.cu.ce.ce.vel.ce.ce.cu.fa.cu.ce.ce.ce.ce.cu.	cu.cen.cen.	4096
℞.14.numº via.	8192.4º rº fa.4º rº	quarto rel.	8192
℞.15.numº via.	16384.ce.2º rº fa.ce.2º rº	cen.secondo rel.	16384
℞.16.numº via.	32768.cu.p.rº fa.cu.p.rº	cu.primo rel.	32768
℞.17.numº via.	65536.ce.ce.ce.ce.fa.ce.ce.ce.cen.	cen.cen.cen.cen.	65536
℞.18.numº via.	131072.5º rº fa:5º rº	quinto rel.	131072
℞.19.numº via.	262144.cu.ce.cu.vel.ce.cu.cu.fa quello.	cen.cu.cu.	262144
℞.20.numº.via.	524288.sexto relato fa.6º rº	sesto rel.	524288
℞.21.numº via.	1048576.primo rº fa.ce.ce.primo rº	cen.cen.primo rel.	1048576
℞.22.numº via.	2097152.cu.2º rº.fa.cu.2º.rº.	cu.secondo rel.	2097152
℞.23.numº via.	4194304.ce.3º rº.fa.ce.3º rº	cen.terzo rel.	4194304
℞.24.numº via.	8388608.7º rº fa.7º rº	settimo rel.	8388608
℞.25.numº via.	16777216.cu.ce.ce.ce.vel.ce.ce.ce.cu.fa quello.	cu.cen.cen.cen.	16777216
℞.26.numº via.	33554432.8º rº.fa.8º.rº	attauo rel.	33554432
℞.27.numº via.	67108864.ce.4º rº.fa.ce.4º rº	cen.quarto rel.	67108864
℞.28.numº via.	134217728.cu.cu.cu.fa.cu.cu.cu.	cu.cu.cu.	134217728
℞.29.numº via.	268435456.ce.ce.2º rº fa.ce.ce.2º.rº	cen.cen.secondo rel.	268435456
℞.30.numº via.	736870912.9º rº fa.9º rº	nono rel.	536870912

Quadro 4: Caracteres e denominação das potências de dois: à esquerda na *Summa* [Luca Pacioli, 1494, f. 143]. À direita no *General Trattato* [Nicolo Tartaglia, 1556, f. 73r].

3.3. Operações com polinómios

3.3.1. Adição e subtracção

A necessidade de explicar as regras dos sinais surgiu num estádio do desenvolvimento da álgebra associado ao aparecimento de números negativos no decurso de cálculos algébricos[226]. Estas regras têm um papel fundamental no domínio prático da resolução de problemas e, por isso, os autores de álgebras do Renascimento lhes dedicam grande atenção. Pérez de Moya trata o assunto em todas as suas obras de conteúdo algébrico. No *Compendio dela regla dela cosa* dedica-lhe um capítulo completo[227]; no *Tratado de*

[226] Sesiano nota que "Porque os cálculos algébricos na *Arithmetica* envolvem a adição e a subtracção de quantidades, na sua introdução Diofanto explica as leis dos sinais". Nossa tradução livre de [Sesiano, J., 1985, pp. 105-106].

[227] Capítulo VIII, pp. 31 - 46.

Arithmetica desenvolve o tema em quatro capítulos dos quais o primeiro é relativo à soma e se intitula "Muestra summar characteres, ó quantidades diversas, mediãte las dictiones, mas y menos"; os outros três capítulos referem-se à subtracção, à multiplicação e à divisão, respectivamente[228].

Centremo-nos, agora, no *Compendio dela regla dela cosa*. Antes de apresentar as regras de manipulação dos sinais, Moya explica o que sucede quando se pretende somar "caracteres" que não são semelhantes (ou seja, diferentes potências de uma letra). O exemplo é do quotidiano e diz respeito à soma de "2 reales con 4 ducados", unidades monetárias em circulação na época, em Castela. Como esta soma não pode exprimir-se num só número, pois os ducados e os reais são de espécie diferente, é necessária uma notação que traduza essa operação. O nosso autor chama a atenção para esse facto, dizendo:

> Como los characteres no sean outra cosa sino unas quantidades proporcionales inciertas, o (por mejor dezir) variables, pues se varían según el valor de la cosa (como por el capitulo segundo mejor se puede entender), no podríamos sumar unos con otros llanamente, como se haze en cosas de una specie, sin reducir, si no es con la dicción del más [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 31].

Por analogia com este modelo da vida real, Pérez de Moya passa para o domínio abstracto do cálculo formal, observando que, quando se pretende somar "2 cosas" (2 co) com "2 censos" (2 ce), a regra dos sinais não é utilizada, e que um "p" colocado entre eles é suficiente para exprimir a sua soma. Além disso, sublinha que só em situações em que se opera com quantidades da mesma espécie surge a necessidade de saber como essas regras se aplicam. Só depois de explicar como se trabalha com estes "caracteres", Moya aplica as regras dos sinais a expressões do tipo $a \pm \sqrt{b}$, como se estas constituíssem casos particulares daqueles[229]. Este caminho é diferente do que seguem Aurel e Pacioli. Aurel

---

[228] Os capítulos relativos à multiplicação e à divisão estão numerados com XXVIII e XXIX. O primeiro tem quatro "artículos" e o segundo tem três [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 467- 487].

[229] Al-Khwarizmi introduz a soma e o produto das diferentes potências da incógnita tomando como ponto de partida dois exemplos numéricos em que intervêm expressões radicais: $\left(20-\sqrt{200}\right)+\left(\sqrt{200}-10\right)$ e $\left(20-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{200}-10\right)$, e recorrendo a uma construção geométrica mostra que $\left(20-\sqrt{200}\right)+\left(\sqrt{200}-10\right)=10$ e $\left(20-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{200}-10\right)=30-\sqrt{800}$. Em seguida, passa a provar que $\left(100+x^2-20x\right)+\left(50+10x-2x^2\right)=150-x^2-10x$ e $\left(100+x^2-20x\right)-\left(50+10x-2x^2\right)=50+3x^2-30x$, sem utilizar a construção geométrica, mas baseando-se na transposição de termos de um membro para o outro e na sua simplificação ([Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 24], citando Aristide Marre, trad. et annot. de *Kholâçat*

introduz as regras dos sinais no estudo com expressões do tipo $a \pm \sqrt{b}$ e aplica-as quando, posteriormente, trata o cálculo polinomial. E Pacioli começa por exemplificar como as regras se aplicam em números inteiros, partindo desse conhecimento para a generalização ao cálculo com incógnitas. No *Tratado de Arithmetica*, as regras dos sinais são introduzidas em operações com caracteres e depois aplicadas em casos numéricos simples e em problemas do dia-a-dia, com explicações detalhadas cujo objectivo é esclarecer, verificar e justificar os resultados referidos. Este procedimento contrasta com o que se observa nas aritméticas mercantis, onde o estudo das regras dos sinais é realizado sobre exemplos do quotidiano, constituindo um primeiro passo para a introdução da álgebra simbólica[230].

Moya não utiliza os termos *monómio* e *polinómio* que actualmente usamos; para ele os monómios são "caracteres" que podem ser "semejantes en especie" ou "diferentes" (são o que actualmente designamos, respectivamente, por monómios semelhantes e por monómios não semelhantes) e refere-se aos polinómios designando-os simplesmente por "partida de caracteres"; ocasionalmente, emprega os nomes "trinomio" e "quinomio" com a acepção que hoje lhes damos. No nosso estudo usamos a terminologia actual, para podermos tratar este assunto sem lhe acrescentar a dificuldade inerente à linguagem utilizada por Moya.

Nas suas obras, Moya indica todos os casos da soma de caracteres afectados dos sinais de mais e de menos e enuncia regras que são análogas às que hoje utilizamos. Por exemplo, quando trata de somar quantidades da mesma "especie" (ou seja, monómios semelhantes) com sinais diferentes nota que se subtrai a menor da maior, colocando no resultado o sinal que tiver a maior das duas. E di-lo assim:

> Summando p con m, o m con p, restaras la menor q. dela mayor, y pondras el caracter p, o m, que viniere con la mayor q. y si fueren yguales las quantidades no pondras nada [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 32].

> Sumãdo mas cõ menos, o menos cõ mas, restaras la menor quãtidad de la mayor, y a lo que quedare pondras el caracter del mas, o menos, que viniere con la maior quantidad, y se fueren yguales las dichas quãtidades, no pondras nada [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 468].

---

al Hissâb, ou Quintessence du calcul, 2e édition revue, corrigée et augmentée de nouvelles notes, Rome: impr. des sciences mathématiques et physique, 1864, p. 70).

[230] [Paradis, J. e Malet, A., 1989, pp. 112-116].

No *Compendio* é indicado um único exemplo de aplicação da soma de polinómios. Moya socorre-se de um esquema, que ensina pormenorizadamente a construir (figura 3), onde representa os polinómios $9x^5+5x^4-9x^3-3x^2+8x-6$ e $7x^5+4x^4-7x^3+2x^2-9x+6$ e a sua soma, dizendo:

> Pon estas dos partidas en figura, assentando n, en frente de n, y ce, en frente de ce, y assi delos demas caracteres: y comiença a summar de la parte que quisieres, no da mas de la mano diestra que de la siniestra: pues comencemos delas figuras que estan a la siniestra, que son, 9 R, y 7 R, y summar se han, juntando 9 com 7, y seran 16, lo quales pondremos debaxo dela raya en frente de las figuras mismas, poniendo delante el carcacter que tiene, que es R, y assi passaremos a summar los censos de censos, diziendo, 5 y 4 hazen 9, pon 9, y porque summas p, com p, pondras p antes de los 9, y adelante cce, porque lo que summas son censos de censos [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 33].

Moya utiliza um esquema, análogo ao que hoje em dia se usa no ensino básico, ordenando os polinómios segundo as potências decrescentes de *x* e separando a soma das parcelas por um traço horizontal.

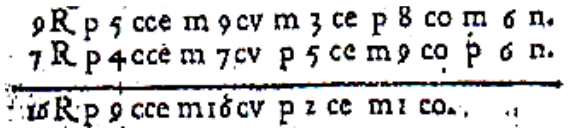


Figura 3: Esquema utilizado no *Compendio dela regla dela cosa* para explicar as regras dos sinais para a operação de adição de polinómios [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 33].

À medida que vai explicando como se efectuam os cálculos, Moya vai fazendo algumas observações importantes. Lembra, por exemplo, que a ordem das operações é arbitrária, ou seja, que é indiferente realizá-las da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda e que, quando se somam quantidades iguais de sinais contrários, não se coloca nada no lugar correspondente ao resultado. Por outro lado, sublinha que, a ausência de sinal no primeiro caracter à esquerda significa que se trata de um "mais":

> Nota que las primeras figuras de la mano siniestra, aun que no tengan señal de p, como no tengan la del menos, siempre entenderemos ser p [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 34].

O exemplo que a figura anterior mostra contempla todas as combinações possíveis dos sinais, mesmo aquela em que se somam quantidades simétricas. Esta escolha de Moya

evita a prolixidade de Aurel e de Pacioli, que exemplificam separadamente todos os casos[231]. Pedro Nunes quando trata do mesmo assunto no *Libro de Algebra* dá um exemplo (figura 4) que tem exactamente as características que apontamos no texto do nosso autor; a única diferença é que no exemplo de Pedro Nunes os polinómios estão dispostos (da esquerda para a direita) segundo as potências crescentes de *x*, enquanto no de Pérez de Moya estão dispostos por ordem inversa desta.

30. p̃ .15. *co.* p̃. 2. *ce.* m̃ . 3. *cu.*
80 m̃.13. *co.* m̃.5. *ce.* m̃. 2 *cu.*

Sũma 110. p̃ . 2. *co.* m̃. 3. *ce.* m̃. 5. *cu.*

Figura 4: Esquema utilizado no *Libro de Algebra* para explicar as regras dos sinais para a operação de adição [Pedro Nunes, 1567, f. 25r].

No *Tratado de Arithmetica*, o estudo da adição de monómios começa pelo caso simples de monómios semelhantes cujos coeficientes são do mesmo sinal. A definição dada é inteiramente igual à actual, obtendo-se como soma um monómio com a mesma parte literal e cujo coeficiente é a soma dos coeficientes das parcelas, afectado do sinal correspondente:

> Si los characteres que ovieres de summar fueren semejantes en especie, sumense, y poneles la señal del mas, o menos que truxeren [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 467].

Os exemplos que acompanham a definição são claros: Moya diz, por exemplo, que a soma de "3 co" com "2 co" é "5 co" e que a de "menos 6 ce" com "menos 10 ce" é "menos 16 ce".

No *Tratado de Arithmetica*, o estudo do cálculo polinomial inclui mais exemplos e mais variados do que os que constam no texto de 1558; um deles é bastante curioso porque aplica, ao trabalho com diferentes moedas uma simbologia sincopada análoga à utilizada para representar os caracteres (figura 5):

10 Rs. p. 4 tar. m. 5 quar. m. 3 mrs
9 Rs. m. 10 tar. p. 7 quar. m. 2 mrs

19 Rs. m . 6 tar. p. 2 quar. m. 5 mrs

Figura 5: Soma de "10 reales mas 4 tarjas, menos 5 quartos, menos 3 maravedis, cõ 9 reales, menos 10 tarjas, mas 7 quartos, menos 2 maravedis" em [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 469]**.**

[231] [Marco Aurel, 1552, ff. 70v-71v] e [Luca Pacioli, 1494, ff. 114r-115r].

No *Tratado*, depois de apresentar este exemplo em que se somam "algebricamente" moedas do mesmo ou de diferentes tipos, Moya observa que o processo se pode generalizar à soma de quaisquer unidades de medida cujos múltiplos e submúltiplos substituem os diversos géneros de monómios:

> Nota lo que has hecho en exẽplo con monedas diferentes, que lo mismo podras hazer cõ medidas aridas, o liquidas, y con los caracteres, o quantidades proporcionales que aquí se tratan [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 470].

Além disso inclui um caso mais complexo, que envolve a soma de três polinómios (figura 6) explicando que, para somar mais do que dois polinómios, se começa por somar todos os termos com sinal mais e todos os termos com sinal menos:

4 ce. m. 3 co. p. 5 n.
2 ce. m. 2 co. m. 3 n.
14 ce. p. 5 co. p. 3 n.

20 ce. p. 5 n.

Figura 6: Esquema usado para efectuar a soma $\left(4x^2-3x+5\right)+\left(2x^2-2x-3\right)+\left(14x^2+5x+3\right)$ [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 469].

Na subtracção, o método seguido é análogo ao da adição, mas os constrangimentos impostos por esta operação e o recurso à linguagem retórica utilizada dão origem a explicações mais longas e detalhadas. O caso em que uma das quantidades é zero não é esquecido. Moya nota que, quando na subtracção não há, no diminuidor, caracter semelhante a um caracter do diminuendo, ele se coloca no resultado tal e qual se apresenta; e se, pelo contrário, faltar no diminuendo um caracter semelhante a um do diminuidor, no resultado considera-se o seu simétrico:

> Nota si viniere algun caracter y no hallaremos outro semejante de do restarle: si este tal caracter viniere com la mayor q. ponerle has abaxo por resta com la señal del p, o m, qualquiera dellos que traxere: y si este tal caracter viniere conla menor q. ponerle has por resta com contraria señal dela que traxere. Quiero dezir que si estuviere cõ p, le pondras m, y si com m, le pondras p [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 35].

Em notação simbólica usual, considerando *a* e *b* positivos e tomando "0" como o coeficiente que corresponde à ausência de um caracter, podemos descrever do seguinte modo (quadro 5) as definições dadas por Moya para as dezasseis possibilidades existentes:

$+a-(+b)=+(a-b)$ se $a>b$	$-a-(-b)=-(a-b)$ se $a>b$
$+a-(+b)=-(b-a)$ se $b>a$	$-a-(-b)=+(b-a)$ se $b>a$
$+a-(-b)=+(a+b)$ se $b>a$	$-a-(+b)=-(a+b)$ se $b>a$
$+a-(-b)=+(a+b)$ se $a>b$	$-a-(+b)=-(a+b)$ se $b<a$
$+a-(+a)=0$	$-a-(-a)=0$
$+a-(-a)=+2a$	$-a-(+a)=-2a$
$+a-0=+a$	$0-(-b)=+b$
$-a-0=-a$	$0-(+b)=-b$

Quadro 5: Tradução, em notação actual, das regras dos sinais para a subtracção indicadas por [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 34-35].

Mais uma vez, o exemplo tratado no *Compendio* é muito abrangente e esclarecedor, pois os polinómios escolhidos, $7x^8+3x^7-6x^6+3x^5-9x^4+7x^3-6x^2$ e $5x^8+3x^7-4x^6+7x^5-10x^4-1x^3+3x^2$, só não contemplam o caso em que se subtraem números simétricos. Como mostra a figura 7, o único problema que a representação de Moya apresenta deve-se à inexistência de um sinal que permita identificar imediatamente a operação realizada, o que facilitaria ao leitor a distinção entre a adição e a subtracção.

7 ccce p 3 RR m 6 cecv p 3 R m 9 cce p 7 cv m 6 ce.
5 ccce p 3 RR m 4 cecv p 7 R m 10 cce m 1 cv p 3 ce.

2ccce m 2 cecv m 4 R p 1 cce p 8 cv m 9 ce.

Figura 7: Esquema utilizado no *Compendio dela regla dela cosa* para explicar as regras dos sinais para a operação de subtracção [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 35].

Em notação simbólica usual, as regras dadas no *Compendio dela regla dela cosa* para a adição e subtracção de monómios são as que resumimos no quadro seguinte (quadro 6):

A	b	Soma de a com b	Diferença entre a e b
p.	p.	Soma e põe p.	Subtrai e põe p., se a>b Subtrai e põe m., se a<b Não põe nada, se a=b
p.	m.	Subtrai e põe p., se $a>b$ Subtrai e põe m., se $a<b$ Não põe nada, se $a=b$	Soma e põe p.
m.	p.	Subtrai e põe m., se $a>b$ Subtrai e põe p., se $a<b$ Não põe nada, se $a=b$	Soma e põe m.
m.	m.	Soma e põe m.	Subtrai e põe m, se a>b Subtrai e põe p, se a<b Não põe nada, se a=b
p.	Não existe	Mantém a e põe p.	Mantém a e põe p.

m.	Não existe	Mantém a e põe m.	Mantém a e põe m.
0	p.	Mantém b e põe p.	Mantém b e põe m.
0	m.	Mantém b e põe m.	Mantém b e põe p.

Quadro 6: Regras dadas por Moya para a soma e subtracção de monómios (note-se que, por vezes, usa "p." e outras vezes "p")

A não existência de um sinal operacional de subtracção é ultrapassada no *Tratado de Arithmetica* com o recurso a um esquema que permite distinguir imediatamente essa operação da de adição. Moya toma um exemplo numérico cujo resultado se aceita sem qualquer contestação, a diferença entre $9+2$ e $8-7$ (figura 8), e explica assim a subtracção:

> Resta 8 menos 7, de 9 mas 2, pon lo que quisieres restar debaxo de la quantidad de do se há de restar. Y començando (segun se há dicho) porque abaxo ay menos 7, arriba ay mas 2 (que son cosas contrarias) summa 2 com 7, y seran 9, ponlos debaxo con la señal del mas que viene arriba (como manda la quinta regla.) Prosigue restado los 8 de los 9, y quedara 1, ponle debaxo, y assi auras concluydo, y dirás que restando 8 menos 7, de 9 mas 2, queda 1 mas 9 como parece [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 473].

$$\begin{array}{r} 13\,\mathrm{m}\,4 \\ 8\,\mathrm{m}\,3 \\ \hline 21\,\mathrm{m}\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\ \mathrm{p}\ 2 \\ \hline 8\ \mathrm{m}\ 7 \\ 1\ \mathrm{p}\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ \mathrm{m}\ 3 \\ \hline 4\ \mathrm{m}\ 3 \\ 4\ \mathrm{m}\ 0 \end{array}$$

Figura 8: À esquerda o esquema que traduz o modo de efectuar a soma de $13-4$ com $8-3$; ao centro o esquema utilizado para o cálculo da diferença entre $9+2$ e $8-7$. À direita a diferença entre $8-3$ e $4-3$, mostrando o zero [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 473].

3.3.2. Multiplicação e divisão

O estudo da multiplicação de polinómios envolve, além das considerações sobre os sinais e os valores absolutos associados aos coeficientes de cada monómio, a questão do produto dos diferentes caracteres. Moya lembra-o nas seguintes palavras:

> Enel multipricar, se ha de tener cuenta con tres cosas. La primera, con las dictiones del mas, y menos. La segunda, con los characteres. Lo tercero, con lo que monta multiplicando las quantidades que vienen con los characteres, como mejor se entendera por los exemplos de los articulos seguientes [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 475].

Estes aspectos são tratados separadamente e, em seguida, são aplicados globalmente a um exemplo. Na multiplicação, as regras dos sinais são introduzidas sem quaisquer

considerações prévias e explicadas em exemplos numéricos que permitem verificações fáceis. Diz Moya:

> Ten por regla general, que multiplicando mas por mas, monta mas. Y multiplicando menos por menos, monta mas. Y multiplicando mas por menos, o al contrario, menos por mas, monta menos [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 475].

Moya insiste na importância de saber calcular o produto de caracteres para as nove primeiras potências da incógnita, sublinhando a necessidade de se ter presente a tabela que a um caracter associa o número de ordem que lhe corresponde (por exemplo, 2 para "ce."). E enuncia a regra do produto de potências com a mesma base, do seguinte modo:

> Hás de notar que quãdo multiplicares un qualquiera destos caracteres por outro: summaras los números que los tales caracteres tuvierẽ sobre si, y lo que montare mira sobre que caracter esta outro tanto porque aquel tal caracter será el producto delos multiplicados. Exemplo. Pon que quieres multiplicar la co., por si misma: mira quãto tiene la co. sobre si, y hallaras 1, este 1 juntale com outro que tendra la misma co. pues hade ser multiplicada por si misma, y seran 2, mira sobre qual caracter delos lo esta 2, y hallaras que sobre el ce. pues assi dirás que multiplicando la co. por si misma, monta el censo [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 36].

Isto significa que, para multiplicar "ce." por "cv." (ou seja, x^2 por x^3) se somam os números 2 e 3, associados, respectivamente a "ce." e a "cv.", procurando-se, depois, o caracter que corresponde ao resultado dessa soma, 5, e que é 1*R.* (ou apenas *R*, como atrás referimos). Este procedimento é claro mas encerra o seguinte problema: o que fazer quando a soma resultante não tem correspondente na tabela anterior, ou seja, quando é superior a 9? Isto traduz-se na necessidade de criar um novo caracter. Moya aborda esta questão e trata-a do seguinte modo: se a soma é um número primo, como acontece quando se multiplica "cce." por "ccv." (ou seja, x^4 por x^9) em que 4 + 9 é 13, o caracter que lhe corresponde é o quarto primo superior a 3 (para o qual já existe um caracter próprio); neste caso, Moya designa-o "4º relato", mas não faz considerações sobre a sua representação. Se a soma é um número composto como, por exemplo, 8 (que se obtém quando se multiplica x^2 por x^6) decompõe esse número no produto de duas partes aliquotas (no caso, decompõe 8 no produto de 2 por 4) e o caracter que o representa é o que resulta da justaposição dos caracteres correspondentes. A definição está correcta. Embora Moya não o afirme, observa-

se que os caracteres são reordenados por número de ordem crescente e são suprimidas as vogais, excepto a última, de cada série. Por exemplo, aparece *ccceccu* em vez de qualquer permutação de três *ce* e dois *cu*.

Para explicar a aplicação das regras indicadas quando estão envolvidos caracteres de diferentes tipos, Moya considera os polinómios $4x^3 - 2x$ e $3x - 5$ e, com base neles, vai mostrando como se calcula o produto dos monómios de um pelos monómios do outro. A descrição é ilustrada pelo esquema que apresentamos (figura 9). Como se vê, o cálculo tem um lapso, que é corrigido na *Arithmetica*; por esse motivo, apresentamos os dois esquemas na figura 9.

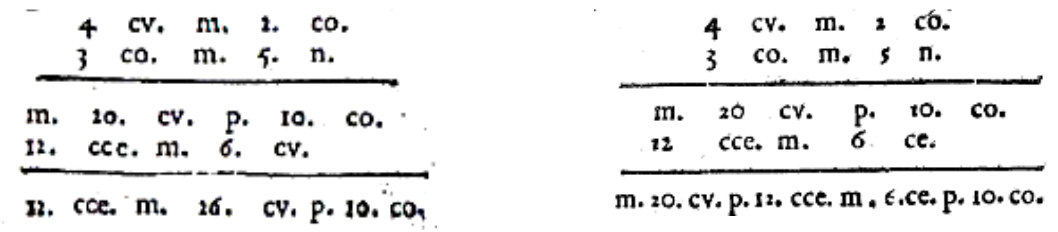


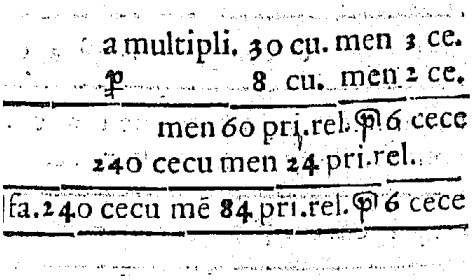
Figura 9: Esquema utilizado no *Compendio dela regla dela cosa* para explicar o algoritmo da multiplicação com a respectiva regra dos sinais: à esquerda em [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 38]; à direita em [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 516].

O modo como estão dispostos os cálculos dos sucessivos produtos no diagrama proposto (figura 9) é diferente do utilizado por Aurel[232]. E é, também, diferente do dado por Pedro Nunes[233]. Moya segue um esquema análogo ao que indica para o produto de números, começando por multiplicar o primeiro monómio à direita do multiplicador, por todos os monómios do multiplicando, fazendo o registo correspondente numa primeira linha[234]. Depois, aplica este mesmo procedimento ao segundo monómio do multiplicador, colocando os produtos resultantes numa segunda linha, e assim sucessivamente. É também isso que faz Tartaglia, no *General Trattato*, para multiplicar $30x^3 - 3x^2$ por $8x^3 - 2x^2$, como mostra a figura 10:

[232] [Marco Aurel, 1552, ff. 73r-73v]. Também verificámos que o esquema de Moya não é o que se apresenta em [Jacques Peletier, 1554, p. 18].

[233] [Pedro Nunes, 1567, f. 28r].

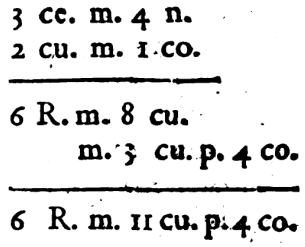
[234] A única diferença prende-se com a representação decimal dos números envolvidos e, consequentemente, com o avanço de uma casa para a direita, de linha para linha [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 56-57].


a multipli. 30 cu. men 3 ce.
p 8 cu. men 2 ce.
men 60 pri.rel. p 6 cece
240 cecu men 24 pri.rel.
fa. 240 cecu mẽ 84 pri.rel. p 6 cece

a multiplic.	$30\,x^3 - 3\,x^2$
por	$8x^3 - 2x^2$
	$-60\,x^5 + 6\,x^4$
	$240\,x^6 - 24\,x^5$
faz	$240\,x^6 - 84\,x^5 + 6x^4$

Figura 10: À esquerda, disposição dos cálculos do produto de $30x^3 - 3x^2$ por $8x^3 - 2x^2$, apresentada em [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 4v]. À direita, a correspondência em notação actual.

Quando Pérez de Moya estuda a multiplicação de polinómios no *Tratado de Arithmetica* mostra ter cuidados que o *Compendio* não revela. Preocupa-se com a disposição dos monómios intervenientes no cálculo, com a ordem pela qual eles se indicam no resultado e com a justificação da validade das regras que aplica no produto. Nestes aspectos, a abordagem de Moya é mais trabalhada do que a de Nunes e a de Tartaglia. Vejamos porquê. No esquema que elabora, Moya agrupa os termos semelhantes nos cálculos intermédios, colocando uns sob os outros, e indica o resultado tendo em conta a ordem decrescente das potências dos caracteres, tal como tinha feito no caso da soma. Tartaglia atende apenas ao segundo destes pontos e Nunes não atende a nenhum. No entanto, o esquema apresentado no *Tratado de Arithmetica* para calcular o produto de $3x^2 - 4$ por $2x^3 - 3$ (figura 11) mostra que a disposição dos cálculos que Moya emprega é igual à de que Nunes usa para multiplicar $15 - 4x$ por $3x^2 - 5x$ (figura 12)[235].


3 ce. m. 4 n.
2 cu. m. 1 co.
6 R. m. 8 cu.
m. 3 cu. p. 4 co.
6 R. m. 11 cu. p. 4 co.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4 \\ 2x^3 - x \\ \hline 6x^5 - 8x^3 \\ -3x^3 + 4x \\ \hline 6x^5 - 11x^3 + 4x \end{array}$$

Figura 11: À esquerda: esquema utilizado no *Tratado de Arithmetica* para explicar o algoritmo da multiplicação com a respectiva regra dos sinais [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 482]. À direita a correspondência em notação actual.

[235] Ver [Marco Aurel, 1552, f. 73v]; [Pedro Nunes, 1567, f. 27r]; [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 4v].

.15. m̃ .4. co.
.3. ce. m̃ 5. co.

.45. ce. m̃ .12. cu.
m̃ 75. co. p̃ .20. ce.

Sũma .65 ce. m̃ .75. co. m̃ 12. cu.

$$\begin{array}{r} 15 \;\; -4x \\ 3x^2 \; -5x \\ \hline 45x^2 - 12x^3 \\ \quad -75x + 20x^2 \\ \hline \text{Soma} \;\; 65x^2 - 75x - 12x^3 \end{array}$$

Figura 12: À esquerda: esquema utilizado por Pedro Nunes para explicar o algoritmo da multiplicação [Pedro Nunes, 1567, f. 28v]. À direita a correspondência em notação actual.

A justificação de Moya, de que do produto de dois sinais "menos" resulta um sinal "mais", é semelhante à de Pacioli; trabalhando sobre exemplos numéricos cujo resultado conhece, como $(7-2)(8-3)$, e aplicando as regras estabelecidas quando um dos números é positivo, conclui que o produto de dois números com sinais menos tem o sinal mais. No exemplo dado sabe-se que, por um lado, o produto de 5 por 5 é igual a 25 e que o produto de 7 por 8 é 56 e, por outro, que a soma dos produtos de 7 por (-3) e de (-2) por 8 é -37; o que permite concluir que o produto de (-2) por (-3) só pode ser (+6). O argumento de Moya é, também, o de Pacioli no exemplo $(10-2)(10-2)$[236].

O estudo da divisão no *Compendio* começa com uma chamada de atenção para a necessidade de, tal como na multiplicação, também aqui se ter presente a tabela que mostra a correspondência entre cada caracter e o algarismo que indica o seu grau (ver quadro 3); e sublinha as semelhanças destas duas operações. Como mais tarde dirá Pedro Nunes: "Quem sabe a razão de multiplicar, não pode errar no partir"[237].

No estudo das operações com polinómios, Moya explica as regras dos sinais à medida que elas vão sendo utilizadas em exemplos simples, e só depois indica a regra geral. Na divisão, as primeiras aplicações dessas regras são feitas com monómios em que o grau do "partidor" (ou seja, do divisor) é menor do que o grau do dividendo, como, por exemplo, $\frac{x^3}{x}$; $\frac{x^7}{x^6}$ e $\frac{x^3}{3}$. Depois, o procedimento é progressivamente alargado à divisão de um polinómio por um monómio, conquanto o grau de cada um dos monómios que constituem o polinómio do dividendo não seja menor do que o grau do divisor. Tomando o exemplo da divisão de $16x^4 - 7x^3 - 8x^2$ por $8x^2$, Moya vai explicando como se divide cada monómio da "particion" (ou seja, do dividendo) pelo monómio divisor. É sobre ele que define a regra

[236] [Docampo, J., 2004, p. 408].

[237] [Pedro Nunes, 1567, f. 29v].

para subtrair expoentes e o modo como se dividem os coeficientes, que Moya transmite assim:

> E hallaras que partiendo 16 cce. a 8 ce. salen a 2 ce. porque 16 partidos por 8, cabĕ 2, y cce. partido por ce. viene ce., como siguiendo la tablilla podras ver, passa adelante y parte los m 7 cv. por 8 ce. que es partidor: y assi procederas de caracter en caracter, aun que aya infinitos, pues partiĕdo 7 a 8, caben 7 ochavos. Assi mismo partiĕdo cv. por ce. viene co. y porque los 7 que partes es m. por tãto lo que cupo tambien será m. por la regla que dize: partiendo m por p, es m, y assi dirás que partiendo m 7 cv. por 8 ce. viene m 7, ochavos cosa. Prosigue partiendo los m 8 ce. que estan en la particion, por los 8 del partidor, diziendo, 8 partidos por 8 caben 1, y porque es m, a este 1 le pondras m. Assi mismo partiendo ce. por ce. viene n. Luego partiendo m 8 ce. por 8 ce. cabe m 1 n. y assi auras dado fin a tu particion y responderas que partiendo 16 censos de censo menos 7 cubos, menos 8 censos por 8 censos, cabe a 2 censos, menos 7 ochavos de una cosa menos um numero [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 43].

Os sucessivos passos da operação correspondem, em notação actual, a: $16x^4 : 8x^2 = 2x^2$; $\left(-7x^3\right) : 8x^2 = -\frac{7}{8}x$; $-8x^2 : 8x^2 = -1$; e o resultado é $\frac{16x^4 - 7x^3 - 8x^2}{8x^2} = 2x^2 - \frac{7}{8}x - 1$. A resolução apresenta detalhes que podem parecer excessivos, mas há que ter em conta o modo como este assunto era tratado pelos principais algebristas da época. Recorde-se que Tartaglia, por exemplo, depois de referir que a divisão de um binómio, ou de um polinómio, por um número podem sempre efectuar-se, dá o exemplo, muito simples, da divisão de $24x^6 + 12x^2$ por 4, dizendo que para tal há que dividir cada um dos dois nomes ("nomis") por 4, obtendo-se $6x^6 + 3x^2$ [238].

Um problema que pode surgir na divisão acontece quando o grau do monómio divisor é maior do que o do dividendo, como por exemplo, na divisão de 4 por *x*. Neste caso, Moya sublinha que não há nada a fazer a não ser indicar a operação por meio de uma fracção:

> Nota si el caracter del partidor fuere mayor que el dela particion, en tal caso pondras el partidor debaxo dela particion, y quedara como quebrado [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 43].

[238] [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 5r].

Esta operação levanta uma outra questão delicada, que não tinha surgido com as anteriores operações com polinómios, que consiste no facto de, partindo de dois monómios, se obter um ente matemático que não é um monómio. Este aspecto não passou despercebido a Moya. Ele observa que há dois tipos de fracções: umas que resultam da divisão entre números e representam o coeficiente de uma incógnita; outras que representam o quociente de incógnitas. Os seus exemplos são sugestivos, tal como o é a leitura que faz em cada um dos casos:

> Y porque esto sea bien entendido hás de saber que en esta regra ay dos differencias de assentar quebrados: los unos se escriven con un carácter delante de la raya, desta suerte $\frac{2}{5}co.$ Que quiere decir dos quintos del valor de una cosa: y lo mismo entenderas de otra parte o partes de otro qualquiera caracter. La segunda diferencia se asienta con dos caracteres o mas, desta suerte $\frac{3ce.}{2cu.}$. Que quiere dezir que los tres censos que estan sobre la raya hã de ser partidos por dos cubos que estan debaxo: y assi delas de mas [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 44].

Do mesmo modo são, também, 'resolvidas' as questões da divisão de um polinómio por um monómio quando um, pelo menos, dos monómios do dividendo tem grau inferior ao do divisor, e a da divisão de um qualquer monómio por um binómio. É o que acontece com a divisão de $20\,co\,\text{p.}\,6\,cecv.$ por $3\,cv.$, que é dada por $\frac{20\,co\,\text{p.}\,6\,cecv.}{3\,cv.}$, e com a divisão de $50\,cv.$ por $3\,co\,\text{p.}\,4\,ce.$, que é indicada por $\frac{50\,cv.}{3\,co\,\text{p.}\,4\,ce.}$ (em notação simbólica actual significa que $\left(20x+6x^6\right):\left(3x^3\right)=\frac{20x+6x^6}{3x^3}$ e que $50\,x^3:\left(3x+4x^2\right)=\frac{50\,x^3}{3x+4\,x^2}$, respectivamente).

No *Compendio,* a divisão de dois polinómios não é estudada. Aurel também não refere este assunto na *Arithmetica Algebratica*[239]; e mesmo Tartaglia, no *General Trattato*, não dá qualquer algoritmo que permita dividir polinómios[240]. A primeira obra ibérica onde se estuda a divisão de polinómios é o *Libro de Algebra,* de Pedro Nunes; e no espaço que

[239] [Marco Aurel, 1552, ff. 73v-74r].

[240] [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 5r].

medeia entre a sua publicação e a do *Tratado de Arithmetica*, de Pérez de Moya, não conhecemos nenhuma outra, de autor português ou espanhol, em que este tema seja tratado. Por outro lado, como vamos mostrar, é notória a semelhança entre os estudos feitos por estes dois autores. Pensamos, portanto, que o *Libro de Algebra* terá constituído, neste aspecto, uma importante fonte de Moya que inclui a divisão de polinómios no *Tratado de Arithmetica*. A menos de terminologia, o algoritmo indicado por Pérez de Moya (e por Pedro Nunes) é perfeitamente actual e pode ser assim descrito: estando os polinómios ordenados segundo as potências decrescentes da sua indeterminada (a que Moya chama os "characteres" e Nunes chama as "dignidades") divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor, obtendo o primeiro monómio do quociente[241]. Em seguida multiplica-se este monómio pelo divisor e subtrai-se, do dividendo, o produto resultante. O processo repete-se até que o grau do polinómio diferença seja inferior ao do divisor[242]. Vejamos, então, em que termos os dois autores explicam a divisão inteira de polinómios, onde são claras as afinidades entre os dois textos:

Si el partidor fuere cõpuesto de dos quantidades, partiras los mayores caracteres de los de la particiõ, por el mayor caracter de los del partidor, dexando en que pueda caber el otro character menor del partidor, y lo que viniere al quociente, multiplicalo por ambos caracteres del partidor y el producto restese de la particion, y prosigue haziendo lo mismo en cada una de las restas, hasta llegar a character de menor denominaciõ, que el mayor character de los del partidor, porque entõces el menor se põdra sobre el mismo partidor cõ una raya en medio a modo de quebrado [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 486].

Si el partidor fuere compuesto, partiremos las mayores dignidades de lo que se ha de partir por la mayor dignidad del partidor, dexandole en que pueda caber la otra dignidad del partidor, y lo que viniere multiplicaremos por el partidor, y lo producido por essa multiplicación sacaremos de toda la suma que se parte y lo mismo obraremos en lo que restare, por el modo que tenemos quando partimos numero por numero. Y llegando a numero o dignidad en esta obra que sea de menor denominación, que el partidor, quedara essa quantidad en quebrado escreviendose sobre una raya, y el partidor debaxo dessa linea [Pedro Nunes, 1567, f. 31r].

[241] Tartaglia usa o termo "dignidade" com o mesmo significado de Pedro Nunes [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 1r].

[242] Este conhecimento é um passo importante para a determinação do máximo divisor comum a dois polinómios que Pedro Nunes explorou no *Libro de Algebra* como processo de resolução de equações. Sobre este assunto ver [Van Praag, P., 2001].

As analogias não ficam por aqui, pois os exemplos de que se socorrem os seus autores, apesar de serem diferentes, têm as mesmas características. Ambos consideram como dividendo um polinómio completo de terceiro grau e como divisor um polinómio completo de primeiro grau e indicam os resultados na mesma forma. Moya escolhe a divisão de $10x^3+26x^2+17x+14$ por $2x+4$ (na sua notação é a divisão de $10cu.p.\,26ce.p.17co.p.\,4n$ por $2co.p.\,4n$) e Nunes faz a divisão de $12x^3+18x^2+27x+17$ por $4x+3$ (na sua notação é a divisão de $12.cu.p.18.ce.p.27.co.p.17.numero$ por $4.co.p.3$)[243]. Além disso, para provar que a operação está correcta Moya recorre à "prova real"[244], mostrando que o produto do "partidor" pelo quociente é igual à "particion", ou seja, que o resto é zero, tal como Nunes faz. No entanto, no texto de Moya não está figurado o esquema da divisão algébrica de polinómios, dado por Nunes, que ajudaria a ultrapassar as dificuldades da linguagem retórica utilizada na descrição da operação.

No *Tratado de Arithmetica*, Moya dá uma outra 'prova' curiosa apresentando-a como alternativa à anterior[245]. Usando linguagem actual, dizemos que consiste em substituir a indeterminada presente nos polinómios do dividendo, do divisor e do quociente por um qualquer valor numérico e verificar que os cálculos efectuados com base nesse valor conduzem a um resultado correcto. Na divisão de $10x^3+26x^2+17x+14$ por $2x+4$, cujo resultado é $5x^2+3x+\frac{5}{2}+\frac{4}{2x+4}$, Moya faz a substituição $x=2$ nos polinómios do dividendo e do divisor, obtendo 232 e 8, respectivamente, e mostra que o valor do quociente, 29, é o que se obtém substituindo em $5x^2+3x+\frac{5}{2}+\frac{4}{2x+4}$, x por 2.

> Puedese provar dando valores a los characteres, y presuponiendo valer la co. dos, hallaras ser la particion 232, y el partidor 8, partiendo agora 232 por 8, vendra al quociente 29, otro tanto valen $5ce.p.3co.p.2\frac{1}{2}n$ y $\frac{4n}{2co.p.4n}$ porque todo este quebrado es medio [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 487].

[243] Em [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 487] e em [Pedro Nunes, 1567, f. 31r].

[244] Referindo-se às quatro operações fundamentais, Moya diz: "Las pruevas destas quatro reglas generales de characteres sean las reales, quiero dezir, que el summar se prueva por el restar, y el restar por el summar, y el multiplicar por el partir, y el partir por el multiplicar. O dando valores a los caracteres, como en algunos exemplos has visto" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 487].

[245] Não se trata, verdadeiramente, de uma prova, mas sim de um teste, como é a "prova dos nove".

Embora não sendo suficiente, a condição indicada é necessária para se poder concluir que a operação está correcta.

Há uma outra situação, ainda sobre um tema afim, em que a fonte de inspiração de Pérez de Moya parece ter sido Pedro Nunes. É numa passagem em que pretende mostrar que é válida a simplificação efectuada numa certa fracção algébrica, que Moya apresenta sob o título "Abreviar characteres, quãdo vienen con quebrados, o en las ygualaciones" e Nunes em "Abreviar los quebrados". Embora trabalhando sobre um exemplo diferente de Nunes, mas suficientemente parecido, Moya usa precisamente os mesmos termos na justificação, como veremos a seguir. Em notação actual, trata-se de provar que: $\frac{4x^3}{x^5} = \frac{4}{x^2}$ (no caso de Moya), e que $\frac{20x^2}{x^3} = \frac{20}{x}$ (no caso de Nunes). Vejamos o que ambos dizem:

Y la razon, o demostracion, es evidente, porque por ser las denominaciones de los characteres abreviados por un cubo, cuya denominacion, es 3, fue por tanto hecha la abreviacion por un mismo, e ygual numero de proporciones yguales, las quales son denotadas por las denominaciones. Luego, tal proporcion ay de 4.cu. a 1R. como de 4 n. a un censo, y si tal proporcion ay del primero numerador para el primero denominador, como del segundo numerador para el segundo: necessariamente tal quebrado sera $\frac{4cu.}{1R.}$ como $\frac{4n.}{1ce}$ que es el proposito [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 491].

La demonstracion desta arte de abreviar es muy clara, y la darlaemos a entender en la abreviacion del primero quebrado. Que por quanto las dignidades fuerõ abatidas por un censo, cuya denominaciõ es .2. fueron por tanto abatidas por ygual numero de proporciones yguales, las quales proporciones por las denominaciones son significadas, como en el principio desta segunda parte avemos dicho. Luego tal proporcion aura de .20.ce. para .1.cu. como del numero .20. para .1.co. Pues si tal proporcion ay del primero numerador para el primero denominador, como del segundo numerador para el segundo denominador, necessariamente tal quebrado sera $\frac{.20.ce.}{.1.cu}$ como $\frac{.20.}{.1.co.}$ y esto queriamos demonstrar. Y es la demonstracion universal [Pedro Nunes, 1567, ff. 37v-38r].

3.3.3. Radiciação

No *Compendio* o estudo da extracção de raízes de polinómios é muito breve e tem muitas semelhanças com o do *Libro primero de Arithmetica Algebratica,* de Marco Aurel[246]. Moya mostra como se determina a raiz quadrada de um trinómio e de um polinómio de cinco termos (a que chama "quinomio") com exemplos concretos que, no entanto, são diferentes dos apresentados pelo autor alemão. Parece-nos, além disso, que é importante apontar aqui uma outra diferença, esta mais significativa: enquanto Aurel se limita a indicar como se procede para fazer o cálculo de cada uma das raízes, sem referir qual a sua utilidade prática, Moya sublinha que a aplicação deste conhecimento é imprescindível na resolução de um problema que mais tarde irá tratar[247], dizendo:

> Mira la demanda que se puso en la anotacion primera del catorzeno capitulo: y entenderas de que sirve saber esto [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 46].

Moya estuda os exemplos $\sqrt{9x^4+12x^3+4x^2}$ e $\sqrt{16x^6+24x^5+25x^4+12x^3+4x^2}$ e Aurel $\sqrt{4x^4+12x^3+9x^2}$ e $\sqrt{25x^6+30x^5+29x^4+12x^3+4x^2}$. A explicação de Moya é completamente esclarecedora e podia ser dada actualmente nesses mesmos termos.

Tomemos o primeiro exemplo. Moya começa por extrair a raiz quadrada de cada um dos extremos do trinómio $9x^4+12x^3+4x^2$, isto é, dos termos de maior e de menor grau e, em seguida, indica uma condição necessária e suficiente para a existência da raiz quadrada do trinómio dado: o produto dessas raízes é igual a metade do termo médio se e só se o trinómio tem raiz, e essa raiz é a soma das raízes referidas. Este raciocínio, baseado no desenvolvimento do quadrado do binómio, é exposto do seguinte modo:

> Queriendo sacar, r de algũ trinomio: assi como $9\,cce\,p\,12\,cv.\,p\,4\,ce.$ sacaras la r. delos extremos: y si la multiplicacion delas rayzes delos dos extremos hiziere tanto como la mitad del caracter de enmedio delos 3 que quisieres sacar r, el tal trinomio tẽdra r, y la tal r. es la misma de los extremos [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 44-45].

---

[246] [Marco Aurel, 1552, ff. 75r-75v].

[247] O problema que Moya refere envolve a determinação de $\sqrt{x^4+14x^3+49x^2}$ [Juan Pérez de Moya, 1558, p.118].

Mais interessante, e menos usual, é a determinação da raiz quadrada de $16x^6 + 24x^5 + 25x^4 + 12x^3 + 4x^2$. Seguindo o mesmo princípio que anteriormente, agora aplicado ao quadrado de um trinómio, procura valores para *a*, *b* e *c* tais que $\left(ax^3 + bx^2 + cx\right)^2 = 16x^6 + 24x^5 + 25x^4 + 12x^3 + 4x^2$. Os passos estão todos bem indicados, começando pelo cálculo da raiz quadrada dos extremos ($4x^3$ e $2x$), que permitem obter *a* e *c*, respectivamente. Do procedimento subsequente percebe-se que, só para esses valores de *a* e *c*, pode existir a raiz pretendida, embora tal não seja mencionado explicitamente. Moya verifica, em seguida, se o quociente entre o segundo termo e a raiz do primeiro é igual ao quociente entre o penúltimo termo e a raiz do último (isto é, verifica se $\frac{24x^5}{4x^3} = \frac{12x^3}{2x}$) e conclui que, se tal acontecer, como neste caso, o valor de $2b$ está encontrado. É isso que se verifica no exemplo dado em que $a = 4, b = 3$ e $c = 2$. Moya di-lo assim:

> Se este quinomio tiver r., tanto vendrá partiendo el segundo charácter, que es 24 R., por la r. del primero extremo, que es 4 cu., como partiendo el quarto caracter, que es 12 cu. Por la r. del último, que es 2 co., que a qualquiera destas particiones salen 6 ce. Pues la mitad de la una destas particiones, que es 3 ce., añadida a los 4 cu. Y las 2 co. quedará un trinomio 4 cu. p. 3 ce. p. 2 co., y tanto será la r . de todo [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 45].

Finalmente, sublinha que o quadrado do trinómio obtido tem de coincidir com o quinómio dado:

> Pero ahora ha de aver outra concordancia, y es, que multiplicando los extremos deste trinomio: que dezimos ser, r, que el uno es $4cv.$, y el outro $2co.$ el uno por el outro hazẽ $8cce.$ doblado será $16cce.$ a este añadiẽdo la potencia del enmedio, quiero dezir delos $3ce.$ que será $9cce.$ montara todo $25cce$ [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 45-46].

Com uma observação importante, que decorre da experiência obtida na estratégia aplicada, Moya completa o assunto observando que não é possível extrair a raiz quadrada de um polinómio que tenha um número par de termos. Este tipo de observação constitui como que um momento de reflexão e consolidação da matéria estudada. Pedro Nunes também a faz no *Libro de Algebra*, notando que os quadrinómios não poderão ter raiz universal. Eis a justificação que apresenta:

> Porque binomio de dignidades siendo en si multiplicado haze trinomio, como avemos dito, y no quadrinomio. Y si quisiessemos tomar por raiz un trinomio, ny aun eso podra ser, porque trinomio es raiz de quinomio, y no de quadrinomio, como se muestra por sus multiplicaciones [Pedro Nunes, 1567, f. 136v].

No *Tratado de Arithmetica* este tema volta a ser estudado e Moya acrescenta, então, alguns detalhes sobre a determinação da raiz quadrada de polinómios e explora o cálculo da raiz cúbica[248]. Relativamente à raiz quadrada de um trinómio, mostra como se resolve a questão quando o sinal do termo médio é negativo, tomando como exemplo a determinação de $\sqrt{4x^4 - 12x^3 + 9x^2}$. E prova que a raiz de um trinómio é um binómio, usando precisamente o mesmo argumento de natureza geométrica que Tartaglia utiliza no *General Trattato*[249]:

> La razon porque la r. de um trinomio es binomio, es porque multiplicando un binomio por si mismo se le acrecienta un quadrado de ambos los terminos, del duplo de la superficie de un termino, por el otro binomio [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 490].

Moya aborda, pela primeira vez, a determinação da raiz cúbica de um polinómio no *Tratado de Arithmetica*. Fá-lo dum modo muito sucinto, começando por explicar como se determina a raiz cúbica de um monómio, como $\sqrt[3]{8x^6}$ (*rrr* 8 *cecu.*); depois, em breve nota, pronuncia-se sobre o número de monómios que deve ter um polinómio para que seja possível extrair a sua raiz cúbica. O argumento é baseado na observação do que se passa com a raiz quadrada, em que o polinómio tem três, cinco, etc., termos. No caso da raiz cúbica, refere, o número de monómios que constituem o polinómio deve ser 4, 7, 10, ou qualquer outro que se obtenha deles somando um múltiplo de 3:

> Si ovieres de sacar rrr. de mas de un caracter, notaras que ha de ser de 4 o de 7, o de 10, &c. cresciendo siempre tres mas, asi como en el sacar rayz cuadrada crecen dos [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 490].

---

[248] O capítulo XXX intitulado *Sacar rayzes de characteres* é dedicado a este tema. Desenvolve-se em três *articulos* que estudam a determinação da raiz quadrada de um só caracter e de três ou mais caracteres e a raiz cúbica de caracteres. [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 487-490].

[249] Este argumento baseia-se na proposição *Elementos* II, 4 [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 14r].

O nosso autor não se alonga sobre o assunto pois entende que ele não é muito necessário para o objectivo que a sua obra pretende atingir ("no es muy menesteroso"), limitando o estudo a dois casos em que o radicando é um "quadrinomio". O primeiro exemplo trata da determinação de $\sqrt[3]{x^6+x^5+x^4+x^3}$ (Moya pergunta "La *rrr.* de *cecu. p. R. p. cce. p. cu.* que será?") que, como se pode verificar, não é possível de determinar. O segundo propõe a determinação de $\sqrt[3]{27x^6+54x^5+36x^4+8x^3}$ ("Saca la *rrr.* de 27 *cecu. p.* 54 *R. p.* 36 *cce. p.* 8 *cu.*"). Aqui, nota que a existência de uma tal raiz depende da existência das raízes dos extremos, que neste caso são $3x^2$ e $2x$, e da igualdade das razões $\frac{54x^5}{3x^2}$ e $\frac{36x^4}{2x}$; e indica como resultado $3x^2+2x$.

3.4. Raízes e sua manipulação

3.4.1. Conceitos básicos

No *Compendio* e nos capítulos algébricos da *Arithmetica* não está definida explicitamente a raiz quadrada de um número, no entanto Moya observa que a razão existente entre a unidade e a raiz de um número é a mesma que existe entre essa raiz e o número; e daí conclui que, procurar a raiz quadrada de um número é determinar o meio proporcional entre a unidade e o número:

> Y la proporcion que ay dela unidad ala rayz de un qualquier numero, la misma aura de la rayz à su quadrado, de do se infiere, que buscar la rayz quadrada de un numero, no es outra cosa sino buscar una quantidade media, proporcional, entre la unidad, & el tal numero propuesto [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 454].

No *Tratado de Arithmetica* o conceito de raiz quadrada é associado à ideia geométrica de lado de um quadrado ("lado tetragonico"):

> Por rayz de números entendem los Mathematicos el origen de do sale algun produto. Quiero dezir, que todo numero sera, o se dira rayz de la multiplicacion que multiplicado en si una, o dos, o mas vezes hiziere como si se multiplica un tres por si mismo dizendo. Tres vezes tres

> haze nueve, a este nueve dizen quadrado y al tres le dizen rayz quadrada, o lado tetragonico [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 327].

Moya classifica as raízes de um número em "racional", ou "discreta", e "irracional", ou "sorda"; as primeiras são as que podem representar-se por um número inteiro, fraccionário ou misto, e as irracionais são aquelas em que tal não é possível. Mas o texto que nos oferece usa uma terminologia que não é a que actualmente empregamos: nele é referido o número 3 como irracional, pelo facto de a sua raiz não poder ser expressa como um número racional[250]:

> La raiz quadrada de qualquiera numero, o sera racional o irracional, quiero dezir, discreta, o sorda (…). La racional, o discreta, es aquella que se puede representar por algun numero, ya sea entero ya sea quebrado, ya entero y quebrado. Assi como la rayz de nueve, que es tres, o de un quarto, que es medio, o de seys y un quarto, que es dos y medio (…) Si el numero fuere irracional, o sordo, quiero dezir, que no tenga rayz justamente, como tres, o otros semejãtes, para representarla, o escrivir lo que es, no cures de aproximaciones, sino di que es rayz quadrada de tres, y escrivela deste modo, r3, y este documento primeiro sea general para outra qualquiera espécie de rayz [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 441- 442].

Em diversos momentos Moya refere-se às raízes "sordas" chamando-lhes números[251]. É isso que se observa, por exemplo, na resposta ao problema: "Dame un numero, que juntando su quadrado o potencia conel quadrado dela mitad del mismo numero, todo sea numero quadrado" onde, depois de resolver a equação que o traduz, Moya diz que "o numero pedido é r, de 20" (isto é, $\sqrt{20}$ em notação usual)[252]. E, de modo análogo, chama por vezes número à combinação de um racional (inteiro ou fraccionário) com uma raiz ou à combinação de duas raízes. Por exemplo, quando coloca a questão seguinte[253]: "Que numero sera aql q quitado le 2. y por outra parte añadiendo le 2. y multiplicando la resta por la

---

[250] A mesma ideia estava já expressa antes, quando Moya afirmou: "Diras que la rayz quadrada de ochenta y dos, es nueve, y sobra uno. Por lo qual, este numero ochenta y dos, se dira sordo, o irracional, y el nueve se dira su rayz sorda, o irracional, o indiscreta" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 329].

[251] De qualquer modo, a posição de Moya relativamente ao conceito de raiz quadrada de um número não é comparável à de Stevin que refere "qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds" [Malet, A., 2007, p. 11].

[252] "Saca la r, de 20, y porque no la tiene, diras que es r, de 20, y tanto sera el valor dela cosa y numero demandado" [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 88].

[253] [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 575-576].

summa, mõte 10.p. r. 180", responde dizendo "y vendra 3 p.r.5 & tanto es el valor de la cosa & numero demandado"; ou seja, o número é $3+\sqrt{5}$, em notação actual[254].

No *Compendio*, Moya adopta a seguinte metodologia no estudo dos radicais:

1.º Define número quadrado irracional (ou "sordo") e trata as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão com estes números;

2. Define número cubo irracional e trata as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão com eles;

3.º Ensina a reduzir radicais ao mesmo índice e introduz as operações com radicais quadrados e cubos;

4.º Trata dos números quadrados de quadrados (que são as raízes de índice quatro) e operações com eles;

5.º Define raiz universal e estuda as operações com estas raízes.

No *Tratado de Arithmetica* a organização é um pouco diferente e o estudo é mais detalhado e mais abrangente. Moya trata cada tipo de raiz e as respectivas operações, introduz as raízes de "primeros relatos" (a que chamamos actualmente raízes de índice 5); ensina a reduzir radicais ao mesmo índice e opera com radicais de índices diferentes. Tal como anteriormente, o conceito de raiz universal e as operações com estas raízes são deixados para o final. Por outro lado, nas operações que efectua discrimina todos os tipos de raízes (que a seguir estudaremos): "rayzes yguales en quantidad y genero"; "comunicantes"; "irracionales", e combinações destes tipos; e complementa as regras introduzidas com as respectivas provas aritméticas, recorrendo às operações inversas das dadas:

> Las pruevas destas 4 reglas de rayz quadrada, son las sus cõtrarias, quiero dezir, que la prueva real del summar se hara restando, y la del restar summando, y la del multiplicar partiendo, y la del partir multiplicãdo. De suerte que si aviendo summado r 2 com r 8, hallaremos que monta r de 18. Para provar si es verdad, restaras de r 18 (que dizes ser la summa) r 2 (por la regla del restar) y si saliere r 8 estara buena, y sino, no [Juan Pérez de Moya, 1573a, p.453 e seguintes].

Praticamente toda a informação constante no *Compendio* está incluída na parte algébrica do *Tratado de Arithmetica*[255].

[254] E também na resposta a um problema semelhante a este [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 580].

No *Compendio*, a terminologia "numero quadrado" é, frequentemente, usada em vez de "rayz quadrada", mas nas definições que Moya dá não há qualquer ambiguidade[256]:

> Numero quadrado es, un numero superficial de yguales lados. Quiero dezir que es un numero que procede de la multiplicacion de dos números yguales en quantidade e género [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 5-6].

Moya classifica os "numeros quadrados" em três tipos: "racionales", "irracionales", "comunicantes":

> Numero racional es un numero que tiene rayz discreta, quiero dezir justa, assi como 4, 9, 16. Que sus rayzes son 2, 3, 4. Numeros irracionales sõ unos números que no tienen rayz discreta, como 10, 12, y otros semejantes. Numeros comunicantes, son dos números, que cada uno por si no tiene rayz discreta: y abreviados a menor denominacion, la tienen: assi como 8, y, 18 los quales no tienen rayz quadrada: pero abreviando al uno y al outro proporcionadamente la tienen [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 6].

Nesta classificação o significado de discreta é o que em termos actuais se dá de racional. Por outro lado, interpretando as palavras de Moya, a e b são comunicantes se existir c tal que $\frac{a}{c}\left(=q_1\right)$ e $\frac{b}{c}\left(=q_2\right)$ sejam quadrados; assim, o resultado da soma dos dois radicais poderia exprimir-se por uma raiz simples: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^2 c}$.

Moya sublinha que a determinação da raiz quadrada nem sempre é possível no campo da aritmética, mas é sempre possível em geometria:

> Quando te piden que saques rayz de una qualquiera quãtidad, entenderas que la tal quantidade es area de un quadrado, y saber sacar su rayz es querer saber el lado, o principio de do el tal quadrado procedio. Y si dixessen rayz Cubica, la tal quantidade entenderas ser cuerpo Cubo [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 330].

---

[255] Dedica-lhes os capítulos 4, 5, 6, 7 e 15 do *Compendio dela regla dela cosa* [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 6-31 e pp. 47-61] e os capítulos 5 a 25 e 34 a 42 do Libro VII do *Tratado de Mathematicas* [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 441-467 e pp. 524-531].

[256] Por exemplo, o "articulo" intitulado "Muestra multiplicar números quadrados por números quadrados", trata da multiplicação de raízes quadradas [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 13].

E explica em que consiste geometricamente a raiz de uma qualquer "quantidade":

> Y es de saber que la proporcion que ay de la unidad a la rayz de un qualquiera numero, la misma ay de la rayz a su quadrado. De lo qual se sigue, que buscar la rayz quadrada de un numero no es outra cosa sino buscar una quantidade media proporcional entre la unidad y el tal numero propuesto, y esto no en todos los números se podra hallar, sino fuesse por via de linea [Juan Perez de Moya, 1573a, p. 329],

recorrendo à construção do meio proporcional entre dois segmentos, que damos mais adiante[257].

3.4.2. Operações com radicais quadráticos

Pérez de Moya trata as operações com radicais em todos os capítulos algébricos dos seus trabalhos, o que mostra bem a sua importância no estudo da álgebra; ele mesmo o sublinha lembrando a necessidade que a geometria, a cosmografia e a arte militar têm da raiz quadrada e a dependência da álgebra de todos os tipos de raízes[258]:

> Destas rayzes que se há dicho, la quadrada sirve para geometria, y Cosmographia, y para el arte militar, y para sacar medio proporcional entre dos estremos, y para a arte mayor. La cubica sirve para sacar dos medios proporcionales entre dos estremos, y para sacar la quantidad de los diametros en los cuerpos solidos, y para otras varias cosas, Y esta, con todas las demas que aqui tratamos generalmente, sirven para la regla de la cosa, o arte mayor, como en el processo desta obra se vera [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 328].

Outros autores, como Pedro Nunes e Peletier, referiram a dependência que a álgebra tem das raízes; para Pedro Nunes: "La pratica de las raizes no es menos necessaria en esta arte que la de las dignidades"[259]; e Peletier salienta que a perfeição da álgebra reside na invenção das raízes, sejam racionais ou irracionais:

---

[257] [*Cf.* Terceira Parte, 3.3.2.a].

[258] No *Tratado de Mathematicas*, Pérez de Moya dedica um capítulo ao estudo da determinação da raiz quadrada de fracções astronómicas o que mostra a importância que esta matéria tem, também, na astronomia [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 395].

[259] No posfácio que se segue à terceira parte principal, quando trata questões relacionadas com a resolução da cúbica, recorre ao cálculo radical, procurando números da forma $\sqrt{a}+b$, cujo cubo fosse um número da mesma forma [Silva, M. C., 2000, pp. 469-470].

> Combien que l'Algebre mette generalemãt an operacion toutes sortes de nombres: touteffoes elle considere principalement les nombres Radicaux, c'étadire qui ont an eus quelaque Racine a extrere. Car la perfeccion de l'Algebre, gìt an l'invancion des Racines, soét racionnalles ou irracionnalles[260] [Jacques Peletier, 1554, Premier livre, p.5].

Como dizem Malet e Paradis, o cálculo com radicais é a introdução natural ao cálculo algébrico[261].

São muito curiosas as questões que se colocam a Pérez de Moya e que se prendem com o sentido a dar a um radical quando o radicando não é um quadrado perfeito. Ele explica como se determina o quadrado de uma raiz, racional ou irracional, como se calculam o dobro e a metade de um radical quadrático, e como se generalizam estes conceitos a radicais de ordem superior. Vejamos, por exemplo, como o diz no caso do cálculo do dobro de uma raiz quadrada:

> Si quisieres doblar un numero quadrado [aqui, interpretamos "numero quadrado" com o significado de raiz quadrada] o cubo o outro qualquiera numero que fuere, tomaras el, 2, y quadrar le has o cubicarle has de tal suerte, que quede del especie del numero que huvieres de doblar: y despues multiplicaras por ello el quadrado, o cubo, o cosa que quisieres doblar[262] [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 7].

As afirmações feitas traduzem-se, em notação usual, por: $2\sqrt{a}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{a}=\sqrt{2^2 a}$ e $2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{2^3 a}$ e, segundo parece depreender-se das palavras de Moya, podem ser generalizadas a radicais de índices superiores.

Moya expõe regras gerais para a soma, a diferença, o produto e o quociente de radicais quadráticos, ilustrando cada uma destas operações com exemplos numéricos que envolvem cálculos muito simples. A adição é a primeira operação estudada; apesar de distinguir diversos tipos de "numeros quadrados", Moya não tem em consideração essa distinção quando trata as operações com estes números, dando regras operatórias gerais. O procedimento que descreve baseia-se no desenvolvimento do quadrado do binómio:

---

[260] "Conquanto a Álgebra ponha geralmente em operação todas as espécies de números, contudo ela considera principalmente os números radicais, ou seja, os que contém qualquer tipo de raiz a extrair. Porque a perfeição da Álgebra jaz na invenção das raízes, quer racionais quer irracionais" Nossa tradução livre [Jacques Peletier, 1554, Premier livre, p.5].

[261] [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 235].

[262] A mesma definição é dada em [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 442].

> Es de saber que la regla general que se ha de tener para summar dos quadrados racionales, o irracionales, o comunicantes de qualquier suerte que fueren, es summar uno com outro llanamente, y luego multiplicar el uno por el outro: y del producto sacar la r, y doblar la llanamente y juntar la con la summa delos dos numeros que al principio se summaron: la r, deste conujnto será la summa delas rayzes de los quadrados que sumares [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 9].

E em notação simbólica usual traduz-se do seguinte modo $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$. Isto significa que cada uma das somas $\sqrt{4}+\sqrt{9}$, $\sqrt{4}+\sqrt{11}$ e $\sqrt{11}+\sqrt{13}$, que Moya apresenta, pode ser tratada do mesmo modo; e mostra o carácter de generalização que a definição envolve. Moya não exemplifica com números comunicantes, mas facilmente se vê que a regra funciona ainda em casos como $\sqrt{8}+\sqrt{18}$. Na prática, quando, em $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$ não é racional, Moya vê-se obrigado a usar uma definição diferente da anterior para ser coerente com a definição de $2\sqrt{a}$, dada antes. Em notação usual, ela traduz-se por: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+\sqrt{4ab}}$ e que, quando aplicada ao cálculo de $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, tem como resultado $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+\sqrt{60}}$:

> Summa r 5, com r 3, summa los números como son 5 y 3 y seran 8, luego multiplica el uno por el outro: y montaran r 15, saca la r, y porque no la tiene diras que es r 15, (como se mostro enel aviso primero del primero articulo deste cpitulo 4) Pues assi como avias de doblar da r, si la huviera dobla esta r 15, y porque es quadrado multiplica por 4 (como se mostro en este 4 capitulo: articulo primero aviso tercero) y montara r 60, la qual r 60, juntaras com los 8, que es la summa delos dos numeros que pretendes summar desta manera rv, de 8, p r 60 [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 9].

Este último processo de somar radicais foi, certamente, muito divulgado na época; Pacioli dá-o na *Summa* e ilustra-o, precisamente, com o mesmo exemplo de Moya[263]. E Bento Fernandes indica apenas este processo para calcular a soma de radicais quadráticos[264].

Os casos da adição de duas raízes iguais e de um inteiro com uma raiz são revistos como casos particulares; o inteiro é, previamente, transformado numa raiz quadrada de

[263] [Luca Pacioli, 1494, f. 116v].

[264] [Silva, M. C., 2008, p. 197].

modo a permitir a aplicação imediata da regra dada. Em notação simbólica usual, o que Moya faz traduz-se por: $\sqrt{a}+\sqrt{a}=\sqrt{4a}$ e $a+\sqrt{b}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b}$ e, portanto, $a+\sqrt{b}=\sqrt{a^2+b+\sqrt{4a^2b}}$.

Moya distingue entre o que significa efectuar uma operação e indicar uma operação, notando que é possível exprimir, abreviadamente, a soma das raízes colocando entre elas um sinal "p". Na concretização da operação recorre ao símbolo "rv" ou "ru" (que representa a "rayz quadrada universal"), que usa para exprimir a raiz quadrada de uma expressão composta (ou seja, de uma expressão que combina linearmente um número racional com uma raiz surda). Pacioli emprega os termos "radice universale", "legata" ou "composta" para designar este tipo de radicais.

Para explicar como se efectua uma certa operação, os autores renascentistas de obras de matemática socorrerem-se, com frequência, de exemplos cujo resultado é, *à priori*, conhecido. Deste modo, era mais facilmente aceite a validade da regra indicada. Moya não é excepção. Por exemplo, para calcular $\sqrt{9}+\sqrt{4}$, usa a regra dada como se se tratasse de irracionais e nota que o resultado é o esperado. Embora com exemplos numéricos diferentes dos de Moya, tanto Marco Aurel como Bento Fernandes fazem o mesmo.

Como acabámos de ver, na regra geral indicada por Moya para a soma de radicais o objectivo é chegar a um resultado expresso, também, por radicais. O mesmo se observa na *Summa*, de Pacioli, na *Arithmetica Algebratica*, de Aurel, no *Tratado da arte de arismetica*, de Bento Fernandes e no *Triparty*, de Chuquet[265]. Malet e Paradis associam esse procedimento à necessidade de "fechar" a operação referida[266] e notam que o mesmo

---

[265] [Nicolas Chuquet, 1484, ff. 64-64v]; [Luca Pacioli, 1494, ff. 116v-117] ; [Marco Aurel, 1552, f. 44v]. A explicação dada por Bento Fernandes para somar $\sqrt{7}+\sqrt{8}$ é muito semelhante à de Moya. Veja-se [Bento Fernandes, 1555, ff. 81v-82].

[266] De acordo com Malet e Paradis, "As operações de somar, subtrair, multiplicar e dividir entre números inteiros positivos, ou fraccionários, conduzem sempre a um resultado expresso em forma numérica, sem deixar qualquer «operação indicada»; ao contrário, no momento de operar com radicais, isso não é possível e, como $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ e $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, inventou-se um método para de algum modo «fechar» a soma e a diferença de raízes. E assim já tem um certo sentido dizer que "a raiz de 2 mais a raiz de 10 é raiz do número (12 mais raiz de 80). Seria o mesmo argumento que faria inteligível a razão de preferirem deixar um resultado sob a forma de $\sqrt{32}$ em vez de $4\sqrt{2}$, partindo sempre da ideia que está mais definida a raiz de um número do que 4 vezes a raiz de um outro" [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 146].

argumento explica por que razão em vez de $4\sqrt{2}$ se usasse $\sqrt{32}$, pensando sempre que a raiz de um número está mais bem definida do que 4 vezes a raiz de outro[267].

Moya define a subtracção de radicais quadráticos à custa da adição, apontando a única diferença existente entre estas operações, que consiste em subtrair o dobro da raiz do produto dos dois números, em vez de somar:

> Lo mismo se haze enel restar que enel sumar, solamente diffiere, en que enel summar se summa el duplo dela r del producto (del un numero conel outro) con la summa delos dos números quadrados, aqui lo restaras si pudieres [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 11].

Nos exemplos apresentados não ocorrem situações em que o diminuendo é menor do que o diminuidor nem em que ambos são iguais. Chuquet, no *Triparty*, e Pacioli, na *Summa*, observam que a diferença entre duas raízes iguais é zero[268]. Pacioli nota que, quando as raízes são diferentes, só é possível tirar ("cavare") a menor da maior, tal como acontece com os números inteiros e fraccionários[269].

No *Tratado de Arithmetica* é ainda indicado um outro processo para somar radicais que se baseia na igualdade $a+b=\left(\frac{a}{b}+1\right)\times b$. Este método é dado no *Libro de Algebra* [270], de Pedro Nunes, e no *Triparty,* de Chuquet. A explicação de Moya é semelhante à que vemos no *Libro de Algebra*, embora exposta em termos mais gerais:

Qualesquiera dos quantidades de una misma naturaleza, si la una fuere partida por la otra, y se juntare al quociente la unidad, y el cõjunto se multiplicare por el partidor, el producto sera igual a la summa de ambas quantidades [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 444].

Partiremos el mayor numero por el menor, y la raiz del quociente daremos mas la unidad, y todo junto multiplicaremos por la menor raiz, y lo que se hiziere por esta multiplicacion sera el valor de las dos raizes juntas [Pedro Nunes, 1567, ff. 54v-55r].

---

[267] [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 146].

[268] [Nicolas Chuquet, 1484, ff. 69r-69v] ; [Luca Pacioli, 1494, f. 117v].

[269] [Luca Pacioli, 1494, f. 117v].

[270] [Pedro Nunes, 1567, ff. 54r - 55v]. Esta exposição está, também muito próxima da de Chuquet, como mostra o excerto do texto do matemático francês, que apresentamos a seguir: "Qui partyt ung nombre par ung autre et au quociens luy adiouste .1. Et puis lcelle addition multipliee par le partiteur il treuue le nombre paty et le partiteur adioustez ensemble" que traduzimos livremente por: "Quem parte um número por um outro e ao quociente junta .1. E depois multiplica esta soma pelo partidor, encontra o número partido e o partidor somados juntos" [Nicolas Chuquet, 1484, f. 65r].

Aplicada aos radicais quadráticos, traduz-se por: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)\times\sqrt{b}$ e é particularmente vantajosa quando se pretende somar números comunicantes, uma vez que o quociente destes números tem raiz quadrada "justa"; no entanto pode aplicar-se à soma de radicais de qualquer tipo, desde que os seus índices sejam iguais, como Pérez de Moya e Pedro Nunes sublinham.

Para a subtracção, Moya indica um procedimento baseado no mesmo princípio, cuja autoria atribui, genericamente, aos "Matemáticos". Não sabemos a que "Matemáticos" se refere, mas constatamos a semelhança existente entre o texto do *Tratado de Arithmetica* e o do *Libro de Algebra*:

Dierõ los Mathematicos en esto, considerando que propuestos dos qualesquieros números si se partiere el mayor por el menor, y del quociente se sacare la unidad, y lo que restare se multiplicare por el menor, el producto sera la diferencia que ay del uno al otro [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 448].

Certissima cosa es, que si la mayor de dos quantidades fuere partida por la menor, y del quociente sacaremos la unidad, y lo que restare fuere multiplicado por la menor, resultara por esta multiplicacion la diferencia que ay entre las mismas dos quantidades mayor y menor [Pedro Nunes, 1567, ff. 58r-59v].

E essa semelhança observa-se, também, na prova dada para mostrar que a regra está correcta, onde Pérez de Moya reproduz passo a passo o texto de Pedro Nunes (embora não refira o nome, nem a obra, do matemático português nesta passagem do seu texto):

La demostracion es evidente, porque si se multiplica el numero menor por el quociente, resultara el mayor. Y porque tanto viene multiplicando un numero por otro, como por sus partes, como en otro lugar demostramos, siguese, que si multiplicarmos el numero por la unidad, y por el resto del quociente ambas dos multiplicaciones, seran tanto como el numero mayor. Y porque multiplicando el numero menor por la unidad, hazemos el mismo numero

La demonstracion es muy clara, porque si multiplicamos la quãtidad menor por el quociente, hazemos la quantidad mayor. Y porque tanto haze multiplicar una quantidad por otra, como por sus partes, siguese que si multiplicaremos la quãtidad menor por la unidad, y por el resto del quociente, haremos con estas dos multiplicaciones la misma quantidad mayor. Y porque multiplicando la quantidad menor por la unidad, hazemos la

menor, multiplicando luego el numero mayor[271], por el resto del quociente se hara la diferencia, o ventaja que ay del mayor al menor, porque la diferencia, juntamente con el menor, cõstituye el mayor: lo qual tambien tiene lugar en cualquiera naturaleza de rayzes [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 448-449].

misma quantidad menor: Multiplicando luego la quãtidad menor por el resto del quociente, haremos la differencia que ay entre mayor y menor, porque essa differencia juntamente con la menor cõstituyen la mayor. Y que esto tenga lugar en las raizes no es difficil de entender [Pedro Nunes, 1567, ff. 57v-58r].

As operações de multiplicação e divisão de radicais quadráticos são mais fáceis de efectuar do que as de adição e subtracção. Moya reconhece-o e no *Compendio* limita o seu estudo a duas páginas. No entanto, não deixa de as referir e de as aplicar em exemplos numéricos simples. Em notação simbólica actual, podemos sumarizar as regras para estas operações, do seguinte modo: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$; $a\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2\times b}$; $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a^2}{b}}$; $\frac{\sqrt{a}}{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\sqrt{\frac{a}{b^2}}$. Estas regras, que Aurel já incluira na *Arithmetica Algebratica*, tornaram-se muito conhecidas em Espanha devido à grande difusão que teve a *Arithmetica practica, y speculatiua*, publicada por Moya em 1562, e reimpressa por diversas vezes no século XVI e nos dois séculos seguintes. Em Portugal foram impressas pela primeira vez no *Tratado da arte de arismetica*, de Bento Fernandes, publicado em 1555[272]; mas, a julgar pelas poucas edições conhecidas deste trabalho, não devem ter sido muito divulgadas por esse meio.

3.4.3. Operações com radicais de índice superior a dois

No *Compendio* são generalizados a radicais de índice superior a dois os procedimentos operatórios antes indicados para os radicais quadráticos; e são feitas observações relativas à sua validade em casos particulares, como, por exemplo, que $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{8\times a}$ e que $a+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b}$.

Moya chama "numeros mediales" (chamar-lhes-emos números mediais) ou "numeros quadrados de quadrados", aos números como $\sqrt[4]{7}$ cujo quadrado não é raiz quadrada exacta. Isto significa que um número medial é a raiz de índice quatro de um

[271] Moya comete um erro, escrevendo *mayor* onde deveria estar *menor*.

[272] Ver [Silva, M. C., 2008].

número não quadrado. Numa passagem obscura, diz que lhes dá esse nome porque os imagina, geometricamente, como meio proporcional entre duas superfícies quadradas proporcionais:

> Llama se superficie o numero medial, porque es medio proporcional entre dos superficies quadradas proporcionales [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 24].

A soma e a diferença de números mediais podem exprimir-se, em notação simbólica usual por: $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = \sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[4]{16ab}}$ e $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} = \sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[4]{16ab}}$ e a justificação dada por Moya baseia-se, tal como acontecia no caso dos radicais quadráticos, em *Elementos* II, 4.

Em certos casos, o uso destas regras pode fazer o cálculo depender da soma de raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos, acrescentando obstáculos à conclusão da operação. Deve ter sido essa a razão que levou Moya a reconhecer a dificuldade que os principiantes têm na compreensão deste assunto e a propor novas regras para somar e subtrair estes números:

> Porque para los principiantes es cosa difficultosa lo que se ha tratado en los articulos precedentes deste capitulo, quiero poner aquí otra orden de sumar e restar destos numeros quadrados dos vezes [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 28].

Estas 'novas' regras são as que Moya já havia indicado para somar e subtrair radicais cúbicos, adaptadas a radicais de ordem quatro: $\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \pm 1\right)^4 \times b}$; com $a > b$ e $b \neq 0$.

Os procedimentos para somar e subtrair radicais de índice 4 estão indicados na *Summa*[273]; contudo, quando Antich Rocha estuda este assunto na sua *Arithmetica* refere o processo e os exemplos dados por Moya na *Arithmetica practica, y speculativa*, mencionando o nome de Pérez de Moya[274]. Isto dá-nos ideia da importância da obra do nosso autor.

---

[273] Ver [Luca Pacioli, 1494, f. 118v].

[274] Diz Antich Rocha: "Algunos como Perez de Moya, y antes del Leonardo Pisano, ponen outra suerte de sumar y restar destos números mediales (los quales por esso se dizen mediales porque son quadrados dos vezes: como .16. es nũmero dos vezes quadrado, porque el primer quadrado del son los .4. y el segũdo son los

3.4.4. Redução de radicais ao mesmo índice

No *Compendio dela regla dela cosa* são também estudadas as operações aritméticas entre radicais de índices diferentes (raízes de "diversos géneros", como lhes chama Moya). Estas operações envolvem a redução a um índice comum, ou seja a um "género", que ele refere nos seguintes termos:

> Si te vinieren algunas rayzes de diversos generos, y las quisieres sumar, restar, o hazer dellas alguna otra cosa: tendras aviso de reducirlas a un genero: y después seguiras la regla que fuere como por los exemplos seguientes mejor entenderas [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 21].

A explicação é dada a partir do exemplo $\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}$ e os cálculos feitos explicam-se em notação simbólica pela sequência que se segue, observando o nosso autor que tanto faz calcular a raiz quadrada da raiz cúbica como a raiz cúbica da raiz quadrada [275]:

$$\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{\sqrt{4096}}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{4096}+\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{\left(\left(\sqrt[6]{\frac{4096}{64}}+1\right)^2\right)^3\times 64}=\sqrt[6]{729\times 64}=$$

$$\sqrt[6]{6^6}=6.$$

Moya não se pronuncia sobre a ordem pela qual devem ser estudadas as operações com radicais com o mesmo índice, mas Pedro Nunes nota que, embora usualmente a soma preceda a multiplicação, deve a multiplicação de radicais tratar-se primeiro porque dela depende a justificação da soma:

.2) queriẽdo pues sumar dos números quadrados dos vezes, lo haras desta suerte. Pongamos por caso que quisiesses sumar .81. (que es numero dos vezes quadrado, la primera quadracion tiene rayz .9. y la segunda rayz .3.) com .16. parte .81. a .16. y porque no sale particion integral sino com quebrado, disponer los has estos dos numeros como se fuessen quebrados desta suerte $\frac{81}{16}$ sacaras la rayz de rayz deste numero como de quebrado, y saldran $\frac{3}{2}$ que es $1.\frac{1}{2}$, añadiras uno siempre despues por la regla general, y seran $.2.\frac{1}{2}$, quadraras estos .2. y $\frac{1}{2}$ dos vezes diziendo .2. y $\frac{1}{2}$ vezes .2. y $\frac{1}{2}$, multiplicãdolos a modo de quebrados salen $\frac{25}{4}$ que son .6. y $\frac{1}{4}$, despues otra vez .6. y $\frac{1}{4}$ vezes .6. y $\frac{1}{4}$ salem $\frac{625}{16}$ multiplica esto por la menor cãtidad destas dos que sumas, digo de .81. y .16. y sera la menor la ra.16. y montara .625. enteros, pues ra. de ra. de .625. que es .5. sera lo que monta sumãdo ra. de ra. de .81. que es .3. com ra. de ra. de .16. que es .2. [Antich Rocha, 1565, ff. 233v-234r].

[275] [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 21].

> Aun que generalmente el sumar deva preceder al multiplicar, trataremos pero en esta parte primeramente de como avemos de multiplicar las raizes, porque de la su demonstracion depende la razon de sumar dos raizes en una que tenga el valor de las dos justamente [Pedro Nunes, 1567, f. 48r].

E Peletier também chama a atenção para o problema da prioridade das operações, dizendo:

> Voela notre façon d'ajouter les nombres Mediaux. Laquele, ancores qu'elle samble un peu longue: n'ét point pourtant si difficile, e si ét plus reguliere, que celle des autres. Lequez, outre la difficulte, font servir la Multiplicacion a l'Addicion e a la Souttraccion: Telemant qu'iz font contreinz d'anseigner la Multiplicacion la première, chose prepostere es Matematiques. Antre lequez ét Stifel: Qui balhe une maniere d'ajouter e de souttrere, cherche de bien loin: E ancores une par regle de 3. La ou tousjours il amprunte l'eide de la Multiplicacion. E toutes les deus nous avons ici omises: tant pour eviter obscurite, que pour donner ordre a brievete[276] [Jacques Peletier, 1554, Second livre, p. 148].

O estudo de Moya inclui diversas aplicações, mas não é acompanhado de notação adequada. Vemos, por exemplo, que nos cálculos apenas é indicado o modo de obter a raiz sexta sem que seja introduzida a notação que lhe corresponde: para determinar a raiz sexta ("censicubo") pode-se determinar a raiz quadrada (r) seguida da raiz cúbica (rrr), ou a raiz cúbica seguida da raiz quadrada. No entanto, pondo de parte a questão da notação, podemos dizer que Moya trabalha, sem dificuldade, as operações com radicais. Aurel também refere a possibilidade de operar com raízes de índices diferentes, a que chama, tal como Moya, "rayzes de diversos géneros", mas só exemplifica como proceder para a multiplicação, enquanto Moya trata também a subtracção, a adição e a divisão[277]. A notação que Aurel utiliza para representar as raízes é diferente da de Moya[278].

---

[276] Nossa tradução livre: "Eis a nossa maneira de somar os números Mediais. A qual, ainda que pareça um pouco longa: não é por isso mais difícil, e é mais regular, do que a dos outros. Os quais, além da dificuldade, fazem servir a Multiplicação à Adição e à Subtracção: de tal modo que eles são obrigados a ensinar a Multiplicação primeiro, coisa prepóstera em Matemática. Entre os quais está Stifel: que transmite uma maneira de somar e de subtrair, usada há muito: e ainda uma outra pela regra de 3. Onde sempre se socorre da Multiplicação. E nós omitimos aqui ambas: quer para evitar a obscuridade, quer para implementar a brevidade [Jacques Peletier, 1554, Second livre, p. 148].

[277] [Marco Aurel, 1552, f. 55r].

[278] Ver [Marco Aurel, 1552, f. 43r]. Sobre estas notações ver [Docampo, J., 2004, p. 550].

No *Tratado de Arithmetica*, o estudo das operações com radicais de índices diferentes é explorado com mais generalidade e precedido por uma introdução, semelhante à que Pedro Nunes faz no *Libro de Algebra*:

Notaras que en qualquiera especie de rayz ocurren numero, y denominacion. La denominacion nos muestra la naturaleza, o especie de la rayz, y el numero dize aquien se refirere [Juan Pérez deMoya, 1573a, p. 466].

Toda la Raiz tiene dos nombres .s. Numero, y Denominacion. El numero nos dize a quien es referida, y la denominacion nos dize su naturaleza [Pedro Nunes, 1567, f. 46r].

O modo como Moya explica a redução de radicais ao mesmo índice é análogo ao de Pedro Nunes e a terminologia utilizada aqui é a mesma. Moya substitui até a palavra "genero", que usara no *Compendio* para designar o índice de uma raiz, pela palavra "denominacion", que Nunes usa. Vejamos:

Queriendo reduzir dos, o mas rayzes, diversas en denominacio, a una semejante denominacion, multiplicaras los numeros a quien se refieren cada uno por si, segun la denominacion de la outra, luego multiplica la denominacion de la una por la dela outra, y lo que viniere sera denominacion comum de ambas [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 466].

Queriendo pues reduzir dos raizes de diversas naturalezas a raizes de una misma naturaleza y denominaciõ, multiplicaremos los numeros dellas cada uno conforme a la denominacion de la outra, y multiplicaremos denominaciõ por denominaciõ, y el produzido sera denominacion de entrambas [Pedro Nunes, 1567, ff. 46r-46v].

É importante notar que, quando Moya reduz dois radicais ao mesmo índice não se refere ao caso especial em que o índice de um radical é divisor do índice do outro; além disso, o exemplo que trata, que envolve a raiz quadrada e a raiz cúbica, não nos permite concluir sobre se terá pensado nisso. Em Pedro Nunes essa preocupação é clara; ao reduzir ao mesmo índice uma raiz de índice 6 e outra de índice 3, ele utiliza o *mmc* (6, 3).

Em resumo, podemos dizer que nos trabalhos de Moya se mostram regras operatórias para radicais com índices diferentes, o que não nos surpreende, pois o cálculo com quantidades irracionais foi muito desenvolvido por alguns autores árabes que, por vezes,

mostraram conhecer partes do livro X dos *Elementos* de Euclides[279]. Essas regras podem ser traduzidas em notação usual por: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n\times p]{a^p}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$; $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \pm \sqrt[nm]{b^n} = \left(\sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}} \pm 1 \right) \times \sqrt[nm]{b^n}$; $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[nm]{a^n} \times \sqrt[nm]{b^m} = \sqrt[nm]{a^n \times b^m}$ e $\sqrt[m]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[nm]{a^n} \div \sqrt[nm]{b^m} = \sqrt[nm]{a^n \div b^m}$.

3.4.5. Algoritmos para o cálculo de raízes de diversos índices

Pérez de Moya não considera o cálculo algorítmico das raízes de números como assuntos algébricos e, por isso, esses estudos não integram o *Compendio dela regla dela cosa*, nem o capítulo do *Tratado de Arithmetica* dedicado à álgebra[280]. No entanto, no *Tratado de Arithmetica* dedica a este tema todo o "Libro V", constituído por cerca de 60 páginas, indicando processos exactos e aproximados para determinar raízes cujo índice varia de 2 a 11.

Não nos vamos alongar em detalhes sobre os procedimentos descritos, limitamo-nos a algumas considerações sobre a raiz quadrada e a raiz cúbica. Um dos algoritmos que Moya apresenta para a determinação da raiz quadrada de números (inteiros positivos) de mais de dois algarismos ("de mas de dos letras"), que seja quadrado perfeito, é semelhante ao que actualmente se utiliza e pode, também, aplicar-se à determinação de um valor aproximado de uma raiz quadrada irracional. Moya trata-o, no caso da raiz quadrada de 524176, indicando todos os passos e obtendo como resultado 724. No final faz a verificação, mostrando que $724^2 = 524176$ e observando que, como o resto é zero ("no te sobro ninguna cosa") a raiz se diz "discreta, o perfecta, o racional"[281].

Moya refere três processos para obter valores aproximados de uma raiz quadrada, que descrevemos, sumariamente, em notação usual:

1) $\sqrt{a} \approx b + \frac{a - b^2}{2b+1}$; onde b é o maior número inteiro cujo quadrado não excede a.

Marco Aurel refere este processo, mas Moya só cita Finé:

---

[279] [Rashed, R., 1997, p. 37]. Al-Khwarizmi na sua álgebra também trata o cálculo com radicais embora restringindo-se aos radicais quadráticos [Moreno Castillo, R., 2009, pp. 43- 45].

[280] Høyrup sublinha o papel importante que o cálculo de valores aproximados das raízes quadradas tinha nos textos de ábaco, pois essas aproximações eram sempre usadas nas aplicações do teorema de Pitágoras [Høyrup, J., 2007, p. 5 e em especial nota 6].

[281] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 332].

> Algunos, como Oroncio, quieren que sacando rayz de numeros sordos, que lo que sobrare se põga sobre una raya, y la rayz que oviere salido se doble y añada un punto, y se ponga por denominaciõ a lo que sobro [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 334].

Moya não nos dá pistas sobre a obra de Finé em que viu este resultado e nós não conseguimos encontrá-lo na parte aritmética da sua obra, traduzida em italiano com o título *Opera di Orontio Fineo del Delfinato: diuise in cinque parti; arimetica, geometria, cosmografia, e oriuoli*, e publicada em Veneza, em 1587. Observamos, no entanto, que o termo "salido" sugere a consulta de uma tabela de quadrados, que poderia permitir a determinação do "maior inteiro cujo quadrado não excede *a*, ou seja *b*.

2) Baseia-se na igualdade $\sqrt{a}=\frac{\sqrt{10^{2k}\,a}}{10^k}$ e recorre à aproximação dada no ponto anterior. Funciona assim: suponhamos que se pretende determinar um valor aproximado de $\sqrt{a}$. Calcula-se o valor inteiro mais próximo de $\sqrt{10^{2k}\,a}$, para um valor natural qualquer de *k*, mas sem o exceder, e divide-se o resultado por 10^k. Moya dá o seguinte exemplo: $\sqrt{40}=\frac{\sqrt{400000}}{100}\approx\frac{632}{100}=6+\frac{8}{25}$ e nota que um argumento como este permite calcular aproximações tão boas quanto se quiser, bastando, para tal, tomar valores de *k* cada vez maiores que o anterior.

3) Recorre ao método dos valores intermédios de Chuquet que, segundo Rey Pastor[282], Moya teria provavelmente aprendido na *Aritmética* de La Roche, de 1520[283].

O método indicado pelo nosso autor envolve duas sucessões: uma, por "augmentacion" $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots$, e, outra, por "diminucion" $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\ldots.$, e ele explica-o sobre o exemplo da determinação de $\sqrt{5}$, começando por enquadrar $\sqrt{5}$ entre dois números inteiros consecutivos: $2<\sqrt{5}<3$.

---

[282] [Rey Pastor, J., 1934, p. 105, Nota de rodapé 1].

[283] Sesiano descreve o método de Chuquet [Sesiano, J., 1988, pp. 36-40] que é conhecido por "regra dos valores intermédios": dadas duas fracções, $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{d}$, tais que $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$, forma a fracção $\frac{a+b}{c+d}$ tal que $\frac{a}{c}<\frac{a+b}{c+d}<\frac{b}{d}$. A aplicação repetida desta regra permite inserir entre duas fracções dadas, tantos termos intermédios quantos se queira. Sesiano refere Moya entre os autores que transmitiram esse método.

Os passos que dá são os seguintes: calcula a semi-soma dos extremos e, comparando o quadrado do valor obtido com 5, conclui que $2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$. Como $\frac{5}{2} > \sqrt{5}$, utiliza a sucessão decrescente, tomando $2 + \frac{1}{3}$ e conclui que $2 < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{3}$. Repete o procedimento, obtendo $2 < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4}$ e, finalmente, $2 + \frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4}$. Recorrendo à regra de Chuquet, determina um valor compreendido entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9} = \frac{1+1}{5+4}$, tal que $2 + \frac{2}{9} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4}$, e recomeça o processo, aplicando sucessivamente a regra de Chuquet, até obter uma aproximação tão boa quanto quiser[284].

No *Tratado de Arithmetica* é, também, referido o método de Tartaglia, que em notação actual se traduz por $\sqrt{a} \approx b + \frac{a - b^2}{2b}$, onde *b* é o maior número inteiro (positivo) cujo quadrado não excede *a* (é claro que $b \neq 0$, mas isso não é referido). Moya cita Tartaglia:

> Nicolas Tartalla quiere que al duplo de la rayz no se añada uno, sino que solamente se doble la rayz que oviere venido, y se ponga debaxo de lo que sobrare por denominacion [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 334].

E compara o método do matemático italiano com o de Finé (dado em 1)), indicando quais os casos em que é preferível usar cada um deles. Vejamos o que ele diz: primeiro determinam-se os dois quadrados perfeitos mais próximos do número de que se quer saber a raiz quadrada, um que o anteceda e outro que o exceda. Moya não diz explicitamente que entre esses quadrados há um número par de números, mas usa o resultado, referindo que para a primeira metade de números, isto é, para os menores, o processo de Tartaglia dá uma melhor aproximação do que o de Finé; e, para a segunda, é preferível o de Finé. Com alguns exemplos, Moya pretende mostrar que esta opção está correcta. Mas é possível verificar que se engana [285].

---

[284] [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 464-465].

[285] Verificámos que a regra geral indicada por Moya está errada, embora seja certo que conduz a valores aproximados por excesso, quando se aplica a fórmula de Tartaglia e a valores aproximados por defeito, quando se aplica a fórmula da Finé. Agradecemos à Maria Carvalho a ajuda dada.

Na *Arithmetica*[286], são dados algoritmos para a determinação da raiz cúbica, no caso em que o número (natural) é um cubo perfeito ou, sendo fraccionário, se exprime por uma fracção cujos termos são cubos perfeitos; e é exposta uma regra para determinar o valor aproximado da raiz cúbica, nos outros casos. Essa regra exprime-se, assim, em simbologia actual: $\sqrt[3]{a} \approx b + \frac{a - b^3}{3b(b+1)+1}$, onde b é o maior número inteiro cujo cubo não excede a. Este processo é o utilizado por Aurel, mas o exemplo escolhido por Moya é diferente[287]. Embora estudado já no século XIII, por Fibonacci[288], este assunto foi tão importante no século XVI que mereceu a atenção e a crítica de alguns dos principais algebristas daquela época[289].

Um aspecto que é interessante destacar é que a extracção da raiz cúbica, que Pérez Moya apresenta na *Arithmetica practica, y speculativa*, contribuiu para tornar o seu nome conhecido fora de Espanha. Na *Practique de Arithmetique,* Stevin refere-se ao nosso autor[290]. Consultámos a obra de Stevin (na edição de 1634) e constatámos que aplica o mesmo algoritmo de Moya $\left(\sqrt[3]{a} \approx b + \frac{a - b^3}{3b(b+1)+1}\right)$ à determinação de $\sqrt[3]{600}$, obtendo $\sqrt[3]{600} \approx 8 + \frac{88}{3 \times 8 \times (8+1)+1}$. A importância que Stevin atribui a Pérez de Moya é clara:

> Nicolas Tartaglia traictant curieusement de ceste reste, n'ajouste poinct ce dernier 1 [refere-se ao 1 que está no denominador, mais à direita], comme nous (avec Iuan Peris de Moya) avons faict, & à mon Avis, voulant donner reigle generale, il y a plus de raisons de ajouster, que de le laisser [Simon Stevin, 1634, p. 30].

Stevin nota que, por vezes, a regra de Tartaglia conduz a valores mais próximos da raiz cúbica, mas justifica a sua preferência pelo algoritmo que Moya utiliza por lhe parecer

---

[286] [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 481-491].

[287] [Marco Aurel, 1552, ff. 50v-52r].

[288] Fibonacci aplica-o em numerosos exemplos e reivindica a sua descoberta [Allard, A., 1997, p. 227, nota de rodapé 183].

[289] Pacioli, na *Summa*, expõe uma outra regra, que em notação actual se exprime por: $\sqrt[3]{a} \approx b + \frac{a - b^3}{(3b)^3}$ e que Tartaglia mostra, com um exemplo, ser má aproximação [Nicolo Tartaglia, 1556, f. 27r]; e Cardano indica $\sqrt[3]{a} \approx b + \frac{a - b^3}{3b^2}$ que merece, igualmente, a crítica de Tartaglia [Nicolo Tartaglia, 1556, f. 27r].

[290] Como diz [Rey Pastor, J., 1934, p. 104].

mais correcto tomar uma aproximação por defeito, do que por excesso. Por outro lado, observámos que, para obter valores sucessivamente mais próximos da raiz cúbica de um número, Stevin propõe uma regra semelhante à regra dada por Moya para a raiz quadrada, baseada no produto (e divisão) por sucessivas potências de 10 (a que nos referimos atrás)[291].

Para terminar este assunto, resta dizer que no *Tratado de Arithmetica*, quando trata a questão da determinação da raiz "tercera relata" (isto é, de índice 11) de um número misto, Pérez de Moya menciona Stifel e Tartaglia, como sendo os que têm maior competência nesta matéria:

> Quando quisieres sacar rayz tercera relata de entero e quebrado, reduze el entero en el especie, o denominacion del quebrado, con quien viniere, y junta com el mismo quebrado, y quedara como quebrado solo, el qual si fuere discreto, quiero dezir, si pudieres sacar rayz tercera relata de su nombrador, y denominador, sacar la has (como en el quebrado solo discreto) y si no tuviere en ambas partes rayz justamente, sigue la regla que en el articulo precedente se puso en el segundo exemplo. Lee sobre esto a Michael Stiphelio, y a Nicolas Tartalla, porque estos passan adelante sobre esta matéria [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 395].

Na verdade, Tartaglia dedica uma boa parte do segundo volume do *General Trattato* ao cálculo do valor exacto e aproximado de raízes de diversos índices, de números inteiros, fraccionários e mistos[292]. E Stifel trata este tema ao longo de dezasseis páginas[293].

3.5. Natureza dos irracionais. Binómios e resíduos

Como se sabe, o livro X dos *Elementos* de Euclides contém o estudo e classificação de algumas classes de números irracionais, abordando a incomensurabilidade de um ponto de vista geométrico. No século XIII, Fibonacci apresentou uma aritmetização desse livro dos *Elementos* e nos dois séculos que lhe seguiram o tema dos irracionais não mais deixou de ser objecto de atenção e estudo aritmético, constando em diversos textos manuscritos[294]. Em 1494, Pacioli tratou-o na *Summa*, onde apareceu pela primeira vez impresso, ocupando todo

[291] [Simon Stevin, 1634, p. 30].

[292] [Nicolo Tartaglia, 1556, ff. 23v –73v].

[293] [Michael Stifel, 1544, ff. 38v-46v].

[294] [Sigler, L., 2002, pp. 494-496].

o "Tractatus tertius" da "Distinctio octava"[295]; e de um modo geral, os algebristas mais importantes do século XVI incluíram este assunto nas suas obras. Mencionamos, por exemplo, Cardano, Tartaglia, Nunes, Stevin, Stifel e Peletier[296].

3.5.1. Classificação dos irracionais

No *Compendio dela regla dela cosa* Moya refere que os matemáticos inventaram quinze tipos de quantidades, sobre cujo estudo se debruçaram[297]; no *Tratado de Arithmetica* nota que essas quantidades são em número infinito, embora se agrupem todas em quinze "géneros", e aconselha a leitura das definições que precedem a proposição 42 do libro X dos *Elementos*[298]. Começa, assim, a sua descrição no *Compendio*:

> Los Mathematicos inventaron 15 quantidades, acerca delas quales emplearon principal estudio. La primera dixeron ser racional en potencia y longitude, y por esta entendieron todo numero (ya sea entero, ya seja quebrado) que tiene r discreta: assi como 9, que su r es 3, y otros semejantes (…). La segunda q. dixeron ser racional tan solamente en potencia, y no en longitude: y por esta entendieron todo numero que no tiene r discreta. A las otras treze quantidades llamaron irracionales: y la primera dellas es simple, y las doze compuestas. La simple es dicha en practica linea media, por la qual es entendida rr, la qual se dize superfície media [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 47].

---

[295] [Luca Pacioli, 1494, ff. 119v-143r].

[296] Peletier trata-o nos 27 capítulos que constituem o segundo volume da sua obra algébrica. O estudo começa com a caracterização dos números irracionais e termina com um conjunto de exemplos de aplicação que, como diz, copia de Stifel, enquanto não compõe um terceiro volume onde pensa tratar demonstrações e exemplos geométricos e "invenções novas, para o aperfeiçoamento da Álgebra". A caracterização dos irracionais, feita por Peletier, é diferente da de Pérez de Moya. Argumentando sobre se os irracionais (entendidos como raízes irracionais de números inteiros) são números verdadeiros ou "fingidos", Peletier nota que, tal como o número infinito ("le nombre infini"), também os irracionais não são números pois "não há proporção do racional para o irracional tal como não há (proporção) do (número) finito para o infinito". Isto significa que não é possível exprimir os irracionais como razão entre números inteiros. No entanto, Peletier considera que os números irracionais 'participam' dos números absolutos (hoje chamados naturais) pois têm as suas espécies e a sua numeração. Por outro lado, como diz, os irracionais comunicam com os inteiros, pois pela multiplicação dum irracional pode produzir-se um racional. Além disso, participam da natureza dos números fraccionários ("rompuz") pois entre dois inteiros consecutivos há infinitos irracionais: como também aí existem infinitos números fraccionários [Jacques Peletier, 1554, pp. 130-202].

[297] Moya não especifica quais são os matemáticos a que se refere, mas podemos dizer que na *Arithmetica practica, y speculatiua*, quando trata este assunto, ele aconselha a leitura do livro X dos *Elementos* de Euclides.

[298] São seis definições, que podem ver-se em [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 342], mas que não estão incluídas na versão dos *Elementos* de Euclides, de Heiberg.

A primeira quantidade é constituída pelos números inteiros e fraccionários (positivos[299]) com raiz racional, a que Moya chama "racionales en longitude y potencia"[300]. A segunda quantidade é constituída pelas raízes de números racionais não quadrados; são racionais "tan solamente en potencia", isto é, apenas quando quadradas[301]. Às treze quantidades restantes Moya chama irracionais; dessas, a primeira é simples e, em linguagem actual, dizemos que é a raiz quarta de um número não quadrado. As outras doze são os binómios e os resíduos. Para entendermos a linguagem de Moya, convém dizer que os "binómios" são entes matemáticos da forma $A+B$ e os "resíduos" são $A-B$, em que pelo menos um dos A e B é um radical quadrático (e no caso da diferença é $A>B$)[302].

> Los binomios se causan de ajuntamiento de una cosa diferente con otra. Assi como si quisiessemos summar 4 con r 7, en tal caso porque r 7 no tiene r racional [*sic*], juntamos lo uno con lo outro, com la dicion del p, diziendo que monta 4 p r 7, y queda hecho un binomio [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 50].

Moya distingue seis tipos de binómios, caracterizando e exemplificando cada um deles.

Apresentamo-los, em seguida, em notação simbólica actual.

1) "Binomio primeiro": $a+\sqrt{b}$ tal que a^2-b é um quadrado. Por exemplo $4+\sqrt{7}$;
2) "Binomio segundo": $\sqrt{a}+b$ tal que $\frac{a-b^2}{a}$ se pode escrever como uma razão de quadrados. Por exemplo, $\sqrt{112}+7$;

---

[299] No século XVI e XVII, os números e as grandezas não podiam, por definição, ser negativos [Malet, A., 2007, p. 11].

[300] Interpretando literalmente o texto de Moya, somos levados a concluir que a primeira quantidade é constituída pelos números racionais (no sentido actual) cuja raiz quadrada é um número racional (a que Moya chama discreta, como vimos em 3.4.1). Apesar de poder parecer-nos redundante (pois um número que fosse racional em longitude seria racional em potência!), entendemos que se trata apenas de uma designação para os racionais cuja raiz é racional. Por outro lado, a interpretação que apresentamos consta em [Luca Pacioli, 1494, ff. 119v-120r].

[301] É claro que esta terminologia não é concordante com a que actualmente usamos, pois Moya chama racionais a números que designamos por irracionais.

[302] O termo binómio não tem o significado de soma algébrica de dois monómios, que actualmente lhe damos, mas as operações que sobre ele se definem denotam a proximidade entre o estudo dos radicais e o dos polinómios.

3) "Binómio terceiro": $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ tal que $\frac{a}{b}$ não se pode escrever como uma razão de quadrados e sendo $a>b$, $\frac{a-b}{a}$ se pode escrever como uma razão de quadrados. Por exemplo $\sqrt{32}+\sqrt{14}$;

4) "Binomio quarto": $a+\sqrt{b}$ tal que, a^2-b não é quadrado. Por exemplo $5+\sqrt{12}$;

5) "Binomio quinto": $\sqrt{a}+b$, com $a>b^2$ e $\frac{a-b^2}{a}$ não se pode escrever como uma razão de quadrados. Por exemplo, $\sqrt{20}+3$;

6) "Binomio sexto": $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ tal que, $a>b$ e $\frac{a-b}{a}$ não se pode escrever como uma razão de quadrados. Por exemplo, $\sqrt{20}+\sqrt{8}$.

Encontrámos esta mesma classificação dos binómios na *Summa*[303]; como Docampo observa, Pacioli indica a classificação e exemplos do *Liber abaci* de Fibonaci[304]. Na *Arithmetica Algebratica*, Aurel faz uma classificação nos mesmos tipos de binómios, embora a condição que caracteriza cada um deles nem sempre coincida com a dada por Moya. Por outro lado, os exemplos escolhidos por Moya são todos diferentes dos de Aurel (quadro 8); para os casos dos binómios primeiro, segundo, quinto e sexto coincidem com os de Pacioli e, portanto, com os de Leonardo de Pisa.

Antich Rocha, na sua *Arithmetica*, refere sobre este assunto o *Libro di Arithmetica & Geometria speculativa & pratical*, de Francesco Feliciano, e indica os exemplos de Feliciano que apresentamos no quadro abaixo. Nesse quadro incluimos os exemplos de todos os autores citados[305]. Quando comparámos (quadro 8) os valores dados por Moya, no

---

[303] [Luca Pacioli, 1494, ff. 120r-121r]. Na mesma página podem ver-se os exemplos dados por Pacioli para os binómios terceiro e quarto, que são $\sqrt{112}+\sqrt{84}$ e $4+\sqrt{10}$, respectivamente, e que estão correctos.

[304] [Docampo, J., 2004, p. 425, Nota de rodapé 233].

[305] [Antich Rocha, 1565, ff. 240r-241v]. O *Libro di Arithmetica & Geometria speculativa & pratical* de Feliciano foi impresso pela primeira vez em 1526. Sobre Francesco Feliciano, Swetz e Katz referem que pouco se sabe da vidad dele; embora afirmem que nasceu em Lazisa, perto de Verona, e que ainda estava vivo em 1563. Sobre o *Libro di Arithmetica & Geometria* observam que é, basicamente, uma revisão do seu *Libro de Abaco*, de 1517.
http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&bodyId=3735 (Consultado em 4 de Novembro de 2010). Smith, na *Rara Arithmetica*, realça a importância desta obra entendendo que ela é mais completa do que a de *Treviso*, mais moderna do que a de *Borgi*, mais condensada e prática do que a de *Pacioli*; e sublinha que poucos livros tiveram tão grande influência no ensino da matemática elementar. A edição que nós consultámos, de 1563, está disponível na *Gallica*, e é lá que se encontram as informações que referimos. Desta obra de Feliciano é também conhecida uma edição de 1669.

Compendio, com os de Feliciano, dados na *Arithmetica* de Rocha, detectámos uma situação curiosa: todos eles coincidem para os diferentes tipos de binómios à excepção do quarto tipo. E no terceiro binómio Moya é o único que usa o exemplo de Feliciano, exemplo esse que não vem de Fibonacci. Estas coincidências levam-nos a admitir a hipótese de Moya conhecer o texto de Feliciano, ou ambos terem uma fonte comum.

Autor / Nome	Fibonacci [1202]	Pacioli [1494]	Feliciano [1526]	Aurel [1552]	Moya [1558]	Moya [1573]
Primero binómio	$4+\sqrt{7}$	$4+\sqrt{7}$	$4+\sqrt{7}$	$27+\sqrt{200}$	$4+\sqrt{7}$	$4+\sqrt{7}$ $\sqrt{34}+5$
Segundo binómio	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{180}+10$	$\sqrt{112}+7$	$\sqrt{112}+3$
Tercero binómio	$\sqrt{112}+\sqrt{84}$	$\sqrt{112}+\sqrt{84}$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$	$\sqrt{96}+\sqrt{72}$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$	$\sqrt{32}+\sqrt{14}$
Quarto binómio	$4+\sqrt{10}$	$4+\sqrt{10}$	$4+\sqrt{10}$	$100+\sqrt{4000}$	$5+\sqrt{12}$	$5+\sqrt{12}$
Quinto binómio	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{864}+24$	$\sqrt{20}+3$	$\sqrt{20}+3$
Sexto binómio	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$	$\sqrt{864}+\sqrt{288}$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$	$\sqrt{20}+\sqrt{8}$

Quadro 8: Mostra os exemplos dados por Fibonacci, Pacioli, Feliciano, Aurel e Pérez de Moya para cada um dos seis tipos de binómios. Os exemplos de Feliciano são os indicados em [Antich Rocha, 1565, ff. 240r-241v].

Para podermos confirmar as informações dadas por Antich Rocha, procurámos os exemplos dados por Francesco Feliciano na edição do *Libro di Arithmetica & Geometria speculativa & pratical*, de 1563 (a única que nos foi possível consultar). Verificámos que, nessa edição, os exemplos de Feliciano não são os indicados por Antich Rocha, sendo o 1º binómio: $4+\sqrt{7}$; o 2º binómio: $\sqrt{112}+7$; o 3º binómio: $\sqrt{112}+\sqrt{84}$ e $\sqrt{18}+\sqrt{10}$; o 4º binómio: $4+\sqrt{10}$ e $4+\sqrt{6}$; o 5º binómio: $\sqrt{20}+3$ e $\sqrt{6}+2$ e o 6º binómio: $\sqrt{20}+\sqrt{8}$. Donde se conclui que os exemplos indicados no *Compendio* estão "mais próximos" dos da versão da obra de Feliciano referida por Antich Rocha do que dos da edição de 1563.

Apesar de no *Tratado de Arithmetica* a caracterização dos binómios ser a que se encontra no *Compendio*, Moya indica outros exemplos para os binómios primeiro e segundo (quadro 8) e explica com mais detalhe o modo de formação de cada um[306].

Nos trabalhos da época que consultámos não encontrámos qualquer explicação para a importância da distinção dos binómios em seis tipos; mas Bortolloti, que prefaciou e editou

[306] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 498 e seguintes].

a primeira edição integral da obra *L'Algebra*, de Bombelli, nota que essa distinção tem por finalidade permitir o reconhecimento dos binómios que são quadrados perfeitos[307].

Relativamente aos resíduos (a que Moya chama "recissos", ou "disjuntos"), o aspecto que nos parece mais importante salientar está relacionado com o cuidado que é necessário ter na sua representação. Moya nota que $a+\sqrt{b}$ e $\sqrt{b}+a$ representam o mesmo binómio, mas que o resíduo que lhe corresponde é $a-\sqrt{b}$, se $a^2>b$, e é $\sqrt{b}-a$, se $b>a^2$. Quanto ao estudo dos resíduos, observa que só é diferente do dos binómios no sinal que une os dois números; e remete o leitor para as definições dos *Elementos* que precedem a proposição *Elementos* X, 80, na edição de Campano de Novara[308].

3.5.2. Operações com binómios e resíduos

No *Compendio dela regla dela cosa*, as operações envolvendo binómios e resíduos são introduzidas por uma ordem que não é a que habitualmente se usa nas operações aritméticas. Em geral, Moya trata em primeiro lugar a adição, seguida imediatamente da subtracção, da multiplicação e da divisão; e só depois estuda a operação de radiciação[309]. Aqui, começa pela extracção da raiz quadrada e cúbica de binómios e resíduos e só depois estuda as outras operações. Na *Summa* de Pacioli é, também, a raiz quadrada a primeira operação tratada sobre binómios e resíduos[310]. Entendemos que esta prioridade pode estar relacionada com a importância que o conhecimento das raízes tem na determinação das soluções das equações e com o objectivo, essencialmente prático, deste seu trabalho. No *Tratado de Arithmetica*, Moya volta a seguir a ordem usual, começando pela adição e terminando na radiciação. É esta a ordem que implementamos no nosso trabalho.

---

[307] [Bortolloti, E., 1966, p. 66, nota de rodapé 29]. Pudemos verificar que Bombelli classifica os binómios do mesmo modo que Moya (excepto no caso do terceiro binómio, em que não impõe a condição "$\frac{a}{b}$ não é uma razão de quadrados". Além disso, notámos que, à excepção do binómio do 1º tipo, para o qual um dos exemplos dados coincide com o de Moya, todos os outros exemplos são diferentes.

[308] Trata-se das seis definições de residuos. Ver [Busard, H. L. L, 2005, Vol. I, p. 368]. [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 504].

[309] Referimo-nos, por exemplo, às operações sobre números que Moya designa por *números quadrados*, *cubos*, *quadrados de quadrados* e, também, sobre *caracteres*.

[310] [Docampo, J., 2004, pp. 426-437] refere-se, com detalhe, a este assunto, apresentando o estudo relativo aos *binomios* e *recisos* feito por Pacioli na *Summa*.

Adição e subtracção

As operações de adição e subtracção envolvendo binómios e resíduos só exigem que, além da habitual soma de números, sejam conhecidas as regras para somar e subtrair radicais e as regras dos sinais. Talvez por essa razão Pedro Nunes não lhes dê destaque especial, incluindo-as no estudo mais geral das operações com radicais. Aparte as questões de notação, Moya trata as operações entre binómios e resíduos em termos muito semelhantes aos de Aurel[311]:

Enel summar binomios o residuos, no ay que hazer sino summar cada cosa con su ygual. Quiero dezir summar los numeros con numeros, como se soma en numeros: y r cõ r, como se summa la r, y enlo del p. y m. tener en la memoria lo que se dixo en el articulo primero del octavo capitulo acerca del summar caracteres conla dicion del p, y m [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 56].

En summar de binomios, y residuos, no ay outro que hazer, salvo que summes cada genero com su ygual. Como numero com numero: √ con √ . Y el summar delos numeros sea llanamente: y el delas √ , como en summar y restar delas rayzes quadradas has visto. Solo te encomiendo los suso dichos avisos, del +, y – [Marco Aurel, 1552, ff. 57r-57v].

E indica todas as regras para somar e subtrair binómios e resíduos, que em notação simbólica usual, se traduzem por:

$$\left(a\pm\sqrt{b}\right)+\left(c\pm\sqrt{d}\right)=(a+c)\pm\left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right);\ \left(a\pm\sqrt{b}\right)+\left(c\mp\sqrt{d}\right)=(a+c)\pm\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right);$$
$$\left(a\pm\sqrt{b}\right)-\left(c\pm\sqrt{d}\right)=(a-c)\pm\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right);\ \left(a\pm\sqrt{b}\right)-\left(c\mp\sqrt{d}\right)=(a-c)\pm\left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right).$$

Na operação de subtracção, o estudo é complementado com uma observação relativa ao caso em que o diminuendo é do tipo $a+\sqrt{b}$, com $a=0$, e o diminuidor é do tipo $c+\sqrt{d}$, com $c\neq 0$, ou $b=0$ e $d\neq 0$, em que Moya observa:

> Nota si huvieres de restar algun caracter, y no huviere en la partida de arriba outro de su genero, para restarla [*sic*] assentaras la misma quantidad que avias de restar debaxo dela raya por resta, y trocarle has la dicion del p o m, que truxere. Quiero dexir que si truxere p, pondras m, y si m, pondras p. y si viniere arriba alguna q. y no huviere abaxo que quitar della. ponerle has abaxo por resta, como arriba estuviere [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 58].

[311] [Marco Aurel, 1552, ff. 57r-58v].

As regras anteriores são aplicadas a quinze exemplos abrangendo todas as possibilidades (excepto a da diferença entre binómios e resíduos) e acompanhadas da explicação sobre o modo de dispor os cálculos "en figura". Os esquemas que reproduzimos a seguir (figura 13) mostram como Moya faz isso, para $\left(5+\sqrt{18}\right)+\left(4+\sqrt{8}\right)$, $\left(10+\sqrt{18}\right)-\left(5+\sqrt{2}\right)$, $\left(6-\sqrt{20}\right)+\left(7-\sqrt{5}\right)$ e $\left(10-\sqrt{2}\right)-\left(5-\sqrt{18}\right)$.

5 p r 18.	10 p r 18.	6 m r 20.	10 m r 2.
4 p r 8.	5 p r 2.	7 m r 5.	5 m r 18.
9 p r 50.	5 p r 8.	13 m r 45.	5 p r 8.

Figura 13: Esquemas utilizados por Moya, para explicar a soma de binómios, a diferença de binómios, a soma de resíduos e a diferença de resíduos, respectivamente [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 57].

Os exemplos de Moya incluem casos em que o leitor pode, com facilidade, fazer a verificação do resultado, como acontece com $\left(\sqrt{9}-2\right)-\left(3-\sqrt{4}\right)$.

Multiplicação e divisão

A operação de multiplicação é introduzida no *Compendio* com a referência à correspondente multiplicação de polinómios, tratada num capítulo anterior, fazendo-se realçar a semelhança de procedimentos que estas duas operações envolvem. A explicação baseia-se num esquema (figura 14) análogo ao que Moya indica para a multiplicação de polinómios e inclui uma revisão das regras que vão sendo aplicadas ou, quando tal não sucede, da indicação do capítulo onde devem ser revisitadas. Toda a explicação coincide com a dada na *Arithmetica Algebratica*:

Para multiplicar binomios y residuos, pondras un binomio debaxo del outro, o residuo debaxo del residuo, o el binomio debaxo del residuo, o el residuo debaxo del binomio, o como quiera que vengan y començaras ala mano que quisieres, y multiplicaras todas las quantidades de arriba con cada una de las de abaxo. Teniendo aviso que si multiplicares numero por r has de quadrar el numero primero, antes de multiplicar, por causa de reduzir lo uno enel especie delo outro, y enlo del p y m, mira lo que

Para multiplicar de binomios, y residuos, pornas un binomio debaxo del outro, o un residuo debaxo del otro, o un binomio debaxo de un residuo, o residuo debaxo del binomio, como quiera que venga. Y començaras ala mano yzquierda (no porque no puedas començar ala mano drecha: mas a mi me paresce ser mas galano, cada uno haga lo que le paresca.) Y multiplica todas las quantidades de arriba cõ cada una de las de abaxo. Y acabado de multiplicar, summaras cada genero com su

se dixo enel articulo tercero del octavo capitulo de multiplicar caracteres, y despues que huvieres dado fin ala multiplicacion, summaras cada genero com su semejante, segun paresce en las figuras delos exemplos siguientes [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 58].

ygual: como enel summar has visto. Como enel multiplicar de rayzes has visto, que multiplicando numero con √, o √ com numero, reduziste el nº a √, que es multiplicar el nº en si mesmo: assi haras en las presentes multiplicaciones, y mira el +, y − [Marco Aurel, 1552, f. 58v].

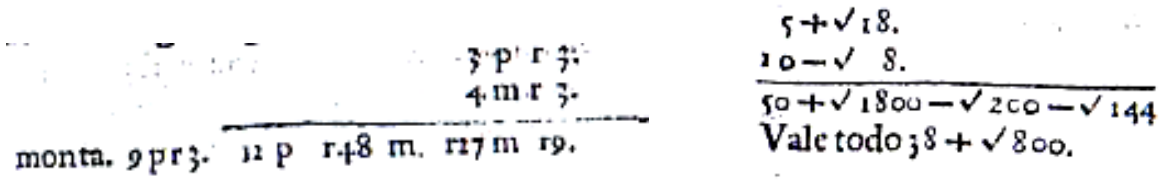


Figura 14: À esquerda, esquema utilizado por Moya para explicar a multiplicação de $3+\sqrt{3}$ por $4-\sqrt{3}$ e o resultado do produto, $9+\sqrt{3}$ [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 59]. À direita, esquema usado por Aurel para a multiplicação de $5+\sqrt{18}$ por $10-\sqrt{8}$ e o resultado do produto, $38+\sqrt{800}$ [Marco Aurel, 1552, f. 59r].

Ainda no *Compendio*, a divisão é descrita de acordo com os quatro casos seguintes:

1) o divisor (ou "partidor", como Moya lhe chama) é um número "simple" como, por exemplo, 2;

2) o divisor é uma raiz surda como, por exemplo, $\sqrt{3}$;

3) o divisor é um resíduo;

4) o divisor é um binómio.

Nos dois primeiros casos o procedimento consiste em dividir cada elemento do binómio, ou resíduo, pelo número ou pela raiz, transformando os elementos envolvidos numa raiz quadrada, sempre que a aplicação das regras de cálculo assim o exija; dois dos exemplos que Moya dá são:

$$\frac{12+\sqrt{40}}{2}=\frac{12}{2}+\sqrt{\frac{40}{4}}=6+\sqrt{10} \text{ e } \frac{12+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{144}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{144}{5}}+\sqrt{2}=\sqrt{28\frac{4}{5}}+\sqrt{2}\,.$$

Quando o divisor é um resíduo (respectivamente, um binómio), Moya começa por fazer a racionalização do denominador, notando que, com base na proposição *Elementos* II, 4, facilmente se obtém uma fracção equivalente em que o denominador é racional. Os termos que emprega e a explicação que dá, quando aplicados ao exemplo da divisão de $12+\sqrt{6}$ por $\sqrt{4}-\sqrt{2}$ (na verdade, Moya está a considerar $4-\sqrt{2}$, e o binómio $4+\sqrt{2}$) são:

La tercera differencia es quando el partidor es resíduo, como si quisiessemos partir 12 p r 6. por r 4 m r 2. En tal caso antes que partas ninguna cosa multiplica el partidor que es residuo, por su binomio, que sera r 4 p r 2. y montara 14, el qual te sera partidor. Pero antes que partas has de multiplicar los 12 p r 6. que es la particion, por r 4 p r 2 (que es por lo que multiplicaste el partidor) y lo que viniere se partira por los 14, como se hizo en la primera differencia [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 60].

O estudo incide sobre um exemplo particular mas, como Moya nota, este resultado pode generalizar-se a qualquer tipo de binómio ou resíduo. Em notação simbólica actual, podemos afirmar que Moya aplica correctamente as seguintes operações:

$$\frac{X}{a-\sqrt{b}}=\frac{X\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)} \text{ e } \frac{X}{a+\sqrt{b}}=\frac{X\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}, \text{ com } X=c\pm\sqrt{d}\,.$$

Por vezes, basta multiplicar uma vez ambos os termos da fracção pelo conjugado do denominador para obter um denominador racional; mas outras vezes torna-se necessário repetir o procedimento. Moya sabe isso e explica muito bem como se resolve o problema (apesar de não dar nenhum exemplo), na seguinte nota:

Nota, si te viniere algun partidor binomial, que multiplicandole por su contrario no se hiziere numero, o r discreta, a la primera vez, que multiplicares, en tal caso multiplica el producto que te viniere por su contrario, de todo el producto. Y si esta segunda vez, aun no viniere, hazlo outra y tantas vezes hasta que venga un producto que sea numero simple, o r discreta: teniendo aviso de multiplicar la particion otras tantas vezes, con lo mismo que multiplicares el partidor [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 61].

No *Tratado de Arithmetica* as regras para a adição e subtracção de binómios e resíduos são as que vemos no *Compendio dela regla dela cosa*, mas o estudo é mais minucioso, explicitando todas as combinações possíveis destes dois tipos de números, que são acompanhadas de muitos e variados exemplos de aplicação. Relativamente à operação de divisão, Moya explica que o conhecimento dos quatro casos que anteriormente referimos é suficiente para operar em álgebra:

El partir, por ser regla contraria del multiplicar, se podria en el exemplificar los mismos exemplos que alli diximos, mas por no hazer grande volumen, tomãdo lo que conviene

solamente para esta regla de la Cosa, notaras estes quatro modos [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 520].

Por outro lado, relativamente ao que designámos por racionalização de denominadores, a justificação que Moya apresenta no *Tratado* da necessidade de multiplicar ambos os termos da fracção pela mesma quantidade é muito semelhante à que Pedro Nunes dá no *Libro de Algebra*:

La razon desto es, porque multiplicando las primeras quantidades, o disminuyendo las ygualmente, queda la misma proporcion entre lo que se parte, y el partidor, por lo qual el quociente sera el mismo que tuvieramos si no hizieramos las tales multiplicaciones, o diminuciones [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 522].

La razon desta obra es muy clara, porque multiplicado las primeras quantidades ygualmente, queda la misma proporciõ entre lo que se parte y el partidor, por lo qual el quociente será el mismo que tuuieramos sino hizieramos las tales multuplicaciones [Pedro Nunes, 1567, f. 60r].

Ainda no que toca à racionalização de denominadores, Moya estende o estudo ao caso em que o denominador é uma combinação linear de um número inteiro com dois números irracionais e explica-o sobre o exemplo $\frac{12}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ [312]. As transformações que propõe até chegar ao resultado final são as que actualmente efectuamos. Em notação simbólica usual exprimem-se assim:

$$\frac{12\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{12\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{8+\sqrt{72}}=\frac{12\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{72}+8}=\frac{12\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{72}-8\right)}{\left(\sqrt{72}+8\right)\left(\sqrt{72}-8\right)}=etc.$$

Mas a falta de uma notação adequada torna muito penosa a explicação retórica, como mostra a transcrição seguinte:

Si el partidor for trinomio, como si dixessen, Parte 12. por 3, p. r 2. p. r 3. Reduziras este trinomio a binomio, deste modo. Quita una quantidade delo dicho trinomio, assi como la r 3, y quedara 3, p r.2, menos r 3, la qual multiplicaras por el mismo trinomio, y montara 8, mas r 72. Ya que has convertido de trinomio a binomio, convierte este binomio a una sola

[312] Pacioli, na *Summa*, trata diversos casos de racionalização de denominadores, estudando uma situação semelhante a esta, em que o denominador é $3+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ [Luca Pacioli, ff. 138r-138v].

quantidad, multiplicandole por su mismo disjunto (por las reglas para ello dadas) y montara menos 8. Y porque es necessario que pues el partidor fue algo, que se deshaga, sino que monte algo, lo qual se causa, porque este binomio 8, mas r 72 esta pospuesta la mayor quantidad, por lo qual sera bien mudarle, y dezir r 72, mas 8. Porque como avise en ele cap. 33 siempre en estos binomios, o residuos estara mejor puesta primero la mayor quantidad. Esto hecho, cõvierte este binomio a quantidad sola multiplicãdole por su disjunto (que es r 72 menos 8) y montara 8, por este 8 partiras los 12 que te dieron que partiesses, mas sera necessario multiplicar primero por 3, mas r 2, m r 3, y por r 72 m 8 (que fue el trinomio) y disjunto binomial, por quien multiplicaste primero el partidor, para cõvertille a una sola quantidad [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 522-523].

Esta é, também, a metodologia que Pedro Nunes usa na racionalização de $\frac{100}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$[313].

Extracção de raízes quadradas

Moya propõe um procedimento geral que se aplica a qualquer binómio, sem fazer distinção entre os seis tipos de binómios que antes indicara; opção diferente da de Aurel, que trata, separadamente, a raiz quadrada de cada um dos tipos[314]. O processo dado por Moya consiste em decompor o número maior do binómio $a+\sqrt{b}$, em duas partes cujo produto seja igual à quarta parte do valor do número menor, supondo $a^2 > b$. Trata-se, portanto, de encontrar duas quantidades, *x* e *y*, que verifiquem simultaneamente as condições $\begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{b}{4} \end{cases}$.

Nestas condições, determinados *x* e *y*, obtém-se $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Este procedimento está assim descrito no *Compendio*:

Para sacar da r de qualquiera binomio, se ha de tener aviso de hazer del numero mayor del tal binomio, dos partes tales, que multiplicada la una por la outra, monte la quarta parte del quadrado dela menor q. [quantidade] del binomio: y la r dela summa destas 2 partes sera la r del binomio [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 51].

[313] [Pedro Nunes, 1567, f. 62v].

[314] [Marco Aurel, 1552, ff. 62v-66].

A última parte do texto que transcrevemos, onde é referida a "raiz da soma das duas partes", está errada, pois em seu lugar deveria estar a "soma das raízes das duas partes", mas este lapso não se traduz no uso incorrecto, como pode ver-se no exemplo dado por Moya, que apresentamos a seguir. Trata-se de determinar $\sqrt{68+\sqrt{4608}}$; as partes obtidas são 36 e 32 e Moya indica como solução $6+\sqrt{32}$.

Os valores de *x* e *y* podem ser determinados por meio da resolução de equações, e Moya refere-o; contudo, como esse assunto só é tratado num capítulo posterior, ele indica uma "regla" para resolver a questão. No *Compendio* essa regra é aplicada aos exemplos particulares $68+\sqrt{4608}$ e $20+\sqrt{240}$. No caso da determinação da raiz quadrada do binomio $68+\sqrt{4608}$, Moya diz assim:

> Quadra 68, y montara 4624. resta desto el numero menor del binómio, que es 4608, y quedaran 16. de 16 la quarta parte es 4, la r destos 4 es 2 (guarda estos 2) y divide los 68 en dos partes yguales y seran en 34 y 34, añade ahora ala una parte los 2, y seran 36, quita los 2 de la outra parte y quedaran 32, y estas seran las dos partes que buscas. Las quales si las multiplicas una por la outra, haran 1152, que es la quarta parte de 4608, que es la parte menor del binómio. Pues saca ahora la r de cada una destas 2 partes, y vendran de 36, 6, y delos 32, r 32; junta 6 com r 32, y montara 6 p r 32, y tanto diras que es la r de 68 p 4608[315] [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 51-52].

O que corresponde, em notação simbólica actual, aos passos seguintes: $68^2-4608=16$; $\sqrt{\frac{16}{4}}=2$; $68=34+34=(34+2)+(34-2)=36+32$; $\sqrt{68+\sqrt{4608}}=\sqrt{36}+\sqrt{32}=6+\sqrt{32}$.

Não sabemos a razão que presidiu à escolha destes dois exemplos, mas a diferença no tipo de resultado obtido em ambos os casos leva-nos a pensar que ela não terá sido arbitrária. De facto, enquanto no primeiro binómio, $68+\sqrt{4608}$, a raiz é um binómio do mesmo tipo, $6+\sqrt{32}$, no segundo, $20+\sqrt{240}$, obtém-se uma raiz composta de duas raízes universais, $\sqrt{10+\sqrt{40}}$ e $\sqrt{10-\sqrt{40}}$, que na sua notação são *rv* 10 *p r*40 e *rv* 10 *m r*40 , respectivamente[316]. Só neste último caso, cuja manipulação é mais trabalhosa, Moya verifica

---

[315] O significado de "r de 68 p 4608" é, em notação usual, $\sqrt{68+\sqrt{4608}}$.

[316] Esta notação *rv* e a correspondente designação *rayz quadrada universal* foram dadas logo no início da obra [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 5].

que a solução está correcta, mostrando, com a ajuda de *Elementos* II, 4, que $\left(\sqrt{10+\sqrt{40}}+\sqrt{10-\sqrt{40}}\right)^2 = 20+\sqrt{240}$.

Os cálculos indicados nos exemplos anteriores correspondem à aplicação da fórmula:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2-b}{4}}} + \sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2-b}{4}}}$$

Mas numa nota final, Moya refere que se pode obter a raiz quadrada de um binómio, pela fórmula que em notação simbólica expressamos assim, e que, como facilmente se observa, é equivalente à anterior:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Aurel usa esta última logo na determinação da raiz do "primero binómio", $27+\sqrt{200}$ [317].

Estas são as escolhas que Moya considera mais simples para determinar a raiz quadrada de um binómio, embora sublinhe que não são as únicas.

Aquando da resolução do problema da divisão de 10 em duas partes cujo produto é 16, Moya aplica uma regra, que se infere de *Elementos* II, 5, que é equivalente às duas anteriores, e que podemos traduzir simbolicamente por[318]:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{b}{4}}} + \sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{b}{4}}}.$$

É curioso observar que a questão da divisão de 10 em duas partes cujo produto é 16, que acabámos de referir, é o problema número 7 que Pedro Nunes propõe no *Libro de Álgebra*, com o seguinte enunciado:

> Partamos .10. en tales dos partes, que sea entre ellas el numero .4. medio proporcional [Pedro Nunes, 1567, f. 110v].

Em notação simbólica usual, trata-se de determinar *x* e *y* (positivos) tais que $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{x}{4}=\frac{4}{y} \end{cases}$.

---

[317] [Marco Aurel, 1552, ff. 62v-63r].

[318] [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 140-141]. É claro que se trata da mesma regra apenas diferem na forma.

Pedro Nunes explica assim a resolução:

> Esto no es otra cosa, sino partir .10. en tales dos partes, que la una multiplicada por la otra, haga .16. que es el quadrado de .4. por quanto la multiplicación de un extremo por el otro, haze tanto como el medio proporcional multiplicado en si mismo. Sera luego la obra esta: Multiplicaremos en si la mitad de .10., la qual es .5. y hara .25. y destos .25. sacaremos el quadrado de .4. el qual es .16. y quedaran .9. cuya raíz la qual es .3. sacaremos de .5. y quedaran .2. que serán la una parte, y la otra será .8. que quedan sacando .2. de .10. o juntaremos con .5. la raíz de .9. que es .3. y haremos .8. que serán la una parte, y lo que queda de .10. que es .2. será la otra parte [Pedro Nunes, 1567, f. 110v].

Pedro Nunes salienta a importância desta regra, lembrando que ela é frequentemente utilizada pelos "Arithmeticos" para a determinação da raiz quadrada de qualquer binómio[319]. Pacioli também a usa, mas com dados numéricos diferentes[320]. E Chuquet recorre a ela para explicar, no *Triparty*, como extrair a raiz quadrada dos binómios $14+\sqrt{180}$ e $12+\sqrt{140}$[321]. Mas talvez o mais interessante seja a conexão entre o procedimento aritmético e o algébrico, do qual sai a generalização do resultado anterior, que Nunes explica assim:

> Y desta .7. regla nos paresce necessario poner algun exemplo en las dignidades, para practica de los casos que en .Cap. 5. de la tercera parte avemos de poner. Como si nos dixessen, que partamos .1. censo en tales .2. partes que sea entre ellas medio proporcional .1. cosa, que es lo mismo que dezir, partamos .1. *ce*. en tales .2. partes, que multiplicando la una por la outra, hagan .1. *ce.* Obraremos assi conforme a la regla. La mitad de .1.*ce.* es $.\frac{1}{2}.ce.$, que multiplicada en si, haze $.\frac{1}{4}.ce.ce.$ del qual sacaremos .1.ce. y quedara $.\frac{1}{4}.ce.ce.\tilde{m}.1.ce.$ y la raiz universal desto que queda, junta con $.\frac{1}{2}.ce.$ sera una de las partes, y la outra parte sera $.\frac{1}{2}.ce.$ menos la dicha raiz universal [Pedro Nunes, 1567, f. 111r].

---

[319] Depois de, no capítulo 14, enunciar nove regras sob o título "De los medios Proporcionales", Nunes inicia o capítulo seguinte dizendo: "Entre todas estas reglas es la septima de mas frequente uso, y por ella facilmente los Arithmeticos hallã la raiz quadrada de qualquier binómio. Porque no es mas necessario, que partir la quantidad mayor, o nombre mayor del binómio en tales dos partes, q la una multiplicada por la outra, haga la quarta parte del quadrado de la menor quantidad, o menor nombre del mismo binomio." [Pedro Nunes, 1567, f. 112r].

[320] Trata-se de dividir 19 em duas partes cujo produto é 16 [Luca Pacioli, 1494, f. 107r].

[321] [Nicolas Chuquet, 1484, f. 61v-62r].

Extracção de raízes cúbicas

A determinação da raiz cúbica de um binómio e de um resíduo suscitou grande interesse no século XVI, possivelmente pela sua relação directa com a resolução da cúbica. Moya indica, no *Compendio* e no *Tratado*, o processo para obter a raiz cúbica destes irracionais, explicando-o no caso particular da determinação de $\sqrt[3]{88+\sqrt{5000}}$:

> Sea el binomio de quien quieres sacar rayz cubica $88\,\mathrm{p.r}\,5000$. Busca el cubo mayor que hallares, que se yguale al 88 (que es la parte mayor deste binomio) de tal modo, que restando del dicho 88, quede una quantidade que tenga tercia parte, assi como 64 (que es cubo) y restado de 88 quedan 24, que tiene tercio, sin que la unidad se quiebre. Esto hecho, saca la rayz cubica de 64 (que es 4) y esta es la una parte, y la mayor de la rayz del dicho binomio. Parte luego el tercio de 24 (que es 8) por este 4, y vendra 2, estos 2, es el quadrado, o potencia de la parte menor de la dicha rayz, y assi la parte menor sera r 2, junta 4 con r 2 y montara 4, p. r 2, tãto diras ser la rayz cubica del propuesto binomio [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 536].

Moya faz o seguinte: primeiro, determina o maior número *a* tal que $88-a^3$ seja divisível por 3; obtém $a=4$. Depois, calcula $\frac{88-a^3}{3}$; obtém 8. Por fim, divide por *a*; vem 2. Conclui que, se existir $\sqrt[3]{88+\sqrt{5000}}$, será $4+\sqrt{2}$. A condição de existência está expressa numa nota em que observa a necessidade de que a diferença dos quadrados das partes da raiz cúbica do binómio solução seja igual à raiz cúbica da diferença dos quadrados das partes do binómio dado. E a resolução completa-se com a verificação de que o cubo do binómio obtido é igual ao binómio dado. Só neste caso é que a raiz cúbica do binómio dado é a obtida, como Moya explica:

> Nota, que no en todo binomio haziendo esto sera su rayz cubica lo que saliere, porque despues de averlo assi ordenado, se cubicara lo que saliere: y si el tal cubo fuere justamente tanto como el binomio, el tal binomio diremos ser cubico, y su rayz cubica sera aquello que se cubicare, y no siendo assi, el tal binomio no sera cubo [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 537].

O procedimento que expõe é semelhante ao que Aurel apresenta no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, mas Aurel exemplifica-o com $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$ e com $\sqrt[3]{\sqrt{2527}+50}$ [322]. Não parece haver dúvida que a regra aplicada por Moya foi obtida partindo do desenvolvimento do cubo de um binómio $a+\sqrt{b}$. Com base no cálculo de $88+\sqrt{5000}=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+\sqrt{b^3}$ foi, em primeiro lugar, procurado o valor de *a* satisfazendo a condição $88=a^3+3ab$, ou seja, $88-a^3=3ab$ (o que justifica a exigência de $88-a^3$ ser divisível por 3). Conhecido este, fica sabido o valor de *b*. Depois basta verificar se $\left(a+\sqrt{b}\right)^3=88+\sqrt{5000}$, o que de facto acontece, pois no exemplo dado, $\left(4+\sqrt{2}\right)^3=88+\sqrt{5000}$. Mas este fundamento não é referido no texto de Moya. Pedro Nunes, imediatamente antes de explicar como se determina a raiz cúbica de um binómio, lamenta que os conhecimentos matemáticos sejam, muitas vezes, apresentados na sua forma final, em vez de os seus autores mostrarem o modo como os obtiveram:

> La Regla para hallar las raizes cubas binomicas de los binomios cubos, traeremos por la misma manera, y por los mismos discursos que la hallamos: y la invencion no es differente del arte que tuvimos para sacar las raizes quadradas de los binomios, puesto que todo o binomio es quadrado, pero no es cubo qualquier binomio. O quan bueno fuera, si los Autores que escrivieron en las sciencias Mathematicas, nos dexaran escriptos los sus inventos por la misma via, y com los mismos discursos que hizieron, hasta que pararon en ellos. Y no como Aristoteles dize en la Mechanica de los artífices, que nos muestran de la machina que tienen hecha lo de fuera, y esconden el artificio, por parescer admirables. Es la invencion muy diferente de la tradicion en qualquier arte, ny penseis que aquellas tantas proposiciones de Euclides, y de Archimedes, fueron todas halladas por la misma via que nos las han traído [Pedro Nunes, 1567, f. 115v].

[322] [Marco Aurel, 1552, ff. 67r-68r].

Não deixa de ser curioso que no *Tratado de Arithmetica* Moya trate, também, do cálculo da raiz cúbica de $\sqrt{108}+10$, pois este binómio intervém na resolução da equação cúbica $x^3+6x=20$, que tanto Cardano como Pedro Nunes estudam nas suas obras[323].

3.6. Equações

3.6.1. Princípios básicos da resolução de equações

Depois de introduzir todos os conceitos essenciais para operar com a "regla dela cosa" (isto é, com as equações) relativos ao vocabulário e às operações com monómios e polinómios, Moya apresenta ao leitor um conjunto de "avisos" sobre a metodologia a utilizar no estudo das equações. Fá-lo no *Compendio dela regla dela cosa* e retoma-o no *Tratado de Arithmetica*, baseando-se na resolução de problemas. Em ambos começa por explicar em que consiste o procedimento algébrico:

> Y assi digo que para hazer qualquiera demãda por esta regla, has de presuponer que la tal demanda es ya hecha y respondida, y que la quieres provar. Poniendo por exemplo que la respuesta fuesse una cosa, conla qual procederas, haziẽdo lo que la demãda pidiere, y lo que te viniere cõ la 1 co. diras ser ygual a lo que quisieras que viniera [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 62].

Esta explicação de Moya é, praticamente, a que Aurel apresenta[324] no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, e o mesmo se observa relativamente aos princípios a utilizar para reduzir uma equação a outra que lhe seja equivalente; mas enquanto no texto de Moya esses princípios são dados antes do estudo dos casos de equações, no de Aurel vêm depois deles.

Moya chama a atenção para a possibilidade de os dois membros da equação serem semelhantes, ou diferentes, em "caracteres" (isto é, a potência da incógnita é igual, ou diferente, nos dois membros) e em "numeros" (isto é, o coeficiente da incógnita é, ou não, igual). Por exemplo, se " 3 co. se ygualassen a 4 co." os dois membros seriam semelhantes

---

[323] [Girolamo Cardano, 1545, p. 96 e seguintes]. [Pedro Nunes, 1563, ff. 335v-336r]. Com o exemplo da equação cúbica $x^3+6x=20$, Pedro Nunes mostra que a solução, 2, pode ser dada por $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$, ou seja, $\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)$.

[324] [Marco Aurel, 1552, f. 80r].

em caracteres e diferentes em número, e se "8 co. se ygualassen a 8 ce." seriam semelhantes em número e "dissimiles" em caracteres.

As regras em que Moya se baseia para resolver uma equação são estabelecidas em todas as suas obras algébricas, mas o assunto está mais bem organizado no *Tratado de Arithmetica*, onde cada uma é estudada num "articulo" diferente. Além disso, o texto é mais claro e inclui o enunciado dos princípios teóricos que fundamentam as regras dadas, como ilustra o excerto seguinte:

> Quando en las ygualaciones de dos quãtidades vinieren tres o mas quãtidades, han se de abreviar, y reduzir a solas dos, deste modo. La quantidad que en una parte de la ygualacion viniere con la señal o diction del mas, lo que viniere demas, se quitara de la una y otra parte de las dos de la misma ygualacion, y lo que quedare en la una parte, sera ygual a lo que quedare en la otra, por la comun concession, que dize. Si de quantidades yguales quitares quantidades yguales, lo que quedare tambien seran yguales [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 540].

As operações que permitem transformar uma equação noutra equivalente, em que os coeficientes são positivos (como na época era necessário) e os termos semelhantes estão reduzidos, são aplicadas em exercícios práticos com a finalidade de mecanizar o trabalho de cálculo. Isso vê-se nos exemplos dados, em que Moya começa por ensinar a transformar $4x+3=23$ em $4x=20$ e $8x^2+50+20x=70x$ em $8x^2+50=50x$.

Pedro Nunes, no *Libro de Algebra*, aconselha o uso da seguinte metodologia: que primeiro se "suplan los defectos" (o que permite transformar, por exemplo, $3x+20-x^2=10$ em $3x+20=10+x^2$) e depois se "saque lo redundante" (o que consiste em passar de $3x+20=10+x^2$ para $3x+10=x^2$); embora observe que não é obrigatório seguir esta ordem:

> E quanto ala orden que devemos tener en el ygualar, paresce cosa mas razonable, que primeramente se suplan los defectos, si los ay, y despues saquemos lo redundante, que es commun entrambaslas quantidades, puesto que no es inconveniente prevertir esta orden, pero es aquello mas acceptable al entendimiento [Pedro Nunes, 1567, f. 124v].

Tartaglia faz o mesmo tipo de reflexão, sublinhando que, para resolver com destreza um problema por via algébrica, é necessário usar uma metodologia correcta, que consiste em

começar por identificar os dois membros da equação ("gli estremi delle equatione") e saber como se retiram os supérfluos ("superflui") e se restauram os diminutos ("diminuti"). Geralmente, como diz, começa-se pelos "maiores menos", juntando-os e restaurando-os e, em seguida, abatem-se e retiram-se os "menores mais", tendo sempre o cuidado de manter os dois membros "iguais em balança" ("eguali in bilancia")[325]. O termo "bilancia", que Tartaglia usa, é sugestivo de equilíbrio, neste caso entre os dois membros da equação, resultante da aplicação correcta dos princípios de equivalência. Moya também utiliza, por mais de uma vez, a frase "em balança" com essa intenção. Por exemplo, quando transforma a equação $\frac{720}{1x}+(1x-30)=52$ em $\frac{720}{1x}+1x=82$, diz:

> Abrevia la ygualacion passando los 30 que enla una parte dela balança vienen menos con los 52, de la outra [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 99-100].

E quando, transforma a equação $x^2+3x-10=98$ em $x^2+3x=108$, diz:

> Passa los 10 n., que vienen menos en la una parte dela valança, ala outra y quedara la ygualacion desta manera [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 97].

Pedro Nunes usa este termo logo no início da sua obra quando define o que entende ser a finalidade da álgebra e quais os meios usados para a atingir:

> En esta Arte de Algebra el fin que se pretende, es manifestar la quantidad ignota. El medio de que usamos para alcançar este fin, es ygualdad. Las principales quãtidades a que por discursos demõstrativos procuramos esta ygualdade, dandoles o quitandoles quanto cõviene, como quien pone en balança[326], son tres: Numero, Cosa, Censo [Pedro Nunes, 1567, f. 1r].

No *Tratado de Arithmetica* Moya mostra, claramente, que sente a falta de um símbolo que represente a igualdade, e constrói para esse fim o sinal [327]. A escolha deste símbolo não parece ter sido arbitrária. Moya usa-o no manuscrito *Arte de Marear* [1568] para representar o símbolo astrológico Balança, cujo significado é conotado com

[325] [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 12r].

[326] O sublinhado é nosso.

[327] Nenhum dos outros autores que consultámos usa este símbolo para representar o sinal de igualdade.

equilíbrio; e nota que só não o usa ao longo do texto por ele não existir na imprensa. Em seu lugar recorre à síncope "*yg*":

> Nota, esta figura quiere dezir ygual, y en su lugar por no aver outra en la emprenta pongo esta yg. Y lo que tuviere antes de si ser la una parte de la ygualacion, y lo que tuviere despues de si sera la outra [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 540].

Entre as sete regras dadas no *Compendio dela regla dela cosa* para transformar uma equação noutra que lhe seja equivalente, uma delas aplica-se à resolução de equações envolvendo fracções em cujo denominador está presente a incógnita. Moya diz apenas que neste caso o que há a fazer é multiplicar e reduzir a uma "denominacion" comum:

> Quando enla una o ambas partes dela ygualacion vinieren quebrados, se multiplicaran y reduziran a una comun denominacion, de arte que quede la ygualacion como enteros [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 64].

A indicação encerra alguma ambiguidade; o modo de concretizar o processo não é indicado com clareza e o termo "quebrado" é usado sem ser explicitado o seu significado. Por outro lado, a ausência de simbologia e terminologia adequadas e o recurso à forma retórica na exposição dos assuntos tornam dificil a compreensão do texto. Contudo, o exemplo que Moya trata permite ultrapassar essa dificuldade. É o caso da equação $\frac{24.n.}{1.co.}\ p\ 2.n.\ yg.\frac{24.n.}{7\ m\ 1.co.}$ (em notação actual: $\frac{24}{x}+2=\frac{24}{7-x}$). Moya mostra, passo a passo, o procedimento para se desembaraçar de cada um dos denominadores, primeiro x e depois $7-x$, efectuando os cálculos correspondentes a essas passagens; e reduz os termos semelhantes obtendo a equação $168\ yg.34.co.\ p\ 2.ce.$ (em notação actual: $168=34x+2x^2$). Vejamos como o explica:

> Si viniesse alguna ygualacion desta suerte $\frac{24.n.}{1.co.}\ p\ 2.n.\ yg.\frac{24.n.}{7\ m\ 1.co.}$ Primeramẽte multiplicaras cada una de las partes por $1\,co.$ y sera la multiplicación $24.n.\ p\ 2.co.\ yg.\frac{24.co.}{7\ m\ 1.co.}$. Multiplica mas una parte y otra, por $7\ m\ 1.co$ y seran $168.n.\ p\ 14.co.\ m\ 24.co.m\ 2.ce.\ yg.\ 24.co.$ Yguala dãdo ala otra parte $m\ 24.co.m\ 2.ce.$ y quedara $168\ p\ 14.co.\ yg.\ 48.co.\ p\ 2.ce.$ Ahora quita $14.co.$ que ay demas en la una parte de

las 48, que estan en la otra, y quedarã 168 *yg.* 34. *co. p* 2. *ce.* por la ultima ygualacion [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 84].

No *Tratado de Arithmetica* são distinguidas todas as possibilidades conforme os termos da equação envolvem 'fracções' em que a incógnita está presente no denominador; abstraindo dos aspectos relacionados com a notação, a explicação dada e as observações feitas são perfeitamente actuais. A título de exemplo, vejamos qual é a resolução apresentada por Moya, no caso em que "$2\,co.\,p.\frac{3\ n.}{1\ ce.}$ fuesen yguales a $4co.p.5n.,$ seguindo passo a passo as indicações do nosso autor[328].

Indicações de Moya	Interpretação em notação actual
$2\,co.\,p.\frac{3\ n.}{1\ ce.}$ fuesen yguales a $4co.p.5n.$	$2x+\frac{3}{x^2}=4x+5$
En semejante caso convertiras en quebrado los dos enteros que vienen cõ el quebrado. Quiero dezir, que multiplicaras los 2 que vienen con la Cosa, por el un ce. (que es denominador del quebrado) y jũtaras con ello los 3, que es nombrador, y ser todo $2\,cu.\,p.3\,n.$ (y deste modo se quiere jũtar) debaxo de lo qual põdras 1 ce. por denominador, deste modo $\frac{2cu.\ p.\ 3n.}{1ce.}$ lo qual diras ser ygual a $4\,co.\,p.5\,n.$	Reduz o 1º membro a uma fracção, obtendo[329] $\frac{2x^3+3}{x^2}$. $\frac{2x^3+3}{x^2}=4x+5$
Prossigue agora multiplicando $1\,ce.$ (que es denominador del quebrado) por $4\,co.\,p.5\,n.$ y montara $4\,cu.\,p.5\,ce.$	Reduz o segundo membro ao denominador do primeiro $\frac{2x^3+3}{x^2}=\frac{4x^3+5x^2}{x^2}$
Lo qual diras ser ygual a los $2\,cu.\,p.3\,n$ (que es nombrador del quebrado) y assi auras evitado el quebrado [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 544].	Desembaraça de denominadores $2x^3+3=4x^3+5x^2$

[328] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 544].

[329] Moya comete um lapso nesta passagem tomando $\frac{2ce.\ p.\ 3n.}{1ce.}$ em vez de $\frac{2cu.\ p.\ 3n.}{1ce.}$, mas nós indicámos o resultado correcto.

Na redução de fracções a um denominador comum, as considerações de Moya são análogas às de Nunes, mas o autor português distingue entre "quebrados de primera intencion", que são os números fraccionários e "quebrados de segunda intencion", que são as fracções que têm por "denominador *co. ce. cu*. o otra alguna dignidade". O exemplo dado por Pedro Nunes traduz-se em notação usual por $20+\frac{30}{x^2}=10x$ [330].

3.6.2. Primeiro estudo das equações

Moya apresenta o estudo das equações em quatro capítulos do *Compendio*: nos dois primeiros dá uma abordagem introdutória teórica, em que caracteriza os tipos de equações que se propõe tratar e indica uma regra de resolução para cada um deles[331]. Dedica o terceiro à resolução de problemas de aplicação[332]. No último (de que nos ocuparemos mais adiante) revisita o tema das equações, oferecendo ao leitor um trabalho mais conciso e, simultaneamente, mais abrangente, em que expõe o assunto por outro ponto de vista[333]. Esta abordagem mantém-se na sua *Arithmetica*, publicada em 1562, onde diz:

> Los que escrivieron sobre esta regla: unos dixeron ser las ygualaciones 8. otros 10. otros menos. Yo pongo 7. porque se entienda lo que quisierõ dezir, y el que quisiere ver mi parescer, lea el capitulo decimo quarto [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 550].

Moya refere quatro variedades de "ygualaciones simples de dos quantidades" (equações em que intervêm "caracteres" de dois tipos) e três de "ygualaciones compuestas de três quantidades" (equações em que intervêm "caracteres" de três tipos), explicando em que consiste cada uma delas e descrevendo, em linguagem retórica, o algoritmo de resolução

---

[330] O estudo é feito no capítulo 6 da "Segunda Parte Principal", sob o título "Como se devem reduzir los quebrados a una misma denominacion" [Pedro Nunes, 1567, f. 34r].

[331] Capítulo XI e XII intitulados, respectivamente, "De las quatro ygualaciones simples de dos quantidades" e "De las tres ygualaciones compuestas de tres quantidades" em [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 67-69].

[332] Capítulo XIII, "Enel qual se ponen demandas, para declaracion de todo lo que se há tratado enlos capítulos precedentes" [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 73-113].

[333] Capítulo XIV, com o título "Enel qual se pone una breve recopilacion de todas las ygualaciones" em [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 113- 117].

correspondente[334]. Em termos de conteúdo, este primeiro estudo das equações é semelhante ao dado na *Arithmetica Algebratica*, de Aurel; no entanto, Aurel considera 8 tipos de equações e organiza o estudo de modo diferente; depois de indicar o processo de resolução para cada um dos tipos de equação, aplica, imediatamente, a um caso concreto[335], enquanto Moya remete todas as aplicações para outro capítulo.

As "ygualaciones simples" são:

"1ª ygualacion simple de dos quantidades": trata de equações do tipo $ax^{n+1} = bx^n$, com a e b positivos, em que se relacionam duas potências consecutivas da incógnita, de que $ax = b$ é um caso particular.

> 1ª ygualacion (que dizen) simple de dos quantidades es quando se yguala un caracter a outro, y son ygualmente distantes dela misma proporciõ y origen. Assi como si la co. se ygualasse al n. do claro paresce no faltar ningun caracter entre co. y n. como faltaria si se ygualasse ce, a n. que seria la co [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 68].

Moya não explica o que significa ser 'igualmente distante da mesma proporção e origem' nem faz qualquer referência aos coeficientes da incógnita, mas a regra de resolução que indica e os exemplos que estuda permitem concluir que se trata da igualdade de dois monómios de graus consecutivos em que os coeficientes são números positivos[336]. Para as resolver Moya divide o coeficiente do termo de menor grau pelo coeficiente do termo de maior grau, obtendo $x = \frac{b}{a}$.

Esta indicação significa que nas equações $ax^{n+1} = bx^n$, em que $n \geq 1$, a solução nula não é considerada, o que era comum naquela época. Pacioli fá-lo na *Summa*, para este e outros casos[337]. E Pedro Nunes também o faz no *Libro de Algebra*; aliás, vemos que o autor português indica o mesmo conjunto de soluções para as "cõjugaciones" do tipo "cosas

---

[334] A respeito do número de *ygualaciones* que Moya e outros autores consideram, Antich Rocha diz o seguinte: "Fray Lucas de Burgo puso .6. ygualaciones, Marco Aurel Aleman puso .8. Albertucio de Saxonia puso .10. Estevan de la Rocha puso .4. Ioã Scheubelio .3. Perez de Moya .7. aunque ala verdad pone .8. y despues las reduze a .4." [Antich Rocha, 1565, f. 264r].

[335] [Marco Aurel, 1552, ff. 77v – 80r].

[336] Docampo nota que os números que precedem as abreviaturas das incógnitas, a que actualmente chamamos coeficientes, não tinham na época o significado do produto aritmético que hoje lhe damos. Assim, diz, ao escrever 5. co. o sentido era o que tem actualmente para nós uma expressão como "5 km". [Docampo, J., 2004, p. 444].

[337] Sobre este assunto ver [Docampo, J., 2004, p. 445].

yguales a numeros" (em notação actual $ax = b$, com a e b positivos), e para as do tipo "censos yguales a cosas" (em notação actual $ax^2 = bx$, com a e b positivos)[338].

*"*2ª ygualacion simple de dos quantidades": estuda as equações tipo $ax^{n+2} = bx^n$, de que $ax^2 = b$ é um caso particular.

> Quando entre el un caracter y otro de los dos que se ygualaran falta alguno. Como si ce. Se ygualasse a n. do paresce claro faltar la co. O como si el cv. se ygualasse a co. entre los quales falta el ce. Y assi de mas [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 68].

Moya explica que primeiro se divide o coeficente do termo de menor grau pelo coeficente do termo de maior grau e, em seguida, se extrai a raiz quadrada do quociente, obtendo $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

*"*3ª ygualacion simple de dos quantidades*":* trata das equações que em notação simbólica usual denotamos por $ax^{n+3} = bx^n$. Como casos particulares deste tipo de equações temos, por exemplo, $ax^3 = b$ e $ax^4 = bx$, cuja solução é $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

*"*4ª ygualacion simple de dos quantidades": diz respeito a equações do tipo $ax^{n+4} = bx^n$, em que faltam três caracteres entre os dois que se igualam. A solução dada por Moya traduz-se, em notação usual, por $x = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.

Depois deste estudo, Moya faz uma observação que generaliza o procedimento a todas as equações binomiais, de acordo a qual uma equação incompleta do tipo $ax^{n+k} = bx^n$ tem como solução $x = \sqrt[k]{\frac{b}{a}}$:

> En esto hás de notar, que si faltassen quatro caracteres entre los dos que se ygualaren, que despues de aver partido lo que viniere cõ el caracter menor por lo que viniere com el mayor, sacando la rayz relata del quociente, será el valor dela cosa. Y si faltaren 5 despues de aver hecho lo que en todas se haze, sacando cecu. Y assi puedes proceder en infinito [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 69].

---

[338] Pedro Nunes diz: "Quando Censos fueren yguales a Cosas, partiremos el numero de las cosas por el numero de los censos, y lo que viniere en la particion sera el valor de la cosa" [Pedro Nunes, 1567, f. 1r].

Antes do estudo das equações completas de grau dois, Moya refere os modos possíveis de combinar, numa igualdade, três monómios de graus consecutivos; e põe o leitor ao corrente da terminologia que vai usar. Neste contexto, explica o significado dos termos "antecedente", "seguiente" e "mediano" para se referir aos caracteres, notando que o antecedente é o menor e que o mediano é o que está entre ambos. Esta classificação está associada à ordem crescente das potências de *x*.

Dos três caracteres presentes nas "ygualaciones compuestas" dois estão num membro da equação e o terceiro no outro membro, dando origem à seguinte classificação:

"1ª ygualacion compuesta": equações do tipo $ax^{n+2} + bx^{n+1} = cx^n$, com *a*, *b* e *c* positivos.

> La primera ygualacion de las cõpuestas es quando vienen tres caracteres ygualmẽte distantes, y que entre ellos no falta otro algũ caracter, como n. co. ce. Y assi de otras cualesquiera, y que se ygualan los dos caracteres mayores al menor [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 70].

Moya começa por dividir todos os monómios intervenientes pelo coeficiente do monómio de maior grau (procedimento usualmente conhecido por normalização, embora não use um termo para o referir) e só depois indica um conjunto de passos que conduz à solução $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$. O processo é descrito do seguinte modo:

> En tal caso parte lo que viniere con los dos caracteres menores, por lo que viniere con el mayor, y después saca la mitad del quociente del mediano, y multiplica la por si, y el producto sumar se ha con el quociente del menor. La r, deste conjunto menos la otra mitad del quociẽte del mediano, sera el valor de la cosa [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 71].

"2ª ygualacion compuesta": equações do tipo $ax^{n+2} + cx^n = bx^{n+1}$, com *a*, *b* e *c* positivos

> La segunda [ygualacion de las cõpuestas] es quando vienen tres caracteres ygualmẽte distantes, de suerte que entremedias no falte algun caracter, y el mayor y menor se ygualan al mediano [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 70].

Como é sabido, estas equações podem ter duas, uma ou nenhuma solução conforme $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ é um número positivo, zero ou negativo. As indicações de Moya referem a possibilidade de existência de duas soluções, mas a regra dada conduz à solução errada, $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$.

Não admira que Moya admita que estas equações possam ter duas soluções pois, como lembra Bosmans, isso era comum no século XVI [339]. A aceitação de duas soluções para este tipo de equações quadráticas e o reconhecimento de que qualquer equação quadrática tem, em geral, duas soluções são considerados passos conceptuais importantes no avanço da álgebra simbólica[340].

Além de indicar uma regra errada para obter a solução, Moya dá, também, conclusões erradas em notas subsequentes sobre o mesmo assunto; em notação usual traduzem-se por:

1. Se $\frac{b}{a} > \frac{c}{a}$, então $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$;

2. Se $\frac{c}{a} > \frac{b}{a}$, então $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$;

3. Se $\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, então $x = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{b}{2a}$.

Contudo, nos problemas do segundo grau que envolvem uma equação deste tipo os valores escolhidos por Moya são tais que a condição $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} > 0$ é satisfeita. Neste caso,

---

[339] [Bosmans, H., 1908, p. 226]. O procedimento descrito por al-Khwarizmi para resolver equações do tipo $x^2 + c = bx$ corresponde ao uso da fórmula $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, o que significa que ele admite a possibilidade de existirem duas soluções para estas equações [Heeffer, A., 2008, pp. 97-98]. E o mesmo se observa num dos primeiros tratados de ábaco conhecidos, o *Tractatus algorismi* (1307), de Jacopo de Firenze [Hoyrup, J., 2007-1, p. 111].

[340] [Heeffer, A., 2008, pp. 97-98].

ele apenas indica a solução que se obtém por $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}+\frac{b}{2a}$, embora as equações admitam duas soluções positivas[341].

Há apenas um exemplo que pode traduzir um pouco melhor a dificuldade que Moya sente na resolução de equações deste tipo. Trata-se de $\left(x^2\right)^2+9=10x^2$, na qual $\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=16$ e $\frac{b}{2a}=5$, pelo que $\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}=-1$. Moya não calcula esta diferença, mas aconselha o leitor a calcular $\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}$ e $\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}+\frac{b}{2a}$, aceitando ambas as soluções, se elas forem válidas.

Na indicação da regra de resolução das equações do tipo $ax^2+c=bx$, Moya considera como soluções $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\pm\frac{b}{2a}$, cometendo, portanto, o erro de Aurel, mas não o segue no modo como trata as aplicações. Vemos, por exemplo, que no estudo da equação $2x^2+32=20x$, que admite as soluções 8 e 2, Aurel obtém, pelas "suas" regras, as soluções $\sqrt{9}+5$ e $\sqrt{9}-5$, mas em vez de $\sqrt{9}-5$ toma como solução do problema $5-\sqrt{9}$[342]. Também no que toca à existência de solução, que depende do sinal de $\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$, há diferenças entre as observações dos dois autores. Aurel nota, erradamente, que se $\frac{c}{a}>\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ então a solução da equação $ax^2+c=bx$ é dada por $x=-\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}+\frac{b}{2a}\right)$. A aplicação desta regra à equação (que está nas condições indicadas, mas é impossível) conduz à solução $x=-10$, que Aurel aceita sem comentar. Ele chega mesmo a provar que este número satisfaz a condição dada, considerando $-x^2$ como o quadrado de $-x$[343].

---

[341] Os problemas propostos por Moya passam pela resolução das equações $720+x^2=82x$ e $2000+2x^2=140x$ [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 99-102].

[342] [Marco Aurel, 1552, f. 79r].

[343] Ver [Malet, A. e Paradis, J., 1984, p. 127].

Embora errado, este facto não deixa de ser curioso, uma vez que mostra que Aurel aceitou a possibilidade de se ter um número negativo como solução de uma equação [344].

Além da obra de Aurel, o único texto impresso anterior ao de Moya, que encontrámos, e que indica para as equações do tipo $ax^2 + c = bx$ a solução errada $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$ foi a *Practica d'arismetica* de Francesco Ghaligai, cuja primeira impressão é de 1521[345]. No entanto, sabemos que o erro se propagou, pois vemo-lo na *Arithmetica* de Antich Rocha publicada em 1565[346].

"3ª ygualacion compuesta": equações do tipo $bx^{n+1} + cx^n = ax^{n+2}$, com *a*, *b* e *c* positivos. Moya indica claramente o algoritmo de resolução para estas equações, do qual se conclui que a solução é dada por $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$.

Apresentamos no quadro abaixo (quadro 9) um resumo, em notação simbólica usual, dos tipos de equações estudados por Moya, e a fórmula de resolução que propõe para cada um.

	Ygualacion	Tipo	Solução
Simples de duas quantidades	Primera	$ax^{n+1} = bx^n$	$x = \frac{b}{a}$
	Segunda	$ax^{n+2} = bx^n$	$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$
	Tercera	$ax^{n+3} = bx^n$	$x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$
	Quarta	$ax^{n+4} = bx^n$	$x = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

[344] Rey Pastor chama a atenção para o erro cometido por Aurel no que diz respeito à possibilidade da equação e adianta que ele pode ser mesmo da autoria de Aurel pois, como diz, não o encontrou nas álgebras estrangeiras mais famosas. [Rey Pastor, J., 1934, p. 102]. Sesiano no estudo sobre problemas medievais que admitem solução negativa [Sesiano, 1984, pp. 116-133 e 143] cita um problema da *Summa* de Pacioli envolvendo o preço de ovos dado por uma equação linear que conduz a um valor negativo para a solução. O estudo de Sesiano engloba o tratamento de sistemas de equações lineares característicos da época medieval e de problemas da matemática medieval que admitem solução negativa.

[345] Na *Pratica d' arithmetica* pode ler-se: "Quando quadrados e número são iguais à coisa, parte cada coisa no quadrado, depois divide a meio a coisa, e uma parte guarda, e a outra multiplica em si, e feito isso tira o número, e a raiz da soma, mais a metade da coisa, tanto vale a coisa; e algumas vezes menos a metade da coisa [Francesco Ghaligai, 1552, f. 90v]. Notamos que, nas páginas que dedica à álgebra, Ghaligai [Francesco Ghaligai, 1552, ff. 71-114] usa uma notação algébrica que nada tem a ver com a utilizada por Moya. Sobre Ghaligai e a sua obra ver [Smith, D. E., 1970, p. 132].

[346] [Antich Rocha, 1565, ff. 266r-266v].

Compuestas de três quantidades	Primera	$ax^{n+2} + bx^{n+1} = cx^n$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$
	Segunda	$ax^{n+2} + cx^n = bx^{n+1}$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$ (*)
	Tercera	$cx^n + bx^{n+1} = ax^{n+2}$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$

Quadro 9: Os tipos de *ygualaciones* estudados por Moya no *Compendio dela regla dela cosa* [1558] e as regras indicadas para a resolução de cada um. A anotação (*) indica que a regra está errada.

Moya nota que os procedimentos indicados são generalizáveis às equações que possam reduzir-se facilmente a um dos três tipos dados, quer sejam da forma $ax^{2n} + bx^n = c$; $ax^{2n} + c = bx^n$ e $c + bx^n = ax^{2n}$, ou $ax^{2m+n} + bx^{m+n} = cx^n$, $ax^{2m+n} + cx^n = bx^{m+n}$ e $cx^n + bx^{m+n} = ax^{2m+n}$ [347]:

> Nota si ygualando se tres caracteres, ygualmente distantes en medio de cada dos dellos falte un caracter, assi como si se ygualassen cce. y ce. a n. procederas como manda la primera ygualacion delas cõpuestas. y si cce. y n. se ygualassen a ce. porque se ygualan el mayor y menor al mediano, procederas como la segunda. Y si n. y ce. se ygualassen a cce. porque los menores se ygualan al mayor, seguiras como la tercera. Y lo que viniere en todas sera el valor de un censo, la r. del qual sera el valor dela co. y respuesta dela demanda. Y si como en esto falta un caracter, entre cada dos destos ygualados faltassen dos: despues de aver hecho lo que la regla manda saldra el valor del cv. Y sabido el cv. Saca su rrr., y sera el valor dela cosa, y respuesta dela demanda, y si faltassen 3, saldria el valor del cce. cuya rr. Sera la respuesta dela demanda y valor dela cosa. Y si faltaren 4, vendra el valor del R. cuja rayz relata sera el valor dela cosa. Y si faltassen 5, vendra cecv., cuya rayz cecv. Sera el valor dela cosa: y assi podras proceder en infinito, como por los exemplos del octavo articulo del capitulo tercero mejor entendras [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 72- 73].

Denotando uma preocupação semelhante à que teve quando mostrou como aplicar às equações $ax^{n+k} = bx^n$, as regras dadas para os casos particulares em que $k \leq 4$ [348].

---

[347] De acordo com [Moreno Castillo, R., 2009, p. 16] o matemático árabe Al-Karayi (? – c. 1016) foi quem primeiro estudou as equações de grau superior facilmente redutíveis a equações quadráticas.

[348] A inclusão desta nota mereceu ao nosso autor um comentário depreciativo de Consolación Baranda. Ao comparar, neste ponto, a obra de Moya com a que Aurel, Baranda sublinha a semelhança entre ambas e

Um dos melhoramentos importantes que o *Tratado de Arithmetica* apresenta relativamente ao *Compendio* e à *Arithmetica* é a correcção do erro cometido na regra de resolução da 2ª *ygualacio*n compuesta, dando para estas equações as soluções que em notação usual se traduzem por: $x=\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$ e $x=\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$.

Moya aplica correctamente esta regra para determinar um número tal que, por um lado subtraindo-lhe 7 e, por outro, subtraindo-lhe 6 e multiplicando as diferenças obtidas, o produto seja igual à soma do número referido com 2. Ou seja, pretende determinar um número, *x*, satisfazendo a condição $(x-7)(x-6)=2+x$. Os sucessivos cálculos conduzem à èquação $14x=x^2+40$ ("14 cosas yguales a un censo, mas 40 n"), para a qual são indicadas as soluções correctas 10 e 4. Depois de resolver o problema Moya faz a verificação de cada uma das soluções obtidas. Só por si, isso não seria de admirar, não fosse o facto pouco frequente de essa verificação envolver operações com números negativos: é que, quando substitui $x=4$ na equação, obtém -3 e -2, cujo produto satifaz a condição imposta. Vejamos:

> Assi mismo, si de 4 que dezimos ser el numero, restarmos 6 (por la regla del alegado capitulo) quedaran menos 2, multiplicando agora menos 3 (que es una resta) por menos 2 (que es la otra) montara mas 6 (como se mostro en el cap. 28) los quales 6 es dos mas que 4, que dezimos ser el numero, como la demanda pide [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 575].

Notamos que Aurel nunca considerou esta possibilidade, chegando mesmo a afirmar que seria impossível subtrair 5 de 3, como se vê na frase seguinte:

> Nota, quando te verna como enesta sexta ygualacion viene, y agora vino a dezir $\sqrt{9}-5$. Bien vees que no puede decir $3-5$, seria impossible de 3 sacar 5. Por lo qual has siempre de bolver, y poner la quantidad mayor primero [Marco Aurel, 1552, f. 79r].

---

observa que, enquanto Aurel dá oito regras para as *ygualaciones*, Moya dá apenas sete, mas acrescenta uma no final, procurando deste modo, apagar vestígios do seu plágio da obra de Aurel [Baranda, C., 1998, p. xix]. Embora reconheçamos a grande semelhança que o texto de Moya tem com o de Aurel [Marco Aurel, 1552, ff. 77v-79v], nomeadamente no que respeita ao estudo das equações, pensamos que a sua metodologia no que toca à generalização de procedimentos para as *ygualaciones compuestas* é coerente com a que pratica no estudo das *ygualaciones simples*, não sendo numerada em nenhum dos casos.

Não obstante, de acordo com Sesiano, as leis dos sinais no cálculo algébrico, que apareceram num estádio inicial do desenvolvimento da matemática, utilizam os números negativos na prática da álgebra, tanto em cálculos decorrentes da resolução de um problema como em resultados intermédios[349].

Voltando a Moya, não deixa de ser curioso que a equação que traduz o exemplo de aplicação do segundo tipo de equações completas, $x^2 + 40 = 14x$, seja a que Pacioli utiliza para dar a demonstração geométrica da regra de resolução das equações desse tipo ("census & numerus equantur radicibus"); contudo, não encontrámos na *Summa* o problema numérico que origina esta equação[350]. Há ainda outro aspecto do estudo das equações que queremos realçar no *Tratado de Arithmetica*; trata-se da indicação de uma segunda regra de resolução para cada uma das equações completas do segundo grau, que não está dada no *Compendio*. Assim, por exemplo, para as equações como $ax^2 + bx = c$, Moya nota que as soluções podem ser obtidas, não só por $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$, como também por $x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4 \times \frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}{2}$, enunciando a regra do seguinte modo:

> Quadra el quociente del mediano, y junta el producto com el quatrotanto del quociente del menor, y la rayz de la summa, menos el quociente del mediano, será lo que valen dos cosas, y assi la mitad dello será el valor de la cosa [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 548].

Nenhum comentário é feito sobre a funcionalidade desta segunda regra, que apenas é apresentada como alternativa à primeira; mas, é claro que ela pode simplificar a tarefa de cálculo quando $a = 1$. Esta regra e as correspondentes às outras duas equações de grau dois são semelhantes às que Pedro Nunes dá para cada uma das "conjugaciones compuestas", quando aborda pela segunda vez o estudo das equações, na terceira parte principal do *Libro de Algebra.*

No *Tratado de Arithmetica*, Moya preocupa-se, frequentemente, com a justificação das regras que aplica para resolver uma equação, mas o tipo de argumentação que utiliza consiste, em geral, na simples verificação dos resultados; ou seja, como ele diz, baseia-se na

[349] [Sesiano, J., 1984, p. 105].

[350] [Luca Pacioli, "distinctio octava", "Tractatus quintus", f. 147r].

"experiencia". Pedro Nunes usa, também, esse argumento para o mesmo fim. A título de exemplo, incluímos um trecho referente às considerações feitas por Pérez de Moya e por Pedro Nunes, no estudo da primeira *ygualacion simples:*

Como si cinco cosas so ygualassen a treynta numeros, partiremos treynta por cinco, y vendran seys, por el valor de la cosa, y assi lo muestra la experiencia[351]. Porque multiplicando seys (que es el valor de la cosa) por las cinco cosas, haran treynta, que es tanto como lo que viene com el menor character [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 547].

Pongamos que siendonos propuesto algun problema para resolver, y procurando la ygualdade que conviene, hallamos que .4.censos. son yguales a .20.cosas. Partiremos por tanto .20. por .4. y vernan .5. por valor de la cosa. E la experiencia assi lo dize[352]: Porque .20. multiplicados por .5. que es el valor de la cosa, hazen 100 [Pedro Nunes, 1567, f. 1v].

3.6.3. Casos de impossibilidade e de indeterminação

No *Compendio dela regla dela cosa*, são consideradas impossíveis equações como $3x = 4x$. Não nos surpreende que o zero não tenha sido considerado solução pois, como dizem Malet e Paradis, era o que se fazia na sua época[353]. Pacioli, Aurel, Tartaglia e Pedro Nunes são exemplos disso[354].

No entanto, há duas outras afirmações erradas, que estão em contradição com o estudo subsequente das equações que Moya faz. Uma é relativa a igualdades como $6x^3 = 6x^3$, sobre as quais é dito que têm apenas a solução 1; Aurel diz o mesmo. A outra é sobre equações como $8x = 8x^2$, que Moya diz que têm infinitas soluções.

No *Tratado de Arithmetica* os casos de possibilidade das equações são apresentados de um modo mais preciso e sistemático, e incluem a explicação do que se entende por uma equação possível determinada, possível indeterminada e impossível, no contexto da sua aplicação à resolução de problemas. Os erros grosseiros que sobre este assunto são

---

[351] O sublinhado é nosso.

[352] O sublinhado é nosso.

[353] [Paradis, J. e Malet, A., 1989, p. 244]. [Franci, F. e Rigatelli, L., 1983, pp. 299-300] observam que esta opção, comum na tradição dos tratados de ábaco italianos medievais, era ainda frequente em diversos trabalhos renascentistas.

[354] Ver [Luca Pacioli, 1494, f. 144v], [Marco Aurel, 1552, f. 77v], [Pedro Nunes, 1567, f. 20v]. Tartaglia, no capítulo "Della osservantia de alcuni capitoli irregulari" do *General Trattato*, explica a razão pela qual a equação $10x = 12x$ não admite solução, baseando o seu argumento no facto de serem diferentes os números obtidos quando se dividem ambos os membros da equação por x [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 16r].

cometidos no *Compendio* estão emendados, mas o zero continua a não ser aceite como solução.

No *Libro de Algebra*, Pedro Nunes dá indicações para reconhecer se o caso que está a ser tratado é impossível ou indeterminado, considerando que deste modo se evita gastar tempo a procurar a solução, quando ela não existe ou pode ser qualquer[355].

No *Tratado de Arithmetica* Moya também comenta o caso da equação completa do 2º grau cujo discriminante é negativo, notando que os problemas que se traduzem por uma tal equação são impossíveis[356].

3.6.4. Generalização das regras das equações: Moya, Chuquet e Nunes

Tanto no *Compendio dela regla dela cosa* como no *Tratado de Arithmetica*, Moya revisita o tema das equações explorando-o de um modo condensado sob o título: "Enel qual se pone una breve recopilacion de todas las ygualaciones". Isso sucede quando estão já tratados os sete tipos de equações que referimos e propostos e resolvidos diversos problemas de aplicação de cada um deles. Nessa nova abordagem, resume a apenas quatro tipos o estudo das equações apresentado anteriormente, observando que eles são suficientes para resolver uma infinidade de equações:

> Por lo qual en este capitulo no tratare otra cosa sino poner quatro regras generales que comprendan y abracĕ todas cualesquiera ygualaciones, aunque procedan en infinito [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 114][357].

Esta intenção percebe-se já no início do capítulo, quando Moya afirma que, ao contrário do que muitos autores disseram[358], há uma infinidade de equações, que ele condensará em quatro regras gerais:

---

[355] No capítulo intitulado "Como conosceremos si el caso es necessario o impossible", quando trata de "quantidades yguales en numero a otras quantidades de su misma natureza", Pedro Nunes discute casos de indeterminação, como aqueles em que ".10. co. son yguales a .10.c" ou ".4.ce. a .4.ce." ou "el numero .10. al numero .10", dizendo que "lo que se busca es necessario hallarse en qualquier numero". Mas nota que são impossíveis as igualdades em que as quantidades são da mesma natureza e diferentes em números, como ".10.co. son yguales a .12.co." [Pedro Nunes, 1567, ff. 19r-19v.]

[356] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 552].

[357] Quase pelas mesmas palavras em [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 585].

(…) las ygualaciones no solamente son 6. ni 7, ni 8, ni 10 (como Frater Lucas, y otros muchos antiguos & modernos dixeron) antes puedẽ ser infinitas [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 113].

No *Compendio*, não são citados Tartaglia nem Pedro Nunes. Estes autores classificam as equações em seis tipos. Tartaglia considera que entre "numero", "cosa" e "censo" podem ocorrer igualdades de seis modos e, portanto, "cõmunemente si disse li capitoli di Algebra esser sei", dos quais três se dizem "simplici" e três "compositi"[359]. Em notação usual, as simples traduzem-se por $ax = b$, $ax^2 = b$ e $ax^2 = bx$; e as compostas por $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$ e $ax^2 + c = bx$. A Pedro Nunes referimo-nos ainda neste capítulo, um pouco mais adiante.

Vejamos, agora, as quatro regras gerais de equações que Moya propõe para resolver todos os tipos de equações.

Primera regla: em notação simbólica esta regra aplica-se à resolução de todas as equações do tipo: $ax^{n+k} = bx^n$, $k \in N$, $n \in N_0$. Para resolver estas equações Moya começa por dividir ambos os membros pelo coeficiente do termo de maior grau reduzindo, em seguida, a equação obtida à forma $x^k = \frac{b}{a}$. Por fim, se $k = 1$, indica como solução $x = \frac{b}{a}$; e se $k > 1$, indica $x = \sqrt[k]{\frac{b}{a}}$.

Segunda regla*:* trata de equações que em notação simbólica são do tipo $ax^{2n+k} + bx^{n+k} = cx^k$, de que $ax^2 + bx = c$ é um caso particular. A regra de resolução é a anteriormente dada para estas últimas equações, mas a resolução só fica completa depois de se extrair a raiz de ordem *n* do resultado obtido. Isto significa que, depois de reduzir a equação dada à forma $x^{2n} + \frac{b}{a}x^n = \frac{c}{a}$, Moya toma a equação $y^2 + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$, onde $y = x^n$, e determina o valor de *y*, obtendo *x* pela extracção da raiz de índice *n* de *y*, se $n > 1$.

---

[358] Entre os autores cujo nome Moya não menciona está certamente Aurel, que considerou 8 tipos de equações. Está, também, Alberto de Saxónia que, segundo Aurel [Marco Aurel, 1552, f. 77v] tratou 10 tipos de equações. Alberto de Saxónia (1316, 1390) foi um matemático de prestígio tendo ensinado durante onze anos na Universidade em Paris, onde foi reitor. Albertuci, como também é conhecido, foi um transmissor das ideias de Bradwardine e Oresme, entre outros, e a ele se deve uma obra sobre teoria das proporções que teve mais de uma dezena de edições, das quais uma foi publicada em Veneza, em 1487.

[359] [Nicolo Tartaglia, 1560d, ff. 5r-9r].

As duas regras restantes são relativas às equações dos tipos, $ax^{2n+k} + cx^k = bx^{n+k}$ e $cx^k + bx^{n+k} = ax^{2n+k}$, respectivamente, e as considerações feitas são análogas às anteriores.

Moya não só reduz a quatro os sete casos de equações que estuda quando trata do assunto pela primeira vez (esta redução de 7 casos a 4 é apenas a redução a 1 só caso de todas as extracções de raízes, uma vez que as 3 últimas equações se mantêm individualizadas), como também introduz uma generalização que permite resolver uma infinidade de equações de grau qualquer.

A ideia da síntese proposta por Moya no *Compendio dela regla dela cosa*, reduzindo a quatro o estudo de uma infinidade de equações, é muito semelhante à descrita por Chuquet, no *Triparty*. O matemático francês condensa, também, em quatro as regras de resolução das equações – a que chama "canons". A primeira é a "rigle des $\overline{\text{p}}$miers", que trata das equações binomiais; as outras três – "le second canon, le tiers canon e le quart canon" – aplicam-se às mesmas "ygualaciones compuestas de tres quantidades" que Moya considera. Quando cotejamos, neste tema particular, o texto do *Compendio* com o do *Triparty*, de Chuquet, observamos que o autor francês é menos prolixo e que trata as equações por outra ordem: "o second canon" corresponde à 3ª "ygualacion compuesta", o tiers canon" corresponde à 1ª "ygualacion compuesta" e o "quart canon" corresponde à 2ª "ygualacion compuesta".

Quãdo un caracter se yguala a outro continuo proporcional. Quiero dezir que no falte grado ninguno dela continuaciõ proporcional que entre los caracteres se guarda como si co. se ygualasse a ce. O al contrario, el ce. ala co. O cv. a ce. O n. a co. &c. En tal caso partiras lo que viniere con el menor por lo que viniere com el mayor, y el quociente sera el valor de una cosa y respuesta dela demanda (…) y si entre el un caracter y outro de los dos que se ygualaren faltare uno, como si censo se ygualasse a n. entre los quales falta la cosa. O como si cubo se ygualasse a co. entre los quales

Rigle des $\overline{\text{p}}$miers: De deux nombres dissemblans quant lung est egal a laultre. Le precedent [isto é, o de menor denominação] doit estre party par le sequent [isto é, o de maior denominação] car le quociens est ce que lon demande. Et si les denominacions sont prochaines adonc le quociens est nombre. Se llz ne sont pchaines cest racine de nombre de laquelle sa denominacion est ce quoy la maieur denominacion surmonte la moindre [360] [Nicolas Chuquet, 1484, p. 748].

[360] Nossa tradução livre: "De dois números diferentes (*dissemblans*) quando um é igual ao outro. O precedente (isto é, o menor) deve ser partido pelo sequente (isto é o maior) pois o quociente é o que se pede. E se as

falta ce. &c Partiras lo que viniere com el menor caracter por lo que viniere com el mayor, y el quociente sera el valor de un censo y su r sera el valor de una cosa, y respuesta a la demanda (…) [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 114].

Por outro lado, os dois textos mostram uma diferença importante: a regra dada por Moya pressupõe que está em jogo um problema cuja resposta é dada pela resolução da equação, enquanto a exposição de Chuquet é formulada em termos abstractos. Estas diferenças também se observam no caso das equações envolvendo três monómios, mas as regras dadas por ambos e as conclusões a que chegam são, essencialmente, as mesmas. Vejamos, por exemplo, como cada um enuncia a regra de resolução para as equações do tipo $ax^{2n+k} + cx^k = bx^{n+k}$ (2ª "ygualacion compuesta" de Moya e quarto "canon" de Chuquet):

La segunda es quando vienen tres caracteres igualmente distantes, de suerte que entremedias no falte algun caracter, y que el mayor y menor se igualan al mediano. Assi como si ce. y n. se ygualassen a co. O como si cv. y co, se ygualassen a ce. y assi de otros qualesquiera caracteres. En tal caso partiras lo que viniere conlos caracteres menores, por lo que viniere conel mayor, y despues sacaras la mitad del quociente del mediano, y multiplicar la has por si, y deste producto restaras el quociente del menor caracter, y la r. desta resta mas o menos. La otra mitad del mediano es, el valor dela cosa y respuesta dela demanda [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 71].

De troys differances de nombre eqalement distans quant les deux extremes sont egualx a leur moyen Il est tousiours expedient partir les deux precedens par le sequent Et puis la moittie du moyen multiplier en soy et de la multiplicacion soustraire son p(re)cedent Car la racine seconde de la reste adioustee ou soustraitte a la moittie ou de la moittie du moyen est ce que lon quiert ou cas que les troys denominacions feussent p(ro)chaines Si non cest la racine lyee de toute laddicion ou soustraction dont sa denominacion est comme dessus est dit es deux cannons precedens[361] [Nicolas Chuquet, 1484, p. 749].

---

denominações são seguidas, então o quociente é número. Se elas não são seguidas, [o quociente] é a raiz do número do qual a denominação maior excede a menor" [Nicolas Chuquet, 1484, p. 748].

[361] Traduzimos assim este "quart canon" de Chuquet: "De três diferenças de números igualmente distantes, quando os dois extremos são iguais ao seu médio é sempre expedito partir os dois precedentes pelo sequente E depois multiplicar a metade do médio em si e da multiplicação subtrair o seu precedente Porque a raiz segunda do restante somada ou subtraida à metade ou da metade do médio é o que se pede quando as três denominações são seguidas (*prochaines*). Se não é a raiz ligada de toda a adição ou subtracção cuja denominação é como acima se disse nos dois canons precedentes [Nicolas Chuquet, 1484, p. 749].

Esta ideia de síntese está, também, presente no *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes, como mostramos a seguir. Antes, porém, vamos fazer um brevíssimo resumo sobre a orientação que Nunes dá ao estudo das equações. Começamos por observar que a "Primeira Parte" do *Libro de Algebra* é dedicada ao estudo das "cõjugaciones" – nome pelo qual designa cada uma das seis versões da actual forma canónica das equações de grau não superior a dois, envolvendo apenas coeficientes positivos. Pedro Nunes distingue dois tipos de conjugações: as "cõjugaciones simples" e as "cõjugaciones compuestas". Ambas envolvem as quantidades "numero, cosa e censo", mas enquanto as simples compreendem apenas duas delas, as compostas relacionam as três. Nunes classifica-as assim[362]:

Cõjugaciones simples	Censos yguales a cosas	$ax^2 = bx$
	Censos yguales a numero	$ax^2 = c$
	Cosas yguales a numero	$bx = c$
Cõjugaciones compuestas	Censo y cosas yguales a numero	$x^2 + bx = c$
	Cosas y numero yguales a censo	$bx + c = x^2$
	Censo y numero yguales a cosas	$x^2 + c = bx$

Depois desta classificação, Nunes inicia o estudo das equações de cada um dos tipos indicados, de acordo com a seguinte metodologia: primeiro dá uma regra geral de resolução, formulada em linguagem comum; em seguida, explica esta regra num exemplo de aplicação e faz verificação do resultado; depois ilustra a regra com um problema e, por fim, faz a demonstração geométrica. Ao retomar o tema das equações, na "Terceira Parte Principal" da sua obra (constituída por 200 folhas), Pedro Nunes começa por explicar que as regras apresentadas na primeira parte são as mais usuais e são, por isso, as mais utilizadas pelos aritméticos. Em seguida, inicia uma análise mais detalhada deste assunto, introduzindo nesse estudo *dignidades mayores*, ou seja, potências de expoente superior a dois:

> En la primera parte avemos solamente dado Reglas para las conjugaciones de las 3 quãtidades, numero, cosa, y censo. Y pusimos tres Reglas para 3 conjugaciones simples, y 3 para tres conjugaciones compuestas, porque estas son mas usuales, y mas praticadas por los Arithmeticos. Pero por la misma arte podremos cõparar esas 3 quantidades con las otras

[362] [Pedro Nunes, 1567, f. 1r].

dignidades mayores, y las otras mayores entre si, y ternan su Regla [Pedro Nunes, 1567, f. 147r].

Essa análise inclui a apresentação de doze regras relativas à igualdade entre dois monómios, perfazendo com as três primeiras, já dadas, um total de 15. Em notação simbólica usual, as regras apresentadas referem-se aos seguintes tipos:

1) $a = bx$	2) $a = bx^2$	3) $a = bx^3$
4) $a = bx^4$	5) $a = bx^5$	6) $ax = bx^2$
7) $ax = bx^3$	8) $ax = bx^4$	9) $ax = bx^5$
10) $ax^2 = bx^3$	11) $ax^2 = bx^4$	12) $ax^2 = bx^5$
13) $ax^3 = bx^4$	14) $ax^3 = bx^5$	15) $ax^4 = bx^5$

Só depois de enunciar, resolver e exemplificar cada uma delas, Pedro Nunes generaliza o procedimento a equações de expoentes superiores. A primeira abordagem que Pérez de Moya e Pedro Nunes fazem ao estudo das equações tem diferenças significativas, como as seguintes[363]: Pérez de Moya considera 7 tipos de "ygualaciones" e Pedro Nunes estuda 6 tipos de "conjugaciones"; para Pérez de Moya as equações $ax = b$ e $ax^2 = bx$ são ambas da "primera ygualacion" e para Pedro Nunes são de "conjugaciones" separadas. Além disso, a ordem pela qual Moya trata as "ygualaciones compuestas" é diferente da de Nunes. No entanto, ambos mostram as mesmas preocupações relativamente à generalização de procedimentos, que são claras quando se compara o estudo feito por Pérez de Moya no *Tratado de Arithmetica* com o de Pedro Nunes, na terceira parte principal do *Libro de Algebra*. Nas transcrições seguintes sobressai a semelhança entre o conteúdo, o modo de o expor e até os termos utilizados pelos dois autores.

La primera regla sea, que quando un character se ygualare a otro, partiras siempre la quantidad que viniere com el menor character, por la quantidad que viniere con el mayor, y guardaras el quociente. Luego resta la

Regla general para toda conjugacion simple.
Partiremos el numero de la quantidad de menor denominacion por el numero de la quantidad de mayor denominacion, y guardaremos el quociente, y sacaremos entonces la menor

[363] Referimo-nos quer ao *Compendio dela regla dela cosa* como ao *Tratado de Arithmetica*.

denominaciõ del menor character de la denominaciõ del mayor, y si lo que restare fuere uno, porque uno es denominaciõ de la cosa, el quociente que guardaste sera el valor de la cosa, y respuesta de la demanda. Y si lo que restare de las denominaciones de los characteres fuere 2: porque 2 es denominaciõ del censo, diras que el quociente es censo, y asi su raiz quadrada sera el valor de la cosa. Y si quedaren 3, porque 3 es denominaciõ del cubo, diremos que el quociente es cubo, y la rayz cubica sera el valor de la cosa, y respuesta de la demanda. Y deste modo se procede en infinito cõ las ygualaciones simples, compuestas de dos quantidades [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 585-586].

denominacion de la mayor, y veremos que denominacion queda. Porque si lo que quedare fuere unidad, por quanto la unidad es denominacion de cosa, diremos que el quociente es el mismo valor de la cosa. Y si quedaren .2., por quãto el numero .2. es denominacion de censo, diremos por tanto, que el quociente es censo, y la raiz dese numero quociente, sera el valor de la cosa. Y si quedaren .3., por quanto .3. es denominacion de cubo, diremos que el quociente es cubo, y la raiz cubica del mismo quociente, sera el valor de la cosa. Y si quedaren .4., por quanto .4. es denominacion de censo de censo, diremos que el quociente es censo de censo, y la raiz quarta del mismo quociente, sera el valor de la cosa., y assi por lo conseguiente, sera en todas las otras dignidades [Pedro Nunes, 1567, f. 148v].

Pérez de Moya até usa a palavra “denominaciõ” com o significado que lhe dá Pedro Nunes, o que não acontecia no *Compendio dela regla dela cosa*.

Pedro Nunes generaliza as regras elementares relativas às equações completas de segundo grau, a equações de grau superior a 2, mas nota que elas só são válidas para as “conjugaciones de dignidades proporcionales” ou seja, quando as “suas denominaciones distan por yguales differencias” (Moya diz “tres caracteres, ygualmente distantes”). Este é o caso em que é possível reduzir a equação a uma do segundo grau, do tipo das estudadas, que ele explica assim:

> Siendo nos propuesto una conjugaciõ de tres dignidades proporcionales, la una ygual a las otras dos juntas, si son numero, cosa, y censo, ya tienen sus Reglas; Y si son otras que abatidas ygualmente, conforme a la menor denominacion que en ellas se halla, pueden venir a estas, tienen las mismas Reglas, como si nos dixessen que .2. ce $\tilde{p}$. 1. cu. son yguales a 1. ce. ce. porque sacando de sus denominaciones el numero .2., que es denominacion del censo, vienen a .1. co. $\tilde{p}$ .2., yguales a .1. ce. ya tienen su Regla que declara el valor de la cosa. Pero si siendo proporcionales, no son tales como estas, veremos si alguna destas es numero, porque si lo fuere, usaremos de las otras dos dignidades, como si fuesen co. y ce.

> conviene a saber la de menor denominacion servira de cosa, y la mayor de censo, y obraremos por las tres Reglas compuestas de numero, cosa y censo. Pero lo que en la fin viniere, no sera valor de la cosa, mas sera valor de aquella dignidad, en cuyo lugar se puso la cosa, y la su raiz conforme a su denominacion sera el valor de la cosa [Pedro Nunes, 1567, f. 150r].

A explicação de Pedro Nunes contempla os três casos de generalização das equações completas de segundo grau, casos que Pérez de Moya trata separadamente de modo mais prolixo, mas mais fácil de entender. Podemos dizer que o estudo de ambos engloba todas as equações que se transformam numa equação completa do segundo grau, por divisão de uma potência da incógnita ou uma substituição de variável.

3.6.5. Equações com radicais e fracções

Os tipos de equações que são tratados com mais detalhe nas obras de Moya são os que já referimos. Mas os princípios de equivalência enunciados ("os avisos") permitem resolver outros casos, reduzindo-os aos previamente estudados. Eles aplicam-se a equações em que, num dos membros (ou em ambos), há raízes numéricas ou irracionais e a outras em que a incógnita está presente no denominador, ou seja, que envolvem fracções, que actualmente designamos por fracções algébricas[364]. Contudo, Moya reconhece que, face às inumeras espécies de equações existentes, o seu estudo não esgota o tema.

Para resolver equações destes tipos, Moya recorre a técnicas como as seguintes:

1. Quando num dos membros da equação existe um radical, isola-o e, em seguida, reduz ambos os membros a um radical com o mesmo índice. Igualando os radicandos obtidos, desembaraça-se da raiz. Como alternativa à redução a um radical comum, utiliza também o processo que consiste em elevar ambos os membros ao quadrado.
2. Quando existe apenas um "quebrado" (aqui "quebrado" tem o significado de fracção algébrica) e ele constitui um dos membros da equação, Moya multiplica o outro membro pelo denominador do quebrado. Se cada um dos membros for uma fracção algébrica, multiplica em cruz, desembaraçando de denominadores. Nos casos em que há inteiros e fracções algébricas num ou em ambos os membros, transforma cada um dos inteiros numa

[364] O *Tratado de Arithmetica* oferece um exame mais abrangente e melhor organizado deste assunto, que Moya trata em dois avisos intitulados: "En que se ponen reglas, y avisos para ygualar, quando en alguna parte de la ygualacion, ay algun genero de rayz quadrada, o cubica, o outra qualquierea" e "En que se ponen avisos, y reglas generales, para quando en las ygualaciones vienen quebrados."

fracção com denominador igual ao do "quebrado" existente nesse membro e, em seguida, multiplica em cruz.

Estas técnicas são aplicadas e explicadas em diversos exemplos. Estes não provêm de problemas do dia-a-dia, não requerendo, portanto, uma matematização conducente a uma equação; são equações bem escolhidas, de modo a que os procedimentos fiquem perfeitamente compreendidos.

Nas linhas abaixo apresentamos, utilizando notação simbólica actual, as catorze equações que Moya inclui no *Tratado de Arithmetica* como exemplos de aplicação: nos primeiros nove casos intervêm raízes quadradas e de índice 3 e nos cinco restantes, fracções em cujos denominadores está presente a incógnita[365].

1. $2x = \sqrt{6}$
2. $3x - 3 = \sqrt{2}$
3. $3x^2 = \sqrt{4x^3 + 8x^2}$
4. $2x - 2 = \frac{\sqrt{x-3}}{2}$
5. $3x = \sqrt[3]{2x^4 + 4x^2}$
6. $6x = 3 + \sqrt{5x^2 + 4x}$
7. $2x^2 + 3 = 12 - \sqrt{5x^2}$
8. $2 + \sqrt{3x} = \sqrt{4x}$
9. $3x^2 + \sqrt{72x^2} = 24$ [366]
10. $\frac{3}{2} = \frac{20}{4x - 3x^2}$
11. $\frac{2x}{3x^2} = 4 + 8x$
12. $\frac{x}{\frac{1}{3}} = 6\frac{1}{3}$
13. $2x + \frac{3}{x^2} = 4x + 5$
14. $3x^2 + \frac{2x}{4x^2} = 2 + \frac{6}{7x}$

Para se ficar com uma ideia de como são tratados estes exercícios no texto de Moya, debruçamo-nos, a título de exemplo, sobre o caso 6 acima indicado. A metodologia utilizada por Moya é a seguinte: primeiro isola o radical, subtraindo 3 a ambos os membros e, em seguida, quadra ambos os membros, obtendo $36x^2 - 36x + 9 = 5x^2 + 4x$. A resolução da equação é tarefa deixada para o leitor. Vejamos as suas palavras:

> Si seys cosas se ygualaren a 3 numeros , p. r 5 ce. p. 4 co. Quita los 3n. (que vienen en la una parte desta ygualacion) de una parte y outra, dizendo. De seys cosas, quien quita tres

[365] Os exercícios estão indicados segundo a ordenação de Moya [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 542-543].

[366] Aqui, Moya comete um lapso, tomando $\sqrt{72x^2} = \sqrt{72}x$ [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 543].

números, quedaran 6 cosas, menos 3 numeros, y esta sera la una parte, y de la outra, quita los tres números, y quedara r 5 ce. p. 4 co. por la comum sentencia. Agora porque ay rayz en la una parte, quadralas ambas, multiplicando cada cosa por si. Y deste modo, multiplicando 6 co. m. 3 n. (que estan en la una parte de la ygualacion) por outro tanto, montara 36 censos, menos 36 co. p. 9 n. Quadra la outra parte (que es r 5 ce. p. 4 co. quitando solamente la rayz) y quedara 5 ce. p. 4. co. y esto sera quadrado. Porque como diximos en las rayzes, multiplicar una rayz por outra ygual, queda hecha la una numero, y viene lo mismo por una via que por outra, y assi quedaran yguales 36 ce. m. 36 co. p. 9 n. a 5 ce. p. 4 co. Agora para acabar de abreviar esta ygualacion, sigue los preceptos primeiros [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 543].

Equações como estas são estudadas na *Summa* de Pacioli, sob o título "Secundum essentiale notandum"[367] e no *General Trattato*, de Tartaglia, nas secções "Dello investigare se delli estremi delle equationi, si possono pigliare le loro radici" e "Del levare gli rotti delle equationi"[368]. Estes autores propõem as técnicas que referimos atrás, para as resolver. Como aplicação, Pacioli dá apenas dois exemplos, ambos envolvendo fracções. No tratado de Tartaglia vemos mais exemplos, e mais variados, alguns dos quais têm as características dos de Moya, diferindo apenas nas quantidades envolvidas. É o que se passa com os seguintes: $5x^2+8=100-\sqrt{20x^2}$ (análogo ao 7. de Moya); $8+\sqrt{40x}=\sqrt{100x}$ (semelhante ao 8. de Moya) ; $12x+\frac{15}{x^2}=12x+8$ (análogo ao 13. de Moya); $2x^2+\frac{10x}{3x^2}=10+\frac{15}{4x}$ (semelhante ao 14. de Moya).

É curioso observar que:

a) Os dois últimos exemplos são dados pela mesma ordem por Tartaglia e por Moya;

b) Tartaglia comete um erro (toma $12x\times x^2=12x^2$) ao reduzir o primeiro membro da equação $12x+\frac{15}{x^2}=12x+8$ a um denominador comum, e Moya comete o mesmo erro na equação $2x+\frac{3}{x^2}=4x+5$ (toma $2x\times x^2=2x^2$);

[367] Erradamente, pois são as terceiras notas [Luca Pacioli, 1494, f. 148v].

[368] [Nicolo Tartaglia, 1560d, ff. 12v-13v e 14v-15r].

c) Tanto Tartaglia como Moya reduzem a equação dada (que em Tartaglia é $15 = 12x^3 - 4x^2$, e em Moya é $2x^3 + 5x^2 = 3$) a uma de terceiro grau, mas páram a resolução nesse ponto.

Contudo, no exercício 14., Moya reincide no erro anterior, ao reduzir o primeiro membro da equação a um denominador comum, enquanto Tartaglia resolve bem esse passo.

Pedro Nunes, no *Libro de Algebra*, dedica algumas páginas a este assunto, que apresenta como "Regla de la ygualacion en los quebrados y raízes". Apesar de o título referir a igualdade de quebrados, ele nota que não se trata, aqui, de fracções usuais (os "quebrados de primera intencion"), porque as regras das equações a aplicar a estas fracções são as que valem para os inteiros, mas trata-se da igualdade de fracções algébricas (os "quebrados de segunda intencion"), e de radicais.

Pérez de Moya e Tartaglia estudam primeiro as equações que envolvem radicais e só depois as que contêm fracções algébricas, enquanto Pedro Nunes faz o estudo pela ordem inversa, mas as técnicas que estes autores usam são as mesmas. É muito interessante ver como a resolução de uma equação 'tão simples' como $\sqrt{18x} = 3x$ merece a Pedro Nunes uma explicação tão pormenorizada, e saber que essa mesma equação foi, também, segundo Nunes, tratada longamente e de um modo incorrecto por Cardano[369].

[369] [Pedro Nunes, 1567, f. 138v].

Vejamos os exemplos que Pedro Nunes escolhe[370]:

1'. $\frac{20}{x}=\frac{30}{x^2}$

2'. $\frac{20x}{x^2}=12$

3'. $\frac{20x-4}{3x^2}=\frac{5x}{x^3}$

4'. $\frac{20-x}{x^2+x}=3\frac{4x}{x^2}$

5'. $\frac{6}{x}=\sqrt{7}$

6'. $\sqrt{7}=4x$

7'. $\sqrt{7}=\sqrt{3x}$

8'. $12=\sqrt{6x}$

9'. $\sqrt{18x}=3x$

10'. $x^2+2=8-\sqrt{x^2}$

11'. $\sqrt{9}=\sqrt{3x+\sqrt{9}}$

12'. $20=24-\sqrt{34-6x}$

13'. $3x+\sqrt{x^2+5}=9$

14'. $\sqrt{12x}+3=\sqrt{27x}$

15'. $\sqrt{12x}+5x=\sqrt{3x}+18$

Os casos apresentados por Pérez de Moya, que numeramos com 7. e 8., são semelhantes na forma aos de Pedro Nunes, que referimos como 10' e 14'. Cotejando as descrições que ambos fazem e as correspondentes resoluções, concluímos que usam exactamente o mesmo procedimento, diferindo apenas na ordem pela qual indicam os termos resultantes do desenvolvimento do quadrado de binómio[371]. As comparações que fazemos a seguir são relativas ao exemplo 8 (de Moya) e 14' (de Nunes), e constituem uma evidência do que acabámos de dizer:

Si vinieren 2 n. p. r 3 co. a ser yguales a r 4 co. Porque en ambas partes ay rayz, quadra la una y outra, y vendra quadrando 2 n. p. r 3 co. a ser 4 n. p. r 48 co. p. 3 co. y el quadrado de r 4 co. seran 4 co. y assi quedaran yguales lo uno a lo outro. Luego prosigue quitando las tres cosas (que en la una parte de la ygualacion vienen mas) de la una y otra parte (por razõ en otras dicha) y quedara 4

Si queremos ygualar R.12. co. p. 3. con R .27. co. multiplicaremos cada una destas quãtidades en si, y el quadrado de R. 12. co. p. 3. sera .12. co. p .9. p. R. 432. co. y el quadrado de R. .27. co. sera .27. co. y serã yguales estos quadrados. Sacaremos de entrambos las .12. co. y quedaran .9.p. R .432. co. yguales a .15.co. Agora ordenaremos como

[370] Na transcrição respeitamos a ordem de Pedro Nunes, mas apusemos a numeração, que não existe no seu texto.

[371] Tartaglia, no exemplo $8+\sqrt{40x}=\sqrt{100x}$, também o aplica, desenvolvendo o quadrado do binómio tal como o vemos em Pedro Nunes [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 13r].

n. p. r 48 co. yguales a 1 co. quita tambien los quatro numeros (que vienen mas en la una parte do esta la rayz) de una y otra parte, y quedara r 48 co. yguales a 1 co. m. 4 n. Quadra agora outra vez estas dos partes, porque en la una ay rayz, y el quadrado de la una sera 48 co. y el outro 1 ce. m. 8 co. p. 16 n. Prosigue com tus avisos (como en los precedentes exemplos se há hecho) juntando las menos 8 co. (que estan en la una parte) com las 48 cosas (que estan en la outra) y quedaran 56 co. yg. a 1 ce. p. 16 n. y assi quedara en la orden que es menester [Juan Pérez deMoya, 1573a, p. 543].

raizes de co. queden por si solas, y esto se hara sacando de entrambas las quantidades los .9. y quedaran por tanto R .432. co. yguales a .15. co. m .9. Y multiplicaremos por si cada una destas quantidades, y haremos .432. co. y .225. ce. p .81. m .270. co. que serã yguales, restauraremos lo diminuto, e ternemos .702. co. yguales a .225. ce .p .81. y sera acabada la ygualacion[372] [Pedro Nunes, 1567, ff. 141v-142r].

Em notação simbólica actual, as resoluções dadas por Moya e Nunes podem ser assim indicadas:

$2+\sqrt{3x}=\sqrt{4x}$

$\left(2+\sqrt{3x}\right)^2=\left(\sqrt{4x}\right)^2$

$4+\sqrt{48x}+3x=4x$

$4+\sqrt{48x}=x$

$\sqrt{48x}=x-4$

$\left(\sqrt{48x}\right)^2=(x-4)^2$

$48x=x^2-8x+16$

$56x=x^2+16$

[Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 543].

$\sqrt{12x}+3=\sqrt{27x}$

$\left(\sqrt{12x}+3\right)^2=\left(\sqrt{27x}\right)^2$

$12x+9+\sqrt{432x}=27x$

$9+\sqrt{432x}=15x$

$\sqrt{432x}=15x-9$

$\left(\sqrt{432x}\right)^2=(15x-9)^2$

$432x=225x^2+81-270x$

$702x=225x^2+81.$

[Pedro Nunes, 1567, ff. 141v-142r].

Como vimos, os procedimentos de Moya e de Nunes são os mesmos, e ambos optam por não resolver a equação resultante, pois possivelmente entendiam que o leitor faria isso sem dificuldade[373].

[372] No texto de Pedro Nunes substituimos os simbolos adoptados para a adição e para a subtracção, respectivamente, 'p com til em cima' e 'm com til em cima'por um 'p' e um 'm'.

[373] Moya diz: "y assi quedara en la ordĕ que es menester" [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 543]. Nunes diz: "y sera acabada la ygualaciõ" [Pedro Nunes, 1567, ff. 141v-142r].

Equações que envolvem fracções algébricas e equações com radicais não eram novidade no século XVI; elas aparecem já em alguns textos manuscritos de séculos anteriores. Citamos, por exemplo, um manuscrito anónimo italiano do século XIV, o *Il Trattato d'Algibra*, onde se encontram equações que, em notação simbólica usual, se escrevem[374]:

$\frac{10}{x}-\frac{10}{10-x}=4$; $\frac{5+x}{5-x}+\frac{5-x}{5+x}=9$; $\frac{\frac{5+x}{5-x}}{\frac{5-x}{5+x}}=10$; $\frac{(5+x)(5-x)}{(5+x)(5-x)}=2x+7$; $\sqrt{x^2}=\frac{1}{3}\left(10-x^2\right)$;

$\sqrt{x^2}+\sqrt{10-x^2}=4$; $\sqrt{x^2}=1+\sqrt{10-x^2}$; $\frac{5+x}{5-x}+\frac{5-x}{5+x}=\sqrt{14}$ e

$\sqrt{x^2+6}+\sqrt{(10-x)^2+20}=13$. E, também o *Libro dí contí e mercatanzie*, de autor anónimo do séc. XV, onde se trata a seguinte equação (notação usual)[375]: $\frac{100}{x}-\frac{100}{x+5}=20$.

Contudo, este tipo de questões não era muito frequente em tratados de ábaco. Gregori e Grugnetti, no estudo que publicaram sobre um manuscrito de ábaco de Parma do século XV – *Trattato d'Abaco* – referem que ele contém poucos problemas para cuja resolução se recorre à "regola della cosa" [376], e notam que esta regra é aplicada sobretudo à resolução de problemas práticos ou de natureza geométrica; notam, ainda, que as equações resolvidas nesse manuscrito se reduzem aos tipos: $ax^2=bx$; $ax^2=b$ e $ax^2+bx=c$ (com *a*, *b* e *c* positivos). Isso não obsta a que algumas das técnicas que referimos fossem conhecidas do autor do manuscrito, pois observamos que um dos problemas, que se traduz pela equação $\frac{60x}{12-x}=\frac{60}{x}+3$, é resolvido correctamente[377].

Quando comparámos o procedimento utilizado nos manuscritos que referimos, para resolver equações que envolvem fracções algébricas ou radicais, com os de Moya, Pacioli, Tartaglia e Nunes, notamos que os autores anónimos referem apenas casos particulares e só dão a conhecer a regra que utilizam no decurso da resolução do problema, enquanto os

---

[374] O autor anónimo resolve trinta e seis problemas que versam sobre a decomposição de 10 em partes, embora nem todos envolvam fracções algébricas e raízes. Podem consultar-se os problemas que indicámos em *Il Trattato d'Algibra,* em [Franci, R. e Pancati, M, 1988, pp. 109-110, 111, 112, 115, 116, 117-118, 118, 126-127, 134-136].

[375] Ver *Libro dí contí e mercatanzie* em [Gregori, S. e Grugnetti, L., 1998, p. 103].

[376] [Gregori, S. e Grugnetti, L, 2001, p. XXXI].

[377] [Gregori, S. e Grugnetti, L, 2001, pp. XXXI-XXXII].

outros autores indicam métodos gerais de resolução. Apesar disso, quando aplicados a casos particulares, os procedimentos são os mesmos.

3.6.6. Equações especiais

No *Compendio* há um problema que envolve quatro potências da incógnita e que, por isso, se traduz por uma equação de tipo diferente de todas as que apresentámos até agora. É o seguinte:

> Dos tienen reales, el uno 7, mas que el otro. & cada uno gano con cada real, tantos ducados como reales tenia, & multiplicando los ducados que gano el uno por los que gano el outro, montan 14400 ducados, pido quantos reales tenia cada uno? [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 117].

Em notação usual, designando por x a quantidade de reais do primeiro indivíduo, e por y a do segundo, o problema pode ser traduzido simbolicamente por $\begin{cases} y = x + 7 \\ x^4 + 14x^3 + 49x^2 = 14400 \end{cases}$. Embora a segunda equação seja de quarto grau, tanto o primeiro membro como o segundo são quadrados perfeitos. Por isso, Moya reescreve-a na forma $\left(x^2 + 7x\right)^2 = 120^2$ e reduz a sua resolução à da equação $x^2 + 7x = 120$ (esquecendo $x^2 + 7x = -120$, que não faz parte dos tipos de equações estudadas). Depois de resolver esta equação, responde ao problema proposto, indicando quanto ganhou cada um dos homens.

A equação $x^4 + 14x^3 + 49x^2 = 14400$ é a única do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 = d$ tratada nessa obra de Moya; no entanto logo aí é clara a preocupação do autor com a determinação de soluções gerais para estas equações. Vejamos as suas palavras:

> Nota en todas las ygualaciones que se han puesto en las demandas de los capitulos precedentes, siempre se há ygualado un caracter a outro, o dos a uno, si viniessen tres o mas a ygualarse a uno, tendras la regla que en la demanda siguiente se põdra [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 117].

Na *Arithmetica practica, y speculativa* não se introduzem novidades relativamente a este assunto, mas no *Tratado de Arithmetica* Moya refere-se a problemas que se traduzem

por meio de equações em que mais de três monómios se igualam a um número[378]; e mostra a necessidade de procurar, por algum meio, transformar essas equações noutras das quais se conheça a regra de resolução. A estratégia é semelhante à anteriormente aplicada, e tem como objectivo transformar cada um dos membros da equação num quadrado perfeito. Quando esta fase está concluída, é possível reduzir a resolução da equação resultante a uma de grau inferior, à qual se aplica uma das regras dadas para as equações de grau dois. Por vezes, o processo exige um pequeno artifício, como o que consiste em somar, ou subtrair a ambos os membros um mesmo número. É isso que acontece no caso de $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 117648$, que Moya resolve começando por somar 1 a ambos os membros da equação dada. Deste modo, obtém a igualdade: $\left(x^2 + x + 1\right)^2 = 343^2$ que ele reduz a $x^2 + x + 1 = 343$, que se reduz a uma do tipo da "1ª ygualacion compuesta".

É possivel que Moya tenha tomado conhecimento deste procedimento através da *Summa*. Pacioli propõe um problema que recorre ao mesmo artifício: somar 1 aos dois membros de uma equação para transformar o primeiro membro num quadrado. O enunciado do problema de Pacioli é o seguinte:

> Poniamo che la spera terrena a de revolutione 20400 miglia e super lo equinotio da uno ponto e in ponto si muove doi ponti mobil lo primo va verso oriente el primo giorno un miglio lo secondo 2 lo terzo 3 ecc., lo secondo va verso occidente lo primo di un miglio lo secondo 8 e lo terzo 27 ecc. Adomando in quanti di si troveranno li disse movimenti in un sol ponto [Luca Pacioli, 1494, f. 44r][379].

Em notação simbólica usual, este problema traduz-se por $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$; Pacioli transforma-o em $\left(x^2 + x + 1\right)^2 = 81601$, e indica para solução $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} + \sqrt{81601}}$ [380].

Mas há outra fonte que, neste caso, nos parece mais sugestiva – o *General Trattato*, pois Tartaglia propõe um problema cuja solução depende, precisamente, da resolução da

---

[378] [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 587-589].

[379] Citado por [Libri, G., 1838-1841, II, pp. 284-285]. Não traduzimos o enunciado deste problema porque ele é semelhante ao de Tartaglia que apresentamos a seguir, e do qual damos a tradução.

[380] Resolução em [Libri, G., 1838-1841, II, pp. 284-285].

equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 117648$, que acabámos de ver. O enunciado desse problema de Tartaglia é o seguinte[381]: suponhamos que o perímetro do equador terrestre é 29412 milhas e que do mesmo ponto dele partem dois móveis em sentido contrário, de modo que um deles percorre no primeiro dia 1 milha da circunferência, no 2º, duas, no 3º, três, e assim sucessivamente; e o outro percorre no 1º dia 1 milha, no 2º, oito, no 3º, 27, e assim por diante. Quantos dias são necessários para se encontrarem?

> Poniamo che la circonferentia del circulo equinotiale della sfera terrena sai 29412 miglia, & che da uno medesimo punto della circonferentia del circolo equinotiale della celeste sfera del firmamento, in uno medesimo punto [382], si partano dui punti mobili, & che l'uno vada verso oriente il primo giorno, tanto che quel spacio del caminno, che'l fa, viene ad occupare uno miglio della circonferentia del circulo equinottiale della sfera terrena, il secondo 2, il terzo 3, & cosi ogni giorno sempre crescendo uno. L'altro vada verso occidente il primo giorno tanto che il caminho ch'el fa, viene ad occupare uno miglio pur della circonferentia del circulo equinottiale della sfera terrena, il secondo 8, il terzo 27, il quart 64, & cosi ogni giorno procedendo ordinatamente, secondo l'ordine de gli numeri cubi. Si dimanda in quanti giorni questi dui punti si cõgiungeranno in uno medesimo punto [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 16v] [383].

A forma de abordar este assunto é diferente nos dois autores: enquanto Tartaglia põe a ênfase na resolução do problema, Moya centra-se no estudo da equação, o que mostra que a principal preocupação do nosso autor é a consolidação das regras da álgebra.

Além dos tipos de equações que indicámos, no *Tratado de Arithmetica* são, também, estudadas as "ygualaciones estravagantes": são equações como $20x^3 + 40x^2 = 60x$, que se reduzem às equações de grau dois completas pela divisão por uma potência da incógnita, operação referida como "abreviar los characteres". É curioso que apesar de anteriormente ter indicado regras ("a da primeira ygualacion compuesta" e, noutro momento, a "segunda

---

[381] [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 16v].

[382] Aqui deve ter o significado de instante.

[383] Apresentamos, em seguida, a nossa tradução livre do texto de Tartaglia: Suponhamos que a circunferência do círculo equinocial da esfera é 29412 milhas, e que de um mesmo ponto da circunferência do círculo equinocial da esfera celeste do firmamento, num mesmo ponto, partem dois pontos móveis, e que um vai para oriente, tanto que no primeiro dia o espaço de caminho que faz ocupa uma milha da circunferência do círculo equinocial da esfera terrestre, e no segundo2 e no terceiro 3, e assim vai aumentando todos os dias sempre crescendo um. O outro vai para ocidente e no primeiro dia tanto que o caminho que faz ocupa uma milha da circunferência do círculo equinocial da esfera terrestre, no segundo 8, no terceiro 27, no quarto 64, e assim cada dia procedendo ordenadamente, segundo a ordem dos números cubos. Pergunta-se em quantos dias estes dois pontos se encontram num mesmo ponto [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 16v].

regla") em que se incluem equações como a que acabámos de referir ("Quando de tres caracteres ygualmente distantes, se ygualan los dos mayores al menor…"), Moya parece não a reconhecer como fazendo parte desse grupo[384] e intitula equações como estas de "extravagantes", embora recorra às regras de resolução conhecidas para as equações de grau 2. Moya observa que há casos de equações mais complexos, que exigem mais conhecimentos, e remete esse estudo para a *Arithmetica* de Cardano[385]. Relativamente às equações do tipo $x^3 + x = n$ ("el cubo y cosa se ygualan a numero"), que não trata, aconselha aos interessados no seu estudo a leitura da parte final do *Libro de Algebra* de Pedro Nunes[386].

3.6.7. Demonstrações geométricas

No *Compendio* [1558] e na *Arithmetica* [1562] Pérez de Moya não demonstra as regras que indica para as *ygualaciones*[387]. Contudo, nas obras de conteúdo algébrico mais conhecidas que até então se tinham publicado, essas provas são apresentadas geometricamente, nomeadamente para as equações do segundo grau. Pacioli inclui-as na *Summa* [1494], Cardano trata-as na *Ars Magna* [1545], Tartaglia dá-as no *General Trattato* [1560][388], Pedro Nunes expõe-nas no *Libro de Algebra* [1567]. Observamos que Tartaglia apenas proporciona demonstrações das três equações de segundo grau completas e os

---

[384] E mesmo Tartaglia só em 1536 obteve a regra geral de resolução das equações do tipo $\left(x^3\right)^2 + bx^3 = c$, que por uma simples mudança de variável se reduzem a $x^2 + bx = c$. Tartaglia descreve, assim, as circunstâncias em que ocorreu essa descoberta: "Anci mi aricordo che l'anno .1536. la notte de san Martin, la qual festa fu in sabbo, fantasticando in letto quando che non potea dormire trovai la regola generale allo capitulo de censo de cubo, & cubi, equal à numero & simelmente alli altri dui suoi compagni, nella medesima notte, il che non me fu difficile anchor che fusseno cõposti di piu alte dignita di cosa è cubo equal à numero, per esser di megliore proportionalita et la sua regola è piu facile, & di piu amena conclusione et piu universale, perche quella ne serve si nelle conclusione rationale comme nelle irrationale" [Nicolo Tartaglia, 1546, f. 130v].

[385] Moya cita o livro *decimo* da *Arithmetica* de Cardano. Contudo, esta obra não se encontra organizada em livros e o capítulo X trata da soma de expressões polinomiais (*De agregatione denominationū*) [Girolamo Cardano, 1539, f. 10v]. Pensamos que Moya se estaria a referir à *Ars Magna* onde no capítulo X se estudam diversos tipos de equações, entre as quais aparece um caso particular da cúbica [Girolamo Cardano, 1545, pp. 77-95 e, em especial, pp. 87-88].

[386] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 589].

[387] E Aurel também não. Rey Pastor considera isso um retrocesso em relação à *Summa*, onde, como diz, "aparecen demostradas geométricamente, com toda extensión, las tres reglas para resolver las ecuaciones de segundo grado" [Rey Pastor, J., 1934, p. 102].

[388] Na tradução inglesa da *Ars magna* feita por Richard Witmer, as demonstrações de Cardano são apresentadas no capítulo intitulado "Showing the Solution of Cases Composed of Minors, Which Are the Square, Constant, and First Power" [Girolamo Cardano, 1545, p. 33 e seg]. Na obra de Tartagliasão dadas sob o título "La demostratione geometrica adutta sopra le regole di tre capitoli composit" [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 7r e seg.].

esquemas que apresenta referem-se a casos particulares em que os coeficientes da incógnita e o termo independente são conhecidos e estão indicados na figura correspondente. Por exemplo, para as equações do *secondo capitolo composito* (do tipo $ax^2 + bx = c$, em notação simbólica usual) recorre ao exemplo "un censo piu 24 cose iguali a 340" para mostrar como se obtém geometricamente a solução (figura 15).

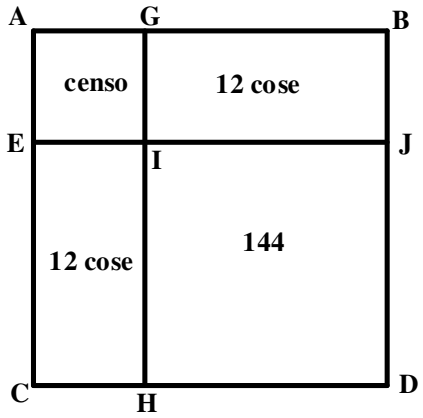


Figura 15: Demonstração geométrica da regra de resolução das equações do tipo $ax^2 + bx = c$, como está feito em [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 8r].

As demonstrações de Tartaglia são elucidativas mas não têm o carácter de generalidade das que Moya dá no *Tratado de Arithmetica*, de que a seguir trataremos.

Pedro Nunes inclui no *Libro de Algebra* demonstrações relativas às regras de resolução das três equações de segundo grau completas; e pensamos que este é o único trabalho algébrico impresso, de autor ibérico, anterior ao *Tratado de Arithmetica*, onde essas demonstrações são dadas. Sendo assim, a obra de Moya é o primeiro texto de autor castelhano que contém essas demonstrações. No *Tratado de Arithmetica*, Moya dá as demonstrações para as regras das três "ygualaciones compuestas" (que são as que podem reduzir-se a equações completas do segundo grau), mas não demonstra as "ygualaciones simples" (isto é, as equações binómias) porque entende que tal é desnecessário. Pedro Nunes observa que são as conjugações compostas que "tienen mayor necessidad de demonstracion"[389].

Vejamos como Pérez de Moya trata este assunto.

1.º Equações do tipo $ax^2 + bx = c$.

Antes de apresentarmos a demonstração de Moya, observamos que a figura de que ele se socorre não pretende ser rigorosa. Não se trata, digamos, de uma construção com

[389] [Pedro Nunes, 1567, f. 6r].

régua e compasso, como as que ele descreve nos seus apontamentos de geometria. A figura destina-se, apenas, a possibilitar a interpretação geométrica correspondente ao algoritmo de resolução dado para este tipo de equações. No entanto, os argumentos utilizados fazem apelo constante ao rigor inerente aos *Elementos* de Euclides.

Admitindo que a equação já está normalizada, a sua expressão em notação simbólica usual é $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$, que é equivalente a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$, sendo a regra indicada para a resolver dada por $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}$. Moya começa por traçar um segmento [AE], que representa metade do coeficiente do termo de grau 1; isto é, um segmento que corresponde ao comprimento $\frac{b}{2a}$ (figura 16). Depois, prolonga-o até ao ponto D, obtendo o segmento [ED], que corresponde ao lado (*x*) do quadrado desconhecido. Em seguida, constrói os quadrados [ABCD] e [EDFG], sobre [AD] e [ED], fazendo apelo à proposição *Elementos* I, 45[390]. Por construção, [BHGY] é, também, um quadrado; e os rectângulos [YFDA] e [EDCH] são iguais, como Moya conclui usando *Elementos* II, 4. Por outro lado, cada um dos rectângulos [AEGY] e [GFCH] é metade do 'valor das coisas' e, portanto, a sua soma é igual ao valor das coisas, que é conhecido e, portanto, também é conhecido o resultado dessa soma com o 'censo' (o quadrado [EDFG]), que é igual ao "numero". Adicionando, agora, o quadrado [BHGY], que é conhecido, fica sabida a área do quadrado [ABCD]. Determinando o lado desse quadrado e subtraindo-lhe metade do número das coisas, [AE], obtém-se o lado [ED] do quadrado desconhecido, que é o que se pretendia. Moya di-lo assim:

> Y porque las cosas com el censo juntamente, se ygualaron a un cierto numero, seran por esta causa los dos rectangulos, y el censo, o quadrado g.f.d.e. en una summa conocidos, a la qual summa añadiremos el quadrado b.h.g.y. el qual es noto, porque tiene por lado la linea y.g. que por ser ygual a la linea a.e. que es conocida, resulta el quadrado total a.b.c.d. el qual tambien será conocido, y por esta causa su lado que es la linea a.d. será conocido. Quitando luego desta linea a.d. que nos es notória la a.e. que tambien nos es notória, por ser la mitad del quociente del numero de las cosas, restara noto el lado, o quãtidad e.d. del quadrado

[390] A proposição *Elementos* I, 45, que Moya invoca, é a que consta na edição de Campano [Nicolo Tartaglia, 1565, f. 37v]. Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 92]). Esta proposição corresponde, na edição de Zambert a *Elementos* I, 46 [Nicolo Tartaglia, 1565, f. 37v] e na de Heiberg é, também, *Elementos* I, 46 [Heath, T. L., 1956, p. 374].

e.d.f.g y la rayz del mismo quadrado será nota, que es el propósito [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 590].

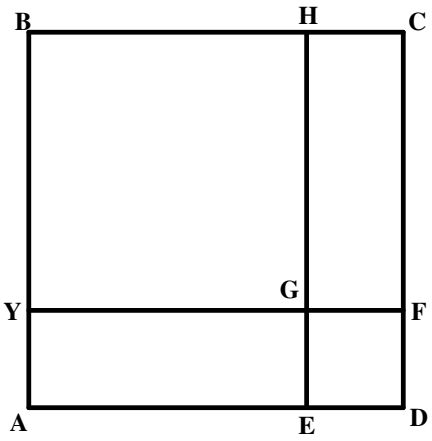


Figura 16: Versão geométrica da regra de resolução da equação $ax^2 + bx = c$ [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 590].

Antes de continuarmos, deixamos duas observações sobre as proposições dos *Elementos* de Euclides, que Moya invoca. A primeira é sobre a proposição *Elementos* I, 45 (que como vimos diz respeito à versão de Campano) que Moya refere para justificar a construção dos quadrados sobre [AD] e [ED], e que Pedro Nunes não refere. A segunda é sobre a alusão que Moya faz a *Elementos* II, 4 para justificar a igualdade dos rectângulos [YFDA] e [EDCH]; esta igualdade resulta do corolário de *Elementos* II, 4[391], como consta na versão dos *Elementos* de Tartaglia [Nicolo Tartaglia, 1565], que possivelmente Moya teria consultado. À parte a diferença relativa à alusão aos *Elementos* de Euclides, de que acabámos de falar, a exposição feita por Pérez de Moya é muito semelhante à de Pedro Nunes, tanto no que toca ao modo de construir a figura, como à própria figura. Além disso, no final da explicação, Moya indica o que fazer no caso em que estão envolvidas quantidades irracionais, usando praticamente as mesmas palavras de Nunes.

La qual rayz se representa por el lado e.d. puesto que la rayz sea superfície y el lado e.d. sea linea, porque son cõformes en el numero de unidades, siendo quantidades racionales. Mas quando la linea fuere quantidad irracional, será tambien la

La qual rayz se representa por el lado b.c. puesto que veramente la raiz sea superficie, y el lado b.c. linea, pero son conformes en el numero de unidades si son quantidades racionales, y quando la linea fuere quantidad

[391] [Nicolo Tartaglia, 1565, f. 42v].

rayz irracional del mismo nombre [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 590].

irracional, será tambien la raiz irracional del mismo nombre [Pedro Nunes, 1567, f. 7v].

Apesar de considerarmos incompreensível o conteúdo destas transcrições de Moya e Nunes, pensamos que ele é bem revelador do modo como Moya estava a seguir o matemático português.

2.º Equações do tipo $ax^2 + c = bx$.

Nas equações deste tipo o processo de Moya começa com a construção de um segmento [AG] que representa o coeficiente do termo de grau 1. Em seguida, divide [AG] em duas partes iguais, [AY] e [YG], e toma dois casos distintos, conforme o valor da solução é menor ou maior do que [AY].

Num desses casos, em que o lado do quadrado desconhecido, [HG], é menor do que o segmento [YG], considera a decomposição representada na figura 17. O rectângulo [AHKO] (que representa o termo independente) é a soma dos rectângulos [AYNO] e [YHKN]. Destes, o primeiro têm a área do rectângulo [YGFN] e o segundo tem a área do rectângulo [FELK]; logo, o rectângulo [HKOA] e o gnómon [YGELKN] têm áreas iguais. Portanto, o rectângulo [AHKO] e o quadrado [NKLM], tomados em conjunto, têm a área de quadrado [YGEM] (que é conhecida). A diferença entre a área deste último quadrado e a área do gnómon é igual à área do quadrado [KLMN], que fica, portanto, sabida. Depois de determinado o lado do quadrado [KLMN], facilmente se obtém o segmento que representa a incógnita.

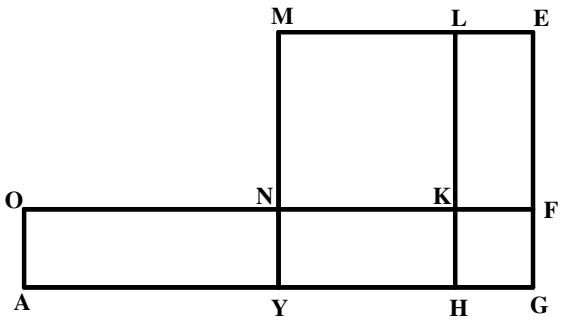


Figura 17: Versão geométrica da regra de resolução da equação $ax^2 + c = bx$, no caso em que a solução é menor do que [YG] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 591].

No outro caso, toma Moya completa a figura anterior, de modo a que [AHCB] seja o quadrado cujo lado [AH] (que é maior do que [YG]) se pretende determinar (figura 18).

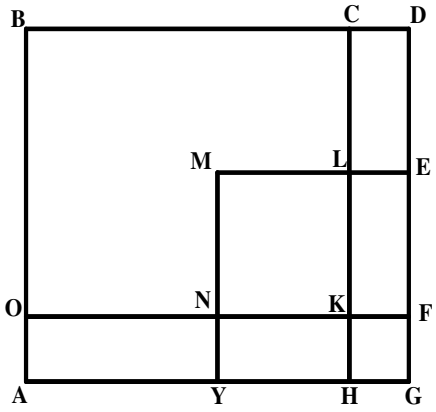


Figura 18: Versão geométrica da regra de resolução da equação $ax^2 + c = bx$, no caso em que a solução é maior do que [YG] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 590].

O rectângulo [AGDB] (representa o valor das coisas e é desconhecido, embora seja conhecido o número de coisas) pode decompor-se no quadrado [AHCB] e no rectângulo [HGDC] (que representa o termo independente, cujo valor supõe conhecido). Como o rectângulo [HGDC] tem a mesma área do [AHKO] (pois AH e HK são respectivamente iguais a HC e HG) e como, por outro lado, o rectângulo [AHKO] tem a área do gnómon [YGELKN], a área do rectângulo [HGDC] é igual à do gnómon referido (e conhecida). O quadrado [NKLM], que se obtém retirando ao quadrado [YGEM] o gnómon [YGELKN] tem, portanto, área conhecida. Daqui resulta conhecido [YH] e, finalmente, [AH], como se pretendia.

Moya justifica detalhadamente todos os passos da prova apresentada, fazendo apelo à proposição *Elementos* II, 5. No *Libro de Algebra* o estudo está, também, dividido em dois casos, que são tratados pela mesma ordem de Moya. Pedro Nunes não invoca Euclides, mas todo o estudo é muito semelhante ao do *Tratado de Arithmetica*. E o comentário que ambos fazem no final da demonstração é um testemunho disso mesmo:

> Se sigue que las demandas desta ygualacion tienen dos respuestas, porque puede el censo ser pequeño, y el valor de las cosas mayor, como en la primera figura se vio. Y puede el censo ser mayor, y el valor de las cosas menor, como en la segunda se dixo [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 591].

> Podra la posicion tener siempre dos respuestas, y cada una dellas satisfara. Porque puede el censo ser pequeño, y el valor de las cosas maior, como en la primera disposicion. Y puede ser el censo grande .s. fundado sobre la maior parte, como en la segunda, y el valor de las cosas sera menor [Pedro Nunes, 1567, ff. 11v-12r].

3.º Equações do tipo $bx + c = ax^2$.

Na demonstração apresentada por Moya para este tipo de equações é, mais uma vez, evidente a analogia com o texto de Pedro Nunes, embora o nosso autor não se tenha limitado a transcrever as palavras do *Libro de Algebra*, incluindo, por exemplo, uma alusão aos *Elementos* de Euclides, na figura 19, que acompanha esse texto, alusão que não existe no texto de Nunes.

Parte agora el número de las cosas que pusimos ser a.e. en dos partes yguales en el pũto f. por la doctrina de la decima proposicion del primero de Euclides. Y digamos que si con el quadrado de f.e. juntaremos el rectangulo e.d.c.l. que es el numero propuesto, y de toda la suma tomaremos la rayz quadrada, y juntaremos com ella la outra mitad del quociente de la quantidad que vino cõ las cosas, o character mediano (que es a.f.) resultara el lado del censo a.d.c.b que era ignoto, el qual lado es correspondiente al valor de una cosa [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 592].

Partiremos pues el numero de las cosas que posimos ser a.e. en dos partes yguales en el punto .p. y affirmamos que si com el quadrado de .p.e. juntaremos el rectangulo .e.b.c.f. que es el numero propuesto, e de toda essa sũma tomaremos el lado quadrado, al qual cõmunmente llamamos raiz, y com esse lado quadrado juntaremos la outra mitad del numero de las cosas que es .a.p. sera por este modo cõstituido el lado del censo ignoto .a.b.c.d. el qual lado es respondente del valor de la cosa [Pedro Nunes, 1567, ff. 8v-9r].

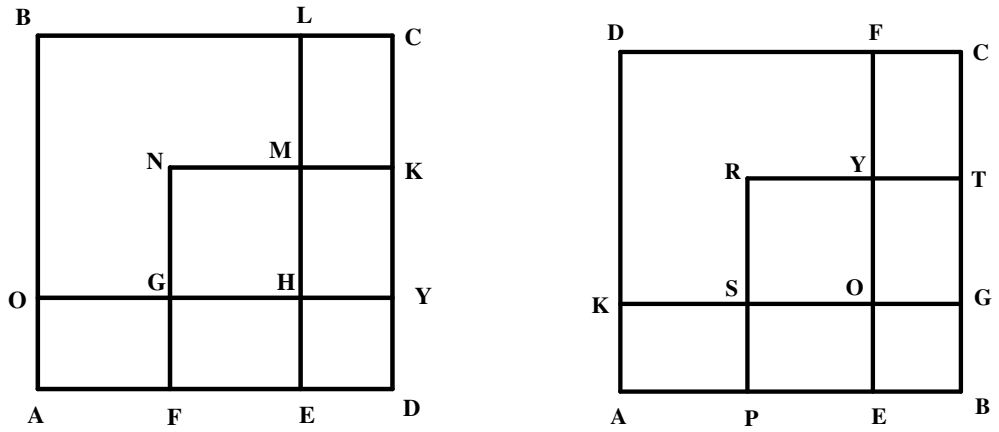


Figura 19: Versão geométrica da regra de resolução da equação $bx + c = ax^2$. À esquerda transcrição da figura em [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 590]; à direita em [Pedro Nunes, 1567, f. 8v].

Nas demonstrações que acabámos de apresentar a semelhança das frases utilizadas Moya e por Nunes (que colocámos em paralelo no texto) constituem um testemunho da influência que a obra do matemático português exerceu no *Tratado de Arithmetica*, de Pérez de Moya[392].

3.6.8. Sobre o uso de mais de uma incógnita ou regra da *quantidade*

A utilização de uma só incógnita torna-se, por vezes, uma dificuldade na resolução de um problema e o recurso a mais do que uma incógnita tem-se mostrado, ao longo dos tempos, uma maneira de o ultrapassar. Franci e Rigatelli assinalam o *Trattato de Fioretti* de Antonio de' Mazzinghi como o primeiro registo conhecido do uso de duas incógnitas na resolução algébrica de problemas na Europa[393]; e referem que este abacista do século XIV propõe várias questões sobre a determinação de dois números, quando são conhecidos o seu produto e a soma dos seus quadrados, em cuja resolução usa duas incógnitas: a "cosa" e a "quantità". Como nos lembra Rankin, o recurso a duas incógnitas para resolver problemas algébricos está já presente na obra de Diofanto, mas a sua influência na Europa só se fez sentir a partir do último quartel do século XVI, quando foi publicada a edição *princeps*[394]. Pacioli também usa os termos "cosa" e "quantità" no estudo do mesmo tipo de problemas[395]. Outros autores que se debruçaram sobre o estudo da regra da quantidade, como Cardano e Pedro Nunes, utilizam outras designações: Cardano refere-a por "segunda quantidade incógnita" e Nunes chama-lhe "quantidad simple o absoluta"[396].

---

[392] [Pedro Nunes, 1567, ff. 6r – 13r]. Ainda na primeira parte do *Libro de Algebra*, imediatamente a seguir a este primeiro conjunto de demonstrações, Pedro Nunes apresenta novas demonstrações das conjugações compostas, que considera mais perfeitas [Pedro Nunes, 1567, ff. 13v- 18r]. E volta a atacar este tema na terceira parte principal, no capítulo intitulado "de las Reglas de las conjugaciones compuestas" [Pedro Nunes, 1567, ff. 142r – 146v].

[393] [Franci, R. e Rigatelli, T., 1985, p. 42]. Antonio de' Mazzinghi (c. 1353-1383) começou a estudar matemática com Paolo dell'Abaco, que era o abacista florentino mais conceituado. Benedetto refere que Antonio tinha muitos conhecimentos de aritmética, de geometria, de astrologia, de construção, de perspectiva e, sobretudo, de álgebra, e que escreveu muitos artigos de aritmética e de geometria, dos quais o melhor é o *Trattato de Fioretti*. Embora se fale num tratado de álgebra da sua autoria, nenhum dos muitos manuscritos dos séculos XIV e XV contendo tratados de aritmética, geometria ou álgebra é atribuído, ou atribuível, a Antonio. Estas notas foram colhidas em [Franci, R., 1988, pp. 241-242], onde também pode ler-se uma análise do trabalho algébrico de Antonio de Mazzinghi, que chegou até nós.

[394] [Rankin, F. K. C., 1992, pp. 88-90].

[395] [Luca Pacioli, 1494, f. 148v].

[396] Estas matérias encontram-se em [Pedro Nunes, 1567, f. 224r e seg.] e em [Girolamo Cardano, 1545, p. 33 e seg.].

Moya trata a resolução de sistemas de equações em todas as suas obras algébricas e chama-lhe "regla dela quantidade". No *Compendio* e na *Arithmetica*, o estudo deste assunto é apresentado sob o título "Trata de la regla de la segunda cosa o quantidade" e as considerações feitas são muito semelhantes, diferindo apenas no número de exemplos de aplicação: quatro no *Compendio* e três na *Arithmetica*, todos eles já incluídos no *Compendio*. Na introdução do tema Moya faz a distinção entre a regra da "quantidade" e a regra da "cosa", sublinhando que nesta última apenas é utilizada uma incógnita; e realça a importância de que o assunto se reveste na resolução de problemas. Muitas vezes, diz ele, é necessário recorrer a uma segunda incógnita para poder dar a resposta final a uma questão, e essa nova incógnita é a quantidade; Moya tanto representa a quantidade por "$1\,q.$" como por "$q.$" apenas. O procedimento que descreve para a introdução e aplicação da regra está perfeitamente explicado e corresponde ao "método de substituição" que actualmente utilizamos para resolver sistemas de equações.

Apesar de levantar a questão da necessidade do uso de uma segunda quantidade, Moya não usa outra letra para a representar, recorrendo a uma estratégia em que utiliza novamente *q.*, desta vez com o significado de uma terceira incógnita. A sua explicação e procedimento são muito parecidos com os de Aurel, e a primeira aplicação de ambos tem características semelhantes. O exemplo de Moya diz[397]: "Has de dos y dos tercios cosa .p. 18. n. tales dos partes, que quitando 12, dela segunda parte, y añadiendo los ala primera, sea la primera el triplo de la segunda y mas 3", e o de Aurel diz[398]: "Quiero partir $1\,x+14n.$ en tales dos partes que quitando dela 2ª parte 8 y dandolos ala parte primera, venga a ser dos mas que tres vezes tanto, que la resta dela parte segunda"; mas nenhuma das quatro aplicações de Moya está no texto de Aurel. Além disso, os quatro problemas propostos pelo nosso autor são todos abstractos, enquanto dos seis problemas dados por Aurel só um o é.

No *Tratado de Arithmetica*, quando este tema volta a ser estudado, Moya considera a possibilidade de usar tantas incógnitas quantas forem necessárias para resolver um problema e introduz uma notação que se adequa, sem ambiguidade, a esse fim. A escolha da notação é a seguinte: designa a 1ª incógnita por $1.q.$ (q. de quantidade) ou $1.a.$, a 2ª por $1.b.$, etc[399].

---

[397] [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 108].

[398] [Marco Aurel 1552, f. 108r].

[399] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 593].

Moya faz uma referência especial aos nomes que usa para designar as sucessivas incógnitas aos quais associa a ordem pela qual são introduzidas na formulação do problema: a "primera posicion", também chamada "primera cosa" ou "primera rayz"; a "segunda posicion, ou "quantidade", ou "segunda rayz"; a "tercera posicion, ou "tercera cosa", ou "tercera rayz" , etc.; e indica a notação que utiliza para cada uma delas, *1.co*., *1.a.* ou *1.q*, *1.b* ou *1.b.co*, *1.c* ou *1.c.co*, 1.*d* ou *1.d.co*, e assim sucessivamente. Nota, além disso, que é possível recorrer a outros símbolos quando estes não forem suficientes:

> De lo que hemos dicho, queda entendido que la primera posicion que se pone para hazer alguna demanda se pone assi, 1.co., y llamase primera rayz. Y la segunda posicion se pone assi, 1.a. o assi 1 q. y llamase segunda rayz, o quantidade, o una a. de cosa. La tercera posicione se pone assi 1.b. o assi 1 b.co., que quiere dezir 1 b.de cosa, y llamase tercera rayz. La quarta posicion, se pone assi 1 c. o assi 1 c.co. y llamase cosa quarta, o quarta rayz. Y la quinta posicion, o postura, se pone assi 1 d. y llamase quinta rayz, o quinta posicion. Y deste modo se procede por la orden del a.b.c. y otras señales quando ellas no bastan en infinito [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 593-594].

Stifel, na sua *Arithmetica Integra,* já tinha optado por esta simbologia[400]; como nos dizem Malet e Paradis[401], Stifel rompeu, nesse trabalho, com a prática até então habitual de representar uma segunda incógnita por *q*, e utilizou em seu lugar a simbologia A, B, C, .., . Como Moya conhecia a obra de Stifel, admitimos que tenha sofrido a sua influência.

Pedro Nunes, no *Libro de Algebra*, também se refere à regra da quantidade e explica que ela constitui uma ferramenta subsidiária da álgebra, mas nas suas resoluções Pedro Nunes não explicita mais de duas incógnitas[402]. Nunes discorda da aplicação sistemática da regra da quantidade, que entende ser desnecessária e, até por vezes, inconveniente, na resolução de muitas questões, preferindo sempre recorrer à *regla de la cosa*, ou seja, ao uso de uma só incógnita. E mostra-se muito reticente relativamente ao uso da *quantidad* que fazem Pacioli e Cardano[403].

Acerca da importância da regra da quantidade, Moya tem uma opinião diferente da de Pedro Nunes; dedica alguns parágrafos do seu *Tratado de Arithmetica* a indicar regras

---

[400] Stifel escreve 1A, 1B, 1C, 1D, &c. [Michael Stifel, 1544, p. 251v]. Moya refere-se à *Arithmetica* de Stifel, por exemplo no Libro I, Capítulo IX, Articulo II, do *Tratado de Mathematicas*.

[401] [Paradis, J. e Malet, A., 1989, p. 141].

[402] [Pedro Nunes, 1567, ff. 224v-225r].

[403] [Pedro Nunes, 1567, f. 226r].

para somar, subtrair e multiplicar as "segundas posiciones" e escolhe diversos exemplos em que elas se aplicam com vantagem. Um deles não é mais do que uma adaptação de um tipo de problemas que vemos propostos e resolvidos no *Libro de Algebra*[404]. Apresentamo-lo, em seguida, comparando, dum modo abreviado, a resolução de Moya com a de Nunes[405].

Tres estudiantes querian cõprar un libro (que valia 17 reales) y dixo el primero a los otros dos, dad me la mitad de lo que ambos teneys; y con lo que tengo pagare este libro. El segundo pidio a los otros dos el tercio. Y el tercero pidio a los otros el quarto, pidese que reales tenia cada uno por si? [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 603]

Busquemos tres numeros, que el primero con la mitad del segundo y del tercero haga .32., y el segundo con el tercio del primero y tercero haga .28., y el tercero con el quarto del primero y segundo haga .31 [Pedro Nunes, 1567, f. 169v].

Moya recorre a três incógnitas que designa por 1*co*. 1*a*. e 1*b*. (no decurso da explicação, em vez de "1co." usaremos apenas "co"), que representam os "reales" que tinham o 1º, o 2º e o 3º estudantes, respectivamente[406], e raciocina assim:

O 1º tem "*co*" reais portanto, para comprar o livro, faltam-lhe "$17-co$" reais. Como ele pede aos outros dois metade do que tem, é $17-co=\frac{1}{2}(a+b)$; e, de modo análogo para os outros dois. Podemos, traduzir esquematicamente o desenrolar da resolução, como se segue:

Exprime $a+b$ em função de *co*	$a+b=34-2co$
Exprime $co+a+b$ em função de *co*	$co+a+b=34-co$
	$co+b=34-co-a$ [407]
	$\frac{1}{3}(34-co+a)+a=17$
Determina *a* em função de *co*	$a=8\frac{1}{2}+\frac{1}{2}co$

[404] Veja-se, por exemplo, os problemas nºs 51, 106, 107, 108, 110, do *Libro de Álgebra* [Pedro Nunes, 1567, f. 169r, f. 219r e seg.].

[405] Sobre a resolução proposta por Nunes ver [Silva, M. C. e Ribeiro, R., 1999, pp. 4-5]. Este problema é semelhante ao do *cavallo*, que Aurel trata, onde a quantidade envolvida é 34 [Marco Aurel, 1552, f. 108v].

[406] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 603].

[407] No texto há um lapso, pois é referida a soma do primeiro com o segundo em vez da soma do primeiro com o terceiro.

Determina *b* em função de *co*	$\frac{1}{4}(34-co-b)+b=17$ $b=11\frac{1}{3}+\frac{1}{3}co$
Escreve a equação que permite determinar o valor de *co*	$co+\left(8\frac{1}{2}+\frac{1}{2}co\right)+\left(11\frac{1}{3}+\frac{1}{3}co\right)=34-co$
Determina *co*	$co=5$
Determina *a* e *b*	$a=11$ e $b=13$

Depois de determinar a solução das equações, Moya dá a resposta ao problema e lembra ao leitor que pode fazer a verificação, mas não a explicita[408].

Neste exemplo (que no *Libro de Algebra* é o exercício 51 do capítulo 5) Pedro Nunes usa apenas duas incógnitas, a "*co.*" e a "quantidade", mas observa que ele se pode resolver "muy facilmente, y brevemente" recorrendo apenas a uma. E, efectivamente, também o resolve por esse processo.

Noutros problemas, Moya recorre, também, a três incógnitas e utiliza um procedimento que não difere do que hoje praticamos. Vejamos, a título de exemplo, o seguinte caso:

> Tres tienen dineros, y dixo el primero al segundo, si me da la mitad de lo que tienes, con lo que yo tengo tendre 50 reales. Dixo el segundo al tercero, si me das el tercio de lo que tienes con los que yo tengo, tambien tendre 50 reales. El tercero pidio al primero la quarta parte, y cõ los que tenia, dixo que haria otros 50 reales, pidese quanto tiene cada uno? [Juan Pérez deMoya, 1573a, p. 601].

Designando por "*co*, *a* e *b*" a quantidade de dinheiro que cada um tem, Moya matematiza o problema, estabelecendo as equivalências que, em simbologia actual, podem ser assim indicadas:

[408] No texto do aritmético português Gaspar Nicolas é proposto um problema semelhante a este, em que três homens pretendem comprar uma "cousa" cujo preço não é conhecido [Gaspar Nicolas, 1519, f. 33v]. Nicolas não explicita a resolução, mas indica a solução e aconselha a resolução pela "oposição", avisando que este tipo de problemas é muito trabalhoso.

$$\begin{cases} 1co+\frac{1}{2}a=50 \\ 1a+\frac{1}{3}b=50 \\ 1b+\frac{1}{4}co=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1a=100-2co \\ 100-2co+\frac{1}{3}b=50 \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ 1b=6co-150 \\ 6co-150+\frac{1}{4}co=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ 25co=800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1a=36 \\ 1b=42 \\ 1co=32 \end{cases}.$$

Pedro Nunes propõe um problema cuja matematização é semelhante, mas resolve-o usando uma só incógnita:

> Tenemos tres numeros, que el primero con la mitad del segundo, haze .60., y el segundo con el tercio del tercero haze .60., y el tercero con el quarto del primero haze .60., y queremos saber quãto es cada uno deles [Pedro Nunes, 1567, f. 165v].

Felizmente, Moya não concorda com a opção de Pedro Nunes sobre a importância da "regra da quantidade", pois o uso de várias incógnitas constituiu um passo importante no progresso da álgebra, mostrando-se um precioso auxiliar na resolução de problemas. Como diz Bosmans, aludindo ao facto de Pedro Nunes preferir utilizar uma só incógnita em vez de mais do que uma: "il ne rencontrerait plus aujourd'hui un seul géomètre pour le partager[409].

3.7. O uso que Moya faz da álgebra

3.7.1. Considerações gerais

No *Compendio*, depois de um primeiro estudo das equações, Moya inclui um capítulo onde recorre às equações para resolver um conjunto de problemas de aritmética[410]. Estas aplicações eram comuns nos trabalhos algébricos da época. Aurel, por exemplo, dedica ao assunto dez capítulos da sua *Arithmetica Algebratica*, onde resolve 264 problemas[411]. Pedro Nunes, depois de explicar todas as regras necessárias à resolução de

---

[409] [Bosmans, H., 1908, p. 245].

[410] Capitulo 13 em [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 73-113].

[411] Aurel dedica os capítulos XV a XXIV da sua obra ao estudo das equações e respectiva aplicação à resolução de problemas. No capítulo XV resolve 116 problemas dos quais 90 são da vida prática e 26 são abstractos; alguns deles traduzem-se por equações que não são do primeiro grau, mas que se reduzem a elas. No capítulo XVI, estuda-se a "regla dela segunda cosa"; isto significa que a resolução dos problemas depende de uma segunda variável (que Aurel denota por q.) Aqui são enumerados 8 problemas mas, de facto, apenas seis são diferentes, sendo dois deles resolvidos por 2 processos distintos; destes 6 problemas, 1 é abstracto e 5 são da vida real. O capítulo XVII é dedicado às regras da "segunda igualação", isto é, do tipo $ax^n = bx^{n-2}$. São propostos e resolvidos 21 problemas, dos quais 10 são abstractos e 11 são práticos. No capítulo XVIII Aurel estuda as equações do tipo $ax^n = bx^{n-3}$ e trata 15 problemas de 3º grau, dos quais 5 são abstractos e 10

equações, apresenta um longo capítulo de aplicações da álgebra à aritmética, que intitula "De la Practica de las Reglas de Algebra en los casos de Arith.", onde propõe e resolve 108 problemas. Tartaglia, no *General Trattato*, resolve, pelas regras da álgebra, 26 problemas de aritmética, no capítulo que intitula "Casio ver quesiti posti per meglio instruire et ammaestrare, et âncora far pratica cerca l'operare in l'arte di algebra"[412].

3.7.2. Aplicação da álgebra à resolução de problemas

Os problemas que Moya propõe no *Compendio* são semelhantes aos que encontramos noutros trabalhos da época e relacionam-se, em geral, com questões práticas do dia-a-dia e com a determinação de números em certas condições[413]. Moya apresenta-os como exemplo de aplicação de cada um dos tipos de equações que trata, precedendo o seu enunciado de uma recapitulação da referida regra, em todos os tipos, à excepção do primeiro. No total, são 18 problemas do 1º tipo, 3 do 2º, 2 do 3º, 3 do 4º, 2 do 5º, 2 do 6º e 2 do 7º. Moya propõe, além destes, um problema para aplicar as regras de cada uma das equações do tipo: $x^4 + x^2 = k$, $x^4 + k = x^2$ e $x^4 = x^2 + k$. São ao todo 35 questões, das quais 13 incidem sobre a determinação de números em certas condições e as restantes dizem respeito a problemas simples sobre a compra e venda de bens, a divisão de dinheiro e um sobre ligas. Moya não inclui no *Compendio* problemas lúdicos e na *Arithmetica* reserva-lhes um espaço especial: o "Libro Nono", que atrás referimos.

No *Compendio* não há qualquer alusão ao critério que presidiu à escolha destes problemas, mas no *Tratado de Arithmetica*, onde se inclui, também, a resolução de

---

são da vida real. O capítulo XIX diz respeito à quarta *ygualacion*, isto é, do tipo $ax^n = bx^{n-4}$. São resolvidos 12 problemas de 4º grau dos quais 4 são abstractos e 8 da vida real. No capítulo XX, referente às regras da quinta igualação, isto é, do tipo $ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2}$, Aurel trata 30 problemas de 3º grau; 14 são abstractos e 16 da vida real. No capítulo XXI, sobre a regra da sexta igualação, isto é, $ax^n + cx^{n-2} = bx^{n-1}$, são propostos e resolvidos 19 exemplos de 2º grau: 10 são abstractos e 9 da vida real. No capítulo XXII, sobre a determinação de números que compõem as raízes dos binómios e a extracção da raiz, pela regra da coisa, são indicados 14 exemplos todos numéricos. O capítulo XXIII, relativo à sétima igualação, isto é, equações do tipo $ax^n = bx^{n-1} + cx^{n-2}$, contém 17 exemplos de 2º grau, sendo 10 abstractos e 7 da vida real. Finalmente, no capítulo XXIIII, que trata das regras da oitava igualação, que são a generalização dos casos 5, 6 e 7 em que as potências de *x* saltam de 2 em 2, ou de 3 em 3, ou de 4 em 4, são estudados 12 exemplos de aplicação de grau superior a 2, desses, 2 são abstractos e 10 são da vida corrente.

[412] "Casos, ou seja, questões postas para melhor instruir e exercitar, e também praticar sobre o operar na arte da álgebra" (Nossa trad. livre). Neste capítulo também trata 30 problemas de geometria [Nicolo Tartaglia, 1560d, ff. 16r-44v].

[413] Verificámos por exemplo, que são semelhantes aos dados por Aurel, no *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*, embora utilizem quantidades numéricas diferentes.

problemas deste tipo, Moya avisa o leitor que não os escolheu por serem subtis ou engenhosos, mas por permitirem praticar a regra da álgebra:

> Advierta el lector que las demãdas de los capitulos seguientes, no las pongo por muy subtiles, ni ingeniosas, sino para que se entienda co ellas el modo de proceder cõ la supposicion de la cosa [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 553].

Na interpretação e resolução dos problemas, o nosso autor tem o cuidado de explicar como a incógnita se articula com os dados e de traduzir a condição resultante por uma equação, que manipula utilizando as regras dadas, até a reduzir à forma canónica (isto significa que, na sua forma final, os coeficientes da equação são números inteiros e positivos). Resolvida esta, é sempre explicitada a solução no contexto da questão proposta e é quase sempre feita a verificação do resultado. Nas suas obras, Moya segue, frequentemente, uma metodologia que consiste em começar por apresentar um problema fácil de resolver por aplicação imediata das regras dadas e que funciona como modelo na generalização subsequente. É precisamente isso que se observa nos dois casos abaixo. No primeiro caso o enunciado é:

> Uno merco 11 paños por 108 ducados, entre los quales ay paños que costavan a 9, ducados, y otros que costavan a 12. Pidese quantas pieças ay de cada precio [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 75-76].

Moya explica, com todo o detalhe, como se resolve o problema: supõe que há x (ou seja, *1.co*) dos panos que são a 9 ducados e, portanto, há $11-x$ (ou seja, 11. m 1.*co*) dos de 12 ducados. Calcula a soma $9x+12(11-x)$ obtendo $132-3x$, e iguala a 108. Resolve a equação $132-3x=108$, cuja solução é $x=8$. A resposta ao problema é 8 peças a 9 ducados e 3 peças a 12 ducados. De seguida, Moya propõe outro problema, que ao contrário do que acontece com o primeiro tem algum grau de generalidade, mas que se converte num problema semelhante ao anterior quando são concretizados alguns dos dados. Vejamos:

> Uno compro 20 varas de paños differentes, por 20 ducados, en las quales ay algunas que costaron a 3 ducados, otras a 2, otras a un quarto de ducado. Pido, quantas varas ay de cada precio [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 76].

Para o resolver, começa por convertê-lo num problema concreto, fixando o preço de 4 varas, e só depois dá o passo seguinte, observando que questões como esta têm infinitas soluções, porque assim como se supôs que havia 4 varas a 3 ducados, podia ter-se suposto que era maior ou menor o número de varas a esse preço.

Vejamos, agora, um outro problema proposto por Moya que é uma adaptação de uma questão tratada por Pacioli na *Summa* e cuja resolução está, também, relacionada com o primeiro exemplo que referimos[414]:

Uno gasto en clavos y canela 100 ducados, a razon la libra de los clavos de dos ducados, y vendio a ducado y medio, y la libra de canela le costo a tres ducados y la vendio a quatro, y hallo de ganância 10 ducados: pide se quantas libras cõpro de cada suerte [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 79-80].

Uno cõpra pãno biãco: e rosso br. nõ so quãti tutti p duc .100. e costolli el br. dl bianco duc .2. e si lo revende duc . $1\frac{1}{2}$. el br. del rosso li costa duc .3. e si lo revende .4. e trovossi di guadagno duc .10. dimando quant br. fo. de bianco: e quanti del rosso [Luca Pacioli, 1494, f. 195v].

Os valores numéricos envolvidos, a resolução de Moya e a unidade monetária (o ducado) são exactamente os de Pacioli. Há apenas duas diferenças. Uma diz respeito à temática do problema: Moya fala de especiarias enquanto Pacioli refere tecidos. A outra é relativa ao modo como ambos se referem às fracções que utilizam no texto.

Por vezes, no estudo de um problema, Moya abstrai-se do contexto, centrando-se, apenas, na sua matematização. É o que acontece com a questão seguinte proposta no *Compendio*:

> Uno repartio 100 varas de terciopelo [tecido de veludo] a 3 factores [mandatários] para que las vendiessen, y cada uno vẽdio su terciopelo por tantos ducados la vara, como varas vẽdio: el mercador recibio de todos, 3800, ducados; demando quantas varas dio a cada factor [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 100-101][415].

Como Moya explica, trata-se apenas de dividir 100 em três partes tais que a soma dos seus quadrados é 3800:

---

[414] Trata-se do problema 30, em [Luca Pacioli, 1494, f. 195v].

[415] [Marco Aurel, 1552, f. 129r]

> Esto no quiere dezir outra cosa sino divide 100 en tres partes, que la summa de sus quadrados sea 3800, pues prosupon a tu vontad (desto se infiere tener muchas respuestas) [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 101].

Esta questão vem na linha dos problemas indeterminados, que referimos. Moya nota que ela tem muitas soluções, mas resolve-a no caso particular em que fixa o valor de uma das incógnitas (neste caso, arbitra para o primeiro vendedor o valor 30). Deste modo, reduz a questão proposta à da determinação de dois números cuja soma é 70 e tais que a soma dos seus quadrados é 2900. Como adiante veremos, noutro momento da sua obra, Moya recorre a regras que enuncia para indicar a solução de problemas deste tipo, mas aqui resolve-o por métodos algébricos: Supõe que a primeira parte é $1.co$; a outra será $70-1.co$; quadrando-as e somando-as, obtém $5800.\text{n}.m.140\,co.p.2\,ce.$, que iguala a 3800. A equação resultante, que em notação usual é equivalente a $2000+2x^2=140x$, é do tipo da segunda "ygualacion compuesta", admitindo duas soluções, 50 e 20, mas Moya só indica a primeira.

Em alguns exemplos que Moya trata, as quantidades numéricas envolvidas parecem ter sido cuidadosamente escolhidas de modo a produzirem resultados simples, embora possibilitando a prática de regras operatórias elaboradas. É o que se passa nos dois casos que se seguem:

> Uno compro tantas varas de paño, que si les añades su tercio y quarto, la summa será la r, del numero delas varas, demando quantas varas compro [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 83-84].

Em notação simbólica actual, este problema traduz-se por $x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=\sqrt{x}$. Para se desembaraçar da raiz quadrada, Moya quadra ambos os membros obtendo $\frac{361}{144}x^2=x$, cuja solução positiva é $x=\frac{144}{361}$. O facto de esta ser um quadrado perfeito permite uma oportuna simplificação dos cálculos, designadamente do da raiz quadrada, aquando da verificação do resultado.

Os problemas abstractos formulados sobre números, estudados pelo nosso autor, tratam da determinação de um, dois, três ou cinco números em certas condições. A sua resolução recorre ao uso de equações cujo grau não excede dois e ainda de outras de grau

quatro, que ele reduz a equações de grau 2, incompletas ou completas. Alguns incluem particularidades numéricas que põem em prática conhecimentos de matérias específicas como, por exemplo, o conceito de proporção e as operações com números binómios. É o que sucede com o exemplo seguinte, em que os números procurados estão em proporção dupla e em cuja resolução entram a determinação da raiz de um binómio e o produto de um número por um binómio:

> Dame dos numeros en proporcion dupla, que multiplicando el cubo del numero menor, por la mitad del numero mayor, el producto monte 193, mas r. 34848 [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 93].

Usando *x* para designar o menor número (que Moya denota "co."), o maior será 2*x* e a equação que traduz o problema é $x^4 = 193 + \sqrt{34848}$. Para a resolver, ele calcula as sucessivas raízes quadradas $\sqrt{\sqrt{193 + \sqrt{34848}}} = \sqrt{11 + \sqrt{72}} = 3 + \sqrt{2}$, obtendo o valor do número menor. O número maior é o dobro deste: $2 \times \left(3 + \sqrt{2}\right) = 6 + \sqrt{8}$.

Na resolução de problemas, há três casos de aplicação de equações biquadradas. Estes mesmos casos são propostos por Pacioli, diferindo apenas na ordem por que são apresentados (os dois últimos aparecem em Moya por ordem inversa). Os três exemplos estudados envolvem equações que simbolicamente se traduzem por $\left(x^2\right)^2 + x^2 = 20$, $\left(x^2\right)^2 + 9 = 10x^2$ e $\left(x^2\right)^2 = x^2 + 72$, e que são redutíveis à primeira, segunda e terceira "ygualaciones compuestas", respectivamente. Notamos que o primeiro problema é o proposto na *Summa* e que os outros dois coincidem praticamente com as escolhas de Pacioli, como mostram os excertos abaixo.

> Dame un numero que el quadrado de su quadrado junto conel quadrado del mismo numero, haga 20? [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 104].

> Trova un nº che sopra el quadrato del su quadrato: postoui el suo quadrato: faccia 20 [Luca Pacioli, f. 149r].

> Dame un numero que juntando 9, al quadrado de su quadrado, sea tanto como si el quadrado del mismo numero se multiplicasse por 10? [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 105].

> Trova .1.nº che sopra el quadrato del quadrato postoci .4. faccia quanto che el suo quadrato m[oltipli]cato per .5. [Luca Pacioli, f. 149v].

Dame un numero que quadrando le dos vezes haga tanto como añadiendo a su mismo quadrado 72? [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 106].

Trova un nº: che el quadrato del suo quadrato faccia quãto el suo quadrato giõto com .12. [Luca Pacioli, f. 149v].

Na resolução da equação $\left(x^2\right)^2 + 9 = 10x^2$, que admite duas soluções positivas, 1 e 3, Moya só indica a solução 3, pois aplica a regra de resolução errada da "ygualacion compuesta" de que já falámos[416].

4. Sobre a resolução de problemas sem recurso à álgebra

Um dos *articulos* do capítulo XVI do *Compendio* intitula-se "Enel qual se ponen algunas demandas proporcionales, sin tener cuenta con la cosa". Com esta frase, Pérez de Moya sublinha que se propõe resolver alguns problemas sem recorrer à álgebra, ou seja, sem recorrer à resolução de equações. Pode parecer-nos estranho que, estando de posse de uma ferramenta tão poderosa como a "regla de la cosa", Moya prescinda dela em favor de outro processo, mas na verdade o que se verificou foi que a álgebra veio possibilitar a criação de regras práticas de grande utilidade na resolução de problemas, sobretudo para quem não dominava as subtilezas da "regra de la cosa". É precisamente isso que ele nos transmite, no *Tratado de Arithmetica*, quando escreve:

> Y assi procederas con la cosa, haziendo con ella lo que la demãda pidiere, como en los exenplos destas demandas has visto, teniendo aviso de ordenar al mismo modo reglas, para que se hagã por arte menor, para mostrar al que no sabe algebra [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 558].

Esta indicação é ainda realçada numa nota de margem, onde se lê "Ordenar reglas al modo dla cosa para el arte menor", que está acompanhada de um exemplo no qual ele põe em paralelo a resolução algébrica e aritmética. O exemplo consiste na determinação de um

[416] Ver quadro 9 [*Cf.* Terceira Parte, 3.6.2].

número que somado com o próprio número e a sua metade faça 10[417]. Vejamos como Moya distingue a resolução algébrica da resolução aritmética:

Resolução algébrica

Para hazerla por algebra, avias de pressuponer que este numero que piden, es una cosa, y juntarle otro tanto, que sera outra cosa, y su mitad, que es media cosa. Y porque esto ha de ser 10 n. summa estas posturas y mõtaran 2 cosas y media, las quales ygualãdolas a los 10 que quisieras, y partiendo 10 (que vienen con el menor character) por dos y medio (que vienen con el mayor) el quociente sera el numero que buscas [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 558].

Resolução aritmética

Digo pues que podras a imitacion desto poner por caso que este numero es una unidad, a la qual juntaras outra unidad, porque dize otro tanto, y seran 2, junta a este 2 la mitad de la unidad, y sera dos y medio, esto sera partidor, y los 10 que quisieras que montara sera particion, y assi partiendo 10, por 2 y medio, vendran 4, como hemos dicho, y tanto es lo numero demãdado[418] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 558].

Interpretação, em notação usual, da resolução algébrica de Moya:

Seja x a incógnita.

$$x + x + \frac{x}{2} = 10$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)x = 10$$

$$x = \frac{10}{2\frac{1}{2}}$$

$$x = 4$$

Interpretação da resolução aritmética de Moya:

Supondo que a solução é 1

1+1=2

$2\frac{1}{2}$ é o divisor

10 é o dividendo

A solução é 4

Como ele diz, procedendo como na "arte mayor", mas sem usar a incógnita, é possível resolver rapidamente diversas questões da aritmética. Uma aplicação curiosa é posta em prática na táctica militar ("Nota esto para hazer esquadrones"), em que se trata de dispor, «aproximadamente em quadrado», 2100 homens, de modo que a distância entre os seus ombros (isto é, lado a lado) seja 3 pés e a distância entre costas (ou seja, entre filas) seja 7 pés. A proposta de resolução de Moya evidencia a relação entre o processo algébrico e a execução aritmética:

[417] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 558].

[418] Esta é a regra da falsa posição.

De la orden de la regla de la cosa se saca, que para hazer esto por arte menor, multiplicaras los 2100 hombres por três, y haran 6300, parte por 7 y vendran 900, saca la rayz quadrada de 900 y ser 30, y tanto son los hombres que se han de poner de siete pies distantes unos de otros. Y para saber el otro numero, parte los 2100 por estos treynta, y vendra al quociente 70, por los otros que se han de distar a tres pies, que es lo mismo que por la otra via diximos [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 560].

Em notação usual, o problema pode traduzir-se pelo sistema $\begin{cases} xy = 2100 \\ 3y = 7x \end{cases}$, e a sua resolução envolve a equação $\frac{3 \times 2100}{7} = x^2$, que permite obter o número de homens a colocar em cada coluna (30). Sabendo esse número, é fácil determinar o número de homens por linha (70).

A ideia de recorrer à álgebra para obter regras aritméticas simples de resolução de problemas é, também, transmitida por Pedro Nunes no *Libro de Algebra*[419]. Observamos que, depois de ter resolvido algebricamente 81 problemas de aritmética, o matemático português propõe e resolve, sem recurso à álgebra, um problema no qual mostra a desvantagem em, nesse caso, a aplicar [420]. De facto, a dificuldade que envolvia o procedimento algébrico, onde era necessário conhecer notação e princípios específicos, e ter uma destreza que não estava ao alcance de todos, e, por outro lado, a familiaridade com outras técnicas de resolução de problemas como, por exemplo, as diversas regras de três e de falsa posição[421], podem explicar que, para certas pessoas, fosse preferível a aplicação de uma "receita".

---

[419] Ver [Pedro Nunes, 1567, f. 191r] onde Nunes diz: "Y desta obra hecha por Álgebra podremos coligir Regla, para sin Álgebra en semejantes casos connoscer la segunda parte"

[420] O problema é o seguinte: "Partamos 12 en tres partes proporcionales, y que sean tales que sus cuadrados juntos, hagan 96" [Pedro Nunes, 1567, f. 191r]. A "receita" que Pedro Nunes oferece em alternativa é muito mais prática: "Multiplicaremos em si mismo el numero que queremos partir, el qual es .12., y hara .144., y destos .144. sacaremos la sŭma de los quadrados, la qual es .96., y quedaran .48., y la mitad que es .24. partiremos por el mismo numero .12., y vernan .2. que sera la segunda parte" [Pedro Nunes, 1567, f. 191r].

[421] Sánchez Pérez refere que a regra da falsa posição foi indicada pelos indianos e que, embora não se saiba a quem é atribuída, terá sido inventada depois do século VII, pois nem Aryabhata nem Brahmagupta mostram conhecê-la. De acordo com o mesmo autor, todas as Aritméticas dos séculos XVI a XVIII apresentavam esta regra prática, mas nenhuma obra indiana a explica ou justifica; é em obras árabes que podemos encontrar essa explicação [Sánchez Pérez, J.A., 1949, p. 82]. As regras da falsa posição, bastante populares entre os matemáticos do Renascimento, são referidas em diversas obras com nomes semelhantes: Leonardo chama-lhe "elchataym" [Leonardo Pisano, 1202, p.447]. Para o estudo da regra da falsa posição na obra de Leonardo, ver [Hannah, J., 2007]. Pacioli chama "cataym" às regras da falsa posição e estuda-as na "Disctintio septima da Summa", explicando em que consiste cada uma delas e aplicando-as à resolução de problemas [Luca Pacioli, 1494, ff. 98v-106r].

Docampo transcreve uma passagem do manuscrito Ms 71 de Sant Cugat cujo autor, depois de resolver um problema por três maneiras diferentes, em duas das quais utiliza a resolução de equações, sublinha a brevidade em recorrer à regra aritmética da falsa posição[422]. Joan Andrés, no último capítulo do seu *Sumario breve de la pratica de la Arihtmetica*, refere um problema em cuja resolução se usava a "regla de algo y cosa" ou "de algibra", mas "que se puede fazer por outra manera muy fácil y muy sotilmente"[423], e indica uma regra prática para obter a solução. E Gaspar Nicolas, no seu *Tratado da Pratica Darismetyca*, salienta a vantagem dos procedimentos aritméticos relativamente aos algébricos[424].

4.1. Algumas *conclusiones* da *Summa* no texto de Moya

No *Compendio dela regla dela cosa* são estudadas dezoito questões gerais sobre números que Pérez de Moya resolve sem recorrer ao uso de incógnitas, indicando regras (receitas) de resolução específicas para cada uma. Constatámos que Pacioli dá muita ênfase a este assunto, expondo-o com alguma extensão sob a forma de 66 "conclusiones" que, frequentemente, envolvem a divisão de uma quantidade em partes, satisfazendo certas relações[425], e verificámos que dos dezoito problemas que Moya trata, só o último não faz parte desse tópico. Estas coincidências permitem-nos filiar na *Summa* de Pacioli o estudo que Moya faz desta matéria.

Começamos por apresentar os enunciados dos dezoito problemas propostos por Pérez de Moya, indicando cada um deles com o número que Moya lhe atribui no *Compendio dela regla dela cosa*[426]:

1. Dividir uma quantidade em duas partes cujo produto é um certo número dado.

2. Dividir uma quantidade em duas partes, conhecida a soma dos seus quadrados.

3. Dividir uma quantidade em duas partes (diferentes) de modo que o produto delas seja o quádruplo do quociente da maior pela menor.

---

[422] "(…) todo este discurso he querido hacer para mostrar el modo de argumentar en álgebra. Pero más breve la harás por una falsa posición" (Ms 71 S. Cugat cit. em [Docampo, J., 2004, p. 571]).

[423] [Joan Andrés, 1515, f. 141v].

[424] [Gaspar Nicolas, 1519, p. 42].

[425] As 66 *conclusiones* são dadas em [Luca Pacioli, 1494, ff. 106r-11r] e apresentadas em notação simbólica actual em [Rankin, F. K. C., 1992, pp. 377-383].

[426] Esta é, também, a numeração que vemos na edição de 1562 da *Arithmetica practica, y speculativa*, de Pérez de Moya.

4. Determinar dois números conhecidos o seu produto e a soma dos seus quadrados.

5. Determinar dois números, sendo conhecidos o seu produto e a diferença dos seus quadrados.

6. Determinar dois números tais que um exceda o outro numa quantidade dada e o seu produto seja conhecido.

7. Dividir uma quantidade em duas partes tais que a soma dos seus quadrados exceda o produto das partes numa certa quantidade.

8. Dividir uma quantidade em duas partes de modo que o quadrado de uma delas exceda o quadrado da outra por um número dado.

9. Dividir uma quantidade em duas partes tais que a soma dos seus quadrados com o produto das partes seja um certo número.

10. Dividir uma quantidade em duas partes tais que a soma do produto de ambas com a sua diferença seja um número dado.

11. Dividir uma quantidade em duas partes tais que um certo número seja meio proporcional entre ambas.

12. Dividir uma quantidade em duas partes tais que o produto das suas raízes seja uma certa quantidade.

13. Dividir uma quantidade em duas partes cujo produto seja um certo número mais a raiz desse número.

14. Dividir uma quantidade em duas partes cuja diferença das raízes é um certo número.

15. Dividir uma quantidade dada em duas partes tais que a razão entre a menor e a maior seja igual à razão entre a maior e a quantidade dada.

16. Dividir uma quantidade em três partes tais que o quadrado da primeira é a soma dos quadrados das outras duas.

17. Se dividir uma quantidade em quatro partes tais que a soma dos quadrados das duas primeiras seja igual ao dobro da soma dos quadrados das outras duas, a menor parte será a diferença das partes que estão entre a primeira e a quarta.

18. Dada uma quantidade, *x*, dividi-la em quatro partes tais que a soma dos quadrados das duas primeiras seja igual à quarta parte da soma dos quadrados das outras.

Para resolver estes problemas, Moya começa por enunciar a regra que vai utilizar e aplica-a, em seguida, a um exemplo concreto do qual explicita a solução. Sublinhamos que estes problemas têm na *Summa* e no *Compendio* um enunciado e uma proposta de resolução muito semelhantes. Além disso os exemplos que Pacioli e Moya usam são, na maior parte

dos casos, os mesmos. Vejamos, por exemplo, como os dois autores enunciam o problema 1. (18. na *Summa*):

Se quisieres partir alguna q. en dos partes tales, que multiplicando la una por la otra, haga un cierto n. Digo que si tomares la mitad dela q. y la cuadrares, y del cuadrado quitares el cierto n. la r., dela resta junta con la mitad dela q. sera la una parte, y quitada sera la otra [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 140-141 e 1562, p. 363].

Se una qª. sia divisa in doi parti: che multiplicata una p laltra debba far un terminato nº. Dico che chi prende la $.\frac{1}{2}.$de ditta qª. e quella quadri: e del quadradto ne cavi ditto numero terminato: e del remanente pigliar la .R. e quella agionta alla $.\frac{1}{2}.$ de ditta qª. e anche trattola de laltra $.\frac{1}{2}.$ hara luna parte e laltra [Luca Pacioli, 1494, f. 107v].

Nas duas primeiras colunas do quadro 10 indicamos a correspondência entre o número do problema no *Compendio* (M) e na *Summa* (P); nas três últimas colunas incluímos, em notação simbólica usual, a tradução dos 18 problemas tratados por Moya e por Pacioli, e a regra proposta por ambos para resolver cada um deles. Damos, também, o exemplo de aplicação tratado no *Compendio*, bem como a respectiva solução.

M	P	Problema	Regra utilizada	Exemplo e Solução no *Compendio* de Moya
1.	18.	$\begin{cases} x+y=a \\ x\times y=b \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b} \\ y=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b} \end{cases}$	$\begin{cases} a=10 \\ b=16 \end{cases} \quad S=\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$
2	24.	$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-b}{2}} \\ y=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-b}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} a=10 \\ b=58 \end{cases} \quad S=\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$
3.	26.	$\begin{cases} x+y=a \\ x\times y=b\frac{x}{y} \end{cases}$	$y=\sqrt{b}$	a=12 $\quad S=\{$y=$\sqrt{4}$
4.	29.	$\begin{cases} x\times y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a^2}} \\ y=\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a^2}} \end{cases}$	$\begin{cases} a=16 \\ b=68 \end{cases} \quad S=\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$

5.	30.	$\begin{cases} x \times y = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{\left(\frac{a-\frac{b}{2}}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{a-\frac{b}{2}}{2} \\ y = \sqrt{\left(\frac{a-\frac{b}{2}}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a-\frac{b}{2}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 16 \\ b = 60 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$
6.	31.	$\begin{cases} x - y = a \\ x \times y = b \end{cases}$	$\begin{cases} x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{b}{2} \\ y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 8\frac{8}{9} \\ b = 1 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 9 \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$
7.	34.	$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b + xy \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{3}} \\ y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{3}} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 10 \\ b = 28 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$
8.	35.	$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 = y^2 + b \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{a^2 + b}{2a} \\ y = \frac{a^2 - b}{2a} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 10 \\ b = 60 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$
9.	36.	$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 + x \times y = +b \end{cases}$	Reduz o problema a $\begin{cases} x + y = a \\ x \times y = a^2 - b \end{cases}$ e aplica a regra de 1.	$\begin{cases} a = 10 \\ b = 84 \end{cases}$
10.	43.	$\begin{cases} x + y = a \\ x \times y + x - y = b \end{cases}$	$\begin{cases} x = a + \sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2 - (b-a)} - \frac{a-2}{2} \\ y = \frac{a-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2 - (b-a)} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 12 \\ b = 36 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$
11.	44.	$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{b} = \frac{b}{y} \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} \\ y = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 25 \\ b = 10 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 5 \\ y = 20 \end{cases}$
12.	51.	$\begin{cases} x + y = a \\ \sqrt{x} \times \sqrt{y} = b \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} \\ y = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} \end{cases}$	$\begin{cases} a = 13 \\ b = 6 \end{cases} \quad S = \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$

13.	52.	$\begin{cases} x+y=a \\ x\times y=b+\sqrt{b} \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-b-\sqrt{b}} \\ y=\dfrac{a}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-b-\sqrt{b}} \end{cases}$	$\begin{cases} a=12 \\ b=16+\sqrt{16} \end{cases} \quad S=\begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}$
14.	53. 54. 55.	$\begin{cases} x+y=a \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=b \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+b\times\sqrt{\dfrac{a}{2}-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2} \\ y=\dfrac{a}{2}-b\times\sqrt{\dfrac{a}{2}-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2} \end{cases}$	$\begin{cases} a=10 \\ b=2 \end{cases} \quad S=\begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}$
15.	[11]	$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{a} \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}-\dfrac{a}{2} \\ y=a+\dfrac{a}{2}-\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} \end{cases}$	$a=6 \quad S=\begin{cases} x=\sqrt{45}-3 \\ y=9-\sqrt{45} \end{cases}$
16.	47.	$x^2=y^2+z^2$	$\begin{cases} y=\dfrac{y+z}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2} \\ z=\dfrac{y+z}{2}-\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2} \end{cases}$	
17.	49.	$\begin{cases} x>z>y>t \\ x+y+z+t=a \\ x^2+y^2=2\left(z^2+t^2\right) \end{cases}$	$t=z-y$	$a=22 \quad S=\begin{cases} x=8 \\ y=6 \\ z=7 \\ t=1 \end{cases}$
18.	-	$\begin{cases} x+y+z+t=a \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{4}\left(z^2+t^2\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x=\dfrac{2}{15}a \\ y=\dfrac{3}{15}a \\ z=\dfrac{4}{15}a \\ t=\dfrac{6}{15}a \end{cases}$	

Quadro 10: Problemas estudados por Moya no capítulo "Enel qual se ponen algunas demandas proporcionales, sin tener cuenta conla cosa" do *Compendio dela regla dela cosa* [Juan Pérez de Moya, 1558, pp. 140-149][427].

Alguns comentários relativos aos elementos constantes no quadro 10:

1) As regras de resolução indicadas por Moya e Pacioli são as mesmas. Contudo, em geral Moya tem a preocupação de explicitar a condição de possibilidade do problema e Pacioli não. Por exemplo, no problema 2. Moya nota que $b<a^2$.

[427] Os problemas de Pacioli referidos no quadro encontram-se nas páginas seguintes: 18 em [Luca Pacioli, 1494, f. 107v]; 24, 26 e 29 em [Luca Pacioli, 1494, f. 108r]; 30, 31, 34, 35 e 36 em [Luca Pacioli, 1494, f. 108v]; 43 em [Luca Pacioli, 1494, ff. 109r]; 44 em [Luca Pacioli, 1494, ff. 107r- 107v]; 51 em [Luca Pacioli, 1494, f. 107v].

2) Todos os exemplos de Moya estão na *Summa*, excepto no problema 2. (de Moya) em que o exemplo da *Summa* é $a=10$ e $b=68$ e no problema 3. (de Moya) em que na *Summa* é tomado $a=10$.

3) No caso do problema 10. (43. da *Summa*) Moya não enuncia a regra de resolução, mas do modo como trata o exemplo de aplicação conclui-se que é a mesma de Pacioli.

4) O problema 13. (52. na *Summa*) é equivalente aos problemas 11. (44. na *Summa*) e 12. (51. na *Summa*), mas tanto Moya como Pacioli indicam uma "nova" regra de resolução, o que nos faz pensar que eles não tinham consciência de que estavam a resolver o mesmo problema, apenas com os dados numa outra forma.

5) O problema 14. é proposto e resolvido na *Summa* em três momentos ("conclusiones" 53, 54 e 55); nos dois primeiros a regra de resolução é diferente da dada por Moya, mas os dados numéricos coincidem num exemplo. No terceiro, Pacioli indica a regra de Moya, mas aplica-a a um exemplo diferente $a=29$ e $b=3$.

6) O problema 15. (de Moya) é tratado de um modo um pouco diferente na *Summa* (11.), e Pacioli não dá exemplo de aplicação.

7) Aplicando a regra dada no problema 12. ao problema 16. (de Moya) e 47. (de Pacioli), $\begin{cases} y^2+z^2=x^2 \\ yz=\dfrac{(y+z)^2-x^2}{2} \end{cases}$ resulta, $y^2=\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{(y+z)^2-x^2}{2}\right)^2}$.

Donde, $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{(y+z)^2-x^2}{2}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2}+\dfrac{y+z}{2}$; e de modo análogo se obtém z. No entanto, nem Moya nem Pacioli aludem a esse facto.

Embora saibamos que os problemas do tipo que acabámos de referir, sobretudo os quinze primeiros, são na sua maioria questões clássicas na matemática medieval[428], as semelhanças e diferenças que apontámos parecem ser sugestivas de que Moya se baseou na *Summa* para explorar este assunto, ou, pelo menos, que Moya e Pacioli usaram, nesse estudo, uma fonte comum. Alguns dos problemas tratados por Moya fazem parte do elenco de aplicações incluídas em diversas obras do Renascimento, podendo ver-se em alguns textos manuscritos, como, por exemplo, os problemas 2, 3, 6 e 14, que estão incluídos no manuscrito anónimo Ms. 71 de S. Cugat[429], ou o problema 4, que é estudado no *Trattato de*

[428] [Sesiano, J., 1985, p. 144]. Por exemplo, o problema 1 é proposto por Jacopo de Firenze no *Tractatus Algorismi* [1307], no caso em que a quantidade é 10 e o produto das partes é 20 [Høyrup, J., 2007-1, p. 149].

[429] [Docampo, J., 2004, pp. 402, 403, 405-406].

Fioretti de Antonio de Mazzinghi[430]. E, também, em textos impressos, como o *Tratado da arte de arismetica*, de Bento Fernandes, o *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes, e *L'Algebre*, de Peletier. As técnicas de resolução empregues pelos autores destes trabalhos são diversas, podendo consistir em meras "receitas", no recurso à resolução de equações ou basear-se numa figura; e alguns usam mais do que uma para resolver o mesmo problema. Bento Fernandes, por exemplo, trata o problema 1 (no caso em que a soma e o produto são iguais), usando a mesma regra de Moya[431]. E resolve o problema 8 (supõe que o número é 10 e que o excesso do quadrado de uma das partes sobre a outra é 50)[432], de dois modos. Um é algébrico, e baseia-se na decomposição $(x-y)(x+y)=50$, que lhe permite transformar o problema inicial num outro, que consiste em determinar dois números sendo conhecidas a sua soma e diferença. O outro é aritmético e consiste na dupla falsa posição ("duas falsas oposições", como lhe chama Fernandes)[433].

Ainda sobre o problema 8, Sesiano nota que este tipo de problema está tratado no manuscrito Ms Val. Lat. 3129, composto por Pacioli antes da *Summa*, mas o exemplo utilizado (a quantidade é 10 e o número é 200) têm a particularidade de conduzir a uma equação cuja solução é negativa[434].

Antonio de' Mazzinghi apresenta uma resolução algébrica do problema 4 (considerando a soma 27 e o produto 8), e partindo dos números $x-\sqrt{y}$ e $x+\sqrt{y}$ (em notação usual).

---

[430] Ver [Franci, R., 1988, pp. 240-249] para detalhes sobre o *Trattato de Fioretti*; sobre problemas do tipo tratado ver [Rankin, F. K. C., 1992, pp. 88-90].

[431] "Dai-me tais dois números que multiplicado um contra outro faça tanto como somados e junto um número a outro" [Bento Fernandes, 1555, f. 73v]. Antes de explicar como resolve este problema, Bento Fernandes não só observa que ele tem uma solução *trivial*, como também que ela é única.

[432] O enunciado do problema é o seguinte: "Fazei-me de 10 tais duas partes que multiplicada cada uma por si mesmo faça 50 mais uma parte que a outra" [Bento Fernandes, 1555, f. 79].

[433] A "regra das duas falsas posições" ou "regra da dupla falsa posição" era bastante popular entre os matemáticos do Renascimento. Também conhecida por "elchataym" (por [Leonardo Pisano, 2002, p. 447]) é um procedimento por tentativa e erro que permite resolver problemas que se reduzem a uma equação linear numa incógnita. Em terminologia actual pode ser assim descrito: seja $ax+b=0$ (na incógnita *x*) e sejam x_1 e x_2 dois números tais que $ax_1+b=y_1$ e $ax_2+b=y_2$; então $x=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}\left(=-\dfrac{b}{a}\right)$.

[434] [Sesiano, J., 1985, p. 144].

Pedro Nunes, no *Libro de Algebra*, estuda este mesmo problema (no caso em que o produto é 10 e a soma dos quadrados é 30), e indica três processos diferentes de o resolver, comparando e discutindo os resultados obtidos[435].

Peletier, em *L'Algebre*, propõe, também, esta questão (mas com produto igual a 78 e soma dos quadrados igual a 2002) e resolve-a algebricamente, embora invoque *Elementos* II, 4 e se socorra duma figura[436].

Os problemas 16, 17 e 18 têm características diferentes dos anteriores e embora se assemelhem às questões estudadas por Fibonacci no *Liber Quadratorum*, não constam entre as 24 proposições aí tratadas[437]. Aliás, pode verificar-se facilmente que a proposição 17 é falsa; basta ver que, $x=11$, $y=3$, $z=8$, $t=1$ satisfazem as condições $x>z>y>t$ e $x^2+y^2=2\left(z^2+t^2\right)$, e $t\neq z-y$. Não deixa, por isso, de ser curioso que Moya exponha este problema, exactamente nos mesmos moldes que Pacioli, como mostram os excertos dos dois textos:

Si quisieres partir 1 quantidad en 4 partes, que la summa de los quadrados de las dos primeras, sea el duplo de los quadrados de las otras 2. Digo que siempre será la menor la differencia delas dos partes, que son medias entre la primera y quarta [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 148].

Se sia divisa una quantita in quatro tal parti che li quadrati de le doi prime sienno dupli ali quadrati de lartre doi. Dico che siempre la minore e la differentia de ditte doi parti che sonno medie fra la prima e quarta. [Luca Pacioli, 1494, f. 109v].

E que indique exactamente a mesma solução:

Sea la q. 22. y las dos partes primeras 8, y 6, y las segundas, 7, y 1. Los quadrados delas

Sia .22. la quantita cosi divisa. E le doi prime parti sienno .8. e .6. E le doi seconde sienno

[435] [Bosmans, 1908, pp. 256-259] trata detalhadamente este assunto.

[436] Ver [Jacques Peletier, 1554, second livre, pp. 202-203].

[437] Sabe-se que o *Liber Quadratorum* era conhecido de Tartaglia mas caiu no esquecimento até finais do século XVIII, quando o historiador Pietro Cossali, intrigado pelas referências de Pacioli, procurou o manuscrito e, como a procura se revelasse em vão, reconstruiu o livro dos dados da *Summa*. A obra consiste em 24 proposições que Leonardo Pisano enuncia e em cuja prova usa segmentos de recta para designar números. Por vezes, alguns exemplos numéricos complementam ou esclarecem os resultados mencionados. No Prólogo, Leonardo refere-se ao problema que lhe foi proposto por Joannes de Palermo e que consiste em determinar um número quadrado que somando-lhe 5 faça número quadrado e subtraindo-lhe 5 fique número quadrado. Leonardo diz que resolveu este problema imediatamente e que, depois de reflectir sobre o assunto, verificou que, não só esta solução, como muitas outras tiveram origem nos números quadrados e nos números que estavam compreendidos entre eles. Segundo [Sigler, 1987, p. 4] este problema foi muito provavelmente obtido por Joannes de Palermo de fontes árabes.

primeras montan 100, y los delas ultimas 50, como pide la demanda [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 148 e 1562, pp. 372-373].

.7. e .1. che vedi che li quadrati de ditte prime fanno .100. E li quadrati de le secondo fanno.50. [Luca Pacioli, 1494, ff. 109v-110].

O que constitui mais um argumento a favor da nossa suposição de que Moya se baseou na *Summa* de Pacioli para tratar este conjunto de questões sem recorrer à resolução de equações, ou que, pelo menos, ambos tiveram uma fonte comum.

5. O *Compendio* e os trabalhos algébricos impressos que o precederam

5.1. O *Compendio* e a álgebra da *Summa* de Luca Pacioli

Quando Moya, nas suas obras algébricas, refere os vários tipos de equações existentes, menciona o nome de Frater Lucas, mas não faz qualquer alusão à possibilidade de o seu trabalho ter sido influenciado pela *Summa*. A comparação que estabelecemos entre o *Compendio* e a parte algébrica da *Summa* permite assinalar algumas conexões entre os dois textos. A primeira que imediatamente se observa é a semelhança entre os temas desenvolvidos em cada uma das obras; mas há outras, respeitantes a aspectos de pormenor, que são bastante significativas. Destas salientamos a que referimos na secção intitulada "Sobre um processo alternativo de resolução de problemas". Como aí mostrámos, Moya apresenta dezoito questões envolvendo a determinação de números em certas condições, todas elas, à excepção da última, tratadas por Pacioli na *Summa*. O tratamento que Moya lhes dá e os exemplos a que recorre são, na generalidade dos casos, os de Pacioli, com algumas diferenças nos dados numéricos. Mas há outras semelhanças evidentes, como as respeitantes à notação e ao estudo dos irracionais. Moya utiliza notação semelhante à de Pacioli, para a incógnita e suas potências, e designações praticamente iguais (a seguir, indicam-se em primeiro lugar as de Moya e entre parêntesis as de Pacioli): "cosa" (cosa), "censo" (censo), "cubo" (cubo), "censo de censo" (censo de censo), "primero relato" (primo relato), "censo y cubo" (censo de cubo), "segundo relato" (secundo relato), "censo de censo de censo" (censo de censo de censo), "cubo de cubo" (cubo de cubo). A classificação e caracterização dos binómios é a mesma nos dois trabalhos e os exemplos dados por ambos coincidem em quatro dos seis tipos de binómios (1º, 2º, 5º e 6º). Relativamente ao método utilizado para somar radicais, a explicação que vemos no *Compendio dela regla dela cosa* é

análoga à da *Summa* e o exemplo numérico escolhido para o ilustrar é o mesmo. Moya trata, por vezes, problemas que parecem ser adaptação de outros apresentados na *Summa* e que, embora focando uma temática diferente, envolvem os mesmos valores numéricos, a mesma unidade monetária e a mesma resolução. É esse, por exemplo, o caso do problema dado em [Juan Pérez deMoya, 1558, pp. 79-80] e em [Luca Pacioli, 1494, f. 195v].

No entanto, Moya não segue Pacioli no estudo e classificação das equações; considera mais tipos de equações e o estudo que apresenta é mais abrangente do que o do autor italiano.

5.2. O *Compendio* e a álgebra da *Arithmetica Algebratica* de Aurel

A comparação que estabelecemos entre a álgebra contida no *Compendio dela regla dela cosa* e no *Libro primero de Arithmetica Algebratica* mostra que Moya conhecia muito bem esta obra de Marco Aurel. Consolación Baranda, na introdução à publicação do volume II das Obras de Pérez de Moya, havia já chamado a atenção para algumas coincidências entre o conteúdo algébrico da *Arithmetica practica, y speculativa* e o *Libro primero de Arithmetica Algebratica* [438]. Em particular, referiu três aspectos importantes: a analogia com a notação alemã utilizada por Aurel para indicar os caracteres algébricos; a explicação relativa à aplicação do método algébrico na resolução de problemas; o erro cometido na resolução das equações do tipo $ax^{n+2} + cx^n = bx^{n+1}$. Estas coincidências encontram-se, também, quando se compara o *Compendio dela regla dela cosa* e o *Libro primero de Arithmetica Algebratica.* Por outro lado, para sublinhar as diferenças entre a *Arithmetica practica, y speculativa* e o *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, no que toca à álgebra, Baranda [Baranda, C., 1998, p. XIX] afirma que Aurel dedica o último capítulo da *Arithmetica Algebratica* às «reglas y demandas que por la primera igualación se han de hacer» ou seja, à resolução de problemas "mediante ecuaciones de primer grado", enquanto Moya "también plantea la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado, que no puden proceder del texto de Marco Aurel". Esta afirmação é incorrecta, pois nos capítulos XVI a XXIV da obra de Aurel[439] estão tratados problemas que utilizam os outros

[438] [Baranda, C., 1998, p. XVIII].

[439] No exemplar do *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* que consultámos (Biblioteca da Universitat de Barcelona, reservado XVI-666), os títulos desses capítulos são: Capítulo XVI. "Trata dela regla dela quantidad, com algunas reglas, y demandas que por ella se hazen, que por outro nombre se puede llamar, regla dela

sete tipos de equações. Não serve, portanto, o argumento usado por Baranda para justificar a diferença entre as obras dos dois autores. Por isso, cabe-nos aqui apresentar algumas razões legítimas com as quais pretendemos mostrar que o *Compendio dela regla dela cosa* (e, consequentemente, também a parte algébrica da *Arithmetica practica, y speculativa*) revela diferenças relativamente à *Arithmetica Algebratica* que conferem ao trabalho de Moya uma identidade própria.

Uma das características que sobressaem da comparação entre as duas obras é a diferença de estrutura: enquanto o texto de Moya está organizado em capítulos e cada capítulo está dividido em "articulos", o de Aurel apenas apresenta capítulos. Relativamente à ordenação dos capítulos nas duas obras, há, também, diferenças a asssinalar: Moya só trata o tema das proporções e proporcionalidade depois de concluído o estudo das equações e Aurel apresenta-o logo num dos primeiros capítulos, precedendo o estudo da regra de três; não obstante, notamos que Moya usa os mesmos termos de Aurel com o mesmo significado: referindo-se a "proporcion" como razão e a "proporcionalidad" como proporção[440]. Neste capítulo, Moya inclui propriedades das "quantidades continuas proporcionales", ou seja, das progressões geométricas, que Aurel não trata. Algumas delas são referidas por Pacioli; é o que acontece com as proposições números 7., 8., 9., 11. e 12. em [Juan Pérez deMoya, 1558, pp. 134-135] que coincidem com as numeradas com 1., 2., 3., 7. e 8., respectivamente, na *Summa* [Luca Pacioli, 1494, f. 88r]. Ainda relativamente à ordenação dos capítulos, vemos que Moya estuda a resolução de sistemas, ou seja, a "regla de la segunda cosa o quantidad", depois de aplicar as regras das equações de todos os tipos à resolução de problemas, enquanto Aurel o apresenta entre as questões que propõe para o primeiro e segundo tipos.

Olhando, agora, para os conteúdos algébricos de cada capítulo, vemos que a matéria constante de cada um não é, em geral, substancialmente diferente nos dois trabalhos, mas o mesmo não sucede com a ordenação dos assuntos. Por exemplo, enquanto em Moya o

---

segunda cosa"; Capítulo XVII. "Trata delas reglas, y demandas, que por la segunda ygualacion, se han de hazer"; Capítulo XVIII. "Trata delas reglas, y demandas que por la tercera ygualacion se han de hazer"; Capítulo XIX. "Trata delas reglas, y demandas que por la quarta ygualacion se han de hazer"; Capítulo XX. "Trata delas reglas, y demandas que por la quinta ygualacion se han de hazer"; Capítulo XXI. "Trata delas reglas, y demandas que por la sexta ygualacion se han de hazer"; Capítulo XXII. "Trata de como hallar los numeros que componen las rayzes delos binomios, y la extraction dela rayz delos binomios por la cosa"; Capítulo XXIII. "Trata delas reglas, y demandas que por la septima ygualacion se han de hazer"; Capítulo XXIV. "Trata delas reglas, y demandas que por la octava ygualacion se han de hazer". Por exemplo, o exemplar "R/2689" da Biblioteca Nacional de España, da obra de Aurel, contém unicamente as folhas até à 107ª.

[440] Smith nota que o uso de proporção com o significado de razão e o de proporcionalidade com o significado de proporção era, em geral, comum nas primeiras aritméticas de todos os países latinos, e devia-se aos livros de Boécio [Smith, D.E., 1970, p. 254].

enunciado dos "avisos para las ygualaciones" (que são os princípios de equivalência das equações) precede o estudo das equações, em Aurel estes avisos vêm depois de indicada a regra de resolução de cada tipo de equações; Aurel, depois de indicar o processo de resolução para cada um dos tipos de equação, exemplifica logo com um caso concreto, enquanto Moya remete todas as aplicações para outros capítulos, tal como Pacioli na *Summa*[441]. Mas há outras diferenças, não menos relevantes, que assinalámos: Moya não adopta os sinais (+) e (–) para indicar a soma e a diferença, nem os símbolos para os radicais quadráticos, cúbicos e quárticos, utilizados sistematicamente por Aurel; a linguagem de Moya é, frequentemente, menos sintética e mais acessível do que a de Aurel. Reportando-nos, ainda, ao caso dos princípios de equivalência, observamos que Moya expõe em três notas [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 63] o que Aurel condensa numa só [Marco Aurel, 1552, f. 40], o que pode reflectir preocupações pedagógicas do nosso autor; a disposição dos cálculos, correspondentes ao esquema algorítmico da multiplicação de polinómios, que Moya utiliza [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 38] é diferente da de Aurel [Marco Aurel, 1552, ff. 73r-73v][442].

Olhemos, agora, para o estudo que os dois autores apresentam dos "binomios" e "disjuntos". Vemos que, só depois de ter introduzido as regras para operar com monómios e polinómios, é que Moya estuda as expressões do tipo $a \pm \sqrt{b}$, como se estas constituíssem casos particulares da combinação de "caracteres". Aurel e Pacioli seguem a ordem inversa, introduzindo as regras dos sinais no estudo com expressões do tipo $a \pm \sqrt{b}$ e aplicando-as quando, posteriormente, tratam o cálculo polinomial. Além disso, os exemplos que Moya indica para exemplificar cada um dos seis tipos de binómios são todos diferentes dos de Aurel (e diferem dos de Francesco Feliciano apenas no caso do binómio quarto)[443].

Finalmente, a maior parte dos 39 problemas de aplicação dos vários tipos de "ygualaciones" que Moya trata no *Compendio dela regla dela cosa* não se encontra no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*. É isso que se verifica com todas as questões relativas às "primera" (18 questões), "tercera" (2 questões) e "quarta" (3 questões) "ygualaciones simples de dos quantidades" e com as relativas às "segunda" (2 questões) e "tercera" (4 questões) "ygualaciones compuestas de tres quantidades". As semelhanças observam-se

[441] [Marco Aurel, 1552, ff. 77v – 80r].

[442] Mas é semelhante à que Tartaglia utiliza na sexta parte do seu *General Trattato*, publicado 2 anos depois do *Compendio dela regla dela cosa* [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 4v].

[443] Para os exemplos de Aurel ver [Marco Aurel, 1552, ff. 56r-56v].

apenas na "segunda ygualacion simples" de duas quantidades, em que o problema 3. proposto por Moya [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 89] é muito parecido com os problemas 6. e 7. propostos por Aurel [Marco Aurel, 1552, ff. 111r-112r] e na "primera ygualacion compuesta" de tres quantidades em que a questão 1. de Moya [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 97] é semelhante à questão 1. de Aurel [Marco Aurel, 1552, f. 121r].

5.3. O *Compendio* e a álgebra do *Tratado da arte de arismetica* de Bento Fernandes

A descrição sumária que fizemos do *Tratado da arte de arismetica* de Bento Fernandes mostra que estamos perante um trabalho com características e objectivos diferentes dos do *Compendio dela regla dela cosa*, de Pérez de Moya. Bento Fernandes reduz a cerca de quinze folhas os conteúdos directamente relacionados com a álgebra, enquanto Pérez de Moya lhes dedica uma obra completa. Seria, por isso, desapropriado, estabelecer a comparação entre os trabalhos no que respeita a estrutura e conteúdos. Mas há diferenças e semelhanças entre os dois textos que podem mostrar o estádio de desenvolvimento da álgebra que neles está contida. Comecemos pelas diferenças: há três que consideramos mais significativas. A primeira diz respeito à notação. Como vimos anteriormente, Moya utiliza símbolos para indicar diferentes potências da incógnita (os "caracteres") e raízes, e usa abreviaturas quando se refere, por exemplo, à soma e à diferença de números e de expressões polinomiais; pelo contrário, o texto de Bento Fernandes é retórico, sendo todo o conteúdo escrito por palavras, sem recurso ao uso de abreviaturas. Isso verifica-se em particular na secção de álgebra, incluindo as equações e os procedimentos para as resolver. Os únicos símbolos que Bento Fernandes usa são os que representam os números naturais e as fracções. Uma outra diferença que sobressai é relativa à metodologia utilizada: em geral, antes de tratar um assunto, Moya introduz um conjunto de conceitos necessários ao estudo que vai tratar enquanto Bento Fernandes vai introduzindo os conceitos à medida que eles vão sendo necessários. Por exemplo, enquanto Moya dedica um capítulo às operações com polinómios [Juan Pérez deMoya, 1558, pp. 31-47] antes de as utilizar na resolução de equações, Bento Fernandes não menciona as regras para trabalhar com polinómios, embora as aplique correctamente no decurso da resolução dos problemas [Bento Fernandes, 1555, f. 89]. A última diferença é relativa à resolução de equações irredutíveis de grau 3. No *Compendio dela regla dela cosa* estas equações não são estudadas

enquanto no *Tratado da arte de arismetica* são tratados os casos irredutíveis $ax^3 = bx + c$ e $ax^3 = bx^2 + c$ e são indicadas regras (falsas) para os resolver[444].

Relativamente às semelhanças, notamos, em primeiro lugar, que ambos usam os termos da tradição italiana para referir a incógnita e as suas potências. Tanto Moya como Fernandes indicam as mesmas regras operatórias para o cálculo com as potências da incógnita e para o cálculo com radicais quadráticos. Por exemplo, a explicação dada por Pérez de Moya do procedimento para somar radicais [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 9] é muito semelhante à de Bento Fernandes [Bento Fernandes, 1555, ff. 81v-82r] e tem o mesmo objectivo: obter um resultado expresso, também, por radicais. Em particular, para explicar como se efectua determinada operação, socorrem-se, com frequência, de exemplos como $\sqrt{9} + \sqrt{4}$, cujo resultado conhecem *à priori*, usando os números envolvidos como se fossem irracionais. Esta estratégia era muito comum, entre os autores renascentistas de obras de matemática, como o testemunham o *Triparty*, de Chuquet, a *Summa*, de Pacioli e o *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, de Aurel, a que já nos referimos. São também notórios alguns ingredientes comuns em certos tipos de problemas numéricos: como o da divisão de 10 em duas partes cujo produto é conhecido, que ambos tratam, [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 141] e [Bento Fernandes, 1555, ff. 81v-82r], a divisão de uma quantidade em duas partes de modo que o quadrado de uma delas exceda o quadrado da outra por um número dado, [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 144] e [Bento Fernandes, 1555, f. 79r], que fazem parte do património algébrico que foi sendo transmitido de geração em geração.

6. O conteúdo algébrico do *Tratado de Arithmetica* e o *Libro de Algebra* de Pedro Nunes

Cerca de meio século depois de ter sido impressa a *Summa* de Pacioli, Cardano publica, em Nuremberga, a *Ars Magna sive de regulis algebraicis* [1545]. Neste trabalho, totalmente dedicado ao estudo da álgebra, o autor promete um conteúdo cheio de novas descobertas e demonstrações onde, além de tratar igualdades que envolvam apenas dois ou

[444] Høyrup nota que esses casos existiam, há mais de 200 anos, em tratados de ábaco e admite que as soluções erradas propostas pudessem servir aos seus autores para lhes conferir a prioridade em concursos para certos cargos. Høyrup sublinha que o facto de essas regras sobreviverem é forte evidência de que poucos professores de álgebra compreendiam muito do assunto [Høyrup, J., 2008, p. 6].

três monómios, estudará casos que relacionam quatro termos[445]. Esta obra, que resulta do trabalho de Cardano mas que reflecte o contributo de Scipione del Ferro, Nicolo Tartaglia e Lodovico Ferrari, ocupa-se das propriedades gerais das equações, incluindo as relações entre os coeficientes, as regras dos sinais e a localização de raízes[446]. Pela sua estrutura, conteúdo e difusão, marcou uma nova época no estudo da álgebra[447].

Como nos diz Heeffer, só em finais do século XIV é que alguns tratados de ábaco dedicaram uma secção à multiplicação de binómios e trinómios, tendo sido os textos "cossistas" (isto é, de conteúdo algébrico) alemães do século XV os primeiros a introduzir formalmente estas operações. Por outro lado, no início do século XVI todo o trabalho sério de álgebra incluía uma explicação introdutória de, pelo menos, a adição, a subtracção e a multiplicação algébrica de polinómios[448]. É isto que se observa no *Compendio dela regla dela cosa*, de Pérez de Moya, no *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, de Aurel, no *General Trattato*, de Nicolo Tartaglia e no *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes. Quanto à divisão, a progressão foi mais lenta. Aurel apenas alude ao modo de dividir "caracteres"[449]. Tartaglia não vai muito além, incluindo um só exemplo da divisão de um trinómio por um binómio, sem explicar como ela se realiza e limitando-se a traduzi-la por uma fracção[450].

O *Libro de Algebra* é a primeira obra ibérica conhecida que trata a divisão de um polinómio por um binómio [Pedro Nunes, 1567, ff. 30r-34r]. Esta operação, essencial na decomposição de polinómios em factores, é uma ferramenta indispensável ao estudo e resolução de equações. Pérez de Moya estuda a divisão de polinómios no *Tratado de Arithmetica* [Juan Pérez deMoya, 1573a, pp. 482-487] e o facto de não conhecermos, entre 1567 e 1573, nenhum outro trabalho de autor ibérico nessas condições levou-nos a comparar o texto de Moya com o do *Libro de Algebra*, no que diz respeito a este assunto. As conclusões a que chegámos mostram a coincidência entre os estudos feitos por ambos: o uso das mesmas palavras (excepto que Moya designa por "caracteres" o que Nunes chama "dignidades") para expor o algoritmo [Juan Pérez deMoya, 1573a, p. 486] e [Pedro Nunes, 1567, f. 31r], o recurso a exemplos com iguais características [Juan Pérez deMoya, 1573a, p.

---

[445] [Girolamo Cardano, 1545, p. 1].

[446] Notas dadas por Witmer, no prefácio da edição inglesa da Ars Magna [Witmer, R. T., 1968, p. XV]. Também aí se podem consultar, entre outras, indicações relativas à biografia de Cardano e às edições da *Ars Magna* [Witmer, R. T., 1968, pp. XV- XXV].

[447] [Docampo, J., 2004, pp. 92 e 556].

[448] [Heeffer, A., 2008, p.115].

[449] [Marco Aurel, 1552, ff. 73v-74r].

[450] [Nicolo Tartaglia, 1560d, f. 5r].

487] e [Pedro Nunes, 1567, ff. 31r-32v], a prova real apresentada para a verificação da correcção do resultado. Vemos, também, que Moya descreve dum modo muito semelhante a Nunes a prova da equivalência de duas fracções algébricas [Juan Pérez deMoya, 1573a, p. 491] e [Pedro Nunes, 1567, ff. 37v-38r]. Embora este último nos pareça ser um aspecto fundamental, há muitas outras coincidências importantes entre as duas obras, como assinalamos a seguir: a explicação das regras dos sinais na adição de polinómios, envolvendo todas as combinações possíveis dos sinais, mesmo aquela em que se somam quantidades simétricas [Juan Pérez deMoya, 1558, p. 34] e [Pedro Nunes, 1567, f. 25r]; os algoritmos dados para calcular o produto de dois polinómios, e a disposição dos cálculos na multiplicação de polinómios [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 482] e [Pedro Nunes, 1567, f. 28v]; os estudos referentes à racionalização de denominadores e a explicação da necessidade de multiplicar ambos os termos de uma fracção pela mesma quantidade [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 522] e [Pedro Nunes, 1567, f. 60r]; e o mesmo se passa com os exercícios de aplicação correspondentes.

A prova que Moya dá da regra para subtrair radicais quadráticos [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 448] reproduz passo a passo o texto de Nunes [Pedro Nunes, 1567, ff. 58r-59v]. A introdução às operações com radicais de índices diferentes é semelhante nas duas obras e a explicação do método usado para reduzir radicais ao mesmo índice é praticamente a mesma. Moya até substitui os termos que usava no *Compendio dela regla dela cosa* para designar o índice do radical e o radicando [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 466] pelos nomes "denominacion" e "numero" usados por Pedro Nunes no *Libro de Algebra* [Pedro Nunes, 1567, f. 46r].

Vejamos, agora, as analogias no que toca às equações. No estudo das equações do tipo $ax = b$, Moya baseia-se no mesmo argumento de Nunes, a "experiência" (ou seja, a verificação do resultado) para justificar a validade da solução [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 547] e [Pedro Nunes, 1567, f. 1v] e indica, tal como ele, duas regras de resolução para cada uma das conjugações compostas (uma das quais Pedro Nunes diz ser da sua autoria). Entre as demonstrações geométricas das três regras relativas às equações completas do segundo grau, dadas no *Tratado de Arithmetica*, e as existentes no *Libro de Algebra*, observam-se grandes semelhanças: no modo de construir a figura e na própria figura e ainda nas referências que ambos fazem aos *Elementos* de Euclides em que se baseiam as mesmas passagens da demonstração [Juan Pérez de Moya, 1573a, pp. 590- 591] e [Pedro Nunes, 1567, ff. 7v, 8v e 11v-12r], respectivamente.

Estas conexões entre o *Tratado de Arithmetica* e o *Libro de Algebra* mostram que a obra de Pedro Nunes constituiu uma referência muito importante para Pérez de Moya. Pensamos que, entre os autores ibéricos do século XVI, Moya foi um dos leitores mais atentos da álgebra de Pedro Nunes.

7. Considerações finais

Do estudo que apresentámos sobre a álgebra de Pérez de Moya, concluímos que o nosso autor conhecia bem o conteúdo algébrico da *Summa* de Luca Pacioli e do *Libro primero de Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel quando, em 1558, escreveu o *Compendio dela regla dela cosa*, e baseou-se nestas obras para delinear a estrutura da sua e tratar grande parte do conteúdo. Mas quando a reviu para a integrar, em 1573, no *Tratado de Arithmetica*, procurou fontes que se caracterizassem pela generalização e o rigor, como o *General Trattato* de Tartaglia e o *Libro de Algebra* de Pedro Nunes.

Moya escreve para um público vasto, não necessariamente especialista, e que saiba ler castelhano, o que nos pode dar a ideia do que era o conhecimento comum em Espanha em meados do século XVI. Por outro lado, o conteúdo do *Compendio dela regla dela cosa*, onde é dada uma regra errada de resolução para um dos tipos de equações do segundo grau, foi integrado quatro anos mais tarde, na *Arithmetica practica, y speculativa*, tendo sido, portanto, muito divulgado, durante todo o século XVII[451]. Acontece que esse erro nunca foi corrigido (e não temos conhecimento de que a sua correcção tenha, alguma vez, sido reclamada!), apesar de Moya o ter feito, onze anos depois, no *Tratado de Arithmetica*. Este facto pode testemunhar a fraca preparação matemática, pelo menos no que toca aos conhecimentos de álgebra, na Espanha dessa época.

Todas as obras algébricas de Moya denotam as suas preocupações didácticas, que se traduzem pelas diversas estratégias a que recorre para expor e explicar as matérias. Nelas são frequentes indicações colocadas, geralmente, à margem, como uma chamada de atenção para conteúdos indispensáveis à compreensão do assunto que está a ser tratado. Moya

[451] Ángel Prieto, no apêndice documental de *Libros y lectura en Salamanca – del Barroco a la Ilustración 1650-1725*, nomeia os 522 livros mais frequentes nas bibliotecas de Salamanca, no período de 1650 a 1725, e observa que dos livros matemáticos nelas existentes a Arithmetica de Moya é mais utilizada pelo seu carácter de iniciação à ciência [Prieto, Á. W., 1993, p. 119]. Na área da matemática refere as seguintes obras: Juan Ortega [Sevilla, 1537], Juan Pérez de Moya [Salamanca, 1562], Juan Pérez de Moya [Alcalá, 1582], Martín Cortés [Sevilla, 1551] e, ainda, o *Libro de Arithmetica especulativa y practica* [Sevilla, 1603], de Gerónimo de Santacruz, a *Arithmeticae Geographiae* [Alcalá, 1568], de Juan de Segura, a *Arithmetica Practica* [Valencia, 1604], de Jerónimo Cortés, a Astrologia Christiana [Salamanca, 1521], de Pedro Ciruelo e o *Cursus quatuor mathematicarum* [Alcalá, 1526], de Pedro Ciruelo.

revisita o estudo da resolução de equações quando o leitor já está familiarizado com o assunto, e só então sintetiza procedimentos e apresenta generalizações. Nos seus trabalhos, inclui problemas que parece ter preparado previamente para praticar questões de cálculo e intercala-os com outros em que escolhe quantidades numéricas que não constituem obstáculo à introdução e explicação de um conceito ou de uma regra; e alterna a resolução de problemas do quotidiano com questões numéricas abstractas. Indica processos alternativos de resolução, quando reconhece as dificuldades que podem sentir os menos preparados em assuntos mais delicados, e recorre frequentemente à verificação das soluções dos problemas que propõe. Incentiva o leitor ao trabalho prático, que reconhece como meio de compreensão e concolidação dos assuntos: "y trabajando enla practica de tantas demandas como enel hallaras, entenderas mejor lo que se ha tratado".

Moya estuda, apenas em casos particulares, a equação do terceiro grau; mas ao leitor interessado em saber mais sobre o assunto aconselha a obra de Pedro Nunes: "Y en las ygualaciones que el cubo y cosa, se ygualaren a numero. Lea el doctor Pedro Nuñez, al fin del tratado de Algebra que lo trata mas discretamente, que ninguno de los que antes lo inventaron"[452]. Esta é ainda a atitude do mestre, que não podendo disponibilizar aos seus leitores os últimos resultados da ciência que trata, lhes mostra caminhos que os podem levar mais além.

[452] [Juan Pérez de Moya, 1573a, p. 589].

TERCEIRA PARTE

1. Introdução

Na bibliografia espanhola existente, o principal tratado contendo geometria que precede a *Arithmetica practica, y speculativa*, de Pérez de Moya, é o *Sígue se una compusicion de la arte dela arismetica y Juntamente de Geometria* do palentino Juan de Ortega, impresso em Lyon, em 1512. Este trabalho foi reimpresso diversas vezes durante o século XVI e foi muito divulgado em Espanha, e até no estrangeiro, tendo sido traduzido em francês e em italiano[453]. Para se ficar com uma ideia do pouco relevo dado à geometria nessa obra de Ortega, observamos que nas 203 folhas que a constituem apenas dez folhas são reservadas a conteúdos geométricos[454]. Apesar disso, o autor sublinha a importância do assunto na agrimensura[455]. Na sua obra *Síguese una compusicion de la arte de arismetica y Juntamente de Geometria* a geometria é constituída por 40 exemplos práticos, na sua maioria relacionados com a determinação da área de terrenos. Os casos estudados são muito simples envolvendo formas poligonais, em que o conhecimento de alguns elementos da figura permite a determinação de outros. Ortega dá regras para calcular, por exemplo: a área de um rectângulo quando são conhecidos os lados; a diagonal de um quadrado de lado conhecido; a altura e a área de um qualquer triângulo. Diz como se obtém cada um dos elementos (lado e alturas) de um triângulo, quando são conhecidos dois lados e a altura relativa a um deles. Entre os restantes exemplos apresentados por Ortega, alguns dizem respeito a terrenos com forma poligonal, com 5 e 6 lados, e a terrenos circulares, ou cujas

[453] Docampo indica três edições na primeira metade do século XVI: [Sevilla, 1534], [Sevilla, 1537] e [Sevilla, 1542]; as edições corrigidas de Gonzalo Busto [Sevilha, 1552] e de Juan Lagarto [Granada, 1563] e as traduções em francês [Lyon, 1515] e em italiano [Roma, 1515] e [Messina, 1522] [Docampo, J., 2004, pp. 98-99]. Em [Rey Pastor, J., 1934, p. 71, nota de rodapé] é referida também a edição de [Cambray, 1612]. A edição de [Sevilha, de 1537] intitula-se *Tratado subtilissimo d'Arismetica y de Geometria: cõpuesto y ordenado por el reverẽdo padre fray Juan de Ortega dela orden delos predicadores*. http://bibliotecadigitalhispanica.bne.es/ (Consultado em 10 de Janeiro de 2011). Sobre a obra de Ortega pode ler-se [Malet, A. e Paradis, J., 1984, pp. 123-127] e [Rey Pastor, J., 1934, pp. 67-81].

[454] As dez folhas dedicadas à geometria são as últimas da obra. Sobre o conteúdo de cada um dos capítulos e a paginação correspondente ver [Docampo, J., 2001, pp. 100-101]. A edição de 1515, impressa em Roma por Mastro Stephano Guilleri de Lorena, e intitulada *Suma de Arithmetica: Geometria Pratica utilíssima: ordinada per Johane de Ortega Spagnolo Palentino*, tem 116 folhas, das quais 16 são dedicadas à geometria. Nelas, Ortega trata 51 problemas (intitulados "exempio"), sobretudo sobre o cálculo de áreas em casos práticos da vida quotidiana.

[455] [Juan de Ortega, 1512, f. 193r].

fronteiras são arcos de círculo, menor ou maior, dos quais se pretende determinar o diâmetro, o perímetro e a área, conhecidos alguns destes elementos[456].

A inclusão de um pequeno capítulo de geometria numa obra de aritmética, tal como vemos na de Ortega, era prática corrente nas primeiras aritméticas ibéricas: Nicolas, no seu *Tratado da Pratica Darismetyca* publicado em Lisboa em 1519, ocupa-se da geometria em apenas 14 folhas das 118 que a obra contém[457], e Joan Ventallol, na *Pràtica mercantívol*[458] publicada em Palma de Maiorca em 1521, dedica à geometria as últimas 11 folhas, num total de 132 que compõem a obra[459].

Muito diferentes destes trabalhos são o *Tractatus Geometrie: Pars secunda principalis huius operis et primo eius divisio*, que constitui a segunda parte principal da *Summa* de Luca Pacioli, publicada em Veneza em 1494 e o *General Trattato* de Nicolo Tartaglia, também publicado em Veneza desde 1556 a 1560.

No *Tractatus Geometrie*[460], Pacioli dedica 76 folhas à exploração de temas geométricos, que organiza em 8 partes cada uma das quais chamada "distinctione". O assunto tratado em cada uma delas é o seguinte: I- Definições, demonstrações e conclusões de *Elementos* I, de Euclides; demonstrações e conclusões de *Elementos* II e de *Elementos* VI. Medição de quadriláteros e de todos os tipos de triângulos. Determinação da altura de um triângulo e sua aplicação à medição de terrenos; II - Relações envolvendo um segmento que corta os lados de um triângulo em partes; III – Resolução de vários casos de quadriláteros rectângulos, por meio de álgebra; IV – Medição do círculo e da superficie em montanhas; V – Divisão de uma superficie em partes; VI – Determinação da área superficial dos corpos; VII – Medição "a olho"; VIII – Exemplos de geometria.

Tartaglia dedica à geometria três das seis partes, a terceira, a quarta e a quinta, do seu *General Trattato de Numeri, et Misure.* Vejamos de que assuntos trata cada uma. A terceira

---

[456] O conteúdo de geometria incluído na edição de 1552 reduz-se a 38 problemas geométricos, todos tratados na edição de 1512. O enunciado, a resolução e a ordenação dos problemas é a mesma nos dois textos, apenas diferindo a unidade de medida adoptada: a cana (ed. 1512) e a vara (ed. 1552).

[457] A geometria, que ocupa as folhas 80r a 94v, é introduzida sob o título "Seguese algumas perguntas em pratica geometria" e resume-se à resolução de 42 problemas, em que se aplicam as regras aritméticas que a obra dá a conhecer, e o teorema de Pitágoras.

[458] O título completo da obra de Ventallol é *Pràtica mercaníivol composta e ordenada per en Joan vãtallol de la ciutat de mallorques.* No nosso trabalho utilizámos a edição facsímil [Palma de Mallorca, 1985].

[459] A geometria é estudada, sob o título "Tractat fize qui tracta de lart de geometria e primer de la divisio dels nombres secundum figuram", nas folhas 122r-132v.

[460] Foi editada por Annalisa Simi e Albert Presas i Puig com o título: *Tractatus geometrie. Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità. Pars II.*

parte[461] é formada por 5 livros, com os seguintes conteúdos: I – Definições de *Elementos* I, de Euclides; II – Trata Medição de terrenos, de acordo com os costumes de várias cidades; III – Construção do instrumento chamado "squadro" e seu uso na determinação da área de terrenos; IV – Resolução de questões sobre sólidos envolvendo a medida, a compra e a venda de diversos produtos, como, por exemplo, feno, lenha e vinho; V – Medição de todo o tipo de construções, como: paredes e muros, telhados, profundidades de poços. A quarta parte[462] é composta por 3 livros: I – Definições de *Elementos* V e de *Elementos* VI, de Euclides, resultados sobre polígonos, sobre o círculo e suas partes, e medidas destas figuras geométricas, métodos de quadratura do círculo propostos por diversos autores, considerações sobre a elaboração de tábuas de arcos e cordas, de acordo com Ptolomeu; II – Definição de superficies e corpos sólidos e questões de medida a eles respeitantes: os sólidos platónicos, o cubo, os prismas, os cilindros e as pirâmides; III – Definições e proposições do primeiro livro *Da esfera e do cilindro*, de Arquimedes, e resolução de questões práticas sobre medida da esfera e das suas partes, mostrando erros cometidos por alguns matemáticos. A quinta parte[463] é dedicada à geometria com régua e compasso, e é composta por 3 livros: I - Resolução, com régua e compasso, dos problemas dos seis primeiros libros dos *Elementos* de Euclides e de outros problemas, não propostos por Euclides, como desenhar a oval, dividir um segmento e um triângulo em partes, estudo de questões relacionadas com a duplicação do cubo e com a identificação geométrica de quantidades comensuráveis mostrando como se determina, geométricamente, a sua máxima medida comum; II - Resolução geométrica de alguns problemas dos libros XI, XII, XIII e XV dos *Elementos* de Euclides, e de outros não propostos por Euclides, soma e subtracção de volumes; III – Indicação do número de proposições de cada livro dos *Elementos*, resolução com régua e compasso de abertura fixa, das proposições dos *Elementos* que são problemas, estudo de 22 dos 31 "quesiti" propostos a Cardano e a Ferrari, em disputa pública, no ano de 1547.

---

[461] No título, Tartaglia dá algumas indicações sobre o conteúdo desta parte da obra, dizendo: "Nel quale si dechiarano i primi principii, et la prima parte della Geometría, con bellissimo, et facilíssimo modo; cose utilissime, et dilettevoli, per tutte quelle persone, che si dilettano disapere. Dimostrasi oltra di cio, la prattica del misurare ciascuna cosa, con brieve, & facile via."

[462] Sobre esta parte, Tartaglia diz, no título: "*La Quarta Parte* nella quale si riducono in numeri quasi la maggior parte delle figue, cosi superficiali, come corporee della geometría; et oltre à oio s'applicano alla materia, o si metteno in atto prattico. Cose molto utili à tutte le qualità dele persone, et infiniamente desiderate' de' studiosi delle Divine Mathematice".

[463] Sobre esta parte, Tartaglia diz, em subtítulo: "Mostra il modo de essequire com il compasso, et com la regha tutti li problemi geometrici di Euclide et, materia non men'utile che necessaria à Geometrici, Designatori, perspettivi, Architetori, Ingegneri, & Machinatori, si naturali, come Mathematici".

No estudo que se segue, tomamos como principal referência os conteúdos de geometria das obras de Ortega, de Pacioli e de Tartaglia, com as quais comparamos os diversos trabalhos geométricos de Pérez de Moya.

2. As obras geométricas de Pérez de Moya: Conteúdo, Organização e Fontes

Os estudos geométricos de Juan Pérez de Moya conheceram quatro fases distintas. Iniciram-se, em 1562, com um pequeno capítulo da sua *Arithmetica practica, y speculativa* para se tornarem, em 1568, num texto autónomo de geometria, com a *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos.* Em 1573, Pérez de Moya reviu todo o seu trabalho matemático, publicando uma obra enciclopédica, o *Tratado de Mathematicas*, constituída por três volumosos livros dos quais o segundo, o *Tratado de Geometria practica, y speculativa* é inteiramente dedicado à geometria. Embora este seja o seu trabalho geométrico de referência, Pérez de Moya ainda compôs, em 1584, os *Principios de Geometria* que viriam a constituir a sua última obra matemática.

Um olhar atento sobre a obra geométrica de Moya permite compreender como, naquela época, muitos assuntos foram divulgados, assimilados e transmitidos.

A primeira vez que Moya trata assuntos de geometria é no "Libro quarto" da sua *Arithmetica practica, y speculativa* publicada em Salamanca em 1562[464]. Este "Libro quarto", que é o mais pequeno da obra, estuda, de um modo muito superficial, alguns tópicos de geometria. No entanto, pela variedade de informação que disponibiliza, num número tão reduzido de folhas, somos levados a pensar que Moya apenas pretende, de momento, divulgar alguns conhecimentos de geometria indispensáveis mesmo ao leitor de um livro de aritmética. Contudo, leva-nos a pensar que Moya está já de posse de outros saberes de geometria mais elaborados.

Em 1568 Moya publica a *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* constituída por dois volumes, dos quais o primeiro se intitula *Libro Primero que trata de Geometria Practica*[465]. A intenção de Moya ao empreender a tarefa de escrever esta obra é ambiciosa:

---

[464] Esta obra foi editada, em 1998, por *Consolación Baranda* com o título *Aritmética prática y speculativa; Varia historia de sanctas e illustres mugeres*. Juan Pérez de Moya, *Obras, vol 2. Edición y prólogo de Consolación Baranda* [Baranda, C., 1998].

[465] Como noutro momento já referimos, o primeiro volume desta obra foi publicado depois do primeiro por conter muitas mais figuras, o que fez atrasar a sua impressão.

tratar detalhadamente todos os assuntos respeitantes às Artes Liberais[466]. No entanto, entraves diversos relacionados com o custo da impressão não permitiram que o seu plano se concretizasse na totalidade[467].

Na impossibilidade de tratar todos os temas que pretendia, Pérez de Moya fez uma selecção dos tópicos de geometria prática que, em seu entender, constituíam ferramentas indispensáveis a quem estuda outras ciências. Este propósito está claro nas seguintes palavras:

> (…) porque de cada una destas Artes pongo solamente aquello que me parescio ser necessario para que el estudioso y ocupado en otras disciplinas, tenga una noticia, aunque cõfusa, de las cosas de Geometria pratica, y Astronomia, y Geographia, y Sphera, y Astrolabio, y Navegaciõ, y Reloxes, y otras cosas a este proposito que se platican, y cõmunican ordinariamẽte [Juan Pérez de Moya, 1568, El Bachiller Ivan Perez de Moya a los lectores].

De facto, folheando os *Fragmentos Mathematicos*[468] tanto podemos encontrar assuntos tão elementares como a descrição do modo de utilização de varas, ou de um vaso de água, para medir alturas, ou da divisão de um segmento em partes iguais quando apenas se dispõe de um papel pautado, como podemos ver justificações envolvendo proposições dos *Elementos* de Euclides[469].

No início de 1573 é impresso, em Alcalá de Henares, o *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural. Con otras varias matérias, necessarias a todas artes Liberales, y Mechanicas*. O *Tratado de Mathematicas*, como abreviadamente o designamos aqui, é uma obra volumosa constituída por três tomos, em que se tratam temas de Aritmetica e Álgebra, Geometria e Astronomia. Este é, sem dúvida, o trabalho emblemático de Pérez de Moya, onde ele colecciona o que

---

[466] Como se sabe, as sete artes liberais são as que constituem o *Trivium* (Gramática, Retórica e Dialéctica) e o Quadrivium (Aritmética, Geometria, Astronomia e Música).

[467] Em [Juan Pérez de Moya, 1568, *El Bachiller Ivan Perez de Moya a los lectores*, carta escrita em Dezembro de 1567].

[468] A partir de agora passaremos a referir a *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* pelo título abreviado *Fragmentos Mathematicos*, adoptando um nome mais curto que o autor também utilizou [Juan Pérez de Moya, 1568, *El Bachiller Ivan Perz de Moya a los lectores*].

[469] Os *Fragmentos Mathematicos* viriam a ser uma referência para Pérez de Moya que, em diversas ocasiões, remeteu para eles o estudo de algumas questões.Veja-se, por exemplo, esta citação de Pérez de Moya *Si dixere bolas, en lugar de quadrad lee cubicar. Lee sobre esta Geometria el tractado que intitulamos Fragmentos mathematicos* [Juan Pérez de Moya, 1569].

entende ser o essencial do conhecimento matemático da sua época. E é, também, o resultado do estudo que continuava a desenvolver desde que, em 1554, publicou a sua primeira obra matemática, o *Libro de Cuenta*.

O *Tratado de Geometria practica, y speculativa* é o segundo volume do *Tratado de Mathematicas*, mas teve, tal como os outros dois volumes, autorização real para ser impresso separadamente[470]. Na "Dedicatória" do *Tratado de Geometria*, Moya anuncia uma versão melhorada da sua Geometria[471], que fora impressa em 1568. No intervalo de cinco anos que medeia entre a publicação dos *Fragmentos Mathematicos* e do *Tratado de Geometria practica, y speculativa*, Pérez de Moya aprofundou os seus conhecimentos com a intenção de aperfeiçoar temas de geometria tratados anteriormente nas suas obras. É ele mesmo quem o diz na dedicatória desse tratado a Don Luys de la Cueva:

> No se admirara V. M. si à cabo de tanto y tã cõtino estudio salga cõ el mismo tratado de Geometría, que dias ha en nombre de V. M. imprimi. Pues va tan mudado y acrecentado que nadie le conocerá: por no tener quasi letra que no se aya mejorado, ni materia que no se aya anadido y demonstrado [Juan Pérez de Moya, 1573b, *Dedicatoria*].

É muito curioso o modo como o nosso autor se justifica do seu desconhecimento de muitas matérias e como realça a importância de manter o seu interesse em continuar em estudar. Moya lembra as palavras escritas por Quintiliano[472] no Livro 3 do *Statibus*:

> Demasiados e excessivos seriam os estudos, e o seu muito trabalho, se não fosse possível com eles achar alguma coisa melhor que a passada [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 1].

E as de Cícero[473], no *De Finibus*, que diz que mesmo os homens de saber confessam desconhecer muitas coisas e estar em contínua aprendizagem.

---

[470] Ver a carta do rei Filipe II, de 12 de Outubro de 1571, incluida no início da obra [Juan Pérez de Moya, 1573].

[471] Refere-se à *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos*, já citada.

[472] Marco Fabio Quintiliano (Calahorra (Espanha) c. de 39, Roma c. 95) foi um retórico e pedagogo hispanoromano. Conhecido pelos seus dotes de orador, deixou-nos uma obra emblemática, o *Institutio Oratoria*, na qual trata, entre outros, o tema da educação. Quintiliano recomendava que se ensinassem ao mesmo tempo as letras e as suas formas, era contrário aos castigos corporais e advogava o estímulo como incentivo para o estudo. Além disso, defendia que o tempo escolar fosse periodicamente interrompido por recreios já que entendia que o descanso favorecia a aprendizagem. http://es.wikipedia/wiki/quintiliano (Consultado em 2 de Abril de 2011).

Pérez de Moya escreveu o *Tratado de Geometria practica, y speculativa* em língua castelhana, para poder ser útil aos seus compatriotas[474]. Na carta que dirige aos leitores, realça a importância do conhecimento da geometria em "todo genero de letras" e nas "artes mechanicas" e observa que são poucas as profissões que dela não necessitam. Em seu entender, a geometria permite ao "Lógico" compreender certas proposições tratadas nas escolas[475]; é útil ao "Legista" pois ensina a dividir os campos e as herdades; é importante para o "Soldado" e para o "Astrólogo" aprenderem a calcular distâncias, a medir alturas e a determinar profundidades; enfim, para os "Architectos" e todos os outros "officios", que nela encontrarão muitos assuntos do seu interesse.

O último trabalho de geometria composto pelo nosso autor, *Principios de Geometria*, publicado em Madrid, em 1584, é dedicado ao seu mecenas Juan Baptista Gentil[476]. Trata-se de um livro raríssimo do qual se conhece um único exemplar, que pertence ao espólio da Biblioteca Nacional de Lisboa, em Portugal[477]. Ficámos a saber da sua existência pela referência que o próprio Pérez de Moya faz a este trabalho, ao escrever, na dedicatória a Juan Baptista Gentil, da sua *Philosophia secreta*[478], publicada em Madrid em 1585, o seguinte:

> Aisi el encaminar a v. m. el libro de Geometria que saquê antes deste, no fue para con solo el cumplir con las obligaciones que a v. m. tengo, sino para hazer camino, y principio de dedicar al noble nombre de v. m. todos los que de aquí en delante sacaré. Moviendome a

---

[473] Marco Tulio Cicerón (Arpino (Itália) 106 aC, Formia (Itália) 43 a.C) foi um dos mais importantes autores da história política, filósofo, escritor e orador. É recordado pelos seus escritos de carácter humanista http://es.wikipedia/wiki/cicero (Consultado em 2 de Abril de 2011).

[474] "Va en lengua Española, porque mas gente de mi nacion se pueda aprovechar mejor de lo que las demas tienen en las suyas".

[475] A título de exemplo, Pérez de Moya enuncia diversas proposições, entre as quais a que diz que "todos os triângulos têm três ângulos iguais a dois rectos", que escreve em latim.

[476] Juan Baptista Gentil, filho de Costantin Gentil, custeou a publicação da *Philosophia secreta: donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina, provechosa a todos los estudios: con el origin de los idolos o dioses de la gentilidad*, de Pérez de Moya, que saiu dos prelos em 1585. Pérez de Moya também lhe dedica esta obra e manifesta, além disso, a intenção de lhe dedicar todas as outras que vier a compor.

[477] Esta obra, que é o reservado com a cota Res.6553P, está indicada no Catálogo intitulado *O Livro Científico dos Séculos XV e XVI, Ciências Físico-Matemáticas na Biblioteca Nacional*, publicado pela Biblioteca Nacional de Portugal, em 2004 e coordenado por Henrique de Sousa Leitão (coord. científico) e por Lígia de Azevedo Martins (coord. técnica). O referido Catálogo foi acompanhado pela exposição *Conta, Peso e Medida: A Ordem Matemática e a Descrição Física do Mundo*, que esteve patente ao público na Biblioteca Nacional de Lisboa, desde 2 de Dezembro de 2004 até 5 de Março de 2005.

[478] *Philosophia secreta: donde debaxo de historias fabulosas se contiene mucha doctrina, provechosa a todos los estudios: con el origin de los idolos o dioses de la gentilidad*. Francisco Sanchez, Madrid, 1585.

ellos dos cosas. La una, corresponder con la obligación que tengo, como a mi Mecenas. La otra, por la utilidad que dello a mis escritos se sigue [Juan Pérez de Moya, 1673][479].

2.1. O *Libro quarto* da *Arithmetica*

Os primeiros conceitos de geometria que Moya expõe estão incluidos no "Libro quarto" da *Arithmetica*, que tem por título "Trata algunas reglas de Geometria pratica necessárias para el medir de las heredades". Este *Libro*, como lhe chama o autor, desenvolve-se em três pequenos "capítulos" intitulados: "Define la Geometria", "De las figuras de Geometria" e "Muestra la orden de medir tierras", que ocupam no total apenas dezasseis páginas[480].

O objectivo principal do estudo de Moya com este trabalho é, como aliás se deprende do respectivo título, dar a conhecer regras de medição de terrenos que possam ser utilizadas na vida prática. No entanto o autor dá uma brevíssima introdução teórica à geometria euclidiana, definindo os principais entes geométricos: o ponto ("puncto"), a linha ("línea"), a superfície ("superfície") e o corpo ("cuerpo"), e as principais figuras planas, circulares e rectilíneas. Todo o conteúdo está dirigido para a resolução de problemas práticos, que são apresentados no capítulo intitulado "Muestra la orden de medir tierras". Nele, são propostas e na sua maior parte resolvidas, dezasseis questões concretas de medida; mas ao contrário do que o título sugere, apenas seis dizem respeito à medição de terras. Estas seis últimas envolvem o cálculo do diâmetro, do perímetro e da área do círculo, das áreas do quadrado, do rectângulo e do triângulo, bem como da diagonal do quadrado e da altura do triângulo. Entre as restantes questões há, por exemplo, as que tratam de medir a altura de uma torre, a largura de um rio e o comprimento de uma lança que está em parte enfiada na água; mas há também outras que ensinam a calcular a quantidade de ladrilhos ou pedras necessária para ladrilhar uma sala ou uma parede, ou a determinar quantos lenços redondos se podem fazer com outro lenço redondo maior.

Neste trabalho, Pérez de Moya apenas refere os nomes de Aristóteles e Euclides, com menção ao *Libro 2 de Coelo et Mundo*, ao *Libro 1 posteriorum* e ao *Libro 8 Physicorum*, de Aristóteles, e aos *Livros II e III* dos *Elementos* de Euclides. Sabemos, no entanto, que quando escreveu este pequeno capítulo de geometria, Luca Pacioli não lhe era desconhecido,

[479] Para este trabalho não consultámos o exemplar de 1585 mas sim a reedição de 1673, da *Filosofía secreta donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina provechosa a todos los estúdios*, onde se encontra esta dedicatória.

[480] A obra *Arithmetica practica, y speculativa* ocupa cerca de 765 páginas.

pois ele mesmo o cita noutras partes desta sua *Arithmetica* e no *Compendio dela regla dela cosa*, que compôs em 1558[481].

Nas referências que faz a Euclides, Moya não indica, em geral, o texto utilizado dos *Elementos*, mas o uso de termos árabes, como "helmuyam" (para losango) e "helmuariphe" (para designar qualquer tipo de quadrilátero) leva-nos a admitir que se tratava da versão de Campano, que como se sabe foi impressa pela primeira vez em Veneza, em 1482[482]. Em três situações pontuais é mencionado o nome de Zamberto[483], o que pode significar que Moya também conhecia a tradução dos *Elementos* baseada na versão do texto grego dos treze livros de Euclides, segundo as lições de Theon, que Bartolomeu Zamberto fez imprimir, em Veneza, em 1505[484]. Mas é, também, possível que tivesse consultado uma das edições do volume dos *Elementos* de Euclides, publicado pela primeira vez em Paris, em 1516, e contendo conjuntamente as versões de Campano e de Zamberto[485], pois estas obras foram bastante divulgadas em Espanha, na época[486].

---

[481] [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 62, 342 e 605] e [Juan Pérez de Moya, 1558, p. 113]. [*Cf.* Segunda Parte, 2.2].

[482] Em 2005, H.L.L. Busard editou-a com o título *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, em 2 volumes. O primeiro volume (p. 1-530) é constituído por um Prefácio e duas partes. Na primeira parte o autor introduz o texto indicando muitos detalhes das diferentes versões, manuscritas e impressas, dos *Elementos*, que foram sendo elaboradas. Na segunda parte dá-nos a conhecer os *Elementos* de Euclides. O segundo volume (p. 531-768) é de notas e comentários.

[483] Em [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 43 e 145] onde são referidas as proposições 29 e 40 do livro VII e 35 do Livro VII de Euclides, na versão de Zamberto. O nome de Zamberto (*Zamber*) consta, também numa nota de margem na versão original da *Arithmetica practica, y speculativa* de 1562 [cap. IX, multiplicação], mas Consolación Baranda omitiu-a na sua versão de 1998.

[484] O título da obra começa assim: "Euclidis megaresis philosophi platonicj mathematicarum disiplinarum Janitoris: Habent in hoc volumine quicunque ad mathematicam substantiam aspirant: elementorum libros xiij cum expositione Theonis insignis mathematici. Quibus multa quae deerant ex lectione graeva sumpta addita sunt nec non plurima perversa et praepostere: voluta in Campani interpretatione: ordinata digesta et castigata sunt etc". [Heath, T. L., 1965, I, p. 98, nota 1].

[485] Esta obra foi impressa com o título *Euclidis Megarensis Elementorum libri XV. Campani Galli transalpini in eosdem commentariorum libri XV. Theonis Alexandrini Bartholomæo Zamberto Veneto interprete, in tredecim priores, commentationum libri XIII. Hypsiclis Alexandrini in duos posteriores, eodem Bartholomæo Zamberto Veneto interprete, commentariorum libri II* , por Henrici Stephani. Foi reeditada em Paris, em1537 e em Basileia, em 1546. Ver [Heath, T. L., 1965, I, p. 99, nota 3]. Em 1558 foi editada em Basileia, por Ioannem Heruagium, & Bernhardum Brand, com o título *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum geometricorum libri XV. Cum expositione Theonis in priores XIII à Bartholomæo Zamberto Veneto latinitate donata, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos.*

[486] Delas existem exemplares em diversas bibliotecas espanholas. A título de exemplo, referimos os seguintes: edição de 1505, na Biblioteca de Salamanca, edição de 1537, nas Bibliotecas da Catalunha, Salamanca e Sevilha, edição de 1517, na Biblioteca da Catalunha e edição de 1546, na Biblioteca de Salamanca.

Por outro lado, como Pacioli esteve entre os primeiros estudiosos que "mostraram um interesse de tipo matemático na obra de Euclides"[487], não nos surpreenderia que Moya conhecesse o texto dos *Elementos* de Euclides que Pacioli compôs sobre a versão de Campano, e que foi publicado em Veneza, em 1509[488].

Estranhamos que o nome do autor espanhol Juan Ortega não seja referido por Moya uma vez que a obra deste aritmético espanhol foi muito divulgada no século XVI, em Espanha e até no estrangeiro[489]. Além disso, há semelhanças notórias entre os tipos de problemas geométricos propostos por Moya na *Arithmetica practica, y speculativa* e os apresentados por Ortega na *Sígue se una compusicion de la arte dela arismetica y Juntamente de geometria* [1512].

Euclides, Pacioli e Ortega serão, portanto, pontos de referências que teremos em consideração quando tratarmos com detalhe os primeiros estudos geométricos de Moya.

Como os tópicos de geometria estudados no "Libro quarto" da *Arithmetica practica, y speculatiua* estão incluídos, com uma ou outra ligeira alteração, em sucessivas reimpressões desse trabalho[490], e como esta foi a mais divulgada das obras de Moya, temos razões para acreditar que dos temas de geometria estudados pelo autor, foram os aqui abordados os que ficaram mais conhecidos na sua época[491].

2.2. O *Libro primero* dos *Fragmentos Mathematicos*

A *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* é constituída por dois volumes; como atrás já referimos, o primeiro trata temas de geometria e o segundo diz respeito à astronomia[492]. No nosso trabalho apenas nos ocuparemos do estudo da geometria, embora

---

[487] Os primeiros estudiosos que se dedicaram à obra de Euclides mostrando um interesse de tipo matemático foram Pacioli, Tartaglia e Commandino que, finalmente propuseram um estudo integral dos "Elementi" embora não particularmente concentrado na crítica dos princípios [Simi, A., 2002, p. 19].

[488] No título desta obra lêem-se as seguintes palavras: "Euclidis megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo tralata Que cum antea librariorum detesttanda culpa medis fedissimis adeo…Lucas paciolus theologus insignis: altissima Mathematicae dissiplinarum scientia rarissimus …". Embora se trate de uma obra muito rara [Smith, D. E., I, 1958, p. 98] existe um exemplar na Universidade de Sevilha.

[489] [Rey Pastor, J., 1934, p. 71]. Em nota de rodapé, Rey Pastor refere as seguintes edições da obra de Ortega: León, 1512; Lyon, 1515, Roma, 1515; Mesina, 1522, Sevilla, 1534; Sevilla, 1542; Granada, 1563 e, já no século seguinte, Cambray, 1612. Estas edições vêm acrescentar-se a outras anteriormente mencionadas: Sevilla, 1534; Sevilla, 1537; Sevilla, 1542; Sevilla, 1552.

[490] Veja-se, por exemplo, [Juan Pérez de Moya, 1624, pp. 150-157) e [Juan Pérez de Moya, 1675, pp. 89-93].

[491] Se contabilizarmos apenas as edições de que se conhece a data de impressão, podemos referir quatro edições no século XVI, onze edições no século XVII, dez no século XVIII e uma no século XX.

[492] [*Cf.* Primeira Parte, 1.3].

esporadicamente possamos fazer alguma alusão ao segundo livro, sempre que tal nos pareça importante.

O primeiro volume dos *Fragmentos Mathematicos* é constituído por 271 páginas e está organizado em 44 capítulos, sendo que os primeiros 40 capítulos ocupam cerca de 90 páginas e constituem conhecimentos que Moya considera indispensáveis à compreensão dos restantes 4. Neles se trata, entre outros assuntos, tópicos sobre os triângulos e o círculo, questões de inscrição de polígonos no círculo e do círculo em polígonos, divisão de um segmento em partes, construção da raiz quadrada, problemas de quadratura e de circulatura, divisão de um círculo em partes, determinação de "múltiplos" do círculo, duplicação do cubo. Antes de completar essa parte de conhecimentos básicos, ainda o leitor encontra uma extensa descrição das medidas úteis aos Cosmógrafos e Geómetras.

Nos quatro últimos capítulos são estudadas questões de medida: "altimetria", "planimetria" e "stereometria", terminando a obra com um conjunto de problemas sobre diversos temas tratados em capítulos anteriores, acompanhados de indicações de resolução e das soluções correspondentes. Moya ensina a determinar distâncias, alturas e profundidades, com recurso a diversos instrumentos, a calcular áreas de polígonos, de figuras circulares e de ovais, a obter áreas e volumes de esferas, de cilindros, de pirâmides e de diversos corpos não regulares. Estes conhecimentos são, depois, aplicados à resolução prática de questões do quotidiano como, por exemplo, a medição de campos e herdades, à determinação da quantidade de tecido necessária para realizar uma peça de vestuário, da quantidade de ladrilhos, ou pedras, ou tábuas, necessária para pavimentar um solo, ou construir um telhado, retomando alguns dos temas já tratados no "Libro quarto" da *Arithmetica*, de 1562.

O recurso à régua e ao compasso na resolução geométrica de problemas e a diversidade dos assuntos estudados fazem deste volume dos *Fragmentos Mathematicos* uma obra com características bem diferentes das apresentadas no seu primeiro estudo de geometria. Moya mantém referências a Euclides e a Aristóteles mas acrescenta muitas outras, correspondentes à variedade de interesses que este trabalho contempla. A perspectiva da geometria rigorosa, sistemática e dedutiva dos *Elementos* não se reflecte na ordem com que os assuntos são apresentados nos *Fragmentos Mathematicos*, mas não temos dúvidas que os *Elementos* constituem para Moya o fundamento e garante do rigor das construções práticas efectuadas. O nosso autor aconselha frequentemente a leitura de definições, de

proposições e de demonstrações de Euclides[493]. Moya não diz, geralmente, a edição dos *Elementos* que está a consultar, mas em dois momentos indica o nome de Campano, invocando as proposições *Elementos* I, 32, *Elementos* VI, 2 e *Elementos* VI, 11[494].

O conjunto de autores que Moya refere é revelador dos seus interesses em diversos campos de geometria prática e teórica mostrando-nos que, além dos trabalhos dos antigos geómetras gregos, ele é conhecedor de muito do que matematicamente importante se estava a produzir na sua época.

Moya menciona Arquimedes, Vitrúvio, Ptolomeu e Sacrobosco, "o doutor da esfera"; e cita autores seus contemporâneos como Dürer, Peletier[495], Tartaglia, Forcio[496] (que referiremos por Ringelberg), Cardano, Frísio e Aguilera[497], a quem mais adiante aludiremos. São curiosas as referências às obras de Aristóteles: *Physicos* (quando explica que a linha não pode ser constituída por pontos, nem o corpo por superfícies)[498], *De Cælo & Mundo* (a propósito de saber qual das figuras planas encerra maior área no menor perímetro)[499] e

---

[493] Os livros número um, dois, três, quatro, seis, dez, doze, treze e catorze dos *Elementos*, são os referidos no texto de Moya. Nenhum dos três livros aritméticos é mencionado, nem o livro cinco relativo à teoria das proporções de Eudoxo, sobre grandezas em geral. De todos os livros, é o sexto o mais citado; como se sabe, contém a aplicação à geometria plana, da teoria eudoxiana exposta no livro cinco. No entanto, apenas a definição 1 e as proposições 2, 4, 6, 9, 11, 13 e 17 são referidas. Indicamos, por ordem decrescente de referências feitas por Moya, os seguintes livros de Euclides: seis, um, três, quatro, doze, treze, dois, dez e catorze.

[494] A primeira é referida em [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 23] e as outras duas em [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 61]. Ao contrário do que se verifica no livro quarto da *Arithmetica*, Zamberto e Pacioli não são mencionados nesta edição dos *Fragmentos*.

[495] Peletier (1517-1582) ou Jacob Peletario, como Moya o trata, é citado numa nota de margem, na construção de uma circunferência que passa por três pontos dados [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 53]. Moya não refere o nome da obra que está a consultar mas parece natural pensar que tenha sido o *In Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum libri sex* publicada em Lyon, em 1557.

[496] Joachim Sterck van Ringelberg, também conhecido pelo nome latino Joachim Forcio Ringelberg, nasceu em Antuérpia por volta de 1499 e faleceu ainda na 1ª metade do século XVI, depois de 1531. Estudou latim, dialéctica e física aristotélica, em Louvaina, e, em 1519, matriculou-se na universidade, frequentando as classes do Colégio Trilingue. Estudou grego e matemática e interessou-se pela prática da pintura e da iluminura. Viajou pela Alemanha tendo-se fixado em Paris onde, em 1529, começou uma carreira pedagógica que o levou a Orleães, Bourges, Lyon e Basileia. Em Basileia imprimiu grande parte da sua obra, que inclui temas de dialéctica, retórica e pedagogia, de ética e psicologia, e também temas de aritmética, astronomia, astrologia, óptica, botânica e zoologia, e contactou com Erasmo (Erasmo chegou, mesmo a dedicar-lhe dois poemas). (Notas colhidas em [Pereira, B. F., 2004, pp. 201-213]).

[497] Juan de Aguilera estudou medicina em Salamanca onde em 1538 foi professor de astrologia. Entre 1540 e 1550 esteve em Itália, acompanhando o bispo de Burgos Juan Álvarez de Toledo, onde possivelmente conheceu a obra de Copérnico. Foi também aí que aperfeiçoou e ampliou o seu tratado sobre o astrolábio que publicara em 1528. Regressado a Salamanca ocupou, entre 1550 e 1560 a cátedra de Astrologia, sendo apontado, juntamente com seu irmão, pela introdução da obra Copérnico nas *Constituciones* da Universidade de Salamanca. Notas retiradas de [López Piñero, J. M., 1979, p. 180] e de [Maroto, M. I. V e Piñero, M. E., 2006, p. 271].

[498] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 5].

[499] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 91].

Meteo (sobre a grandeza dos elementos e a razão entre eles)[500]. Moya documenta-se em *Da Medida do circulo*, de Arquimedes, quando trata a questão da quadratura do círculo, da relação entre o volume do cone e do cilindro e da determinação da área da superfície esférica, respectivamente[501]. E quando indica as unidades de medida cita a *Arquitetura*, de Vitrúvio[502].

Para Moya, Ptolomeu foi quem melhor tratou o problema da medição do "perímetro" da Terra[503]; e Dürer foi quem tratou de um modo prático, útil para os artesãos, a questão da duplicação do cubo, razão pela qual aconselha a leitura do quarto livro de *Geometria* de Dürer[504].

2.3. O *Tratado de Geometria*

O *Tratado de Geometria practica, y speculativa* está organizado em quatro "Libros", numerados de I a IV, num total de 225 páginas. Estes "Libros" estão divididos em "capítulos", alguns dos quais são por sua vez organizados em "artículos". Cada "Libro" é precedido por um sumário onde constam os artigos que compõem cada capítulo, com a indicação dos respectivos conteúdos[505]. A obra inclui, no início, uma dedicatória a Don Luys

---

[500] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 243].

[501] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 7, 166, 220, 224, 242 e 262].

[502] Faz alusão ao capítulo primeiro do livro terceiro de *Arquitetura*. Vitrúvio Pollio (n. Itália no princípio do século I a.C e morreu c. 25 a.C). Escreveu o tratado *De Architectura*, obra em dez volumes, onde trata de temas de construção, mecânica, hidráulica e suas aplicações à engenharia. No livbro III, que Moya refere, discute a arquitectura dos templos, tema central do seu interesse e da sua concepção da arquitectura. Estas notas foram colhidas em *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 15, Supplemet I, pp.514-520.

[503] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 237].

[504] Albrecht Dürer escreveu uma Geometria em alemão que foi publicada em Nuremberga, em 1525, com o título *Underweysung der Mesung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, und gantzen corporen*. A obra destinava-se a arquitectos e pintores e é constituida por quatro livros que tratam, entre outros, dos seguintes assuntos: No livro I ensina a descrever diferentes linhas curvas, estudando as cónicas como secções do cone recto. No livro II trata a inscrição de polígonos no círculo e mostra um modo "aproximado" de quadrar o círculo. Depois de ter feito a construção do pentágono regular inscrito no círculo, que se encontra no primeiro livro do Almagesto de Ptolomeu, Dürer ensina a construir um pentágono regular sobre um dado lado. A sua construção tem de especial o facto de se fazer com uma abertura fixa do compasso e, embora seja aproximada, pela sua facilidade foi utilizada pela maior parte dos arquitectos. No livro III trata dos corpos sólidos, de colunas e de pirâmides de diferentes formas, da construção de quadrantes solares e da construção das letras do alfabeto. No quarto livro dá uma descrição dos cinco corpos regulares e de vários outros corpos formados por polígonos regulares, mas não todos semelhantes entre si, como são os treze corpos semi-regulares de Arqumedes. Dá depois várias soluções da duplicação do cubo apresentando por fim um tratado de perspectiva. Notas retiradas de [Chasles, M., 1837, p. 530].

[505] O Libro I tem 63 capítulos (folhas 5 a 91), o Libro II tem 7 capítulos (folhas 91 a 146), o Libro III tem 27 capítulos (folhas 147 a 196) e o Libro IV tem 35 capítulos (folhas 197 a 255).

de la Cueva y Benavides a quem atrás já nos referimos[506] e termina com uma tábua de conteúdos, ordenada alfabeticamente e intitulada: "Tabla de las cosas mas memorables que se contienen en este tratado de Geometria, por la orden del A.B.C.".

Ao escrever o *Tratado de Geometria* Moya procurou proporcionar ao leitor os conhecimentos geométricos teóricos e práticos mais importantes do seu tempo. Por isso, este trabalho, além de mais extenso e variado que o anterior, contém muitas mais referências a textos e a autores conhecidos. Dos *Fragmentos* para esta obra o autor faz uma reordenação dos capítulos acompanhando-a, por vezes, de uma reorganização das matérias. Contudo, numa visão geral, podemos constatar que tudo o que de importante é exposto nos *Fragmentos Mathematicos* está, praticamente, incluído no *Tratado de Geometria*. Por outro lado, há assuntos estudados nesta última obra que não são referidos na anterior. É o que se passa com as questões relativas à construção de polígonos, à determinação do excesso entre um polígono inscrito e circunscrito a um mesmo círculo, da "proporção" (sic) entre um círculo inscrito e circunscrito a "uma figura de muitos lados", para citarmos só alguns exemplos. No que toca à planimetria observamos que, no trabalho de 1573, se incluem considerações sobre a área da superfície de sólidos que não constam do capítulo correspondente da obra de 1568.

Em alguns dos temas tratados, Moya não usa, intencionalmente, a linguagem que lhe parece mais apropriada, prescindindo por vezes do rigor para poder fazer-se compreender, sobretudo pelos leitores menos esclarecidos. Tal acontece quando trata a questão da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado, ou quando explica como se faz a quadratura do círculo. Estando consciente de que esta "falta de rigor" pode ser alvo da crítica dos seus rivais, é ele mesmo quem chama a atenção para o assunto dizendo:

> (…) auisoles que podran luego examinar algunas impropriedades que aquí hallaran, assi como decir enel capitulo diez y nueve del primero li. d Geometria, que muestro saber el diametro de un cuadrado por la costa, en lo qual como sea lo uno incommensurable, con lo otro, es impropriedad usar destre nombre saber. Y mas adelãte digo, que muestro la quadratura del circulo: como no sea posible saber-se precissamente. Mas use destes terminos por decir dello a los principiãtes, lo que humanamente se puede hazer [Juan Pérez de Moya, 1573b, em "El Bachiller Ivan Perez de Moya, al letor"].

Os nomes de Zamberto e Campano são explicitamente mencionados nesta obra[507].

[506] [*Cf.* Primeira Parte, 1.4].

Moya mostra conhecer, agora, outros trabalhos e, sobretudo, uma maior variedade de trabalhos do que aqueles que referiu nos *Fragmentos*. Assim, ao vasto leque de nomes que atrás indicámos, acrescentam-se outros que podem dar uma ideia da diversidade de interesses culturais do nosso autor: Columela (Lúcio Júnio Moderato Columela, séc. I), Juan Gramático (Juan Filopon, séc. VI., um dos intérpretes de Aristóteles), Nicolau de Cusa (1401-1464), Purbáquio (1423-1461), Charles Bovelle (c. 1470-1553)[508], Copérnico (1473-1543) e Stifel (1489-1567). Nicolau de Cusa e Bovelle são mencionados, tal como Arquimedes, Tartaglia e Dürer, a propósito do problema da quadratura do círculo[509]. Moya não diz qual o trabalho de Cusa que consultou[510]; de Sacrobosco cita a *Sphera*[511]. Depois de explicar dum modo muito intuitivo que o círculo é a mais capaz de todas as figuras planas

---

[507] Dos *Elementos* de Euclides Moya cita proposições e definições dos livros um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, onze, doze, treze e catorze, e mesmo os livros cinco, sete e onze, que não eram citados nos *Fragmentos*, são agora mencionados. Do livro V dos *Elementos* são apenas referidas a definição 5 e a proposição 1, e do livro VII só é mencionada a definição 21. Moya não faz agora menção ao livro X. De todos os livros dos *Elementos* o mais citado é o livro I, do qual são referidas trinta e uma proposições, apenas não sendo mencionadas as proposições 2, 7, 13, 16, 17, 22, 24, 25, 30, 35, 39, 40, 41, 43 e 44.

[508] Charles Bovelle nasceu em Saucourt, Picardy, França, por volta de 1470 e morreu em Noyon, também em Picardy, em 1553. O seu trabalho matemático mais importante foi publicado em três línguas: em latim, com o título *Geometricae introductionis libri sex, breviusculis annotationibus explanatii, quibus annectuntur libelli de circuli quadratura, et de cubicatione spherae et introductione in perspectivam* [Paris, 1503]; em francês, como *Livre singulier & utile touchant l'art et practique de Géométrie, composé nouvellement en Françoys, par maistre Charles de Bouelles* [Paris, 1542] que foi várias vezes reeditado e em alemão como *Boeck aenghaende de Conste en de Practycke van Geometrie* [Antwerp, 1547]. Em 1511 Bovelle fez publicar *Géométrie en françoys*, que foi provavelmente o primeiro tratado geométrico impresso em francês. No *Geometricae*, Bovelle estuda o problema da quadratura do círculo, referindo, na introdução deste tema, o nome de Bradwardine. A quadratura do círculo é estudada por Bradwardine no *De geometria speculativa* (1495), obra que provavelmente Bovelle conhecia. Nas considerações que tece sobre o assunto, Bovelle refere que a quadratura de Bradwardine não estava correcta. (A quadratura do círculo de Nicolau de Cusa foi refutada por Regiomontano, mas Bovelle concordou com Cusa e discordou de Regiomontano quando este refutou a quadratura dada por Nicholas de Cusa no *De circuli quadratura* (DSB, II, p. 360). Em http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Bibliographies (Consultado em 3 de Outubro de 2009) podem complementar-se algumas das informações acima e saber-se um pouco da biografia de Bovelle. Em particular, ficámos a saber que a sua obra *Géométrie en françoys* foi editada por Henri Estienne com o título completo *Géométrie en françoys . Icy commence le livre de l'art et science de Geométrie : avecques les figures sur chascune rigle au long declarees par lesquelles en peult entendre et facillement comprendre le dit art et science de Geometrie*, e que viria a ser reeditada em 1998, por J.-M. Nicolle, IREM de Rouen.

[509] [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 69-70].

[510] É possível que se trate da *Docta Ignorantia*, tratado em três volumes, no último dos quais este assunto é estudado Esta obra está incluida em *Nicolai Cusae Cardinalis Opera* publicada pela primeira vez em 1488, em Argentorato. Foi reeditada com o mesmo título por Jacobus Faber Stapulensis [Parisiis, 1514] e com o título *Nicolai de Cusa Opera* [Basilae, 1565], por Henricus Petri [Hopkins, 1987, pp. 122-125].

[511] Referindo especificamente o capítulo 1. Este é um dos 4 capítulos que constituem a obra e os títulos dos temas nele tratados são: "Da revolução do ceo", "Da redondeza do ceo", "Da redondeza da terra", "Da redondeza da agoa", "Que a terra seja centro do mundo", "Que a terra seja ymovel", "Da quantidade da terra" [Pedro Nunes, 1537, ff. 4-12]. De acordo com H. Leitão e L. Martins, o *Tratado da Esfera* de Sacrobosco teve uma extraordinária popularidade e uma enorme longevidade. A obra foi conhecida desde cedo, em Portugal, tendo sido utilizada, tanto no ambiente universitário como noutras instituições ligadas à navegação [Leitão, H. e Martins, L., 2004, p. 25].

com o mesmo perímetro[512] ("a figura redonda es la mas capacíssima") o nosso autor nota que essa é uma das razões que Sacrobosco invoca para justificar que os céus são redondos, encetando aqui uma curiosa discussão filosófica. Stifel é referido a propósito da determinação do lado do dodecaedro quando é conhecido o diâmetro da esfera circunscrita, mas o título da obra não é mencionado[513] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 204].

2.4. A obra *Princípios de Geometria*

A obra *Princípios de Geometria* é constituída por dois "Libros". A falta da primeira folha numerada não nos permite saber como se intitula o primeiro livro, embora possamos afirmar que trata questões diversas de geometria e que ocupa as primeiras 72 folhas da obra. O segundo livro intitula-se "Trata de coisas pertencentes ao género de medida, que dizem Planimetria que pertence ao medir e dividir terras"[514]. Cada um dos livros está organizado em capítulos, alguns (poucos) dos quais estão, por sua vez, divididos em "artículos", que exibem numeração indo-arábica. O primeiro livro tem vinte e oito capítulos e nele só o capitulo XXVII é dividido em artículos, num total de dez. No entanto, podemos observar que, embora os capítulos II e V não se subdividam em "artículos", apresentam em evidência alguns títulos correspondentes a assuntos neles tratados. O segundo livro tem vinte e três capítulos dos quais apenas o XVII está dividido em "artículos" cuja numeração vai de 1 a 6.

Não sabemos[515] se Pérez de Moya incluiu, como prefácio, um índice ou algum tipo de dedicatória ou carta aos seus leitores, nem tão pouco podemos ver como ele inicia o estudo da geometria. Parece-nos, no entanto, plausível que na sua versão integral os *Princípios de Geometria* contivessem uma ou várias dessas particularidades, pois a isso nos habituou o autor nos seus outros trabalhos. Pela leitura da folha nº 2 deste livro, o leitor fica avisado que está perante uma obra cujo conteúdo não é original nem abrangente e que ela é uma parte da sua obra maior, o *Tratado de Geometria.*

---

[512] Este foi o segundo dos trinta e um problemas que Cardano propôs a Tartaglia numa disputa pública no ano de 1547, formulando-o do seguinte modo: "Demonstrar por via Euclidiana sem recurso a Arquimedes nem a Apolónio de Perga que o círculo é mais capaz de todas as figuras com o mesmo perímetro" [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 85v].

[513] Moya limita-se a dizer que se trata do capítulo 32 do livro 2. Mas refere-se, certamente, à *Arithmetica Integra* em cujo livro II o capítulo 32 se intitula "De numeris irrationalibus contractis as corpora. Continens omnia illa, quae liber decimustertius decimusquartus euclidis docente" [Michael Stifel, 1544, ff. 210v-223v].

[514] Sobre este assunto ver [Silva, M. C. e Malet, A., 2008, p. 127].

[515] A falta da primeira folha numerada deste exemplar não nos permite obter estas informações.

Já no título de *Principios de Geometria de que se podran aprovechar los estudiosos de Arts Liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y cõpas en la mano. Con el orden de medir, y dividir tierras*, está claro quais os leitores a quem ele se destina: os que estudam artes liberais e os medidores de terrenos.

Naturalmente por isso, este trabalho tem um conteúdo mais prático do que o anterior *Tratado de Geometria* [1573] e tem um formato reduzido que possibilita um transporte e manuseamento fáceis. Esta última característica, associada à pouca qualidade de impressão[516] e ao pequeno número de figuras que apresenta[517] quando comparada com aquela obra, leva-nos a pensar que se tratava de um livro pouco dispendioso. Não pudemos, no entanto, confirmar as nossas suspeitas, pois o preço está omisso no lugar que lhe é destinado[518].

Em vários momentos do texto é revelada a preocupação em transmitir objectivamente conhecimentos acessíveis, que resolvam questões específicas, o que nem sempre sucede nas obras de geometria de Moya atrás referidas. Deixamos aqui duas observações que testemunham o que acabámos de dizer. A primeira diz respeito à determinação da área de um triângulo, que, como veremos adiante, Pérez de Moya noutras obras resolve por vários processos, mas que aqui apenas dá um para, como diz, não criar confusão ao utilizador:

> Para medir triângulos, ay tantos modos, y primores que dezir que quererlos referir aqui seria confundir los entendimientos de algunos medidores, com los muchos preceptos, los quales por averlos puesto en outro volumen, solo pondre una regla general para medir cualquier triangulo de qualquiera suerte y genero que sea, con solo la noticia de sus lados [Juan Pérez de Moya, 1584, II, Capítulo X].

A segunda está relacionada com a determinação da área de partes de um círculo, questão que ele diz saber resolver, mas que nesta obra decide não incluir por lhe parecer que esse assunto não tem interesse para o medidor de terras. Sobre isso, adianta:

> (…) no pongo aqui, porque no haze al propósito al medidor de tierras, para quien mi intento principal fue escrevir este segundo libro [Juan Pérez de Moya, 1584, II, Capítulo XIII].

---

[516] Sobretudo quando comparamos este exemplar com [Juan Pérez de Moya, 1573b].

[517] No libro primero contámos cerca de 137 figuras, incluindo neste número figuras muito elementares, como segmentos de recta, triângulos, círculos, etc.

[518] Na página de rosto pode ler-se "Tassado a … el pliego", mas não é possível ver o preço do exemplar.

Embora não possamos dizer que o estilo que Moya usou neste trabalho é muito diferente do que adoptou nas suas outras obras matemáticas impressas, há um conjunto de características para as quais gostaríamos de chamar a atenção como: a organização dos conteúdos, a explicação mais detalhada de alguns assuntos e a preocupação com as aplicações da geometria à resolução de problemas práticos. Sobre estes últimos aspectos, podemos observar, por exemplo, que nos *Principios de Geometria* Moya "Trata de angulos" antes de ensinar a "dividir una linea en dos o mas partes", enquanto no *Tratado de Geometria* trata depois, e que nos *Principios de Geometria* faz o estudo dos triângulos em três capítulos (IX, XII e XIII), enquanto no *Tratado de Geometria* apresenta esse estudo num só capítulo (XVI). Por outro lado, nos *Princípios de Geometria* é muito mais cuidadoso nos esclarecimentos que se prendem com a construção de alguns objectos rudimentares de utilidade prática. Por exemplo explica detalhadamente qual o material que deve empregar-se para fazer um utensílio que sirva para desenhar circunferências: "toma una tira de pergamino gruezo de dos dedos larga, y uno de ancho, o mas o menos como te pareciere, o un pedacillo de hoja de Flandres, o outra cosa deste modo …" enquanto no *Tratado de Geometria* é mais conciso[519].

Ao contrário do que se verifica no *Tratado de Geometria* e nos *Fragmentos Mathematicos*, que apresentam no final uma secção de problemas resolvidos[520], onde se aplicam à altimetria, planimetria e estereometria os conceitos geométricos ensinados, nos *Principios de Geometria* as aplicações aparecem imediatamente na sequência dos assuntos correspondentes, mostrando a utilidade imediata dos assuntos tratados.

Tal como nas suas outras obras de geometria, Moya vai mencionando as fontes bibliográficas ao longo do texto. Estas consistem, na maior parte das vezes, no nome de um autor, estando omisso o título do trabalho. Euclides continua a ser o autor mais citado e, embora nem sempre explicite o nome e a versão dos *Elementos* que está a usar, indica sempre o livro e a proposição desta obra de Euclides a que o texto se refere.

O primeiro livro dos *Elementos* de Euclides é o citado mais vezes; mas há, também, referências aos livros III, IV e VI (no primeiro livro dos *Principios de Geometria*) e aos livros II e V (no segundo livro). São frequentes as alusões às proposições 10, 11 e 12, 20, 32, 46 e *penultima*, de *Elementos* I (no primeiro livro). Moya alude a estas proposições no

[519] [Juan Pérez de Moya, 1584, p. 57].

[520] São 31 problemas no primeiro e 28 no segundo.

estudo da divisão de um segmento em duas partes iguais, na construção da perpendicular a uma recta dada, na indicação da relação ente os lados de um triângulo, na construção de um quadrado de lado dado e a propósito do resultado conhecido por teorema de Pitágoras. Por outro lado, Moya invoca ainda *Elementos* III, 1 (corolário) quando determina o diâmetro e o centro de um círculo dado, *Elementos* IV, 5, a propósito da construção de um círculo circunscrito a um triângulo; *Elementos* VI, 2, sobre uma questão envolvendo o conceito de proporção e usa a ultima proposição de *Elementos* VI quando trata da divisão de um ângulo em partes. No segundo livro dos *Princípios de Geometria*, Pérez de Moya refere as proposições 15, 34, 35 e 36, 37 e 37, do livro I dos *Elementos*, respectivamente a propósito de uma questão de ângulos, da divisão do paralelogramo em duas partes iguais, da igualdade das áreas de dois paralelogramos e da igualdade das áreas de dois triângulos. Usa, além disso, a definição de paralelogramo dada em *Elementos* II, 1 e a última proposição de *Elementos* V, quando trata uma questão de proporcionalidade.

Os únicos autores que ainda não constavam da vasta lista dada nos outros trabalhos geométricos de Moya são o do arquitecto e pintor bolonhês Sebastiano Serlio (1475-1554)[521] e o de Pinola [sic][522], que o nosso autor menciona a pretexto de uma questão tratada no âmbito da arquitectura. Por outro lado, muitas das referências indicadas noutras obras suas não são aqui incluídas, naturalmente porque ele não viu utilidade em divulgá-las aos destinatários deste trabalho.

---

[521] Pérez de Moya não menciona o título do trabalho de Serlio que consultou, mas sabe-se que Serlio (1475-1554) é autor de um Tratado de *Architettura*, em cinco volumes, que foi uma das primeiras obras de arquitectura escrita em vernáculo e que exerceu grande influência durante o Renascimento. Os diversos volumes desta obra não apareceram pela ordem que mais tarde foi apresentada. O livro IV foi primeiro publicado em Veneza, em 1537; o livro III, em Veneza, em 1540; os livros I e II foram publicados em Paris, em 1545 e o livro V foi publicado em Paris, em 1547. Os cinco livros foram publicados juntos pela primeira vez em 1584, em Veneza, com o título *Tutte l'Opere d'architettura et prospettiva*. Esta obra foi depois traduzida em várias línguas. Em 1606 foi publicada em Amsterdam numa tradução de mestre Pieter Brueghel, o Velho, que provavelmente conheceu Serlio no ano de 1520. Esta tradução alemã foi, por sua vez, vertida para inglês e editada em 1611. Em 1982 foi publicada pela Dover, sob o título *The five books of Architecture. An Unabridged Reprint of the English Edition of 1611*. Estes apontamentos constam em [Sebastiano Serlio, 1982, Bibliographical Note].

[522] Não conseguimos encontrar nenhum autor renascentista com este nome. Pensamos que pode tratar-se de uma gralha e que Moya queria referir Vignola, nome pelo qual era conhecido Giacomo Barozzi Vignola, autor da obra *Le due regole della prospettiva*, publicada em Roma, em 1583.

3. Principais temas estudados: Introdução e abordagem nas obras geométricas de Moya

Todos os textos de Moya que tratam de geometria começam com uma explicação do significado e objectivos desta ciência e com a apresentação dos entes com que ela trabalha. Estes últimos constituem os conceitos básicos indispensáveis para que se possam entender os assuntos que cada uma dessas obras vai, depois, tratar. Esses princípios estão relacionados com o conteúdo do trabalho e com os objectivos que o autor pretende atingir. Dependem, portanto, directamente do tipo de público ao qual a obra se dirige.

Pudemos ver que Moya, nos três primeiros trabalhos geométricos que compôs, foi sendo cada vez mais exigente, mais abrangente e mais cuidadoso e, por isso, no nosso estudo optamos por seguir a ordem cronológica, uma vez que é a que em nosso entender dá melhor a ideia do desenvolvimento do autor. Embora estejamos certos que foi no *Tratado de Geometria* que o seu trabalho de geometria atingiu o ponto mais alto, decidimos manter a ordem cronológica deixando para o final o estudo de algumas "novidades" introduzidas nos *Princípios de Geometria*.

3.1. *Libro quarto* da *Arithmetica*

3.1.1. Noções elementares sobre figuras planas

Quando Moya estuda, pela primeira vez, algumas questões de geometria, nota que ela é a ciência que trata da medida da terra. Neste trabalho, a resolução de problemas práticos de medição de terrenos é precedida por um pequeno conjunto de definições, que são dadas de modo semelhante ao que se observa nos *Elementos* de Euclides. Moya define ponto, linha, superfície; caracteriza figuras como a circunferência, o círculo, o semicírculo, porções maior e menor de círculo; refere diferentes tipos de figuras rectilíneas. Este tipo de preocupação em começar por introduzir as definições dos entes com que se trabalha nem sempre se observa em trabalhos com as características do que estamos a falar, ou seja, nos quais a geometria consiste apenas numa pequeníssima parte de uma obra mais vasta de um tratado de aritmética. Vários autores de aritméticas publicadas nos finais do século XV e no século XVI tratam a resolução de problemas geométricos como simples aplicação de noções de aritmética, e sem qualquer tipo de abordagem teórica. Fazem-no, aliás, dum modo muito

semelhante ao que era usual em diversos escritos de ábaco[523]. Vemos, por exemplo, que Francés Pellos, no *Compendion de l'Abaco* [1492] diz que os exemplos de geometria que se propõe tratar são aplicação dos conceitos de raiz quadrada e de raiz cúbica já introduzidos em capítulos anteriores da sua obra[524].

Embora de um modo um pouco diferente do de Pellos, também Ventallol na *Pràtica mercantívol* [1521] inicia o capítulo de geometria sem fazer qualquer alusão aos *Elementos* de Euclides. Depois de definir os números de acordo com as *figuras* que os representam, Ventallol enuncia e resolve 57 problemas elementares, que na sua maioria são relativos à medição de terras[525].

Noutras aritméticas publicadas na Península Ibérica a situação é semelhante. Os conteúdos geométricos das obras de Ortega, *Sígue se una compusicion de la arte dela arismetica y Juntamente de Geometria* [1512], e de Nicolas no *Tratado da Pratica Darismetyca* [1519] consistem apenas de regras práticas para a resolução de problemas do quotidiano, semelhantes às dadas nos tratados de ábaco. Nicolas, por exemplo, inicia o capítulo de geometria com as palavras[526] "Seguese alguñas preguntas em pratica geometria" aplicando, nas catorze folhas seguintes, regras aritméticas anteriormente estudadas e o teorema de Pitágoras para resolver quarenta e dois problemas geométricos[527].

Bem diferentes destes são os trabalhos em que a apresentação dos problemas é precedida por uma introdução teórica, com base nos *Elementos* de Euclides, e a sua resolução é feita por recurso à régua e ao compasso. É o que acontece, por exemplo, no *De l'usage de geometrie* [1573] de Peletier, cujos primeiros quinze capítulos são dedicados às definições ─ como a de ponto, linha, superfície e corpo[528] ─ e só em seguida são trabalhados os problemas, que são construções com régua e compasso.

O livro quarto da *Arithmetica practica, y speculativa*, apesar de muito pequeno e elementar, constitui já um compromisso entre os dois tipos de trabalhos geométricos que

---

[523] [Simi, A., 2000, p. 156].

[524] [Francés Pellos, 1492, p. 197].

[525] [Joan Ventallol, 1521]. Estes problemas são numerados de 1 a 57 e apresentados como regras, ocupando os fólios 122r a 132r.

[526] [Gaspar Nicolas, 1519, f. 80r].

[527] [Gaspar Nicolas, 1519, ff. 80r – 94 v].

[528] São as seguintes as definições dadas por Peletier: de ponto, linha, linha recta, linha oblíqua, superfície, superfície plana, ângulo plano (agudo, recto e obtuso), círculo (centro, circunferência, diâmetro) linhas paralelas ou equidistantes, triângulo (ortogónio, oxigónio e ambligónio, equilátero iósceles e escaleno), quadrado, diâmetro do quadrado, paralelogramo, rectângulo, rombo, rombóide e trapézio [Jacques Peletier, 1573, pp. 5-16].

referimos. Por um lado, Moya define os entes com que vai trabalhar mas, por outro, não utiliza a régua e o compasso na resolução de problemas. Há, no modo como a geometria é estudada neste trabalho de Moya, algumas semelhanças com o *Tractatus Geometrie*, incluído na *Summa* [1494] de Pacioli, não obstante ser o trabalho do matemático italiano muito mais detalhado e extenso, incluindo definições e demonstrações do primeiro, segundo e sexto livros dos *Elementos*. Por exemplo, o conceito de ângulo não é referido por Pérez de Moya, mas é dado na *Summa*. Pacioli nota, logo no início do seu *Tractatus Geometrie*, que não se pode praticar correctamente a geometria sem se conhecer os conceitos de ponto, linha, ângulo, superfície e corpo:

> Cinque cose sonno necessarie a sapere a chi vuole essere perfectamente pratico nell' arte di geometria. Delle quali la prima è puncto. Seconda linea. Terza angolo. Quarta superficie. Quinta e ultima corpo. E pero ché noi seguitiamo per la magior parte L. Pisano Io intendo de chiarire che quando si porrá alcuna proposta senza autore quella sia di detto. L. E quando d' altri sia qui sará l' autorità aducta [Luca Pacioli, 1494, f. 1r]

E, se lembrarmos o que atrás está dito, Pérez de Moya começa, precisamente por dar a definição de ponto, linha e superfície, porque são estes os conceitos envolvidos nas questões práticas que propõe; e, naturalmente, omite a definição de corpo porque no seu estudo ela não intervem. Moya define ponto do seguinte modo[529]:

> Puncto es una cosa imaginaria que no occupa lugar, finalmente puncto es una cosa tan pequeña que no se puede dividir en partes [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 304].

Classifica as linhas em recta e curva: a linha recta é o caminho mais curto entre dois pontos; e classifica as superfícies em "plana", "côncava" e "convexa". Define figura[530], indicando o círculo como primeira figura. A definição que dá de círculo engloba a caracterização da circunferência, do centro e do diâmetro. Moya di-lo do seguinte modo:

> Circulo es una figura llana hecha de una línea la qual se dize circunferencia, en el medio de la qual está un puncto que se dize centro del circulo, del qual todas quantas líneas fueren echadas hasta la circunferencia son yguales [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 306].

[529]Campano define ponto do seguinte modo: "Punctus est cuius pars no est" [Busard, H. L. L., 2005, p. 55].

[530] "Figura, en geometría, es una cosa que es contenida de uno o más términos. Término dezimos el fin de cualquiera cosa" [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 276].

A distinção feita entre círculo e circunferência repete-se em todos os passos do texto, sendo por vezes usado o termo "redondo" com o mesmo significado de circular e esférico[531]. O termo "diâmetro" é utilizado com o sentido actual, mas a palavra raio não é introduzida. Pérez de Moya chama "semicírculo" a cada uma das partes iguais em que o diâmetro divide o círculo; e designa por "portio maior" e "portio minor" as duas partes desiguais em que o círculo fica dividido por uma corda que não passa pelo centro[532]. As definições são muitas vezes acompanhadas de figuras elucidativas, como a que apresentamos abaixo (figura 21).

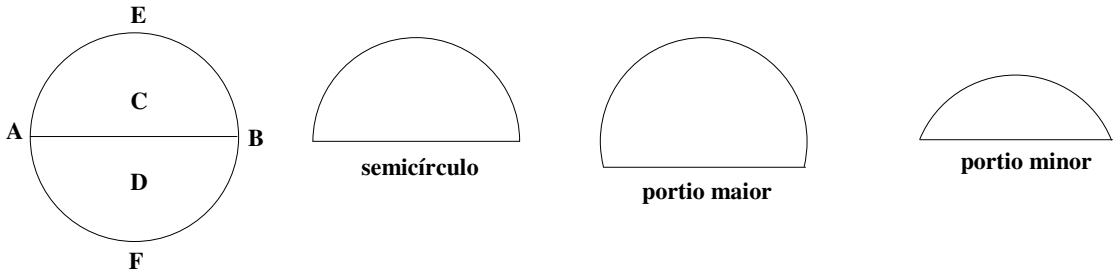


Figura 21: Com as quatro letras A, B, E, F inscritas na primeira figura Moya denota a circunferência; com as letras C, D denota o círculo e os pontos A e B indicam o diâmetro[533] [Juan Pérz de Moya, 1562, pp. 306-307].

Quanto às figuras rectilíneas, consoante o número de lados que as formam, assim as designa por "figuras de 3 lados", por "quadrilaterae", se têm 4 lados e por "multilaterae", se têm mais de 4 lados[534].

Para as figuras de três lados Pérez de Moya indica designações específicas que decorrem do tipo de ângulos que nelas existe: chama-lhes "orthogonias", quando têm um "ângulo" recto, "ambligonias", se têm um ângulo obtuso e em "oxygonias", quando têm três ângulos agudos (figura 22). É curioso observar que, apesar de Pérez de Moya não ter dado o conceito de ângulo, baseia-se nele para a classificação dos triângulos.

[531] Por exemplo, quando diz : "Es una tierra redonda" [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 310].

[532] Estas designações para os segmentos de círculo são as adoptadas por Pacioli na *Summa* [Luca Pacioli, 1494, f. 1r] e por Tartaglia, na tradução vernácula dos *Elementos* de Euclides [Nicolo Tartaglia, 1565, p. 12].

[533] Na figura, substituímos por letras maiúsculas as letras minúsculas utilizadas por Moya. Este será o procedimento que adoptaremos sistematicamente.

[534] Tal como Pacioli [Luca Pacioli, 1494a, f.1r] e Campano de Novara [Busard, H. L. L., 2005, vol I, 56].

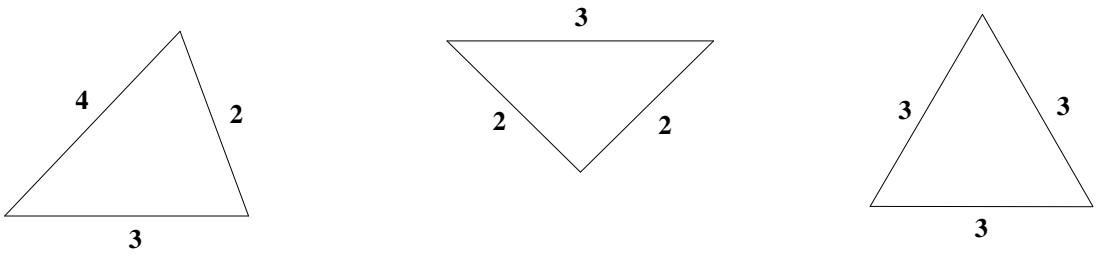


Figura 22: Apresenta uma classificação visual dos triângulos, quanto aos lados, onde Pérez de Moya utiliza números para indicar a igualdade ou desigualdade dos lados [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 308].

No texto, as figuras de quatro lados são classificadas em "quadrado", "tetragonus" ou "paralelogramo", "helmuayn", "semelhante a helmuyan" e "helmuariphe" (figura 23) e correspondem às que hoje designamos por quadrado, rectângulo, losango, paralelogramo e trapézio[535].

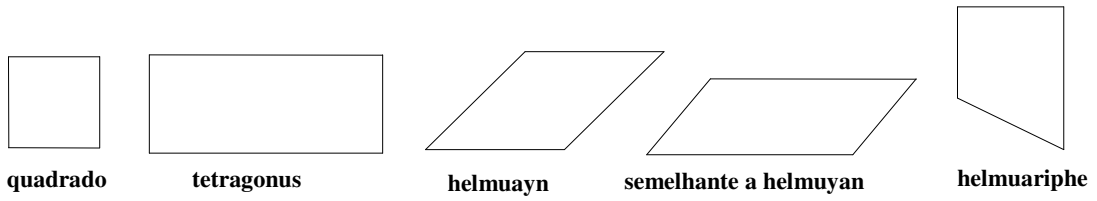


Figura 23: Os termos "helmuayn" e "helmuariphe" usados na versão dos *Elementos* de Campano [Veneza, 1482] são transcrições das equivalentes palavras árabes para designar rombo e tetrágono [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 308-309]

Todas as definições incluídas neste capítulo da *Arithmetica* constam no livro I dos *Elementos* de Euclides[536].

3.1.2. Problemas sobre o círculo e sobre o triângulo

O estudo da geometria na *Arithmetica* inicia-se com dois problemas que envolvem a relação entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. O primeiro estabelece uma regra para saber o diâmetro de uma circunferência cujo perímetro é conhecido; o segundo é o problema inverso deste, e serve de confirmação da regra utilizada no primeiro caso. Em ambos os casos, a explicação recorre à linguagem das proporções e é acompanhada de uma figura (figura 24):

---

[535] "Helmuariph", ou "trapezia", significa "figuras desproporcionadas". O primeiro vocábulo provém de Campano e o segundo de Zamberto.

[536] Os termos usados por Moya são os empregues na versão de Campano. Algumas definições são análogas às dadas por Pacioli na *Summa*, o mesmo acontecendo com alguns dos termos utilizados para designar o mesmo conceito: como, por exemplo, *helmuariphe* [Luca Pacioli, 1494a, ff. 1r-1v].

> Es una tierra redonda, la qual tiene de circunferencia 44 varas, demando: ¿que tendra de diametro? Para saber esta, y sus semejantes, tendras por regla general que la proporcion de la circunferencia a su diametro es tripla sexquiséptima, y al contrario, del diametro a su circunferencia es subtripla sexquiséptima [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 310]:

Do exposto conclui-se que Moya toma a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro igual a $3\frac{1}{7}$ (proporção "tripla sexquiséptima") e, reciprocamente, a razão entre o diâmetro de uma circunferência e o seu perímetro é $\frac{7}{22}$ (proporção "subtripla sexquiséptima"); daqui resulta para π o valor aproximado $3\frac{1}{7}$.

Figura 24: Pérez de Moya mostra nestas figuras que a uma circunferência de diâmetro 14 corresponde o perímetro 44, e reciprocamente [Juan Pérez de Moya, 1562, pp. 310-311].

Pérez de Moya toma $\pi = \frac{22}{7}$, em todas as obras geométricas. Este era o valor corrente na época[537]. Este valor de π que vemos em todas as obras geométricas de Moya encontra-se em vários tratados de aritmética e de geometria prática dos séculos XV e XVI[538]. Além do de Ortega [1512][539], vêmo-lo na *Summa*, de Pacioli[540]; e nos trabalhos dos autores ibéricos, *Tratado da Pratica Darismetyca* [1519], de Gaspar Nicolas[541], e *Pràtica mercantívol* [1521], de Joan Ventallol[542].

---

[537] De acordo com Smith, este valor tornou-se satisfatório depois de Arquimedes (c. 225 a.C.) na proposição 2 de *Da medida do circulo* tomar a razão entre a área de um círculo e o quadrado do seu diâmetro aproximadamente igual a 11:14 [Smith, D. E., 1958, vol. II, p. 307].

[538] No entanto, há registos de outras relações entre o perímetro de uma circunferência e o diâmetro dessa circunferência; por exemplo, no *Libro de Arismética que es dicho alguarismo*, o autor anónimo propõe que se multiplique o diâmetro por 3 1/3 (ou seja, 10/3) para obter o perímetro [Caunedo, B., Córdoba, R., 2000, p. 207].

[539] [Juan de Ortega, 1512, f. 197r].

[540] [Luca Pacioli, 1494a, f. 30r].

[541] [Gaspar Nicolas, 1519, f. 84].

[542] [Joan Ventallol, 1521, f. 123v]. O mesmo valor é adoptado em obras de autores não ibéricos, como Piero della Francesca e Francés Pellos. Piero de la Francesca usa-o no seu *Trattato d'abaco*, dizendo "Sappi che

Olhemos, agora, mais atentamente para as obras de Pérez de Moya, Ortega e Luca Pacioli[543], vemos que eles propõem os seguintes problemas: 1) determinar o perímetro de uma circunferência de diâmetro 14; 2) determinar o diâmetro de uma circunferência de perímetro 44; 3) calcular a área de um círculo de diâmetro conhecido e aplicam procedimentos análogos para os resolver.

Vejamos o exemplo seguinte, dado por Moya e por Ortega, no qual se explora a relação entre o diâmetro e o perímetro de uma circunferência.

Es una tierra redonda, la qual tiene de circunferencia 44 varas, demando: ¿qué tendrá de diametro? Para saber ésta, y sus semejantes, tendrás por regla general que la proporción de la circunferencia a su diámetro es tripla sexquiséptima, y al contrario, del diámetro a su circunferencia es subtripla sexquiséptima [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 310]

Es una tierra redonda, la qual tiene de circunferencia .44. canas demando que quantas canas tendrá por el diametro: y que quantas canas haura en toda toda la tierra: faras ansi: parte las .44. canas que tiene de redondez por tres y un setabo y vendrá ala partición .14. y tantas canas tendrá el diámetro [Juan de Ortega, 1512, ff. 196r-197r].

Apesar de se tratar do mesmo problema, notamos que as indicações de Moya contrastam com as Ortega, pela generalização que proporcionam; elas podem aplicar-se a um círculo de qualquer perímetro, enquanto as de Ortega se restringem ao caso particular em que o perímetro é 44.

As primeiras questões sobre triângulos tratadas por Pérez de Moya estão associadas à determinação de áreas de terrenos. Por isso mesmo, assumem uma feição prática que não requer construções geométricas com régua e compasso. Pérez de Moya indica dois processos para determinar a área de um triângulo, conhecidas as medidas dos lados e recorre a dois problemas para os expor. O primeiro problema consiste em calcular a área de um terreno triangular de lados 7, 10 e 14 "tamaños", respectivamente[544].

---

omni diametro de ciascuno tondo entra nella sua circunferencia tre volte et uno sectimo" [Arrigni, G., 2004, p. 374]. Francés Pellos usa-o no tratado provençal *Compendion de l'Abaco* [Francés Pellos, 1492, p. 205].

[543] [Luca Pacoli, 1494b, f. 30r] diz: "Quando adunque del cerchio fa il diâmetro e vodrai la circonferẽcia quello diametro in $3\frac{1}{7}$ multiplica: Overo quello diametro per 22 multiplica e dividi in 7 e harai quel che e ladetta circonferentia."

[544] [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 312].

O primeiro processo baseia-se na aplicação da proposição *Elementos* II, 13[545] e socorre-se de uma figura, como a figura 25.

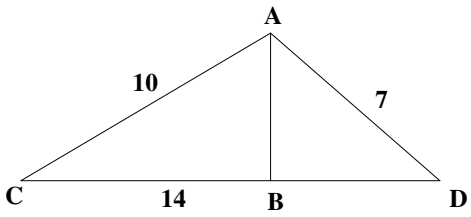


Figura 25: Determinação da área de um triângulo por recurso à altura [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 313].

Consiste numa generalização do teorema de Pitágoras; com base na figura e usando notação actual pode descrever-se, resumidamente, assim: primeiro determinam-se $\overline{BC}$, pela fórmula $\overline{BC} = \frac{\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2}{2\,\overline{CD}}$, supondo $\overline{CD} > \overline{AC} > \overline{AD}$, e $\overline{AB}$ pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo rectângulo [ABD][546] (como facilmente se observa, esta fórmula exprime o teorema de Carnot, cujo enunciado e demonstração já estão dados nos *Elementos* de Euclides). Finalmente, calcula-se a área fazendo o produto da altura $\overline{AB}$ por metade de $\overline{CD}$.

Embora o enunciado refira o caso concreto de um terreno, na resolução esse aspecto prático deixa de se impor, passando o problema a assumir caraterísticas de um exercício abstracto sobre números[547], em que a unidade de comprimento utilizada (o *tamaño*) se perde no decurso da resolução.

O segundo processo permite resolver uma questão semelhante sem ter de determinar a altura. Neste caso, é escolhido um triângulo de lados 26, 28 e 30 e aplicado o teorema de

[545] Que estabelece a seguinte relação: Num triângulo, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto de um deles pela projecção do outro sobre ele.

[546] É claro que o penúltimo passo era desnecessário pois o conhecimento de $\overline{BC}$ permitiria obter imediatamente $\overline{AB}$, por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo [ABC], mas Moya não procede desse modo.

[547] Moya voltará a este problema no primeiro volume da *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 96] apresentando-o com um enunciado abstracto, mas resolvendo-o exactamente pelo mesmo processo. No entanto, aí fará referência à generalização, a todos os triângulos, da regra apresentada e, também, a uma regra que, se estivesse correcta, permitiria abreviar o trabalho de cálculo no caso particular de um triângulo rectângulo.

Heron[548], embora o nome do geómetra grego não seja mencionado[549]. Nenhuma fonte é indicada no decurso da resolução deste problema, mas numa nota de margem, ao lado de uma representação do triângulo que o ilustra, pode ler-se a seguinte menção a Aristóteles: *Geometra no supponit falsa. Aristo. lib. I posteriorum*[550].

O primeiro processo que referimos permite, quando aplicado a um triângulo de lados conhecidos, determinar a medida da projecção de um lado sobre outro e, em última análise, obter a altura do triângulo. Este processo foi frequentemente utilizado em textos de geometria do baixo período Medieval e do princípio do Renascimento[551]. Por outro lado, ambos os processos estão incluídos em diversas obras do século XVI, como o *General Trattato de Numeri, et Misure* [1556-1560], de Nicolo Tartaglia, o *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* [1567], de Pedro Nunes, e o *De l'usage de Geometrie* [1573], de Jacques Peletier[552].

Nicolo Tartaglia e Pedro Nunes fazem, sobre este assunto, um estudo teórico muito pormenorizado, que inclui a demonstração de todos os resultados enunciados, com base nos *Elementos* de Euclides. Ambos aplicam ao triângulo acutângulo de lados 13, 14, 15[553] os dois processos que referimos; no segundo caso, que recorre ao teorema de Heron, Nunes dá dois exemplos: um para o triângulo obtusângulo e outro para o triângulo rectângulo[554].

Nos exemplos que acabámos de ver, Moya não explicita a unidade de medida que utiliza para o cálculo de áreas, mas não temos dúvidas que ele exprime a unidade de área

---

[548] Como é sabido, o teorema de Heron aplicado ao triângulo de lados *a*, *b* e *c*, permite obter a sua área por: $Area\ do\ triângulo = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

[549] Este exemplo é, também, dado por Cristóval de Rojas na sua *Teorica y Practica de Fortificacion*, com uma explicação muito semelhante à de Moya [Cristóval de Rojas, 1598, ff. 54v-55r]. Cristoval de Rojas (c. 1555-1614) foi um engenheiro e tratadista espanhol que fez parte de uma plêiade de artífices como Diego de Velasco de Ávila el Mozo (c. 1538-1592), Hermán Ruiz III (c. 1534-1606), Juan de Oviedo y de la Bandera (1565-1625), Diego López Bueno (c. 1563-1632) e Pedro Sanchéz (1569-1633) a quem a arquitectura sevilhana muito ficou a dever [Marías, F., 1989, p. 409].

[550] A frase citada por Moya foi proferida por Aristóteles e está incluída na sua obra *Metafísica*, em "As hipóteses do geómetra" [Heath, T. L., 1970, p. 219]. A informação dada por Moya, que remete o leitor para o primeiro livro dos *Posteriores Analíticos*, está errada.

[551] [Simi, A., 2000a, p. 204].

[552] Ver [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 6r] e [Pedro Nunes, 1567, f. 246v]. Peletier aplica ambos processos à determinação da área de um triângulo de lados 5, 7 e 10, obtendo para a área a raiz quadrada de 264, cujo valor aproximado toma 16 [Jacques Peletier, 1573, p. 34].

[553] Ver [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 6r], e problema 34 em [Pedro Nunes, 1567, f. 247r].

[554] As quantidades escolhidas para medidas dos lados são: 13, 14, 15, para o triângulo acutângulo; 7, 15, 20, para o obliquângulo e 3, 4, 5, para o rectângulo. Ver problema 37, em [Pedro Nunes, 1950, p. 296-298]. É muito curioso o que Nunes diz sobre os dois primeiros exemplos, quando observa que embora os triângulos sejam isoperímetros, a área do acutângulo é dupla da do obliquângulo.

como o quadrado da unidade linear[555]. Esta prática não estava, ainda, generalizada no século XVI. Ortega, por exemplo, em todos os problemas de determinação de áreas que resolve, apresenta a solução em medidas lineares iguais às que considera para comprimentos[556].

Moya trata seis problemas sobre a medição de terras, que se encontram em diversos tratados de aritmética, compostos antes por outros autores e, por vezes, diferem apenas nos números envolvidos no cálculo. Podemos vê-los, por exemplo, em obras de Ortega[557], de Francés Pellos[558] e de Ventallol[559]. Os restantes problemas versam temas variados, como, medir uma altura, ladrilhar uma sala ou uma parede e calcular quantos lenços redondos é possível fazer com o tecido de um lenço redondo dado. São questões elementares que não estão incluídas nas obras dos três autores que acabámos de citar, mas que foram, naturalmente, muito divulgadas no Renascimento, pois estão tratadas por Leonardo de Pisa na *Practica geometriae*[560] e por Pacioli na *Summa*[561].

3.1.3. Três instrumentos de medida: Vara, espelho e copo com água

A determinação de alturas, profundidades e distâncias por recurso a instrumentos rudimentares de medida faz parte de uma tradição antiga, que foi sendo transmitida ao longo dos séculos e que se encontrava ainda presente em trabalhos práticos impressos no século XVII[562]. Pérez de Moya resolve este tipo de problemas socorrendo-se de uma vara, de um espelho ou de um copo de água e baseando-se em conceitos elementares como a semelhança de triângulos e a regra de três simples. Eles permitem-lhe obter a altura de uma torre, a largura de um rio ou o comprimento de uma lança metida, em parte, dentro de água. Por exemplo, para determinar a altura de uma torre que produz, num certo momento uma

---

[555] Por exemplo, num outro problema refere uma terra quadrada com 80 "estadales quadrados" [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 315].

[556] [Juan de Ortega, 1512, ff. 194v-195r e 196v].

[557] [Juan de Ortega, 1512, ff. 193r-199v] e [Juan de Ortega, 1552, pp. 221-225]. Os problemas são essencialmente os mesmos nestes dois textos, estão propostos pela mesma ordem e são resolvidos pelo mesmo processo; diferindo apenas nos valores numéricos considerados, que, no entanto, são do mesmo tipo.

[558] [Francés Pellos, 1492, pp. 197-221].

[559] [Ventallol, 1521, ff. 121r-133r].

[560] [Arrighi, G., 2004, p. 35].

[561] Ver, por exemplo, [Luca Pacoli, 1494a, Distinctio septima. Capitulum secundum, f. 50v]; Distinctio prima. Capitulum octavum, f. 10r; Distinctio septima. Capitulum secundum, f. 52r; Distinctio tertia. Capitulum primum, f.15v e Distinctio quarta. Capitulum secundum, f. 30r e seguintes].

[562] [Smith, D. E., 1958, II, p. 356].

sombra de 10 varas (ou seja, 40 palmos) ele socorre-se duma vara de 4 palmos de altura e da sombra que ela produz, naquele momento, que é 3 palmos, e usa a razão entre o comprimento da vara e a sombra que ela produz; obtém $53\frac{1}{3}$. Moya observa que, em casos como este, pode também utilizar-se um fio que tenha na ponta um pequeno peso que o obrigue a manter-se esticado[563]. Marcando nesse fio partes iguais, em qualquer número, e prendendo-o com a mão de modo que toque o solo, ele desempenha o mesmo papel da vara. Um procedimento análogo permite, também, obter a medida da sombra de um objecto, a qualquer hora, desde que se conheça o comprimento dessse objecto.

Problemas deste tipo estão incluídos na *Summa*[564]; mas enquanto Moya usa a razão entre a sombra e o objecto que a produz Pacioli recorre à razão entre as sombras dos dois objectos. A vara foi muito utilizada na determinação de alturas, pela facilidade da sua aquisição e pela simplicidade dos conhecimentos que exigia[565].

Dois outros recursos muito úteis para a determinação da altura de um edifício ou do tamanho de um objecto, são um espelho e um copo com água[566]. Nestes casos, é recomendado ao observador que comece por colocar o espelho (ou o copo com água) numa superfície plana a uma qualquer distância do edifício (uma torre, por exemplo) e procure uma posição em que veja o topo da torre reflectido no espelho (ou na água). Depois, que meça a distância que o separa do espelho (ou do copo), e a distância entre o espelho (ou o copo), e a torre e que estabeleça a seguinte proporção:

$$\frac{\text{distância do observador ao espelho}}{\text{distância do solo aos olhos do observador}} = \frac{\text{distância do espelho à torre}}{\text{altura da torre}}$$

Pérez de Moya, di-lo assim:

> Para medir con espejo una torre o outra qualquiera altura pone el espejo en el suelo plano y llegate o apartate del tanto que veas la summidad o lo ultimo de la torre de lo que mides, la

[563] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 131].

[564] A unidade considerada é a braça e a sombra produzida pela torre é 120, o que conduz a uma solução inteira do problema [Luca Pacoli, 1494, f. 50v].

[565] Ainda no século XVII Gaspar Cardozo Sequeira enuncia, no seu *Thesouro de Prudentes,* a seguinte regra geral para resolver problemas de determinação de altura: "Em qualquer hora do dia, tomaremos a medida da sombra da torre, ou doutra qualquer cousa, de que quizermos saber ha altura, & loguo tomaremos hũa vara pequena do comprimento, que quizermos, & fincada no chão, tomaremos a medida de sua sombra, & loguo iremos ha regra de tres, dizendo se tanto mede tanto, tanto quanto me dará". E propõe um exemplo de aplicação que resolve, tal como Pérez de Moya, por uma regra de três que relaciona a sombra com a altura do objecto que a produziu [Gaspar Cardozo Sequeira, 1612, ff. 171v-172r].

[566] Este uso é muito antigo e está já descrito na óptica atribuída a Euclides [Euclides, 1895, pp. 27 a 29].

qual vista mirarás cómo se ha el espacio que ay desde tus pies al espejo con lo que oviere desde el suelo a los ojos, y la proporción misma avra de la distancia que oviere desde el espejo a la cosa que se mide (por la línea recta) a toda el altura de la tal cosa. Lo mismo es mirar en un vaso de agua la summidad de la cosa que quieres medir que en un espejo [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 316].

Na *Summa* está proposto um problema análogo ao de Pérez de Moya[567]. Pacioli resolve-o do mesmo modo que Moya e inclui uma figura como a que mostramos abaixo (figura 26).

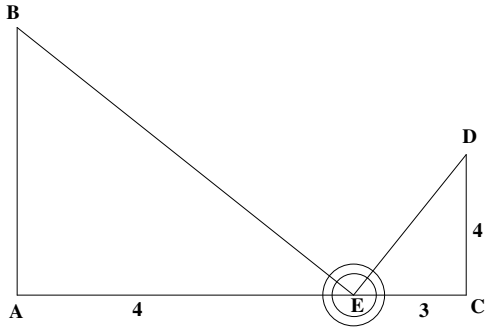


Figura 26: Determinação da altura (AB) de um objecto utilizando um espelho (E) colocado à distância EA do objecto e à distância EC do observador (Adaptação da figura apresentada por Pacioli aos dados do problema proposto por Moya) [Luca Pacioli, 1494a, f. 50 v].

Moya não inclui esta figura no seu trabalho, no entanto ela traduz com perfeição o processo descrito e constitui o modelo da figura 27 apresentada nos *Fragmentos Mathematicos*, quando em 1568 este assunto é revisitado; como se vê a seguir:

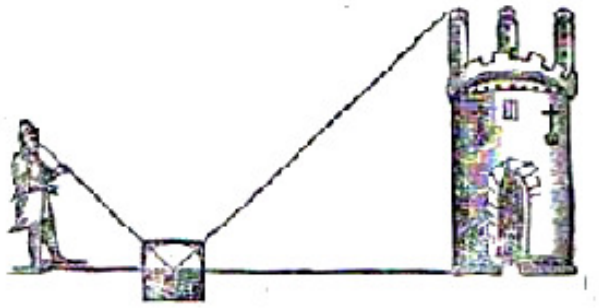


Figura 27: Determinação da altura de uma torre recorrendo a um espelho colocado 24 pés de distância, sabendo que o observador tem 6 pés de altura e está colocado à distância de 8 pés do espelho [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 136].

[567] [Luca Pacioli, 1494a, f. 50 v].

Estas questões de determinação de distância, alturas e profundidades, voltarão a ser estudadas nas obras geométricas que Moya publicou posteriormente, retomando estes problemas e introduzindo novas técnicas e instrumentos para a sua resolução.

3.2. *Libro primero* de *Fragmentos Mathematicos*

3.2.1. Conceitos fundamentais

Em 1568, nos *Fragmentos Mathematicos*, Pérez de Moya revê o conceito de geometria anteriormente dado, ampliando o seu campo de estudo. No entanto, baseado em considerações epistemológicas, confere-lhe ainda como papel primordial o da medição de terras, como aliás a etimologia da palavra deixa entender[568]. Nesta obra, Pérez de Moya divide a geometria em três partes: altimetria, planimetria e estereometria. A altimetria estuda medidas lineares (de distâncias, profundidades e alturas); a planimetria trata de superfície e a estereometria diz respeito ao volume.

O conceito de medir, que Moya utiliza no texto de 1562, só aqui é explicitado; os termos são muito semelhantes aos de Tartaglia, remetendo para a comparação com alguma unidade conhecida, designada por "medida famosa":

> Medir una cosa no es outro, sino saber quãtas medidas famosas contiene la cosa que se mide. Medida famosa dizen a una qualquier medida usada y notoria acerca de algunas o de muchas gentes [Juan Pérez de Moya, 1568, 1]

> Misurare alcuna quantita, non vuol inferir altro, che un voler trovar quante volte si ritrovi i quella alcuna famosa quantita, over qual parte, over quãte parti di detta famosa quantita. Per famose quantita si debbe intendere per quelle specie di misure communamente usitate per le provincie, over citta, in tai misurationi [Nicolo Tartaglia, 1560a, p. 1]

Moya fornece uma grande variedade de medidas, de geometria e de cosmografia. Todas elas são de origem romana e desenvolveram-se a partir do "dedo", que era o espaço ocupado por 4 grãos de cevada colocados de lado[569]. Para evitar confusões provenientes do

---

[568] Moya explica que a palavra grega "Geometria" é um vocábulo composto de "gi, gis", que significa terra, e "metreo", que quer dizer definir ou nivelar e nota que foram os egípcios os inventores da geometria: "Geometria, aun que puede significar mas cosas, propriamente es Arte de medir la tierra, inventada de los Egypcianos (como refiere Strabon)" [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 1].

[569] No anexo 5 são dadas estas unidades de medida e a relação entre elas.

facto de existirem cevadas de muitas qualidades, e consequentemente grãos de tamanho diferente, é apresentada uma figura representando um segmento de recta cuja medida é equivalente ao dedo (usando como unidade o centímetro, o comprimento do dedo é aproximadamente igual a 2 cm). Algumas das medidas dadas constam em obras de autores da antiguidade clássica romana, que Moya cita: Columela, Vitrúvio e Plínio[570].

Os *Fragmentos* (estamos a referir-nos ao primeiro livro) têm uma dimensão e estrutura que nada tem a ver com os rudimentos de geometria dados na *Arithmetica practica, y speculativa*. E, naturalmente, objectivos diferentes como veremos. Moya começa por mencionar cinco petições. As duas primeiras constituem os três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides e a terceira diz respeito à igualdade de todos os ângulos rectos que resumem as operações que é possível realizar com régua e compasso: traçar um segmento de recta unindo dois pontos dados; prolongar indefinidamente um segmento de recta; desenhar uma circunferência, dados o centro e raio. A quarta é a que ficou conhecida por quinto postulado, ou *postulado de Euclides*. A quinta pede que se aceite que duas linhas rectas paralelas não determinam uma superfície. A ordem pela qual as petições são apresentadas e os termos que Moya usa são muito semelhantes aos de Pacioli, como mostram os excertos dos dois textos:

En la primera se pide licẽcia para de un qualquiera punto podamos echar o sacar una línea recta hasta outro qualquiera punto, quan larga o corta quisiermos, y para poder alargar y hazer mayor una cualquiera linea dada. La segunda peticion pide licẽcia para hazer un circulo sobre un punto o centro, ocupando el espacio que nos pareciere. La tercera pide, que concedan q todos los angulos rectos, seã uno igual a otro, o dos yguales a otros dos. &c. (…) La quarta, que si sobre dos lineas cayere otra alguna linea recta, y causare angulos con ella hazia una parte menores que rectos: de necesidad si por parte do los menores angulos se

Da un ponto a un altro una linea si puó menare diritta. Seconda: che sopra uno centro si puó fare uno cerchio di quanto spatio vuoi. Terza: che tutti gli angoli retti in fra loro sonno iguali. Quarta: quando una linea retta caderá sopra .2. linee rette e gli .2. angoli da una parte presi e sieno minori di .2. angoli retti, quelle doi linee senza dubio menate in quella parte si congiogneranno. La quinta: doi linee rette non inchiudano superficie [Luca Pacioli, 1494a, f. 2r].

[570] Moya menciona em especial o quinto livro do *Res Rústica*, de Columela, o terceiro livro de Vitrúvio (capítulo primeiro) e o libro segundo de Plínio (capítulo 23). Os títulos dos trabalhos de Vitrúvio e de Plínio não são mencionados, mas é altamente provável que Moya se estivesse a referir ao *De architectura* e à *Historiae Naturalis*, respectivamente, porque se trata das obras emblemáticas desses autores.

causaren se alargaren: las dos lineas se han de juntar, y al contrario alargãdo las por la otra parte do se causaron angulos mayores, aunq se estiendan en infinito, no se juntaran. La quinta dize, que dos lineas rectas no incluyen ni hazen superficie: porque por alguna o ambas partes quedaran abiertas [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 14].

Além das cinco petições, Pérez de Moya indica dez sentenças comuns ("cõmunes sentencias" ou "concepciones") que são princípios gerais que todos conhecem. E ordena-as do seguinte modo[571]:

1. Quantidades que se igualem a uma terceira são iguais entre si.

2. Se a coisas iguais se somarem quantidades iguais os totais serão iguais.

3. Se de coisas iguais se subtrairem quantidades iguais os restos serão iguais.

4. Se de coisas diferentes se subtrairem quantidades iguais, obtêm-se resultados diferentes.

5. Se a coisas diferentes se somarem quantidades iguais, as somas serão diferentes.

6. Se duas coisas forem cada uma o dobro de uma terceira, as duas coisas serão iguais entre si.

7. Se duas quantidades forem cada uma metade de uma terceira, as duas quantidades serão iguais entre si.

9. Se duas quantidades iguais se compararem a uma terceira do mesmo género, como números com números, linhas com linhas, as duas primeiras quantidades juntas serão maiores, ou menores, ou iguais àquela com que se compararem.

[10.] A grandeza contínua não se pode aumentar infinitamente mas pode diminuir-se infiitamente.

Contrariamente ao que se observa nos *Elementos* de Euclides, em que o texto de cada sentença é apresentado sem nenhuma explicação adicional, aqui Moya recorre a exemplos, geométricos ou numéricos, que esclarecem o seu conteúdo[572]. Para a última sentença comum, é dada uma explicação curiosa que põe em contraste as grandezas contínuas e as

[571] A numeração é indicada por Moya; a última sentença comum não está numerada [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 15-17].

[572] O exemplo dado para a primeira concepção envolve três segmentos e o exemplo dado para a sexta concepção usa números.

grandezas discretas. Os termos "quantidade" e "grandeza", são frequentemente usados com o mesmo significado, embora distinguindo a quantidade ou grandeza contínua (como o segmento de recta, quando considerado relativamente ao seu tamanho), da grandeza ou quantidade discreta (como o número, com o sentido de número natural e, por vezes, de racional ou irracional, mas sempre positivo)[573]. Moya observa que, com as grandezas contínuas acontece o contrário do que sucede com os números, pois enquanto é sempre possível encontrar um número maior do que um número dado mas nem sempre é possível encontrar um número menor do que ele, no que respeita às grandezas contínuas é sempre possível a sua divisão em partes cada vez menores, mas nem sempre é possível obter uma grandeza maior do que a dada. A frase é curiosa e por isso a deixamos aqui:

> Porque se puede dar una linea tan grande, que no aya outra mayor, y no se dara linea por pequeña que sea que no se pueda partiendo la hazer outra menor. Al contrario es en la quantidad discreta, porque se puede dar un numero que no aya outro menor, y no se dara numero por grade que sea que no se pueda dar outro mayor, doblãdole, o augmentandole outra qualquiera proporción [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 16-17].

Moya não refere, a este propósito, Aristóteles, mas o conteúdo desta última sentença comum é uma paráfrase duma passagem do livro III da *Física* de Aristóteles:

> (…) in number there is a limit in the direction of the minimum, while in the direction of increase it may exceed any number assigned (…), but that in the case of magnitudes, on the contrary, it is possible to surpass any magnitude in the direction of smallness, while in the direction of increase there is no infinite magnitude (Aristóteles, *Física,* citado em [Heath, T., 1970, p. 110]).

3.2.2. Da construção e medição de triângulos

Uma das principais diferenças entre o rudimentar trabalho geométrico incluído na *Arithmetica* de 1562 e o livro primeiro de *Fragmentos Mathematicos* é a introdução, nesta segunda obra, de construções com régua e compasso. Sem deixar de abordar o estudo de questões elementares, como as que então tratou, Moya procura agora captar a atenção de um

[573] Sobre a tensão existente entre as noções de número e de grandeza no decurso do século XVI, ver [Malet, A., 2006].

público com necessidades diferentes, que inclui todos os utilizadores da geometria e não apenas os medidores de terrenos.

a. Construção de triângulos

A primeira construção de triângulos que Pérez de Moya ensina a fazer é a de um triângulo em que são conhecidas as medidas dos lados (neste caso, são 7, 6 e 5 "tamaños", respectivamente). Esta construção é uma aplicação da proposição *Elementos* I, 22[574], que Moya realiza tomando os números como representantes das grandezas geométricas. A descrição feita é minuciosa e é ilustrada por uma figura (figura 28) onde se veem os dos arcos que definem o vértice G do triângulo pedido.

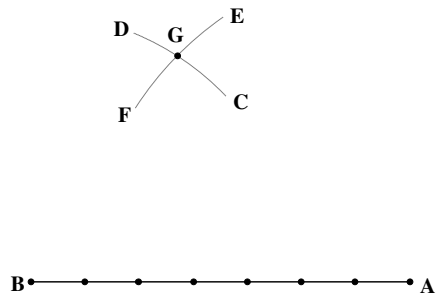


Figura 28: Construção, com régua e compasso, de um triângulo cujos lados têm, respectivamente, 7, 6 e 5 unidades de medida [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 44].

Peletier também indica esta construção e, tal como Moya, aplica-a a um exemplo numérico, sublinhado a visibilidade que o uso dos números dá às quantidades geométricas[575].

A possibilidade da construção do triângulo nas condições dadas está, à partida, garantida, embora Pérez de Moya apenas se refira ao carácter de necessidade para a existência de um triângulo (cada lado ser menor do que a soma dos outros dois)[576]. Esta proposição, que Euclides prova em *Elementos* I, 20, faz parte de um conjunto de conhecimentos que Moya considera indispensáveis ao estudo dos triângulos, onde se

---

[574] Tem o seguinte enunciado: construir um triângulo cujos lados sejam três segmentos de recta, dados; é necessário que dois quaisquer dos segmentos tomados juntos sejam maiores do que o terceiro [Heath, T. L., 1956, I, p. 292]. Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 73]).

[575] O triângulo a que se refere Peletier tem de lados 4, 6 e 8 unidades e ele diz: "nous avons icy declairée par nombres, comme en maniere d'exemple, pour monstrer que les nombres fraternisent quasi par tout avec les quantitez Geometriques: Désqueles ils sont comme les exposans" [Jacques Peletier, 1573, p. 35].

[576] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 37].

incluem, também, as seguintes proposições: classificação dos triângulos quanto aos ângulos, recorrendo às medidas dos lados; determinação das medidas de um ângulo e de dois lados de um triângulo rectângulo, dados a medida de um ângulo e a medida de um lado; determinação das medidas dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo, conhecidas as medidas dos lados.

É importante sublinhar que se nota aqui, pela primeira vez na geometria de Moya, a preocupação com o uso de uma notação que não seja ambígua, para designar um ângulo; a opção coincide com a de Euclides, onde um ângulo é indicado por três letras das quais a do meio corresponde ao vértice.

Conhecidas as medidas dos lados de um triângulo é possível classificar esse triângulo quanto aos ângulos. Em notação simbólica actual, designando por *a*, *b* e *c* as medidas dos lados do triângulo (onde $a < b < c$), Pérez de Moya estabelece as seguintes regras[577]: se $a^2 + b^2 = c^2$, então o triângulo é "orthogonio", ou seja, rectângulo; se $a^2 + b^2 < c^2$, então o triângulo é "oxygonio", ou seja, acutângulo; se $a^2 + b^2 > c^2$, então o triângulo é "ambligonio", ou seja, obtusângulo.

Na determinação das medidas de um ângulo e de dois lados de um triângulo rectângulo, dados a medida de um outro ângulo e de um lado, Moya usa o conceito de seno recto, que a seguir apresentamos, e o conhecimento de que a soma dos ângulos de um triângulo vale "tanto como dos rectos"[578]. O conteúdo das afirmações feitas sobre o seno recto[579] sugere a inspiração na trigonometria de Ptolomeu, apesar de não ser dada nenhuma referência que o permita afirmar com segurança. Pensamos que, mais elucidativo do que o texto é a figura que Moya apresenta e que reproduzimos abaixo (figura 29).

[577] Neste último caso, Moya diz que os três ângulos agudos são iguais, quando terá querido dizer que se trata de três ângulos igualmente agudos.

[578] Moya cita Campano (proposição I, 32) ao referir que "os três ângulos de um triângulo valem tanto como dois rectos" [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 23].

[579] O seno recto é metade da corda do ângulo duplo.

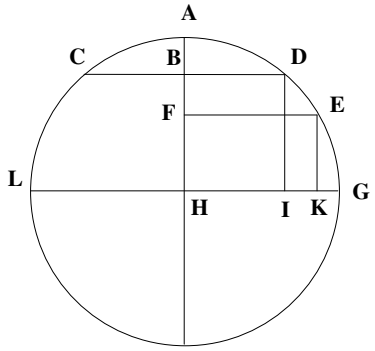


Figura 29: A terminologia de Moya para esta figura é a seguinte CAD é arco; CBD é corda, AB é sagita; GH é seno total; CB é seno recto do pedaço de arco CA e o DI é o seu seno de complemento [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 25].

Suponhamos, agora, que são conhecidas as medidas dos lados de um triângulo rectângulo. Moya determina o seno recto de cada um dos ângulos agudos, o que lhe permite a resolução do triângulo através do astrolábio.

b. Medição de áreas

Antes de tratar este tema, Pérez de Moya explica em que consiste medir uma figura plana, poligonal ou circular, comparando o acto de medir no plano com o de medir na recta:

> De suerte, que de la manera que diximos que medir una linea no es otra cosa, sino saber quãtos palmos o varas o otra medida notoria terna, assi medir una figura plana de geometria no es otra cosa sino ver la superficie o area de tal figura, quantos cuadrados tendra, que cada uno tenga por cada lado un palmo o pie o otra medida de qualquierea cantidad semejante a la que se hiziere menciõ tener algunas la tal figura por lado, o por circunferencia [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 156-157].

Tal como medir um segmento de recta é saber quantas vezes uma determinada unidade linear de medida cabe nesse segmento, medir uma figura plana é ver quantas vezes o quadrado cujo lado é igual à unidade linear considerada cabe nessa figura. Moya nota que, apesar da especificidade inerente a cada figura, qualquer uma se pode reduzir a triângulos e, com base em *Elementos* I, 41[580] que cita, toma para área do triângulo o semiproduto da base pela altura.

[580] Tartaglia enuncia assim a proposição 41 (ou teorema 31) "Se um paralelogramo, e um triangulo forem constituídos numa mesma base, e nas mesmas linhas equidistantes, o paralelogramo convem ser duplo do triângulo" [Nicolo Tartaglia, 1565, p. 35]. Também *Elementos* I, 41 em [Heath, T. L., 1956, I, p. 338].

Relativamente aos triângulos equiláteros, Moya indica dois métodos práticos para determinar a sua área. Quando aplicados a um triângulo de lado *l*, traduzem-se por:

$$A = \frac{13 \times l^2}{30} \qquad \text{e} \qquad A = \frac{433 \times l^2}{1000}$$

Moya observa que alguns autores as utilizam, mas não refere os seus nomes[581]. Sabemos, no entanto, que Finé[582] usa a primeira, e que Cardano usa as duas[583].

Estas regras dão valores aproximados da área do triângulo, a primeira, por excesso, e a segunda, por defeito, mas a segunda conduz a uma melhor aproximação. Moya não faz comentários sobre a relação (exacta) entre a área de um triângulo equilátero e o seu lado e o mesmo acontece com Finé e Cardano. Pedro Nunes é, ao que julgamos saber, o primeiro autor a afirmar e a mostrar que num triângulo equilátero cujos lados são números (isto é, números racionais) a área não pode ser número (racional), pois a altura e o lado são incomensuráveis[584]. Talvez esta questão da incomensurabilidade tenha contribuído para que alguns autores indicassem regras particulares que permitem, embora apenas aproximadamente, resolver problemas práticos.

3.2.3. Divisão de um segmento em partes iguais

A divisão de um segmento em partes é um assunto que Moya trata em todas as suas obras geométricas que envolvem construções. Em 1568, nos *Fragmentos Mathematicos*, mostra diversos modos de dividir um segmento em partes iguais e, em 1573, no *Tratado de*

---

[581] Embora seja de admitir que um desses autores fosse Cardano pois no "articulo" em que "muestra medir áreas y figuras lineales que tuvieren mas de quatro lados, hasta el quindecagono", que aparece um pouco mais à frente nos *Fragmentos*, Moya diz: "Toda la mayor parte deste articulo saque de Cardano" [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 166].

[582] Finé diz: "Un triãgolo di angoli acuti, e di lati uguale: se tu vorrai ritrovare la sua quantità. Multiplica uno de'lati ugali per se stesso, e quel numero che te viene moltiplicalo per 13, e quel che di ciò ti viene partilo per 30; imperoche il numero quante volte, che ti si genererà per tal partire, ti dará lo spazzo di esso triangolo" [Oronce Finé, 1587, "Della geometria", ff. 50v-51r]. Finé nasceu na cidade de Briançon, na região do Delfinado e foi "lecteur royal" de matemáticas, naquele que viria a ser o Collège Royal, em Paris, desde 1530 até 1555, ano da sua morte. A sua bibliografia é variada, abarcando publicações originais de matemática, cosmografia, gnomónica, geografia e tecnologia de alguns instrumentos científicos de observação e mensuração, bem como a reedição de escritos de outros autores [Carvalho, J., 1560, p. VI].

[583] [Girolamo Cardano, 1663, p. 117].

[584] Duas grandezas dizem-se incomensuráveis quando não têm uma medida comum. Nunes diz: "Y sabe, que en todo triângulo equilatero, si los lados son números, la área no podra ser numero y en esto se engaño Oroncio Fineo" [Pedro Nunes, 1567, f. 248r].

Geometria, complementa este estudo com a divisão de um segmento em partes obedecendo a certas proporções. Este segundo tema será tratado mais adiante[585].

Na divisão de um segmento é importante saber construir uma recta paralela a uma recta dada. A construção é fácil e Moya baseia-se numa figura como a que apresentamos (figura 30) para a descrever. O procedimento que Moya utiliza para determinar uma paralela ao segmento [AB] pode ser assim descrito: fixe-se uma abertura qualquer do compasso; coloque-se a ponta seca do compasso no extremo A e trace-se um arco de circunferência que intersecta [AB] em C (na figura, esse arco contém o arco EF). Em seguida, repita-se a operação colocando o pé do compasso em C e obtendo o arco GH. Marque-se o ponto de intersecção dos arcos referidos. Coloque-se agora a ponta seca do compasso em B e trace-se o arco de circunferência que contém IM e intersecta [AB] em D; repita-se a operação obtendo o arco JK. Marque-se o pnto de intersecção destes dois arcos. A recta definida pelos pontos de intersecção obtidos é paralela a [AB].

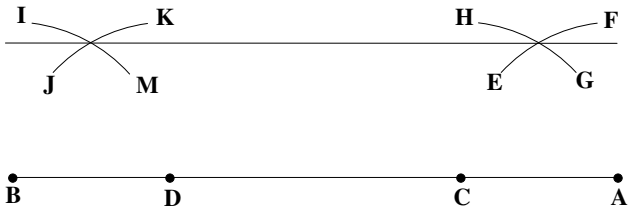


Figura 30: Determinação de uma recta ("linea") paralela a uma recta dada[586] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 23].

Na divisão de um segmento em partes iguais, Moya refere o livro sexto dos *Elementos* e o nome de Tartaglia, indicando quatro processos para efectuar a divisão rigorosa com recurso à régua e ao compasso; isto mostra a importância prática deste assunto. Dos quatro processos explicados por Moya, o segundo e o terceiro são tirados de Tartaglia[587] e suscitaram-nos tanta curiosidade que os apresentamos aqui.

Primeiro processo.

Este processo recorre, além da régua e do compasso, a uma outra "ferramenta": uma folha de papel em que estão desenhadas linhas paralelas equidistantes em número superior ao número de partes em que se pretende dividir o segmento dado. No exemplo em causa,

---

[585] [*Cf.* Terceira Parte, 3.3.3].

[586] Optamos por apresentar a figura incluída no *Tratado de Geometria* pois a construção dada nos *Fragmentos Mathematicos* tem, na cópia que possuímos, má qualidade.

[587] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 61]. Ver [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 22v-23v].

Moya propõe-se dividir o segmento [DE] (figura 31) em 7 partes iguais. O procedimento, que se baseia em *Elementos* VI, 2[588], consiste em transportar com o compasso a medida do segmento [DE] para o feixe de segmentos paralelos, fazendo coincidir uma das extremidades com um dos segmentos e levando a outra extremidade a coincidir com o oitavo segmento, contado a partir do inicial, inclusive. Moya explica-o do seguinte modo:

> Hechas estas lineas, suppongo que quieres dividir la linea DE en siete partes yguales, abriras el compas tanta distancia, quanta la dicha linea que quisieres dividir fuere larga. Luego pon el un pie del copas en el punto A y el outro en la parte dela ocava linea que venga justo, y suppongo que vino bien el punto C. Pues echa agora una linea recta desde el punto A hasta el punto C y será semejante a la linea DE que te dieron, y assi quedara dividida con las lineas paralelas que la atraviessan en 7 partes yguales [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 55].

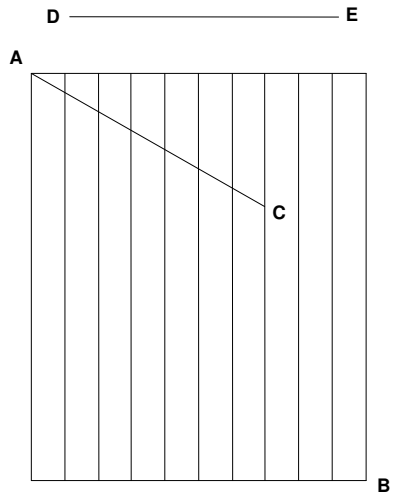


Figura 31: Divisão de um segmento em 7 partes iguais. Figura elaborada de acordo com a sugestão apresentada em [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 54].

Ringelberg, na sua obra *Ad mathematicen*[589] descreve este processo, tão simples como prático. Embora Moya não cite este autor a respeito da divisão de um segmento em partes, é certo que a obra deste humanista e matemático flamengo não lhe era desconhecida, pois refere-se-lhe a propósito do estudo de questões de quadratura[590]. Ringelberg explica

[588] O enunciado desta proposição é o seguinte: se um segmento de recta desenhado paralelamente a um dos lados de um triângulo cortará os [outros] lados do triângulo proporcionalmente; e se os lados de um triângulo forem cortados proporcionalmente, o segmento que une os pontos de secção será paralelo ao lado restante [Heath, T. L., 1956, II, p. 194]. Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 204]).

[589] No capítulo intitulado "Dvo Modi Partiendi Lineam" [Joachim Forcio Ringelberg, 1531, pp. 481- 482].

[590] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 71 e 77].

dois modos de dividir em partes um segmento, dos quais o primeiro é muito análogo ao que apresentámos e é acompanhado de uma figura (figura 32) sugestiva da divisão de três segmentos em três, quatro e seis partes iguais, respectivamente.

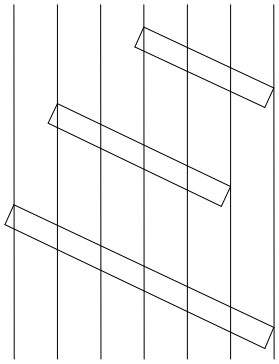


Figura 32: Mostra a divisão de segmentos em 3, 4 e 6 partes iguais [Joachim Forcio Ringelberg, 1531, p. 481].

Segundo e terceiro processos.

Estes processos são mais sofisticados que o anterior. Utilizam a régua e o compasso, mas é imposta uma condição que dificulta a resolução geométrica do problema: o compasso tem uma abertura fixada, que não pode ser modificada[591]. O exemplo indicado consiste na divisão de um segmento em 5 e em 4 partes iguais, respectivamente, supondo que, no primeiro caso a abertura do compasso é menor que o comprimento do segmento que se pretende dividir e que no segundo caso é maior. Os passos dados, que se apoiam numa figura (figura 33), são análogos em ambos os casos; por isso apenas detalhamos um deles. Tratamos o problema que consiste em dividir o segmento [AB] em cinco partes iguais, supondo que a abertura do compasso é igual a $\overline{OA}$, com $\overline{OA} < \overline{AB}$. Moya propõe que se construam duas circunferências de raio $\overline{OA}$, uma de centro A e a outra de centro B. Estas circunferências intersectam AB em E e G, respectivamente. Com centro nestes pontos e com a mesma abertura $\overline{OA}$, marcam-se, nas circunferências obtidas os pontos F e H, como na figura. Em seguida, constroem-se as semi-rectas $\dot{A}F$ e $\dot{B}H$, e marca-se em cada uma delas

[591] A condição de manter fixa a abertura do compasso na resolução de um problema aumenta substancialmente a dificuldade. De acordo com Libri, Leonardo da Vinci foi quem primeiro se ocupou deste tipo especial de problemas, mas os seus trabalhos permaneceram incógnitos. Cardano e Ferrari também trataram este assunto, mas as pesquisas de Ferrari nunca apareceram e Cardano apenas deu indicações resumidas sem demonstração [Libri, G., 1838-1841, III, pp. 121-123]. Em 1553, Giovanni Battista Benedetti (Veneza, 1530 – Turim, 1590) publica em Veneza a obra intitulada *De resolutio omnium Euclides problematum aliorumque (…) una tantummodo circuli data apertura* dedicada à resolução de problemas de Euclides com uma só abertura do compasso.

quatro segmentos, com a abertura do compasso fixada. Os últimos destes segmentos têm extremidade K e I, respectivamente. Finalmente, unindo K a H e traçando paralelas por cada um dos extremos dos segmentos anteriores, fica [AB] dividido em cinco partes iguais.

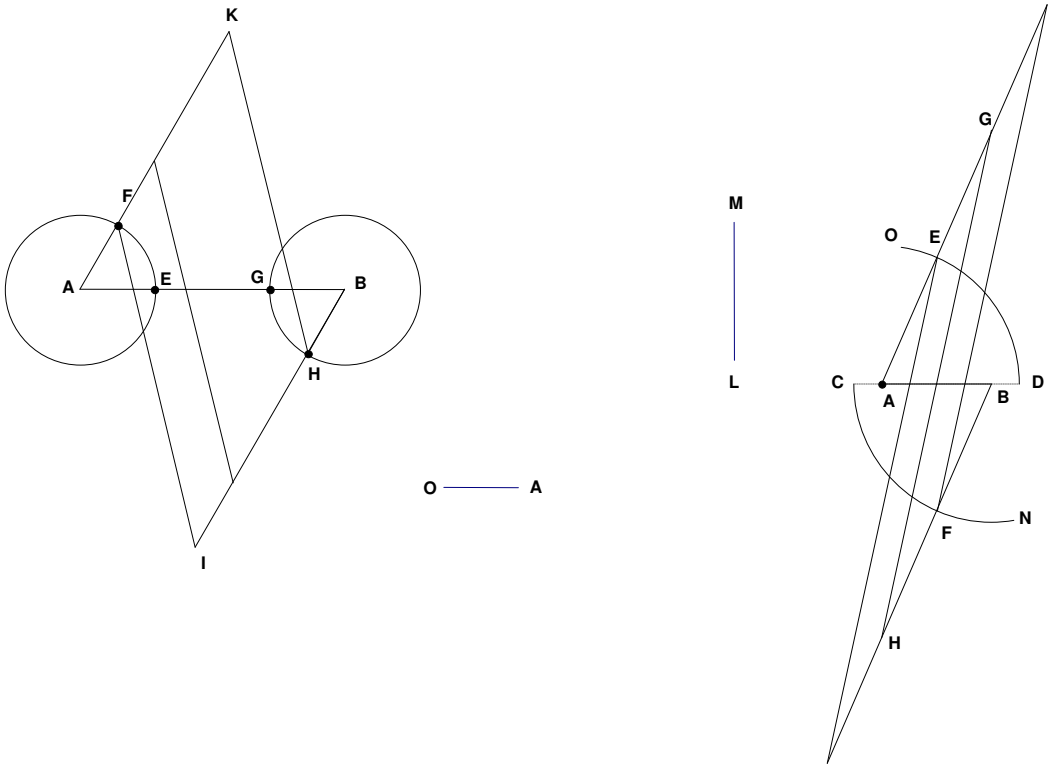


Figura 33: À esquerda, a divisão do segmento [AB] em 5 partes iguais, supondo a abertura do compasso menor do que o comprimento do segmento [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 57]. À direita, a divisão do segmento [AB] em 4 partes iguais, supondo que a abertura do compasso é maior do que o comprimento do segmento [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 60].

Moya sublinha que estes dois processos são dados por Tartaglia, mas não dá qualquer referência que nos leve até à obra que consultou[592]. Como pudemos confirmar, na "Quinta Parte" do *General Trattato* Tartaglia resolve estas questões, mas a figura que apresenta para o primeiro caso (figura 34) é um pouco diferente da que Moya faz; e tem, sobre a de Moya, a vantagem de tornar mais fácil a aplicação de *Elementos* VI, 2, quando se pretende dar uma prova geométrica do procedimento utilizado[593]. No entanto, Tartaglia observa que, quando a

[592] Quando trata deste assunto no *Tratado de Geometria* [1573], ao referir-se ao nome de Tartaglia, Moya insere uma nota de margem, pouco clara, em que parece ler-se "li I c 12 paret 5 prop 5" mas não conseguimos relacionar esta referência com as obras de Tartaglia de que dispomos.

[593] [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 22v-23v].

prova não é requerida, basta que se tomem as quatro divisões de AN em vez de cinco[594]. Ora, é precisamente isso que se verifica na construção de Moya que pode ter lido cuidadosamente o conteúdo da obra de Tartaglia sobre este assunto, optando por apresentar um processo mais simples e prático.

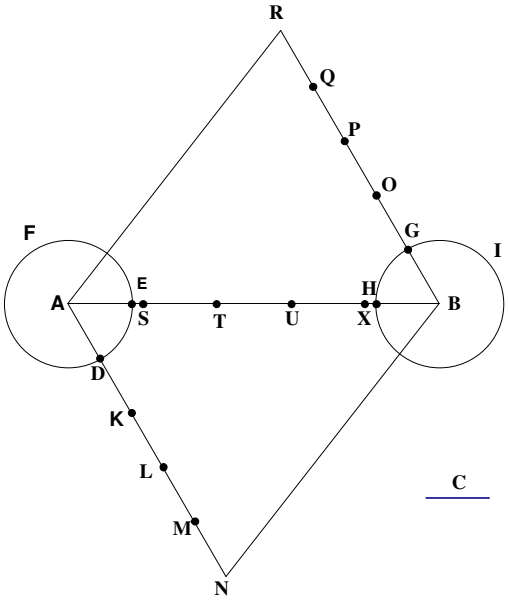


Figura 34: Construção de Tartaglia da divisão de um segmento em 5 partes iguais, tendo o compasso abertura fixa menor do que o segmento que se quer dividir [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 22v].

A resolução do problema da divisão de um segmento em partes iguais, tendo o compasso abertura fixada, constituiu um verdadeiro desafio no início do século XVI. É o próprio Tartaglia quem conta que o propôs, de viva voz, a Ludovico Ferrari, na época das suas disputas, com *cartelli*, com Cardano e o seu criado Ferrari, e este não conseguiu resolvê-lo[595].

Quarto processo.

---

[594] "Anchora nota non volendo far la dimostratione geometrica, bastaria a signar solamente le quattro parti. ad. dk. kl. & lm & similmente le quattro .bg.go.op. & .pq. comme da te puoi considerare , perche non ti accadera a tirar ele due linee .ar.&..nb. ma si tirano per fa la dimostratione" [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 22r- 22v].

[595] Tartaglia diz que estava, nessa altura em Milão e que a sua proposta foi presenciada por uma personalidade idónea da cidade: o então capitão de justiça, Nicolo Secco. Ferrari não conseguiu resolver o problema a não ser por um processo já há meses conhecido e utilizado na resolução de algumas das 30 questões do mesmo tipo, que Tartaglia lhe havia anteriormente proposto. Tartaglia teve, por isso, oportunidade de mostrar publicamente o modo de o resolver, no que foi muito elogiado por Nicolo Secco.Tartaglia conta ainda que, dois dias depois de ter mostrado este processo de resolução, Nicolo Secco lhe disse que dera o problema a resolver a um grande arquitecto que estava em Milão e que este lhe respondera que o problema era impossível [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 22r- 22v].

Baseia-se em *Elementos* VI, 2 e VI, 11[596], e é explicado no caso da divisão de um segmento em onze partes iguais. A construção, acompanhada da figura 35, é descrita do seguinte modo: seja [AB] o segmento que se pretende dividir em onze partes. Trace-se uma semirecta $\dot{AC}$ que faça com [AB] um ângulo que não seja raso. Marque-se, em $\dot{AC}$, a partir de A, onze segmentos de igual comprimento, obtendo D. Una-se B a D e tracem-se paralelas a [BD] por cada um dos pontos marcados em $\dot{AC}$. A intersecção dessas paralelas com [AB] divide [AB] em onze partes iguais.

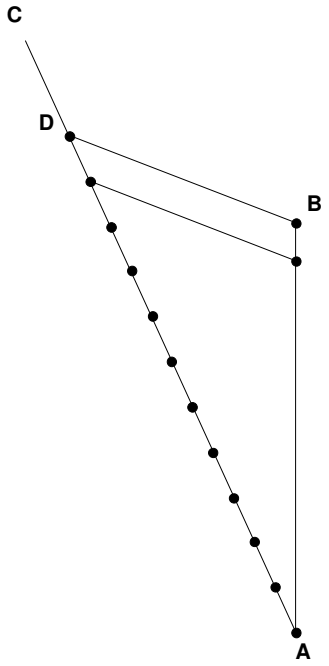


Figura 35: Divisão de um segmento em onze partes iguais [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 61-62].

.

Este procedimento está descrito por Peletier precisamente do mesmo modo e é aplicado ao mesmo exemplo que Moya escolheu [Jacques Peletier, 1573, p. 22].

No *Tratado de Geometria* é ainda indicado um processo curioso e breve de dividir um segmento nas partes que se quiser, com abertura qualquer do compasso, que Moya possivelmente copiou de Ringelberg pois tanto a descrição do procedimento como a figura que o ilustra (figura 36) são semelhantes.

[596] Que Moya diz ser na versão de Campano [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 61-62].

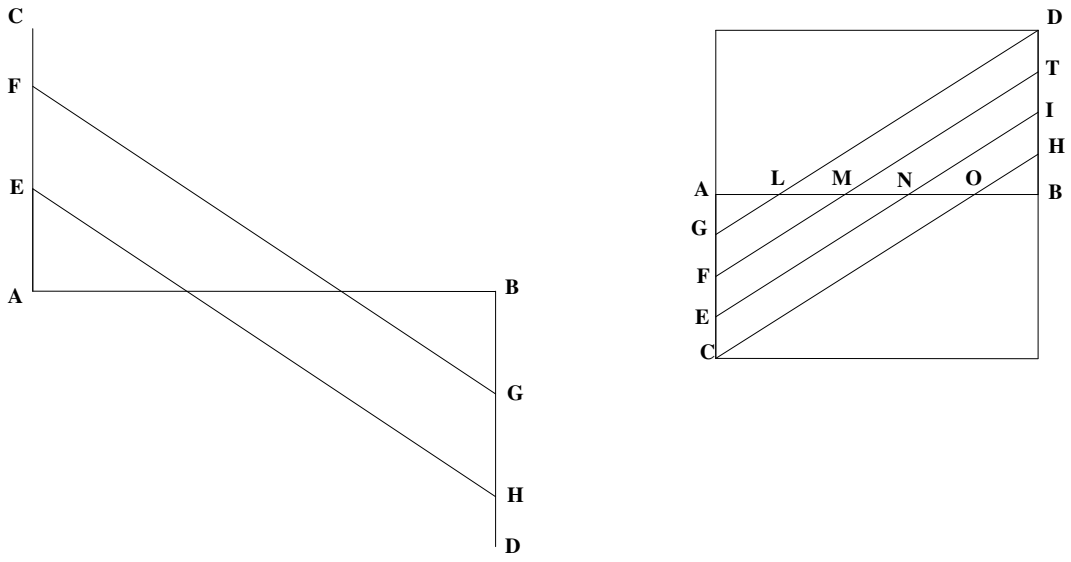


Figura 36: À esquerda: divisão de um segmento em 3 partes iguais, como é dada por Moya em [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 26]. À direita: divisão de um segmento em 5 partes iguais, como é dada por Ringelberg em [Joachim Forcio Ringelberg, 1531, pp. 482-483].

Bovelle, que Pérez de Moya também cita a este propósito, trata da divisão de um segmento em partes iguais, indicando apenas este último processo, ao qual associa as duas figuras que acabámos de apresentar[597].

3.2.4. Sobre questões de transformação de figuras planas: A quadratura do círculo

Uma grande parte da resolução, com régua e compasso, de problemas de divisão, de duplicação e de quadratura de figuras usa a construção de uma recta perpendicular a um segmento; mas a importância desta ferramenta é muito mais abrangente pois ela é utilizada, por exemplo, na divisão de um segmento em partes proporcionais e na inscrição e circunscrição entre polígonos e círculos, que têm aplicações práticas muito diversificadas[598].

Tanto nos *Fragmentos Mathematicos* como no *Tratado de Geometria* Moya dá a construção da recta perpendicular a um segmento, passando por um ponto[599]. No primeiro texto trata-a no caso particular do ponto médio do segmento; no segundo explora todas as

[597] [Charles Bovelle, 1557, ff. 6v-7r].

[598] Uma das utilidades que Moya lhe atribui é a da construção de lâminas de astrolábio, embora a refira também em operações matemáticas, que não especifica [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 45].

[599] Peletier também trata o assunto [Jacques Peletier, 1573, pp. 16-17].

possibilidades, incluindo aquela em que o ponto é um extremo do segmento[600], utilizando procedimentos e comentários muito semelhantes aos dados no *General Trattato*[601]. É certo que se trata de construções muito simples mas, como Tartaglia nota, embora sejam simples, não eram correntemente utilizadas pelos "simplice natural", que se socorriam de um esquadro material igual ao que usavam, por exemplo, os construtores, os desenhadores e outros artífices[602]. Talvez tenham sido motivos desta ordem que levaram Pérez de Moya a explorar o conceito de perpendicularidade de dois modos distintos: por um lado, com o rigor científico que justifica o recurso aos *Elementos* de Euclides (proposição *Elementos* I, 11[603]) e, por outro, enveredando por uma abordagem completamente intuitiva e prática como a que usa para explicar a determinação de uma linha perpendicular a uma parede[604]. Neste último caso, a sua proposta pode explicar-se assim: toma-se uma régua lisa, traça-se (ao longo da régua e 'paralelamente' aos bordos) um segmento e pendura-se, no meio um fio-de-prumo. Assentando a régua na parede, quando o fio-de-prumo estiver sobreposto à linha, a régua terá direcção perpendicular ao chão.

a. Converter um quadrado num triângulo equilátero com a mesma área e vice-versa

A transformação de uma forma noutra equivalente é um assunto tratado nos *Elementos* de Euclides. A questão da construção, com régua e compasso, de uma figura poligonal ou circular noutra com a mesma área de outra foi um tema muito explorado no Renascimento, em particular pelo interesse que continuava suscitar o problema da quadratura do círculo, que constituía um dos grandes problemas da Antiguidade.

Sendo o triângulo a mais simples das figuras rectilíneas é natural que lhe tenha sido dada primazia quando se tratavam questões de medição de áreas. Peletier chama a atenção para este aspecto quando diz:

> Pour entendre plus clairement l'intention de ce Probleme, faut sçavoir que le Triãgle est comme regle et addresse de toutes dimensions: d'autant que c'est le plus simple de tous les

---

[600] [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 23-24].

[601] [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 3r-4v].

[602] [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 3v].

[603] Esta proposição diz o seguinte: desenhar uma linha recta que faça ângulos rectos com uma linha recta dada, num ponto dado da recta [Heath, T. L., 1956, I, p. 269].

[604] A linguagem de Moya é pouco clara. Entendemos que a questão consiste em obter a direcção que é perpendicular ao solo.

> Rectilignes. Et pource, est il le plus convenable pour mesurer toutes sortes de grandeurs [Jacques Peletier, 1573, p. 47].

Isto justifica a necessidade de saber transformar num triângulo qualquer figura poligonal e a importância de que este assunto se revestiu nos trabalhos de geometria do Renascimento.

Pérez de Moya propõe um procedimento aproximado por defeito ("no es precisa, mas lo menos es poco"), que permite obter, com facilidade, um triângulo equilátero com área aproximada à de um quadrado (figura 37).

> Si de un quadrado quisieres hazer un triangulo equilatero ygual al tal quadrado, divide un lado del quadrado en quatro partes yguales, y añade le a cada parte del mismo lado una parte destas 4. y todas estas seis partes será el lado del triangulo [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 79].

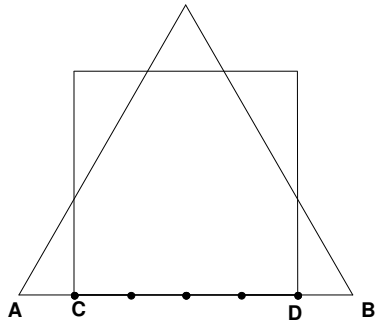


Figura 37: Construção (aproximada) de um triângulo com a mesma área de um quadrado dado [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 79-80].

Pérez de Moya não mostra que se trata de uma construção aproximada embora, como veremos a seguir, a prova seja simples. Seja $l = \overline{\mathrm{CD}}$ o comprimento do lado do quadrado e $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{DB}} = \frac{1}{4}l$. Então $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}l$ e a altura do triângulo é $\frac{3\sqrt{3}}{4}l$. Donde, a área do triângulo é $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ da área do quadrado. Como $9\sqrt{3} < 16$, a área do triângulo é aproximada por defeito da área do quadrado.

Para obter um quadrado com área igual à de um triângulo equilátero dado, Pérez de Moya representa a altura relativa a um dos lados do triângulo e toma o seu ponto médio, D (figura 38). O lado do quadrado tem comprimento igual ao do segmento que une D a um dos vértices do triângulo.

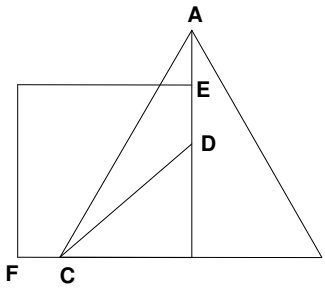


Figura 38: Construção de um quadrado com a mesma área de um triângulo equilátero [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 82-83].

Esta construção também é aproximada, mas conduz a uma relação entre as áreas do quadrado e do triângulo equilátero diferente da anterior[605].

Nos *Fragmentos Mathematicos* Moya não inclui a construção exacta, com régua e compasso, que permite determinar um quadrado com área igual à de um triângulo dado, mas não duvidamos que o sabia fazer, pois explica como se pode obter um rectângulo com área igual à de um triângulo dado[606] e como se converte um rectângulo num quadrado com a mesma área[607].

b. Quadrar o círculo

A possibilidade de construir um quadrado de área igual à de um círculo dado, recorrendo apenas à régua e ao compasso, constitui, juntamente com a questão da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, um dos famosos problemas clássicos da matemática grega. Este problema que, como se sabe, não tem solução geométrica, atraiu a atenção de matemáticos, artistas e filósofos. Um dos primeiros autores renascentistas a estudar a sua resolução foi o cardeal alemão Nicolau de Cusa. Apesar de reputado como um grande lógico, cometeu falácias na quadratura do círculo que foram apontadas por Regiomontano[608]. Entre os quadradores de renome do século XV contam-se outras figuras importantes da cultura como, por exemplo, Alberti, Dürer e Leonardo da Vinci[609].

---

[605] Cristóval de Rojas usa-a como regra geral para resolver questões práticas deste tipo, sem mencionar que se trata de uma construção aproximada [Cristóval de Rojas, 1598, f. 57r].

[606] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 83-84].

[607] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 68-69].

[608] [Cajori, F., 1980, p. 143].

[609] Leon Battista Alberti nasceu em Génova em 1404 e morreu em Roma em 1472. Dedicou-se ao estudo das letras, primeiro em Veneza e depois em Pádua e, mais tarde, transferiu-se para Bolonha onde começou a estudar direito canónico e grego, ao mesmo tempo que se interessava pelo estudo da música, da pintura, da escultura, da arquitectura e das ciências físico-matemáticas. Em 1421 ingressou na vida religiosa. Fazem parte importante da sua obra, o *De re aedificatoria,* um tratado de arquitectura, em dez volumes publicado em 1452,

Um dos geómetras que no século XVI atacou o problema da quadratura do círculo, pretendendo resolvê-lo com recurso exclusivo à régua e ao compasso, foi Oronce Finé. Finé descreveu dois métodos errados com os quais julgou ter quadrado o círculo. Um deles deu-o na sua obra *Protomathesis*, publicada em Paris em 1532, e o outro apareceu publicado, também em Paris, em 1544, numa miscelânea cujo primeiro escrito é *Quadratura circuli*[610]. Nesta última obra, além da questão da quadratura do círculo, Finé julgou ter resolvido os quatro importantes problemas matemáticos seguintes: inserção de dois segmentos meios proporcionais entre dois segmentos dados, duplicação do cubo, inscrição no círculo de qualquer polígono rectilíneo e determinação das diferenças das longitudes geográficas, em qualquer tempo, por um processo diferente do dos eclipses lunares; o que, na verdade não acontecera. O facto de Finé não ter reconhecido os erros cometidos na *Protomathesis* e reincidir neles na *Quadratura circuli* levou Pedro Nunes a compor o *De Erratis Orontii Finaei*, obra que publica em Coimbra, em 1546, em que refuta esses erros[611]. No seu estudo, Pedro Nunes começa por transcrever, usando as palavras de Finé, o método dado pelo matemático francês para resolver esses problemas e em seguida prova, com base nos *Elementos* de Euclides, que a "invenção" de Finé é falsa[612].

Pérez de Moya trata, pela primeira vez nos *Fragmentos Mathematicos*, a questão da quadratura do círculo[613], indicando três processos que a permitem fazer aproximadamente. Nos dois primeiros baseia-se em Arquimedes e no terceiro apoia-se em Ringelberg. Moya sabe que essas quadraturas são aproximadas ("notaras, que todo circulo es casi ygual a un parallelogramo rectángulo") e no *Tratado de Geometria* mostra porque concorda com a

---

o *De pictura*, tratado de pintura publicado em 1435, do qual apresentou uma tradução com o título *Della pittura*, e um tratado de escultura intitulado *Della statua* [Laura Barberi]. Alberti estudou a questão da quadratura do círculo, a par de outros problemas de transformação geométrica de figuras, no *Ludi rerum mathematicarum*. Esta obra está incluída em *Opere volgari. Volume terzo. Trattati d'arte. Ludi rerum mathematicarum, grammatica della língua. Opuscoli amatori. Lettere.* (Scritori d'Italia, N 254). Bari: Laterza. Grayson, Cecil (ed.) em 1973. Este opúsculo recreativo de Alberti, sobretudo de geometria prática, alia a utilidade cívica com o lazer numa harmonia perfeita com a tendência do Humanismo Italiano do século XV [Høyrup, J., 1992, p.5 (versão manuscrita)].

[610] [Carvalho, J., 1960, p. VI].

[611] É o próprio Pedro Nunes quem o afirma, dizendo: "É ainda de notar que Orôncio Fineu julga ter descoberto e demonstrado tudo isto com muita clareza, chegando a dizer que «a divina Providência permitiu que coisas famosas e difíceis, sucessivamente diferidas, sejam destinadas a inventores que só Deus sabe terem sido eleitos para elas». A meu ver, Orôncio ensandeceu, porque se assim não fosse teria reconhecido os primeiros erros que cometeu há doze anos e aterrar-se-ia com novos e desmesurados em que caiu agora e neste livro francamente porei a claro" [Pedro Nunes, 1546, p. 137].

[612] [Pedro Nunes, 1546, pp. 170-197].

[613] E refere, também, o problema recíproco deste, mostrando como obter um círculo com a área de um dado quadrado [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 69-79].

opinião dos autores que consideram ser impossível quadrar o círculo, com exactidão. Os seus argumentos baseiam-se no facto de as linhas rectas não serem comparáveis em "qualidade"[614] com as curvas, apesar de poderem comparar-se em "quantidade". Esta última comparação estabelece-se pela definição 5 de *Elementos* V[615] observando que o quadrado circunscrito ao círculo, cujo comprimento é igual a quatro diâmetros do círculo, excede a circunferência desse círculo; ou seja, que é possível multiplicar o diâmetro de modo a que ele exceda a circunferência. Moya di-lo assim:

> Y otros vuo que negaron aver fciencia para quadrar el circulo cõsiderãdo que la linea recta no es cõparable, ni tiene cierta proporciõ com la curba, y aun que esto sea verdad teniendo respecto à la qualidad de lo derecho y curbo. En respecto de la quantidad pueden ser comparables, y que sean comparables en quanto à la quãtidad pruevase por doctrina de Eucl. que dize. Aquellas quãtidades se dizen tener proporcion, las quales multiplicadas se pueden la una à la outra exceder. Y porque es cosa averiguada que el quatrodoblo del diametro de un qualquiera circulo excede à su circunferẽncia, y porque el quatrodoblo del dicho diametro del tal circulo es ygual à los quatro lados del quadrado circunscripto al mismo circulo, y los 4 lados del dicho quadrado es manifesto ser mucho mas que la circunferẽcia del circulo, siguese que pues se puede multiplicar el diametro de un circulo de tal manera que exceda à su circunferẽcia, ò entre linea recta y curba ay proporcion, aunque la tal proporcion nos sea ignota. Cõ todo esso el circulo no tiene reglas para quadrarse precisamente, aunque las tiene unas mas que otras [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 69].

Vejamos os processos de quadratura do círculo que Moya propõe, nos *Fragmentos Mathematicos*:

Primeiro processo.

Baseia-se na primeira proposição do tratado *Da medida do círculo* de Arquimedes, na qual se mostra que a área de um círculo é igual à de um triângulo rectângulo em que um dos catetos é igual ao raio do círculo e o outro é igual à circunferência do círculo[616].

Moya não usa 'exactamente' esta proposição, mas sim uma equivalente; em vez do triângulo rectângulo de catetos respectivamente iguais ao raio e ao perímetro do círculo, toma um rectângulo de lados iguais ao raio e a metade do perímetro da circunferência do

[614] Moya usa este conceito sem elaborar o seu significado, não o utilizando em mais nenhuma parte do seu trabalho.

[615] Que na versão de Zamberto, aquela que Moya refere, se pode enunciar assim: "diz-se que têm uma razão as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra".

[616] [Dijksterhuis, E. J., 1987, p. 222].

círculo, respectivamente (figura 39). Moya nota que a área do círculo é "quase igual" à do rectângulo, o que está errado, pois, como se sabe ela é exactamente igual. Contudo, como o rectângulo que Moya considera tem comprimento $3\frac{1}{7}$ do raio do círculo, podemos pensar que se trata apenas de uma forma de expressão incorrecta.

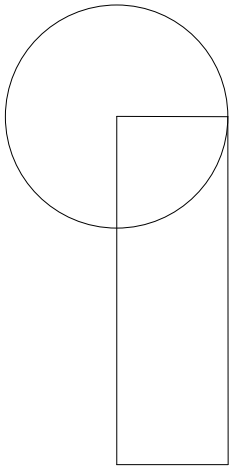


Figura 39: Rectângulo de área "quase igual" à do círculo. O lado menor deste rectângulo é igual a um semidiâmetro e o lado maior é igual a 3+1/7 do semidiâmetro do mesmo círculo [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 70-71].

Sublinhamos, uma vez mais, que Moya sabe que se trata de uma construção aproximada, e que sabe, também, que isso resulta de não ser possível rectificar a circunferência; mas apesar de tudo, considera que a construção constitui uma aproximação razoável:

> y aun que esta media circunferência no es proporcionable a ningũa recta linea, tiene mas similitude en tres semidiametros del mismo circulo, y una septima parte del mismo semidiâmetro [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 69].

Segundo processo.

Baseia-se na segunda proposição de Arquimedes, que Pérez de Moya enuncia assim:

> Muestra el sobreallegado Archimedes otra manera de quadrar el circulo, dizendo que el quadrado que se hiziere del diâmetro de un qualquier circulo tiene aquella misma proporciõ al circulo que 14 con 11 [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 71].

Isto significa, como Moya observa, que se a um quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo se retirar $\frac{3}{14}$ da sua área, se obtém uma área igual à do círculo:

> De manera que el quadrado que tiene por lado el diametro de un circulo es tres onzenes mayor que el circulo cuyo lado fuere diametro: de lo qual se sigue, que quadrãdo el diametro de un circulo, y sacando tres catorezenas del tal quadrado, lo que quedare sera area del circulo. Y por conseguinte sacando rayz desta resta, sera el lado del quadrado ygual al tal circulo [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 71].

A explicação dada sugere a construção que apresentamos abaixo (figura 40), mas Moya não inclui uma tal figura em nenhuma das suas obras.

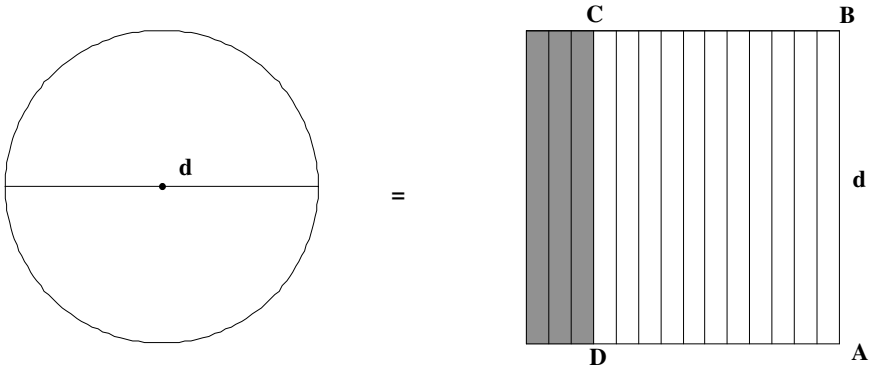


Figura 40: A área do círculo de diâmetro d é "igual" a 11/14 da área de um quadrado de lado d, ou seja, igual à área do rectângulo [ABCD].

Obtido o rectângulo de lados respectivamente iguais ao diâmetro do círculo e a $\frac{11}{14}$ do mesmo diâmetro, a determinação geométrica do quadrado faz-se, sem problemas, pela construção do meio proporcional.

Peletier indica este processo no problema XXV de *De L'usage de Géometrie*. Depois de se referir à determinação da área de um círculo segundo a tradição de Arquimedes, dá uma construção simples que permite quadrar o círculo com facilidade, aplicando essa doutrina:

> Affin que cecy se face plus promptement, divisez le Diametre en 14 parties egales: puis de l'unzienne d'icelles, elevez une perpendiculaire, qui coupe la Circonference; et du point de la

section, menez une ligne à láutre extremité, sçavoir est à l'extremité de la plus grãde portion du Diametre. Icelle sera le costé du Quarré egal au Cercle[617] [Jacques Peletier, 1573, pp. 44-45].

Na figura que Peletier apresenta (figura 41), o quadrado de lado BC tem área igual à do círculo ABCD:

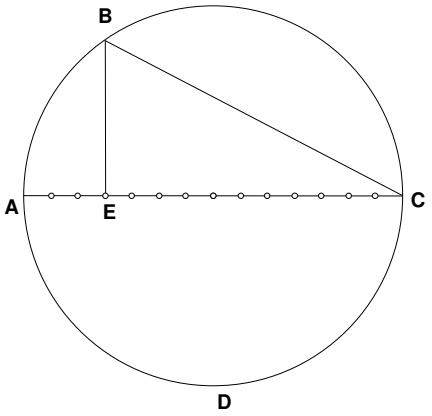


Figura 41: Determinação do lado (BC) de um quadrado com a mesma área do círculo (ABCD) dada por Peletier [Jacques Peletier, 1573, p. 44].

Os dois processos que acabámos de apresentar conduzem ao valor aproximado de π, por excesso, $\pi = \frac{22}{7}$; o terceiro processo, que veremos de seguida, dá para π o valor aproximado por defeito, $\pi = \frac{25}{8}$.

Terceiro processo.

A "geometria", de Ringelberg, é a referência para esta quadratura que Moya apresenta nos *Fragmentos Mathematicos*. Ringelberg indica-a na sua obra *Chaos Mathematicum*, *Ad Geometriam Spectantia*, publicada em Lyon, em 1531[618], propondo que

[617] Nossa tradução livre: "Para que isso se faça mais rapidamente, divida o diâmetro em 14 partes iguais; depois da décima primeira delas eleve uma perpendicular, que corta a circunferência: e do ponto de secção, conduza uma linha até à outra extremidade, ou seja, até à extremidade da maior porção do diâmetro. Esta será o lado do quadrado igual ao círculo" [Jacques Peletier, 1573, pp. 44-45].

[618] O título completo do trabalho de Ringelberg é *Ioachim Fortii Ringelbergii Andouerpiani. Chaos Mathematicum Ad Geometriam Spectantia*. Este texto faz parte de uma obra mais vasta, *Opera omina*, que compreende um livro matemático, intitulado *Ad mathematicen*, que inclui *Chaos Mathematicum*, *Sphaera*, *Institutionum Astronomicarum*, *Cosmographia*, *Liber de tempore* e *Opticae*. Esta obra teve uma 1ª edição incompleta em Lyon, em 1531, e uma edição completa em Basileia, em 1536. Esta última intitula-se *Lucubrationes, uel potius absolutissima kuklopaídeia* e reúne vinte e sete opúsculos e cinco cartas, embora muitos destes opúsculos tivessem edições em separado. O mais conhecido de todos foi o *De ratione studii,* que

se divida o diâmetro de um círculo em 8 partes iguais e que se tome o quadrado cuja diagonal é igual a dez partes daquelas em que o diâmetro foi dividido (figura 42). Esse quadrado tem área (aproximada) da do círculo.

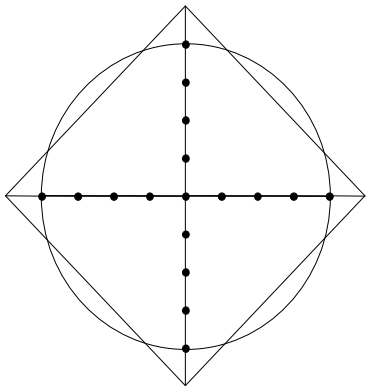


Figura 42: Processo para obter um quadrado de área "igual" à de um dado círculo [Joachim Forcio Ringelberg, 1531, p. 485], [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 22r]. Uma figura análoga é dada em [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 78], diferindo desta apenas na posição do quadrado.

Este processo constitui um modo de obter um quadrado de área aproximada da de um círculo dado, que é de grande comodidade na prática[619].

No estudo da quadratura do círculo Tartaglia inclui esta mesma construção, à qual associa o nome de Bovelle (autor cuja obra é posterior à de Ringelberg). Na explicação que dá, Tartaglia usa termos que Moya também aplica no *Tratado de Geometria*[620].

O último processo constitui um modo muito simples e rápido de obter um quadrado de área "quase igual" à de um círculo dado e que lida com um valor próximo do de Arquimedes. Por outro lado, usado em sentido inverso, ele permite construir, com igual facilidade, um círculo com a mesma área de um quadrado dado.

Foram, precisamente, a simplicidade e aplicabilidade que tornaram esta construção muito útil a desenhadores, pintores, arquitectos e agrimensores, que a utilizaram nos seus trabalhos; não obstante, como observa Tartaglia, entre matemáticos e verdadeiros geómetras ela seria classificada como sem valor por não poder ser demonstrada[621].

---

chegou a ser publicado com o tratado de Erasmo que tem o mesmo nome, mas os opúsculos de dialéctica e retórica e os textos de astronomia tiveram, também, muitas edições. Notas retiradas de [Pereira, B. F., 2004, pp. 201-213].

[619] [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 22r].

[620] [Nicolo Tartaglia, 1560b, ff. 17v-22v].

[621] [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 22v].

3.2.5. Alguns resultados elementares sobre o círculo

Um dos temas que Moya aborda nos *Fragmentos Mathematicos* e que não inclui no *Tratado de Geometria* é a determinação de círculos com área múltipla e submúltipla da de um círculo dado. Partindo da relação existente entre o diâmetro e a área de um mesmo círculo, descreve como é possível transformar um círculo noutro, de tamanho diferente, aumentando-o ou diminuindo-o numa certa proporção[622]. Este assunto é explorado no âmbito do estudo da quadratura do círculo, com base no trabalho de Arquimedes, *Da esfera e do Cilindro*, e no de Ringelberg.

a. Divisão de um círculo em dois outros círculos com a mesma área

Pérez de Moya propõe uma construção que fornece um processo geométrico de obter, com muita facilidade e com exactidão um círculo de área igual a metade da área de um círculo dado; e que pode, igualmente, ser usada em sentido inverso, para determinar um círculo com área dupla da de outro círculo. O processo consiste em tomar dois diâmetros perpendiculares (figura 43) determinando-se, em seguida, os pontos de intersecção desses diâmetros com a circunferência, que designa por A, B, C e D. O segmento definido por dois desses pontos que não pertençam ao mesmo diâmetro como, por exemplo, A e B, é o diâmetro de cada um dos círculos procurados.

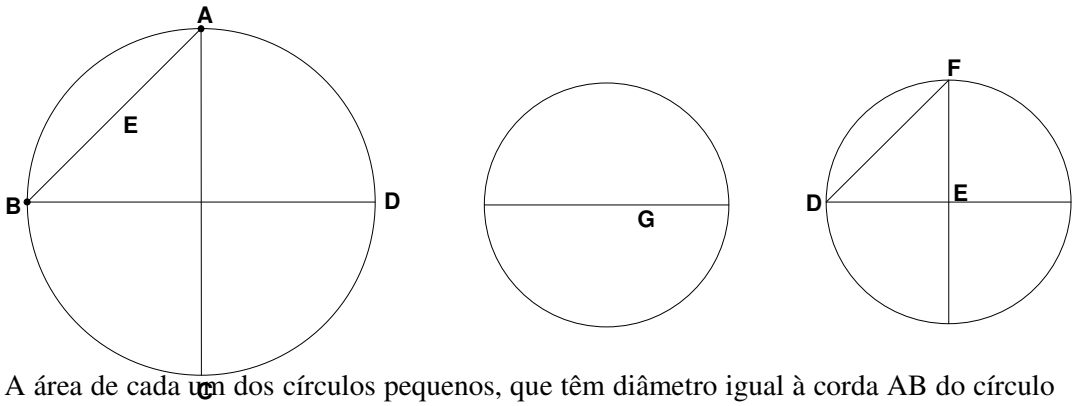


Figura 43: A área de cada um dos círculos pequenos, que têm diâmetro igual à corda AB do círculo grande, é igual a metade da área do círculo grande. As letras utilizadas são as que constam no texto de Moya. Embora não esteja especificado o significado do ponto E, trata-se do ponto médio do segmento [AB] do círculo maior. Ao inclui-lo na última figura Moya chama a atenção para o facto de que o círculo menor tem diâmetro [AB] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 72-73].

Em Peletier[623] e Tartaglia[624] vemos figuras sugestivas deste estudo (figura 44):

---

[622] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 72-77].

[623] [Jacques Peletier, 1573, p. 45].

[624] [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 6r].

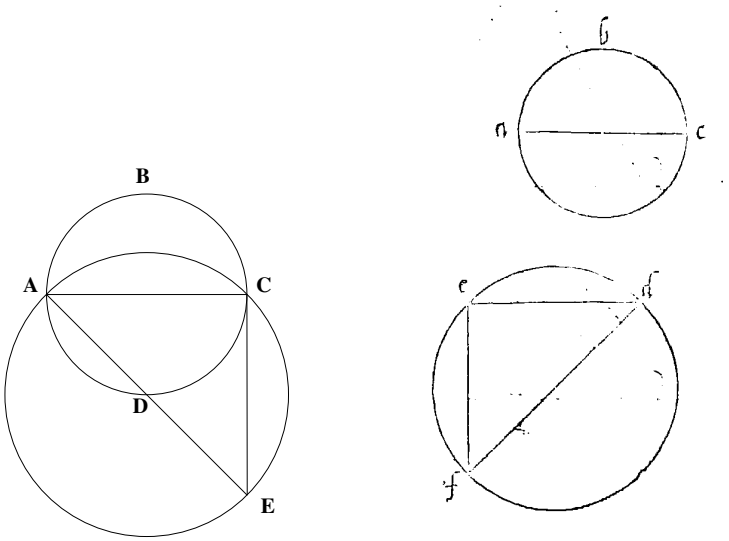


Figura 44: Determinação de um círculo de área dupla de um círculo dado. À esquerda em Peletier [Jacques Peletier, 1573, p. 45]; À direita em Tartaglia [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 6r].

Tartaglia começa por explicar como se constrói um quadrado de área dupla de outro (sob o título "Come se multiplica una figura in quantita") e aplica as mesmas regras para o caso do círculo, justificando a construção em *Elementos* XII, 2[625].

b. Determinação de círculos com 1/3, 2/3, 1/4 e 3/4 da área de um círculo dado

Em vez de se considerar a perpendicular no ponto médio do diâmetro (como no caso anterior em que se toma o diâmetro perpendicular ao dado) pode considerar-se a perpendicular por outros pontos particulares do diâmetro obtendo-se, pelo processo anteriormente descrito, o diâmetro de círculos particulares. Pérez de Moya propõe uma construção muito fácil para obter os diâmetros de círculos com áreas iguais a 1/3 e a 2/3 da área de um círculo dado. Consiste em dividir em três partes iguais o diâmetro do círculo e construir perpendiculares ao diâmetro pelos pontos de divisão. Os pontos de intersecção dessas perpendiculares com a circunferência definem com um dos extremos do seu diâmetro, o diâmetro do círculo pretendido (Figura 45).

[625] No capítulo intitulado "Il modo geométrico da risolvere manualmente com il compasso, e rega varii problemi non posti da Euclide"[Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 6r]. *Elementos* XII, 2 tem o seguinte enunciado: círculos estão entre si na razão dos quadrados sobre os respectivos diâmetros [Heath, T. L., 1956, III, p. 371]. Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 431]).

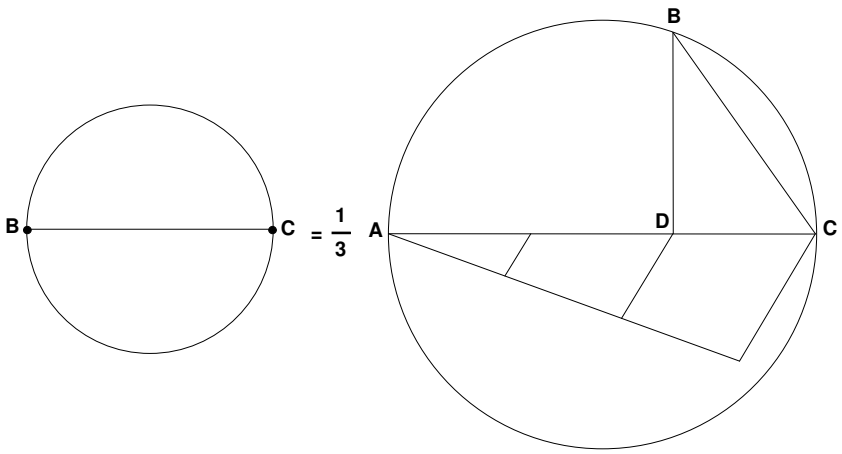


Figura 45: De acordo com as indicações de Moya, [BC] é o diâmetro de um círculo com 1/3 da área do círculo de diâmetro [AC] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 74-75].

Os casos de 1/4 e 3/4 resolvem-se por um processo análogo, considerando a divisão do diâmetro em quatro partes iguais (Figura 46). Embora Moya não o refira, esta constução é exacta, como facilmente se prova pela aplicação da definição de meio proporcional entre dois segmentos e do teorema de Pitágoras e pode ser generalizada facilmente.

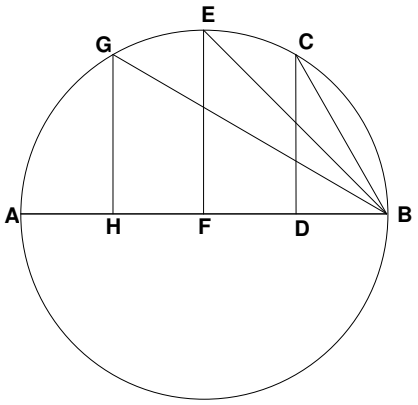


Figura 46: Os pontos D, F e H dividem o diâmetro do círculo em quatro partes iguais. Os círculos de diâmetro [BC], [BE] e [BG] têm áreas que são ¼, ½ e ¾ da área do círculo de diâmtero [AB] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 76].

Cristóval de Rojas quando ensina a "multiplicar figuras, assi quadradas como triangulares, y círculos"[626] resume estas construções numa só figura (figura 47) como a que incluímos abaixo:

[626] [Cristóval de Rojas, 1598, ff. 60v-62r]. Esta construção é depois aplicada à determinação, com régua e compasso, de polígonos semelhantes a um dado, mas de área menor [Cristóval de Rojas, 1598, ff. 6r-63r].

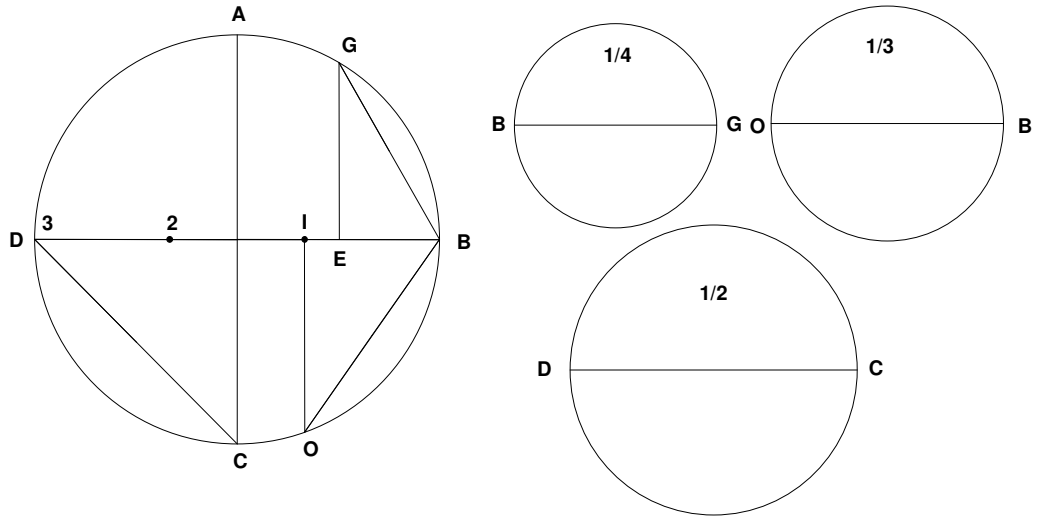


Figura 47: Construção de três círculos com áreas iguais a ½, 1/3 e ¼ de um círculo dado [Cristóval de Rojas, 1598, f. 64r].

Tal como Tartaglia e Peletier, Moya não indica nenhuma aplicação prática destas construções, mas encontrámos na *Teorica y Practica de Fortificacion*, de Cristóval de Rojas, um exemplo[627] muito curioso, no qual chama a atenção para a importância que estes conhecimentos teóricos têm na construção de canos de água, que passamos a explicar. Suponhamos que um cano tem de diâmetro [BD], igual ao do círculo maior representado na figura 47, e que se pretende construir um outro cano cujo caudal seja metade do seu. Nesse caso, diz Cristóval de Rojas, o cano pretendido teria diâmetro [DC]. E se, em vez de metade se pretendesse um cano com 1/3 do caudal, o diâmetro seria [OB], e se fosse 1/4, seria [BG][628].

3.2.6. Instrumentos de medida nos *Fragmentos Mathematicos:* "Regla status" e "duas varas"

Nos *Fragmentos Mathematicos*, Pérez de Moya dedica um capítulo completo ao estudo de medições lineares, e utiliza como instrumentos de medida, além da vara e do espelho (ou vaso de água) que antes mencionámos, a régua status ("regla status"), as "duas varas", e um outro instrumento ao qual não dá nome especial mas que diz basear-se na "doctrina de triângulos". Os problemas que Moya trata nesse capítulo de *altimetria* consistem em medição de distâncias, alturas e profundidades e são de tipos tão diversos que

[627] [Cristóval de Rojas, 1598, f. 64r].

[628] Cristóval de Rojas nota que isso acontecia geometricamente (isto é, teoricamente), porque na prática seria necessário contar com outros factores e contar com a experiência [Cristóval de Rojas, 1598, f. 64r].

dão, só por si, uma ideia da variedade de aplicações práticas que estes instrumentos envolvem. Eles permitem, por exemplo, calcular a altura de uma torre, mesmo quando entre o observador e o objecto observado há algum obstáculo que impeça a medição directa, conhecer a profundidade de um poço, determinar a distância entre dois pontos, ambos afastados do observador e inacessíveis, saber se um exército se encontra perto ou longe de um dado local.

O primeiro instrumento referido é a "regla status" (figura 48). Trata-se de um instrumento composto por duas réguas e um fio-de-prumo ("un hilo con una pesica"), que Moya descreve assim: uma das réguas deve ter comprimento igual à distância que vai dos pés aos olhos do observador e ser afiada numa das extremidades, de modo a que seja fácil cravá-la no solo; designa-se "regla status" pois durante as medições tem de ficar colocada perpendicularmente ao solo. Esta régua tem marcada num dos bordos uma escala AE, de cuja graduação falaremos a seguir; e tem uma incisão quadrada, ou agulheiro (o "agujero"), onde encaixa uma outra régua, em posição perpendicular à anterior (na figura, o agulheio está na colocado na intersecção das duas réguas). De cada lado do agulheiro e a igual distância dos bordos estão fixadas duas pequenas cavilhas pelo meio das quais passa o fio-de-prumo. A outra régua, GF, é uma régua móvel (Moya designa-a por "regla mobil") que encaixa no agulheiro e pode deslizar por ele, para a direita e para a esquerda, mantendo-se perpendicular à régua "status". Esta segunda régua pode ser do tamanho que se quiser. Aquando das medições, a extremidade afiada da régua "status" deve ficar toda enterrada para que a sua altura não interfira na determinação da medida e manter-se em posição perpendicular ao solo. A graduação das duas réguas é da maior importância. Moya considera a distância entre o agulheiro e o topo dividida em doze partes iguais e marca partes iguais a esta na régua móvel, em número de, pelo menos, 60:

> Hecho esto, la quantidad que huviere en la regla status, desde do se hiziere el agujero hasta lo alto poço o mucho lo que fuere lo dividiras en doze partes yguales, con unas rayas. Luego mira una distancia de estas doze que quantidad es, y a medida de ella divide la regla mobil en quantas partes quisieres semejantes a ella, y basta que a regla mobil sea tan larga, que tenga sesenta tamaños, como los doze que hay desde el agujero hasta lo alto de la misma regla status [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 99].

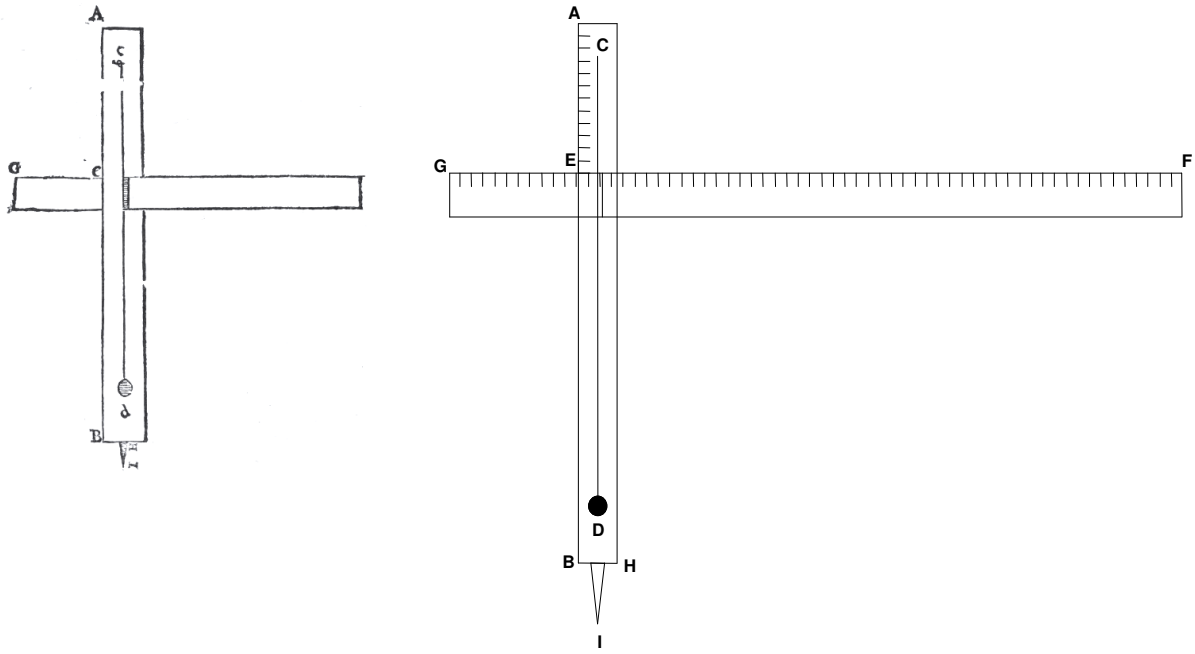


Figura 48: À esquerda, desenho da "regla status" apresentado por Moya [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 100]. À direita, "regla status", AB, construída de acordo com as indicações de Moya. CD é a linha traçada longitudinalmente na régua e que, neste caso, está oculta pelo fio-de-prumo. A fenda por onde passa o agulheiro está representada por E. FG é a régua móvel. HI é a ponta da régua "status", que se há-de cravar no solo. EA está dividido em 12 partes.

A *regla status* é usada para medir distâncias entre o observador e um ponto fixo e para determinar alturas de objectos, quer estes estejam perto ou distante do lugar de observação.

Vamos tratar dois exemplos de utilização que, embora baseando-se no mesmo princípio, diferem, como veremos, em alguns detalhes. No primeiro caso os olhos do observador posicionam-se na régua fixa e na medição feita intervem a altura da *regla status*. No segundo exemplo o observador olha pela régua móvel e no cálculo não é considerada a altura da régua. Em ambos os casos, sobretudo no segundo, uma figura ajudaria a compreender o procedimento descrito, mas Moya não a inclui no seu texto.

a. Medição da distância entre dois pontos no solo, usando a regla status

Para determinar a distância existente entre dois pontos, C e D, situados no solo (figura 49), Moya propõe o seguinte procedimento: começa-se por fixar o instrumento no ponto em que o observador está, C; em seguida, faz-se deslizar a régua móvel de modo que fiquem alinhados o olhar do observador, A, a extremidade da régua móvel, E, e o ponto D. Conta-se o número de divisões na régua móvel e, por aplicação de uma regra de três em que intervêm o número de divisões da régua status, da régua móvel e a altura do observador ("o altura del Geometra que mide") obtém-se a distância de C a D. A explicação diz respeito ao

caso concreto em que na régua móvel se lêem 20 divisões correspondentes às 12 divisões da régua fixa e se admite que a altura do geómetra, ou seja de toda a régua fixa, é 7 palmos[629], donde resulta que a distância de C a D é $\frac{35}{3}$ palmos. Este tipo de medição envolve dois triângulos semelhantes, por isso Moya remete a fundamentação matemática para *Elementos* VI, 4[630].

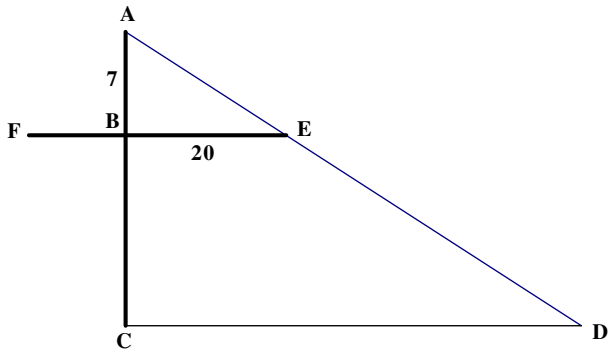


Figura 49: Interpretação da explicação dada por Moya [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 101] para determinar a distância entre os pontos C e D situados no solo. AC representa a régua "status" cuja altura é a distância entre o solo e os olhos do observador, B o agulheiro e EF a régua móvel. A altura do observador, AC é 7 palmos.

b. Medição da altura de um objecto usando a regla status

Um dos processos propostos por Moya para determinar a altura, DC (figura 50), utiliza a *regla status*. Tal como no caso que referimos anteriormente, a régua é fixada no solo, a uma qualquer distância do objecto cuja altura se pretende medir, C. O observador tem de começar por afastar a régua móvel do agulheiro até que o ponto O, onde coloca o olho, a extremidade A da régua e o ponto C fiquem alinhados (figura 50). Depois, conhecidos $\overline{AB}=12$, $\overline{BO}=20$ e $\overline{DB}=50$, obtém $\overline{CD}$ por uma regra de três simples. Por fim, soma $\overline{DF}$ (que é conhecido, porque é igual a $\overline{BE}$) ao valor determinado, obtendo $\overline{CF}$, que é a altura de C. Moya comete um lapso, que resulta de considerar na regra de três $\overline{DB}$, em vez de $\overline{DO}$[631]. Não sabemos se se tratou apenas de uma distracção, mas certificamo-nos

[629] Notamos que, de acordo com a definição de palmo dada em [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 93], o palmo não teria mais do que 10 cm, o que significa que a altura do geómetra, do chão até aos olhos seria cerca de 70 cm. Isto implica que o geómetra mediria menos do que um metro!

[630] *Elementos* VI, 4: Em triângulos equiângulos os lados adjacentes a ângulos iguais são proporcionais e também os que subtendem ângulos iguais [Heath, T. L., 1956, p. 200].

[631] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 133-134].

de que na resolução de um problema análogo, proposto no *Tratado de Geometria*, este lapso está corrigido[632].

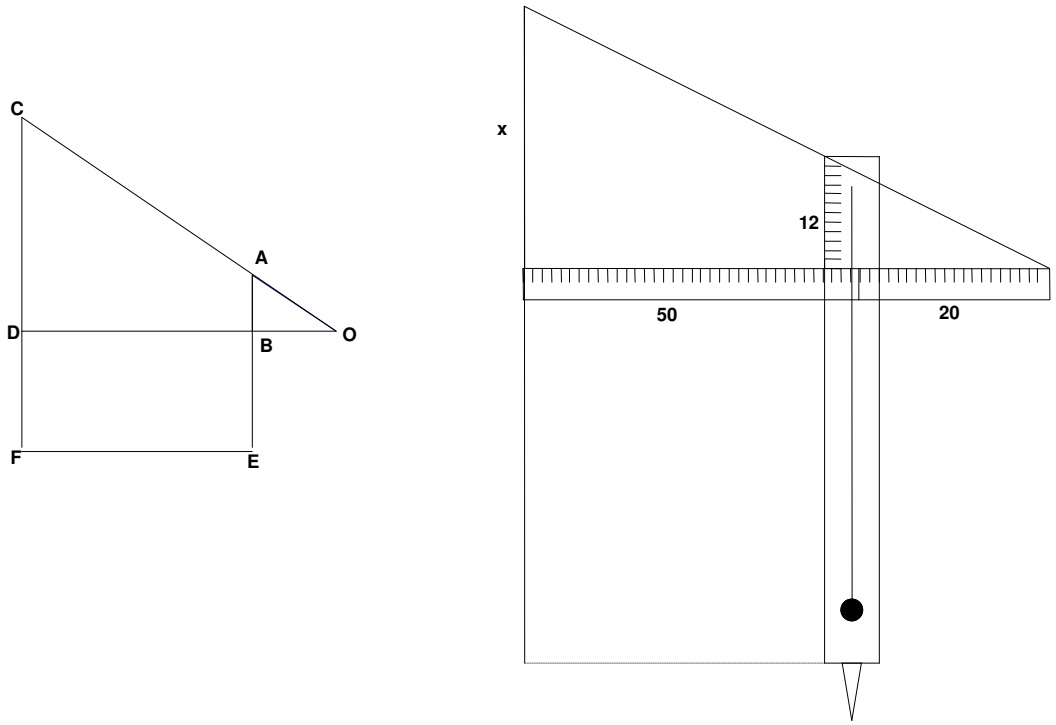


Figura 50: Interpretação da explicação de Moya sobre a utilização da "regla status" na medição da altura do objecto C. $\overline{AB}$ é altura desde o agulheiro ao topo da régua, $\overline{BO}$ é a distância, na régua móvel, do observador (colocado em O) até ao agulheiro. F está no solo. $\overline{CD}$ é a distância de C à régua móvel. $\overline{EF}$ é a distância ("espacio") entre o pé da régua e o pé do objecto que se pretende medir.

c. Uso de duas varas

No estudo de questões de altimetria, no uso de duas varas o único autor que Moya refere nos *Fragmentos Mathematicos* é Frísio do qual cita um pequeno tratado que diz estar publicado, juntamente com a cosmografia de Apiano[633]. O título da obra de Frísio não é indicado, mas a descrição feita leva-nos até ao *Libellus de Locorum describendorum ratione, et de eorum distantiis inveniendis, nunquam antehac visus*[634]. Moya explica o

---

[632] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 119].

[633] [*Cf.* Primeira Parte, 1.3.1].

[634] Este trabalho de Frísio está incluído na parte final da *Cosmographia* de Pedro Apiano, ocupando os fólios 59 a 74 da edição *Cosmographia Apiani Libellus de locorum describendorum ratione, et de corum distantiis inveniendis, nunquam antehac visus*, impressa em 1533. Em 1548 a obra foi traduzida em castelhano com o *Libro dela Cosmographia de Pedro Apiano, el qual trata la descripcion del Mundo, y sus partes, por muy claro discurso y lindo artificio, augmentado por el doctissimo varon Gemma Frisio, doctor en Medicina, y Mathematico excellentissimo: com otros dos libros del dicho Gemma, de la materia misma* e impressa em

procedimento de Frísio, explorando o problema por ele proposto[635], mas utilizando nas medições valores ligeiramente diferentes.

Suponhamos que se pretende determinar a distância de A a C (figura 51). O observador começa por se deslocar até um qualquer ponto A, donde veja o ponto C, colocando aí um sinal, que pode ser uma vara. Depois, vai na direcção AC até um outro ponto B, cuja distância a A consegue medir, e coloca aí outra vara. Em seguida, desloca-se perpendicularmente a essa direcção até um qualquer ponto D, que também marca. Por fim, volta a A e caminha paralelamente a BD até chegar a um ponto E do qual pode ver alinhados os pontos D e C ("desde su fin vaya una línea visual que passando por la señal o pũto D se vea el punto C"). Conhecidos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AE}$, determina $\overline{FE}$ e usa a semelhança dos triângulos rectângulos [DFE] e [CAE] para obter $\overline{AC}$.

O princípio em que se fundamenta a medição de Frísio é o mesmo do instrumento de medida constituído por duas varas de alturas diferentes, conhecido pelo nome *duas varas* ("dos varas"). A vara maior tem altura igual à distância que vai do chão até aos olhos do observador, e a menor é da altura que se pretender. Só a vara maior é graduada e apenas na parte em que excede a menor. O número de divisões da graduação pode ser qualquer, mas Moya sugere 12. A utilização que o nosso autor faz é descrita cuidadosamente e é ilustrada com uma figura que aqui não apresentaremos pela semelhança que tem com a figura 51. Para se obter a distância entre o observador e um dado objecto no solo, espeta-se a vara maior num qualquer ponto e a menor num outro ponto, mais próximo do objecto, e obtido de tal modo que a linha visual que sai dos olhos do observador, quando este observa pelo topo da vara maior, está alinhada com o topo da vara menor e com o objecto a medir. Sabendo-se o tamanho da vara maior, a diferença entre as duas varas e a distância que as separa calcula-se, sem dificuldade, a distância do observador ao objecto, pela semelhança de triângulos. A principal diferença entre este processo e o anterior é que neste os triângulos semelhantes pertencem ao plano definido pelas duas varas, que é normal ao plano do solo, enquanto no processo anterior os triângulos pertencem ao plano do chão.

Antuérpia; o *Libritto dela manera de describir o situar los lugares, y de hallar las distancias de aquellos, nunca visto hasta agora, por Gemma Frison* ocupa os fólios *55r -68v*.

[635] [Gemma Frísio, 1548, ff. 58r-58v].

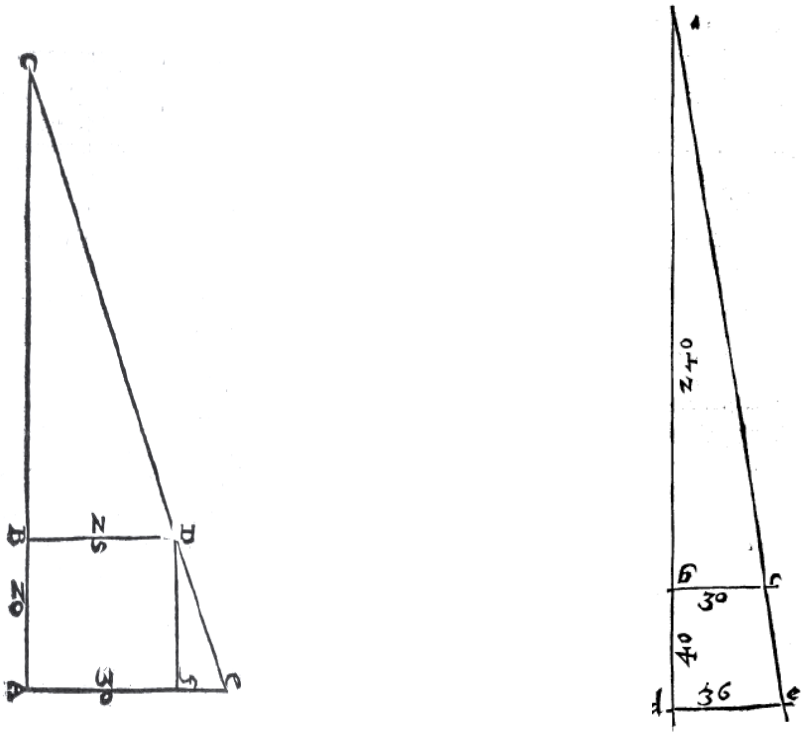


Figura 51: À esquerda, Moya ilustra a resolução do problema de determinação da distância AC, baseando-se no texto de Frísio [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 104]. À direita, desenho apresentado em [Gemma Frísio, 1547, p. 163].

No *Tratado de Geometria*, Moya retoma o exemplo dos *Fragmentos*, usa a mesma figura e indica o mesmo procedimento, mas inclui a justificação teórica, que os *Fragmentos* não apresentam. Assim, por exemplo, nota que os triângulos [AEC] e [FED] (figura 51) têm os ângulos respectivamente iguais, invocando a igualdade de ângulos rectos, pela petição 4ª do capítulo terceiro da sua obra[636]; refere a igualdade dos ângulos ACE e FDE[637] pela proposição *Elementos* I, 29[638]; com base na semelhança dos triângulos [AEC] e [FED] justifica a proporcionalidade entre os lados, $\frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}}$; por *Elementos* I, 33 justifica a igualdade dos segmentos [AB] e [DF].

[636] [*Cf.* Terceira Parte, 3.3.1].

[637] Aqui há um lapso na ordenação dos pontos que definem o ângulo.

[638] Esta proposição tem o seguinte enunciado: uma linha recta que caia em duas linhas linhas rectas paralelas determina ângulos alternos iguais, ângulos correspondentes iguais e ângulos internos do mesmo lado iguais a dois rectos [Heath, T. L., 1956, I, p. 311]. Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 78]).

3.3. *Tratado de Geometria*

3.3.1. Conceitos fundamentais

De entre as obras geométricas publicadas por Pérez de Moya, o *Tratado de Geometria* é aquele que, além de reunir um maior volume de informação, trata essa informação de maneira mais detalhada e mais sistemática. Mais do que em qualquer outro trabalho geométrico, Moya revela uma preocupação com o modo como define e introduz os conceitos e com o tipo de justificações que apresenta, quase sempre à luz dos *Elementos* de Euclides. O conceito de geometria dado nos seus trabalhos anteriores é revisto e é dada uma definição de geometria que mostra alguns traços comuns com a que Tartaglia apresenta na sua tradução dos *Elementos* de Euclides:

> Geometría, es una Arte que contempla las forma, ò figuras de la quantidad continua immobil, como es la tierra [Juan Pérez de Moya, 1573b, II, p. 5].

> La Geometria (come su da noi detto anchora nel principio di Euclide da noi tradutto) è una scientia, over disciplina, che contempla la descrition delle figure, over forme della quantita continua immobile, come che è la terra, & altre cose simili. [Nicolo Tartaglia, 1560 a, 1].

A definição de Moya deixa clara a distinção que ele considera existir entre a geometria teórica, ou seja, a euclidiana, e a geometria prática, isto é, a das aplicações. As palavras que usa para as caracterizar são muito semelhantes às de Tartaglia, como mostram os excertos seguintes:

> [Geometria] Dividese como las demas artes en Theorica, y en Practica. La Teorica, o Speculativa es aquella, que por hallar la causa de los effectos de la Practica, considera la quantidad, y proporciõ cõ una especulació del entendimiento, de lo qual trato Euclides cõpendiosa y cumplidamente (…). La Practica trata de poner en effecto, o en obra las razones que el entendimiento en la Teorica speculo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 5].

> Le specie principali della geometria sono due, delle quali l'una è detta theorica, & l'altra pratica. La theorica è quella che per investigare le propinque cause de gli effectti di quella, considera, & guarda le quantita, le proportioni, & le misure di quelle, con una speculatione di mente, & di questa abondantemente ne parla, & tratta Euclide Megarense in dodoci libri [Nicolo Tartaglia, 1560a, p. 1].

Moya não prescinde de nenhuma destas facetas da geometria; antes parece ver com vantagem a união entre os saberes teórico e prático. A posição de Moya sobre a dualidade prática-teórica da geometria não era essencialmente diferente da dos geómetras teórico-práticos do seu tempo, como Tartaglia e Peletier. Com efeito, Tartaglia, na dedicatória do *General Tattato* a "Ricardo Ventuorth, Gentil'huomo inglese", diz a certo passo:

> & abenche la speculatione (per esser investigatrice dele propinque cause, et augmentatrice della scientia) sai molto piu nobile della operatione, over pratica operativa, laquale solamente atende a sapere com diligenza essequire, & condur actualmente a fine, over ad effetto tutte le cose gia speculativamente ritrovate, notificate, & regolatamente in atto poste, nondimeno per quanto posso considerare, a me mi pare, che quanto piu la part speculativa ecceda di nobilita la parte operativa, tanto piu la part operativa ecceda, non solamente di utilita, la parte speculativa, ma âncora di laude [Nicolo Tartaglia, 1560, Al Molto Nobile Et Egregio Signor Il signor Ricardo Ventuorth, Gentil'huomo inglese, compar, et Maggior suo honorandiss].

E a mesma ideia nos transmite Peletier. De facto, reconhecendo a importância da geometria especulativa de Euclides, Peletier compôs em 1557 uma versão latina dos seis primeiros livros dos *Elementos*[639], mas em 1573, em *De l'usage de Geometrie,* realçou a articulação entre a geometria prática e a geometria Euclidiana, exprimindo deste modo a sua opinião sobre o assunto:

> Et de ma par je suis bien loing de l'opinion de ceux qui n'apellent Geometrie sinon celle Elemtaire, traitée par Euclide, non pas celle usagere d'Archimede, d'Apoloine, de Tolomee & des autres excellens qui ont si ingenieusement conjoinct l'artifice avec l'experience. Pour ces causes, Mõseigneur, combien que j'aie intitulé ce Livre, de l'usage de Geometrie, si ne pouvoy-je, ny devoy faire autrement que je ne premisse les Principes purement Theoriques, avãt qu'entrer en matiere de ce que le Titre propose: estãnt mon principal but de rẽdre ces deux parties cõjointes ensembles[640] [Jacques Peletier, 1573, A Tres Illustre Seigneur Messire Albert De Gondi].

---

[639] Iacobi Peletarii Cenomani. *In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex. Ad Carolum Lotharingum, Principem, cardinalemq; amplissimum*. Lyon, 1557. (Uma versão digital desta obra encontra-se disponível em: *Fondos Digitales de la Universidad de Sevilla*.)

[640] A frase transcrita consta na dedicatória a Albert De Gondi, datada de 3 de Novembro de 1572. Na nossa tradução livre, esta frase é a seguinte: "Pela minha parte, estou bem longe da opinião dos que não chamam geometria senão a essa Elementar, tratada por Euclides, e não àquela utilitária, de Archimedes, Apolónio, Ptolomeu e outros autores excelentes que tão engenhosamente ligaram o artifício com a experiência. Por isso,

É a feição prática da geometria que Moya trata com mais detalhe no *Tratado de Geometria*, reservando para o seu estudo os livros 2, 3 e 4 dessa obra. O livro primeiro é constituído pelos fundamentos teóricos necessários à compreensão dos assuntos constantes nos restantes livros, mostrando grande semelhança com o tipo de exposição dos *Elementos* de Euclides. Assim, vemos os enunciados agrupados em três "*géneros de princípios: diffiniciones* [definições], *peticiones* [petições] e *communes sentencias* [sentenças comuns] ou, *concepciones* [concepções]", como também as designa Moya, seguindo a terminologia de Campano.

Embora o conceito de ponto, dado por Moya em 1562, tenha sido objecto de reflexão nos *Fragmentos Mathematicos*, onde o autor põe em evidência a analogia entre o ponto como princípio da geometria e a unidade como princípio da aritmética, só no *Tratado de Geometria* Moya admite a existência de dois tipos de pontos, correspondendo às interpretações do "mathematico" e do "natural". Enquanto para o primeiro o ponto é um ente abstracto, indivisível e invisível, para o segundo é um sinal que, apesar de muito pequeno, se pode ver e dividir em partes:

> Porque el punto no es quantidad, mas es un termino simple imaginado intencionalmente para denotar el principio, medio, o fin de alguna linea. Y por esto dizen, que el punto es una cosa que ni occupa lugar, ni se puede dividir en partes, ni ver, y desta suerte lo entiende el Mathematico. El natural entiende por punto, una señal hecha com tinta deste modo. El qual por muy pequeño y delicado que se haga se puede ver y dividir [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 6].

A diferenciação entre o conceito especulativo e o conceito prático de ponto (e de outros conceitos, que adiante referiremos) foi a adoptada por Tartaglia e por diversos autores Renascentistas, dentro e fora de Itália. Piero de la Francesca, por exemplo, na sua obra *Prospectiva pingendi*, introduz os conceitos de ponto, linha, superfície e corpo, dando deles definições distintas, conforme se dirige aos matemáticos ou aos artistas e utilizando, neste último caso, uma conotação de carácter perceptivo:

Monseigneur, conquanto tenha intitulado este Livro, do uso da Geometria, não posso, nem devo, fazer outra coisa que não tome por premissa os Princípios puramente teóricos, antes de entrar na matéria que propõe o título: sendo meu principal fim dar essas duas partes conjuntamente".

> Puncto é la cui parte non è, secundo i geumetri dicono esser inmaginativo; diró adunqua puncto essere una cosa tanto picholina quanto è posibile ad ochio comprendere [Davis, M. D., 1977, pp. 41-42].

Também Cristóval de Rojas, a quem aqui nos referimos diversas vezes faz precisamente a mesma distinção, observando que o ponto tanto pode ser imaginário como corpóreo:

> El punto, que imaginado Matematicamente no tiene parte ninguna, y mecanicamente tiene cuerpo [Cristoval Rojas, 1598, ff. 44r-44v].

E Leonardo da Vinci exprime esta mesma diferença de um modo interessantíssimo, dizendo:

> Il minore punto naturale è magiore di tutti i punti naturali matematici e questo si pruova perché il punto naturale è quantità chontinua e ogni cotinuo è divisible in ifinito. E il punto matematicho hè indivisible perché non è quantità ec. [Arrighi, G., 2004, pp. 368-369].

Tal como sucedeu com a definição de ponto, também a definição de linha foi sofrendo transformações na concepção de Moya. Inicialmente descrita como *fluxo* de um ponto em movimento[641], a linha passa a ser considerada por Moya no *Tratado de Geometria*, quer como uma abstracção mental, quer como um ente concreto, traduzindo, respectivamente, a visão especulativa e a perspectiva prática.

> Linea (que en Español dezimos raya generalmente hablãdo) es una largura sin anchura ni profundidad. Los terminos, o fines dela qual son dos puntos. Dize que sus fines son dos puntos para differencia dela linea Circular, que carece de terminos. Su origem sale de la estension que intencionalmente se imagina correr de un punto a otro, y es una cosa la linea tan pequeña segun su anchura (que puesto que es raya imaginada quan larga quisieremos) que no ay cosa por delicada que sea, que no tenga mayor grosseza y anchura. Entiendesse la linea como el punto en dos modos. Uno segun el Mathemtico. Y otro segun el Natural. Mathematicamente, linea es una cosa que teniendo largura, no tiene anchura ni profundidad, y no se puede ver, porque es una sola largura inventada intencionalmente cõ el

[641] A primeira definição de linha dada por Moya é a seguinte: "Del fluxo deste puncto que corre de una parte a outra se haze la línea, que en español dezimos raya; y es una cosa tan pequeña porque, ultra de que es larga, no ay cosa, por delicada que sea, que no tenga mayor grosseza y latitud. Sus extremos son dos punctos"[Juan Pérez de Moya, 1562, p. 305].

> entendimiento: para denotar el principio, o fin, o alguna parte de la Superficie. Linea como el Natural la toma, es una raya hecha con tinta desta manera ——— La qual por delicada y sutil que se haga se puede su anchura ver y dividir [Juan Pérez de Moya 1573b, p. 6].

Por outro lado, enquanto no seu primeiro trabalho geométrico, Moya apenas distingue entre linha recta e linha curva[642], restringindo as suas definições ao plano, no *Tratado de Geometria* a classificação é não só mais minuciosa, como mais abrangente. Moya começa por considerar que as linhas são de dois "géneros", recta e curva, para logo em seguida indicar várias espécies de cada um deles. No primeiro género estão as "lineas paralelas", ou "equidistantes", as "perpendiculares", ou "cathetos", a "diagonal" ou "diametral" e a "hypothumisa" ou "obliqua". No segundo está a "flexuosa", a "spiral", a "eliaca" e a "circular".

É muito curioso observar como Moya nota a diferença entre rectas paralelas e não complanares, deduzindo-se das suas palavras que a não intersecção de duas rectas não é condição suficiente para que elas sejam paralelas.

> Lineas Paralelas, o Equidistantes son aquellas que siendo hechas en una misma superficie, aunque se alarguen por una o outra parte, no concurren, quiero dezir, que no se juntan, y porque se puden hazer líneas que aunque se alarguen en infinito no se junten, y no ser paralelas, no se diran paralelas las líneas que por mucho que se alarguen no se junten [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 7].

É indiscutível a importância de que este assunto se reveste para o nosso autor, que define com exactidão o que se entende por rectas paralelas:

> Y es de advertir, que para dezirse lineas Paralelas han de tener tres condiciones, sin faltar ninguna dellas. La una, que aunque se alarguen por qualquiera vãda no se juten. La outra, que esten en una misma superfície, porque si una línea se imaginase sobre la superfície de la tierra, y outra, o otras en el ayre no se diran Paralelas, aunque tengan las otras condiciones. La tercera, que esten tan apartadas (como dicho avemos) enel principio, como enel medio, y como enel fin [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 7].

---

[642] "Esta linea se divide en recta e curva. Linea recta es la que va por más breve camino de um termino a outro o de un puncto a outro. Linea curva es la que no va por el más breve camino" [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 305].

Os exemplos dados não se limitam a casos de linhas vulgarmente utilizadas na geometria elementar, como a diagonal de um rectângulo ou o diâmetro de um círculo. Moya procura exemplos noutros campos, como a astronomia e a arquitectura. É com um exemplo da astronomia que Moya explica a diferença entre uma superfície "plana", "concava" e "convexa".

> Las superfícies Concava, y Convexa, se demuestran en los cuerpos Curvos, o en los Orbes de los cielos, asi como en un vaso: la parte por dõde el agua o lo que cõtiene toca el vaso, se dize Superficie Concava, y la parte de fuera del mismo vaso, se dize Superficie Convexa. O como en un cielo la parte que mira hazia nosotros, se dize Superficie Concava, y la parte que cae hazia el Empireo se dize Superficie Convexa [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 9].

Nesta obra, Moya usa as ideias dos filósofos para transmitir um conceito mais preciso do significado de medir do que o apresentado nos seus trabalhos anteriores, pondo em evidência o aspecto da homogeneidade:

> Opinion comum es de Philosophos, que toda medida es Omogenea con la cosa que se mediere, quiero dezir de aquella misma espécie, y ansi medir una linea, o distancia, no sera otra cosa sino medirla con una outra medida, o distancia larga de un pie, o palmo, o vara, para saber quantas medidas de cualquiera desta famosas ay, o se contienen en la tal distancia, o largura que se midiere [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 96].

Nos *Fragmentos* não é feita referência à vara nem ao estadal, unidades de medida que foram utilizadas no seu primeiro trabalho geométrico, na resolução de problemas relacionados com a medição de terras[643]. Mas no *Tratado de Geometria*, estas unidades de medida incluem-se num vasto leque de unidades apresentado[644]. Por vezes, Moya usa unidades diferentes para indicar a mesma medida, possivelmente com o objectivo de chegar a um público mais vasto. É o que acontece, por exemplo, quando se refere à "milla" e ao "estadio", que eram as unidades usadas pelos Latinos e pelos Gregos, respectivamente[645].

---

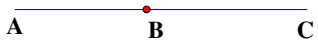
[643] Embora Moya recomende a leitura da *Arithmetica*, onde num dos nove livros explora esse assunto com mais detalhe. Entre os temas tratados no "Libro VIII da Aritmetica, incluem-se capítulos com os seguintes títulos: De Mensuris; De Cúbito; De Passo; De medidas áridas", todos relativos a medidas lineares [Juan Pérez de Moya, 1562, p. 641-645].

[644] [*Cf.* Anexo 5].

[645] Moya refere que a unidade de distância usada pelos Franceses, Espanhóis e Alemães era a *légua* e pelos Persas era a *parafanga* [Juan Pérez de Moya, 1573, p. 97-98].

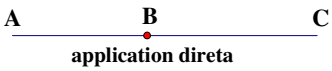
A noção de ângulo introduzida nos *Fragmentos Mathematicos* é também revista no *Tratado de Geometria*, embora não sejam feitas alterações significativas. Tal como nas linhas e nas superfícies, os ângulos são classificados de acordo com o género em quatro categorias: rectilíneo, curvilíneo ou tortuoso, mixto e esferal, conforme o tipo de linhas que os formam. Nos três primeiros casos as linhas que definem o ângulo são, respectivamente, ambas rectas, ambas curvas e uma recta e outra curva, como os seus nomes sugerem, mas sempre num plano. O ângulo esferal é aquele que se imagina pelo "tocamiento" de alguns círculos da "Esfera". Em cada um destes géneros, o autor considera três espécies: agudo, recto e obtuso, mas não inclui o ângulo raso na classificação que faz, pois impõe a não colinearidade dos lados que formam o ângulo (quando menciona a "aplicacion no derecha de dos lineas"). Os termos em que estes conceitos são apresentados são muito semelhantes aos utilizados por Tartaglia, na terceira parte do *General Trattato*, como podemos ver comparando os dois textos.

Angulo Plano es un tocamiento, o aplicacion no derecha de dos lineas rectas, o Curvas, hechas en alguna superficie Plana. Dize tocamiento no derecho, porque si se tocassen derechamente como estas dos lineas a.b. y b.c., que se toca enel punto b., no



se causaria angulo com esta aplicacion, o tocamiento derecho, y no seria outra cosa, sino hazer de dos lineas una [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 9-10].

L'Angolo piano (come diffinisse Euclide) è il toccamento, & l'applicatione non diretta di due linee, si rette, come curve, che la ispansione di quelle sai una superficie piana.(…) La prima è il toccamento di due linee, nondimeno tal toccamento per se solo non formaria angolo, quando l'applicatione delle due linee fusse diretta alla similitudine delle due linee ab & bc



lequali si toccano in ponto b, di una diretta applicatione, & per esser tal applicatione diretta non formano angolo, ansi delle due linee se ne forma una sola, laqual è tutta la abc [Nicolo Tartaglia, 1560 a, p. 1].

O capítulo II do *Tratado de Geometria* inclui, além das definições que já referimos, uma grande variedade de outras que Pérez de Moya considera necessárias no estudo da geometria e que são em maior número do que as que constam nos *Elementos* de Euclides[646].

[646] [*Campanus of Novara and Euclid's Elements*, 2005, pp. 55-58].

Sem pretendermos fazer uma nomeação exaustiva, podemos dizer que são dadas as definições de termo, figura, círculo, círculos concêntricos e excêntricos, círculos iguais, diâmetro, semicírculo, porções de círculo (maior e menor), sector de círculo, figuras rectilíneas: triângulos (classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos), quadriláteros (quadrados, paralelogramo rectângulo e não rectângulo, "helmuayam" ou rombo, semelhantes a helmuayam, ou romboíde, "helmuarif" ou trapézio, distinguindo os trapézios em rectangulares, isósceles e escalenos), pentágonos, hexágonos, heptágonos, e assim sucessivamente (num processo infinito!), figuras mistas ("lenticular"), figuras inscritas e circunscritas, figuras semelhantes, figuras isoperímetras e área. Quando comparamos este conjunto de definições com as dadas por Peletier na sua *De l'usage de Gometrie*[647] compreendemos que o uso prático que Moya vai fazer da geometria é muito mais extenso do que o que o matemático francês propôs na referida obra.

A primeira vez que Moya usa o termo "peticiones"[648] (petições) é nos *Fragmentos Mathematicos*, onde lhe confere o mesmo significado que os postulados têm nos *Elementos* de Euclides. As petições são, como explica baseando-se no texto de Aristóteles[649], proposições gerais decorrentes imediatamente das definições, que o leitor deve aceitar como princípios primeiros indemonstráveis ("princípios primeros indemonstrables") e que, uma vez aceites, lhe permitirão, juntamente com as definições e as noções comuns, demonstrar tudo o que diz respeito à respectiva ciência, ou arte. O conceito de petição é novamente abordado em 1573, onde Moya escreve:

> Como toda qualquiera arte tenga ciertos principios, ò pressupuestos agenos de demostracion: por evitar el processo en infinito, que demostrandose se seguiria. Con los quales y con las comunes sentencias y diffiniciones se prueva, y demuestra la tal disciplina, que es el propio saber [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 17-18].

Este tipo de explicação do "porquê" e do "para quê" da introdução de um conceito ou assunto não se observa nos *Elementos* de Euclides, mas é comum em trabalhos de autores que têm preocupações didácticas. Moya nota que é possível, por meio de exemplos que

---

[647] Peletier apenas menciona as definições de ponto, linha, linha recta, linha oblíqua, superfície, superfície plana, ângulo recto rectilíneo, ângulo agudo rectilíneo, ângulo obtuso rectilíneo, círculo (respectivos centro, circunferência e diâmetro), linhas paralelas ou equidistantes, triângulo ortogonio, oxigónio e ambligónio, quadrado (*diâmetro* do quadrado), paralelogramo rectângulo, rombo, rombóide e trapézio.

[648] O nome petição está inteiramente relacionado com o modo como são apresentados os enunciadas: "se pide licẽcia para…" (pede-se licença).

[649] Aristóteles, *Libro I posteriorum.* Nos *Fragmentos Mathematicos* esta indicação está ausente.

recorrem ao uso da régua e do compasso, convencer da evidência das petições os adversários mais renitentes. Por exemplo, fixemos a nossa atenção na petição seguinte: "todos os ângulos rectos são iguais entre si". Moya propõe duas possibilidades de prova: o uso da *esquadra* (o esquadro) e o recurso ao compasso, baseando cada uma delas numa figura (figura 52)

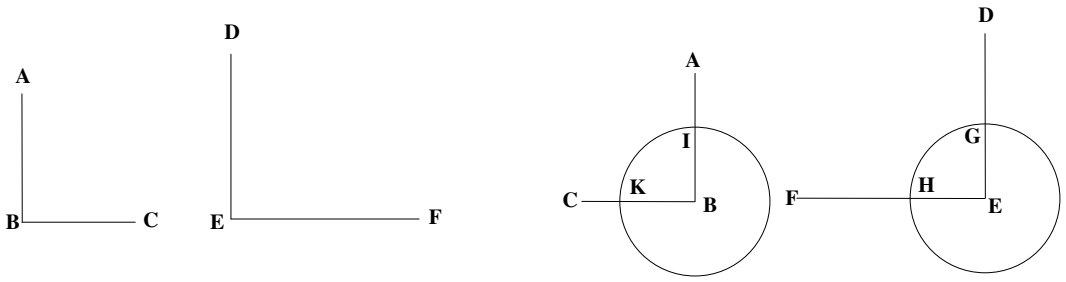


Figura 52: Moya recorre a estas figuras para justificar que todos os ângulos rectos são iguais entre si [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp.18-19].

E explica que, ajustando ambos os ângulos ao esquadro se vê que eles são iguais, independentemente do comprimento dos lados que os formam. Quando Moya introduz a "esquadra"[650] observa que também se pode averiguar a perfeição da construção deste instrumento recorrendo à penúltima proposição do livro I dos *Elementos,* ou seja, à proposição conversa do teorema de Pitágoras[651]. No entanto, é ao compasso que recorre para indicar uma explicação de suporte visual mais correcta e convincente, dizendo:

> Y aunque no ay demonstracion para provarlo a quien lo negare, podremos practicalmente hazer que se vea à ojo con uno compass porque abriendole en la distancia que nos agradare, y poniendo el un pie enel puncto B, que es enel un angulo, y haziendo cõ el otro un circulo en blanco, ò con tinta, y cõ la misma abertura, poniendo otra vez el un pie enel otro angulo E, y haziendo otro circulo, hallaras que la parte de circunferencia que las dos lineas del un angulo cortan, es ygual à la que cortan las lineas del otro (como paresce en esta figura) porque la quantidad de circunferencia GH del un triangulo, es ygual à la parte IK del otro, y cada una dellas es una quarta del circulo, que es lo que vale el angulo recto causado enel centro del circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 18-19].

[650] Saber construir uma "esquadra" é muito importante, pela utilidade que este instrumento tem para os carpinteiros. Por isso Moya lhe dedica um capítulo nos *Princípios de Geometria* [Juan Pérez de Moya, 1584, pp. 46-47].

[651] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 95].

A construção (dada no lado direito na figura anterior) remete para um argumento válido que pode ser enunciado do seguinte modo: em circunferências iguais arcos iguais são subtensos por cordas iguais.

3.3.2. Divisão de um segmento em partes proporcionais

Já atrás nos referimos ao estudo feito nos *Fragmentos Mathematicos* sobre a divisão de um segmento em partes iguais[652]. No *Tratado de Geometria*, Moya retoma este tema, tratando diversas questões de divisão de um segmento em partes proporcionais, como a determinação do quarto proporcional entre três segmentos, a construção de dois segmentos em contínua proporção de modo que o quadrado de um seja igual à soma dos quadrados dos outros dois, a construção de um segmento em contínua proporção com outros dois segmentos dados e a divisão de um segmento em partes proporcionais às de outro segmento já dividido. Entre elas contam-se a construção do meio proporcional entre dois segmentos dados e a divisão de um segmento segundo a proporção que tem o meio e dois extremos, também conhecida por média e extrema razão, que têm, como veremos a seguir, uma grande aplicabilidade.

a. Determinação do meio proporcional entre dois segmentos

Moya usa a determinação do meio proporcional entre dois segmentos como subsidiária de diversas construções; por exemplo, para construir um quadrado com a mesma área de um rectânglo dado[653], um triângulo isósceles em que o ângulo da base é duplo do ângulo no vértice[654], e, na aritmética, para mostrar como é se pode obter, exactamente, raízes quadradas de números irracionais, se os números "forem reduzidos a quantidades de linha"[655]. Nesta última aplicação, menciona o livro I do segundo tomo de Nicolo Tartaglia, provavelmente numa alusão ao *General Trattato*[656]. Consultámos esta obra[657], onde Tartaglia refere que, embora não se possa determinar um número racional (inteiro, fraccionário ou misto) que seja igual à raiz quadrada de um número não quadrado perfeito, é

---

[652] [*Cf.* Terceira Parte, 3.2.3].

[653] [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 68-69].

[654] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 53].

[655] [Juan Pérez de Moya 1568, pp. 63-64].

[656] Pensamos que Moya se refere ao *General Trattato di Numeri, et Misuri* [Venegia, 1556] embora o assunto referido seja tratado no *Libro Secondo della Seconda* e não no *Libro I*, como Moya afirma.

[657] [NicoloTartaglia, 1556, f. 32r]. A folha indica o nº 32, mas esta numeração está errada; devia ser 30.

possível obter-se um segmento de recta cujo comprimento seja exactamente expresso por essa raiz. Tartaglia refere dois casos: o primeiro diz respeito à determinação do número composto $\sqrt{6}$, que decompõe como produto de 2 por 3, usando estes factores na elaboração da figura que apresenta; o segundo é o caso de um "número primo". Tartaglia sublinha que é sempre possível decompor um número como produto de 1 por ele mesmo e usa essa decomposição para obter $\sqrt{7}$.

Moya toma como exemplo a determinação de $\sqrt{4}$ e $\sqrt{7}$, seguindo a resolução de Tartaglia para obter $\sqrt{4}$ (figura 53). Começa por desenhar um segmento [AB], de 4 "tamaños" ,ao qual ajusta um segmento [AC], de um "tamaño". Em seguida, desenha a semicircunferência cujo diâmetro é o segmento [BC], de 5 "tamaños" e, depois, traça a perpendicular ao diâmetro pelo ponto A, de ajuste dos dois segmentos menores. Esta perpendicular intersecta a semicircunferência em D. A raiz quadrada de 4, obtida "por via de linea", é [DA].

> Como si quisiessemos sacar rayz de una linea que tiene 4 tamaños, como la linea AB a esta línea o a outra qualquiera por regla general le añadiras un tamaño de los que ella tuviere, y seran eneste exemplo 5. y lo que se añadio es el pedaço CA. Luego sobre toda esta linea de 5 tamaños descrive un semicirculo, de modo que cayga en ângulos rectos sobre el punto A, como se mostro en el capitulo 18. y fera la linea AD. Mira las quantidades que esta linea tuviere, o tamaños semejantes a los de la linea primera AB, que essos seran rayz de la dicha línea [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 63].

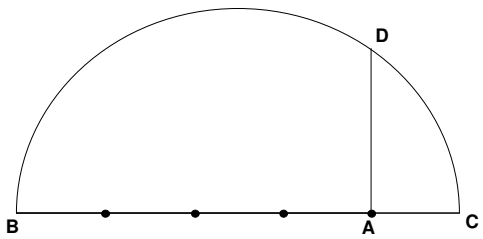


Figura 53: Determinação geométrica da raiz quadrada de 4. O segmento [AB] tem 4 unidades, o segmento [AC] tem 1 unidade e a semicircunferência tem centro no ponto médio de [BC]. O segmento [AD] tem 2 unidades [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 64].

Para justificar porque se soma 1 à quantidade da linha da qual se quer a raiz, Moya faz referência a Elementos VI, 9, acrescentando que "la unidad ni multiplicando cresce, ni partiendo diminuye"; mas não explica o que estas palavras significam. Encontramos a explicação no *Tratado de Geometria*, onde o procedimento utilizado é descrito pela mesma

construção, embora aplicado a dois segmentos de recta cujas grandezas numéricas não estão presentes (figura 54):

> Si fueren dadas dos lineas como qera, y quisieres entre ellas hallar una outra que sea media proporcional ten la orden deste exemplo. Seã las lineas propuestas A y B junta (segun linea recta) la una com la outra, y quedara una linea FEC juntas enel punto E. Luego sobre toda esta linea FEC descrive un medio circulo como muestra FDC despues del punto E (que fue donde la una linea se junto cõ la otra) saca la perpendicular hasta la circunferencia, como muestra ED la qual linea ED sera media proporcional entre dos lineas A e B propuestas, en dõde hallaras que la proporcion de la EF a la DE[658] es asi como de la DE a la EC.

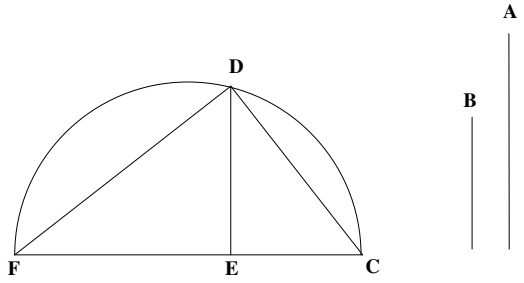


Figura 54: Construção do meio proporcional entre os segmentos A e B (notação de Moya que, no entanto, usa letras minúsculas). [FE] corresponde a A e [EC] corresponde a B. DE é o meio proporcional entre [FE] e [EC] [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 27-28].

Moya observa que o paralelogramo cujos lados são os segmentos dados, A e B, representados por [EF] e [EC], respectivamente, é "igual" ao quadrado de lado [DE] porque $\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}$:

> (…) el parallelogramo que tuviere por el lado mas largo la linea FE y por el menor la linea EC sera ygual al quadrado que tuviere por lado la linea DE, que es la que dezimos media proporcional [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 28].

b. Divisão de um segmento em média e extrema razão

A importância da divisão de um segmento em média e extrema razão ou, como Moya lhe chama, segundo a proporção que tem o meio e dois extremos está bem visível nas diferentes referências que lhe são feitas nos *Elementos* de Euclides. Ela foi explicitamente mencionada em *Elementos* II, na construção de um quadrado com a mesma área de um rectângulo dado. Nessa altura ainda o significado de proporção não tinha sido introduzido na

[658] No texto há um lapso: em vez de DE está escrito EC.

obra de Euclides e, por isso, o termo proporção não é utilizado na proposição do livro II, sendo o enunciado assim redigido: "Cortar uma linha recta dada de modo que o rectângulo contido pelo todo e um dos segmentos seja igual ao quadrado sobre o segmento restante"[659]. Em *Elementos* IV, Euclides utiliza a divisão de um segmento em média e extrema razão a propósito da construção do pentágono regular. Em *Elementos* V, Euclides dá a definição de proporção e em consequência disso, a questão proposta em Elementos II, 11 assume no livro VI uma formulação diferente, passando a enunciar-se do seguinte modo: "É possível cortar qualquer segmento segundo a proporção que tem o meio e dois extermos"[660]. É precisamente recorrendo à definição 3 dada em *Elementos* VI que Moya mostra como obter o ponto que permite dividir um segmento em média e extrema razão[661].

A descrição da construção feita por Moya tem muitas semelhanças com a que Tartaglia apresenta no *General Trattato*[662] e a figura subsidiária usada por ambos é a mesma.

Pongamos por caso, que quieres dividir la linea AB. Descrive un quadrado que tenga por lado tanto como la propuesta linea AB como muestra ACDB. Luego el lado DB dividele en dos yguales partes en el punto E del qual sacaras una linea hasta el punto A, como muestra EA. Luego alarga el lado EB tãto como fuere larga la linea EA como muestra EBG e deste modo esta linea BG sera ygual a la parte mayor desta divisiõ, por lo qual cortando la dicha linea AB enel punto H quedara la linea AB dividida en dos partes, la una AH la otra HB entre las quales dos lineas sera media proporcional la

Data linea AB volendola dividere secondo la proportione havente il mezo, & duoi estremi, si puo procederei n piu modi, il piu commune è a procedere secondo, che fa Euclide nella undecima del secondo libro, cioe descrivere il quadrato AD di tal línea, & dividere poi il lato DB in due parti eguali in ponto E, & dapoi tirare la AE & fatto questo allongarela EB per fina in F, talmente, che EF sai eguale alla AE & cosi la BF sara eguale alla maggiore parte di tal divisione, e pêro se dalla data línea AB ne segaremo la BH eguale alla BF fará essequito il propósito cioe haveremo divisa la detta línea

[659] [Heath, T. L., 1965, p. 402].

[660] Este conceito aparece, também, no livro XIII, nas proposições 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 11, quando é explicada a inscrição dos sólidos platónicos na esfera, nomeadamente no caso do tetraedro, e no livro apócrifo XIV, nas proposições 2, 3 e 9.

[661] No decurso da explicação é dada, em nota de margem, a indicação "lee la propor. 29 del libr. 6 de Euclides", o que mostra Moya se estava a referir à versão de Campano, onde a numeração da proposição corresponde à dada por Moya: *Elementos* VI, 29 [Busard, H. L. L., 2005, pp. 225-226].

[662] Quando na preparação deste trabalho consultei o CD de *Il Giardino di Archimede*, contendo a digitalização do *General Trattato*, esta folha não estava disponível. Foi graças à amabilidade de Jens Høyrup que pude obtê-la de imediato. A numeração desta folha não está, contudo, conforme com a das outras.

linea GB ò la BH. Y assi digo, que el producto de toda la linea AB en la parte menor que es AH sera el parallelogramo ACKH sera ygual al cuadrado de la otra parte mayor HB ò BG, que sera el cuadrado HGFB como lo demuestra Euclid en la 11 proposiciõ del segundo, y la proportione de toda la linea AB a la parte mayor BH sera como la proporcion que ay de la dicha mayor BH à la menor AH que es lo que se pide [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 28].

AB secondo la detta proportiõe in ponto H talche il dutto di tutta la línea AB nella sua menor parte AH (che sara il retangoli AK) sara eguale al quadrato dell'altra parte HB che sara il quadrato BG (come dimostra Euclide nella detta undécima del secondo) e pêro la proportione di tutta la línea AB alla sua magiore parte BH sara come la proportione della detta maggior parte BH alla menor AH che sarebbe il proposito [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 7v].

Moya explica a construção socorrendo-se de uma figura (figura 55). O procedimento proposto, que se baseia em *Elementos* II, 11, pode resumir-se do seguinte modo: Dado um segmento [AB], suponhamos que se pretende determinar o ponto desse segmento que o divide em média e extrema razão. Primeiro, descreve-se o quadrado [ABCD], toma-se o ponto médio, E, de [DB] e, traça-se [EA]. Em seguida, determina-se o ponto G, da semi-recta $\dot{D}B$, tal que, $\overline{EG} = \overline{EA}$. Por fim, toma-se H, em [AB], de modo que $\overline{BH} = \overline{BG}$. O rectângulo [ACKH] tem área igual à do quadrado [HBGF] e, portanto, $\overline{BH}$ é meio proporcional entre $\overline{AH}$ e $\overline{AB}\ \overline{AB}$, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}$.

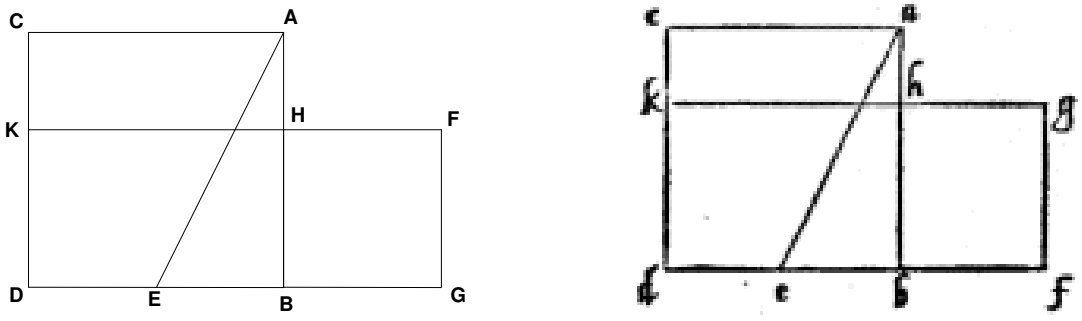


Figura 55: Divisão de um segmento segundo a proporção que tem o meio e dois extremos: à esquerda a reconstituição da figura de [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 28]; à direita a figura apresentada em [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 7v].

Depois de estudar este problema, Moya admite que a proporção que existe entre os segmentos se verifica também com os números ("puedese mostrar este effecto con numeros") e estabelece o paralelo entre ambos. Em notação simbólica actual os passos

dados podem descrever-se pelas operações aritméticas seguintes: $\overline{AB} = 4$; $\overline{EA} = \sqrt{20}$; $\overline{BG} = \overline{HB} = \sqrt{20} - 2$; $\overline{AH} = 4 - \left(\sqrt{20} - 2\right) = 6 - \sqrt{20}$. O resultado final conduz à igualdade $\frac{4}{\sqrt{20} - 2} = \frac{\sqrt{20} - 2}{6 - \sqrt{20}}$, que Moya traduz utilizando a simbologia introduzida na sua *Arithmetica,* pelo esquema:

Moya observa que nenhuma das razões indicadas tem significado, mas que efectuando os cálculos como sugerem os traços que unem os extremos e os que unem os meios chega-se a resultados iguais.

Não é a primeira vez que Moya recorre aos números para aplicar e até generalizar conceitos que antes trata geometricamente. Por exemplo, nos *Fragmentos Mathematicos*, depois de mostrar como se constrói, com régua e compasso, um quadrado com a mesma área de uma figura F dada, Moya diz que a regra geral consiste em determinar a área da figura F, e, em seguida, determinar a raiz quadrada do resultado obtido. Essa raiz é o lado do quadrado pedido[663].

3.3.3. Questões relativas à construção de polígonos

Além da construção que ensina a divisão de um segmento em média e extrema razão há uma outra que Moya reconhece ser de grande utilidade para fazer lâminas de astrolábio: a da circunferência que passa por três pontos dados. Esta aplicação prática justifica, por si só, a importância que Moya dá ao estudo deste assunto incluindo-o nos *Fragmentos Mathematicos* e, depois, no *Tratado de Geometria*.

Quando revisita este tema no *Tratado de Geometria* Moya acrescenta-lhe algumas observações que mostram maior reflexão sobre o assunto e permitem minimizar o trabalho de construção; referimos, a título de exemplo, duas delas. A primeira é uma chamada de atenção para facto de, no caso particular do triângulo ser rectângulo, ser suficiente determinar o ponto médio da hipotenusa para ter o centro da circunferência circunscrita. A segunda consiste em notar que a posição do centro da circunferência circunscrita ao triângulo permite a sua classificação quanto aos ângulos.

---

[663] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 84].

A observação de Moya é semelhante à dada no *General Trattato*, inclusive nos termos em que é referida. Vemos, por exemplo, que a propósito da possibilidade de classificação do triângulo Moya invoca, tal como Tartaglia, o "Correlario" da proposição *Elementos* IV, 5, para afirmar o seguinte:

Nota, que estas reglas te pueden servir para conocer de que specie es un qualqera triangulo propuesto. Porque si el triangulo fuere Orthogonio, el centro del circulo que se le circunscriviere cae enel lado opuesto al angulo recto, y si fuere Ambligonio, el centro caera fuera del triãgulo, y si fuere Oxigonio, caera dentro del triãgulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 59].

Perle cose dette è manifesto che se il triangolo serà orthogonio il centro del cerchio da circonscrivere cade in mezzo del lato che è oposto all'angolo retto se quel serà ambligonio il centro cade di fuora del triangolo. Ma se quello serà ossigonio cade dentro del triangolo, & è converso, quando il centro del cerchio cade sopra il lato .b.c. l'angolo che sta nel mezzo cerchio (cioè l'angolo .a.) è retto, & se il detto centro cade de fuora del triangolo è ambligonio, ma sel cade didentro il será ossigonio [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 6r].

A construção de uma circunferência por três pontos não colineares (ou seja, circunscrita a um triângulo) é um assunto estudado em praticamente todas as obras de autores renascentistas que consultámos, fossem elas de carácter prático ou teórico[664]. Numa nota de margem que acompanha a descrição da construção, Moya refere Peletier, mas não menciona o nome do texto que consultou. Possivelmente terá sido a obra *Iacobi Peletarii in Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum*, publicada em *Lyon,* em 1557[665]. Peletier também inclui uma figura semelhante (figura 56) no seu trabalho *De l'usage de Geometrie*[666], mas este foi publicado cinco anos depois dos *Fragmentos*. Tal como na construção de Moya, na de Peletier os lados do triângulo não estão representados; apenas são visíveis os vértices, o que constitui um procedimento mais abreviado, que era o usado pelos "artífices".

---

[664] Cardano explora este tema no penúltimo capítulo da sua *Practica arithmetice, & mensurandi singularis* intitulado "De Geometricis questionibus" [Gerolamo Cardano, 1539, cap. 67] repetindo-o na *Practica Arithmeticæ generalis omnium copiosíssima & utilíssima* [Gerolamo Cardano, 1569, p. 213]. É, também, tratado em [Ioachim Forcio Ringelberg, 1531, p. 483] e em [Jacques Peletier, 1573, p. 42].

[665] Consultámos o reservado Res. 07/2/12 da Universidade de Sevilha, Libro quarto, problema 5, propositio V. onde encontrámos (p. 129) uma figura análoga à que apresentámos acima.

[666] [Jacques Peletier, 1573, p. 42].

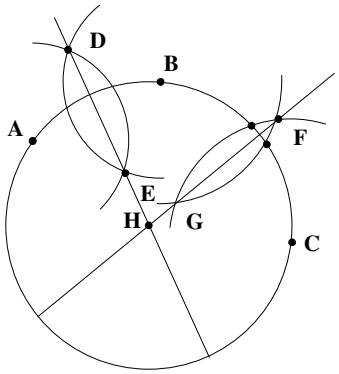


Figura 56: Construção que permite determinar o centro de uma circunferência que passa por três pontos dados, a saber: A, B e C [Jacques Peletier, 1573, p. 42].

Peletier nota que o conhecimento de três pontos é suficiente para determinar o centro da circunferência dizendo que "três pontos têm tanta força na circunferência como dois pontos têm na linha recta". Mas, como se sabe, esta conclusão só é verdadeira se os pontos não forem colineares. Este aspecto relativo à colinearidade, que é negligenciado no texto de Peletier, não passa despercebido a Serlio, que impõe a não colineridade dos três pontos logo na primeira de duas construções que apresenta (figura 57):

> Si trois poinctz estoient gectez a l'adventure sur une superfície placte, pourvoeu qu'ilz ne soient en ligne droicte. Qui vouldra faire passer le cõpas par dessus, fauldra qu'il se serve de cette practique. Soit tirée une ligne depuis de premier jusques au second, puis soit divisée par le meillieu, & dessus assiz l'esquierre ainsi que cete figure demonstre: & du long de l acoste dudict esquierre soit tirée une ligne cõtinuelle. Apres depuis le deuxiesme poinct jusques au troisiesme, soi sembleblemente tirée une autre ligne, & ou ces deux lignes se viendront a croyser, la se trouvera le centre des trois poinctz. Encores qu'ilz soient mis en toute sorte que l'on vouldra[667] [Sebastiano Serlio, 1545, f. 11v].

[667] Nossa tradução livre: Dados três pontos ao acaso mas que não estejam sobre uma linha recta, o modo de passar por todos os três com o compasso será este. Tire-se uma linha recta de 1 a 2 e essa seja dividida pelo meio, e colocado o esquadro como se vê, e tirada uma linha encostada ao esquadro, e de 2 a 3 seja tirada uma outra linha fazendo o mesmo, e onde se intersectarem as duas linhas, aí será o centro dos três pontos.

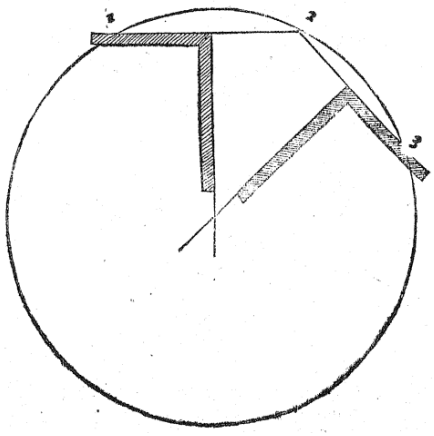


Figura 57: Construção da circunferência que passa por 3 pontos [Sebastiano Serlio, 1560, f. 9r].

Neste ponto, o texto de Serlio é muito curioso pela ligação imediata que estabelece entre o conceito geométrico e o aspecto prático. Serlio chama a atenção para um dos problemas com que se pode deparar um arquitecto: a identificação das dimensões de um objecto circular do qual se conhece apenas um pequeno fragmento. E nota que, por mais pequeno que esse pedacinho seja ele permite a resolução do problema desde que inclua uma parte do bordo.

Para mostrar como a construção da circunferência que passa por três pontos é eficaz na resolução deste problema, Serlio apresenta a figura que mostramos abaixo (figura 58).

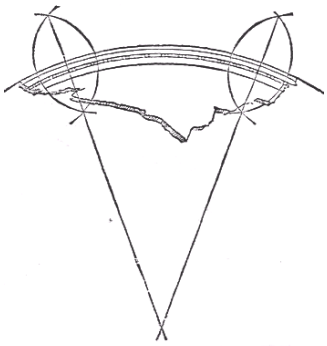


Figura 58: Aplicação prática da construção da circunferência que passa por três pontos [Sebastiano Serlio, 1560, f. 9v].

a. Construção de triângulos

No *Tratado de Geometria* o estudo dos triângulos assume características diferentes das que se apresentaram nas obras anteriores de Pérez de Moya, com a introdução de novos conceitos e construções[668].

[668] O estudo dos triângulos é apresentado no capítulo XVI, dividido em seis *artigos* dos quais apenas o artigo IV, intitulado "Muestra hazer triangulos en numero determinado de tamaños por cada lado", contém temas tratados em obras anteriores [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 52-53].

Moya começa por sublinhar a diferença entre problema ("problema"), que é uma proposição que depende da régua e do compasso para a sua realização, e teorema ("teorema") que é uma "proposicion" especulativa que não depende de nenhuma operação manual[669]; e nota que, no capítulo dos triângulos, todas as proposições que trata são problemas. Este conceito de problema é muito semelhante ao que Tartaglia refere na *Quinta parte* do *General Trattato*, onde é usado exactamente com o mesmo sentido, embora explicado num texto mais prolixo.

> Problema es una proposicion que tiene necessidad en su declaraciõ de alguna obra manual, assi como se dezimos dada una linea dividirla en dos, o tres, o mas partes yguales, o dada una linea hazer sobre ella un triangulo, las quales cosas no se pueden hazer sin obra manual con compas y regla [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 50].

> Dico adunque che questo nome problema è vocabolo greco, il quale significa quella propositione, dove si proponga da operare, overo da essequire manualmente qualche cosa. Essempi gratia s'io dicesse sopra di una data retta línea potiamo designarui un triangolo equilatero, tal parlare è detto problema, similmente se io dicesse, voglio dividere questa linea ab in due parti eguali, tal prositione, cioe tal mio dire sarebbe chiamato problema, similmente se io dicessi volendo dividere la detta línea ab in cinque parti eguali, tal mio parlare sarebbe pur un problema, & cosi si debbe intendere nele altre simil propositioni (…) [Nicolo Tartaglia, 1560b, f. 1r]

Outros autores renascentistas utilizaram, em obras suas, a palavra problema com o mesmo significado que Moya lhe deu. Peletier, por exemplo, divide a sua *De l'usage de geometrie* em dois capítulos intitulados "Des diffinitions" e "Des problemes", onde este último consiste essencialmente, num conjunto de construções com régua e compasso.

No capítulo dos triângulos do *Tratado de Geometria* Moya explica como se constroem diversos triângulos, descrevendo cuidadosamente o procedimento a seguir, que justifica sumariamente com base nos *Elementos* de Euclides. Moya reconhece que nem todas as provas matemáticas dadas são acessíveis a alguns dos leitores, mas para estes ele propõe

[669] Como exemplo de teorema, Moya indica as proposições *Elementos* I, 4 e I, 5 [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 50].

como alternativa que façam a verificação com o compasso. É o que acontece, por exemplo, no caso do triângulo equilátero onde, depois de justificar a construção, Moya diz:

> E el que no entendiere esta provacion Mathematica, pruevelo naturalmente segun el sentido con un compas los três lados del dicho triangulo, y hallar-lo ha ygual [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 52].

Este é, aliás, um aviso que se repete em vários momentos do texto, e que em nosso entender deixa claro que, embora preocupado com o utilizador mais prático, Moya procura não omitir neste seu trabalho as justificações teóricas que julga importantes[670].

3.3.4. Problemas de inscrição e circunscrição de figuras planas

O livro IV dos *Elementos* de Euclides contém dezasseis proposições, todas relativas à inscrição e circunscrição entre polígonos e círculos. Nas quinze primeiras, Euclides mostra como inscrever um triângulo, um quadrado, um pentágono e um hexágono, num círculo; como circunscrever a um círculo estes polígonos e como circunscrever um círculo a estes polígonos. Finalmente, na última proposição, explica como se pode inscrever num círculo um polígono de quinze lados. São estes problemas que Moya resolve com régua e compasso, referindo, sempre que acha necessário, as proposições dos *Elementos* em que se baseia, sem no entanto as enunciar ou demonstrar. Já nos *Fragmentos Mathematicos* o assunto tinha sido incluído, mas de um modo muito breve e com referência a apenas alguns casos. No *Tratado de Geometria* o tema é retomado e desenvolvido num estudo muito mais completo e aprofundado.

Ao lermos o conteúdo da obra de Moya sobre as questões de inscrição e circunscrição, notamos uma grande semelhança com o *General Trattato*, onde Tartaglia expõe "Il modo geometrico di risolvere com il compasso, e rega li problemi del quarto di Euclide"[671]. Os problemas ("problemi") que Tartaglia resolve praticamente com régua e compasso, e nos quais usa um modo que diz ser "mais expedito e mais breve do que o de Euclides"[672], são os mesmos que Moya trata de um modo muito semelhante ao matemático italiano. No entanto, reconhecemos também algumas diferenças. A primeira diferença está

[670] Como acontece na prova de que uma certa construção conduz a um triângulo isósceles, em que Moya diz: "y pruevarase por la primera proposi. del primero de Eucli. mas el practico lo provara con el sentido naturalmente con el compas" [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 52].

[671] [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 13r-15v].

[672] [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 1v].

na ordem pela qual os problemas são apresentados: enquanto Tartaglia segue exactamente a ordenação dada nos *Elementos* de Euclides, Moya imprime um cunho mais pessoal ao estudo deste tema, tratando os problemas por outra ordem e entremeando-os, frequentemente, por outros assuntos. Mas há outras diferenças, que a seu tempo mencionaremos. Para tornarmos mais fácil o estudo comparativo entre as obras destes autores, no que respeita ao livro IV dos *Elementos*, elaboramos o quadro 11, onde registamos as proposições que Pérez de Moya estudou nos *Fragmentos Mathematicos* e no *Tratado de Geometria* e as que lhes correspondem *Elementos* de Euclides e no *General Trattato* de Tartaglia.

Euclides	Tartaglia (1560c)	Moya (1568)	Moya (1573)
Elementos IV, 1: Num dado círculo colocar uma linha recta igual a uma linha recta dada que não seja maior do que o diâmetro do círculo	Cap. IX, 1	---	---
Elementos IV, 2: Num dado círculo inscrever um triângulo equiangular com um triângulo dado	Cap IX, 2	---	Cap 32: Muestra hazer un triangulo, dentro de un circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 63]
Elementos IV, 3: À volta de um círculo dado circunscrever um triânglo equiangular com um triangulo dado	Cap. IX, 3	Cap. 32	Cap. 31: Muestra descrevir un triangulo aequilatero alrededor de un circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 62]
Elementos IV, 4: Num dado triângulo inscrever um círculo	Cap. IX, 4	---	Cap.27: En que se muestra hazer un circulo dentro de un triangulo æquilatero [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 60]
Elementos IV, 5: À volta de um dado triângulo circunscrever um círculo	Cap IX, 5	Cap 19	Cap. 23: Muestra hazer un circulo al rededor de un triangulo, de manera que con su circunferência toque à três ângulos del triangulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 59]
	Cap. IX, 6	---	Cap. 23
Elementos IV, 6: Num dado círculo inscrever um quadrado	Cap. IX, 7	Cap 19, Obs	Cap. 34: Muestra hazer un cuadrado dentro de un propuesto circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 63]
Elementos IV, 7: À volta de um dado círculo circunscrever um quadrado	Cap. IX, 8	Cap 23	Cap. 33: Muestra hazer un cuadrado alrededor de un circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 62-63]
Elementos IV, 8: Num dado quadrado inscrever um círculo	Cap. IX, 9	Cap 23	Cap. 28*:* En que se muestra saber hazer un circulo dentro de un cuadrado [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 61]

Elementos IV, 9: À volta de um dado quadrado circunscrever um círculo	Cap. IX, 10	---	Cap. 24: En que se muestra hazer un circulo de modo que cõ su circunferencia toque à los 4 angulos de un propuesto cuadrado [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 69-70]
Elementos IV, 10: Para construir um triângulo tendo cada um dos ângulos da base duplo do outro ângulo	Cap. IX, 11	---	Cap. 16. art. 5: Muestra hazer un triangulo de dos lados yguales, de tal modo que cada uno de los dos angulos de la basis sean duplo del outro [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 53]
Elementos IV, 11: Num dado círculo inscrever um pentágono equilateral e equiangular	Cap. IX, 12	---	Cap. 36: Muestra hazer un Pentágono æquilatero dentro de un propuesto circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 63]
Elementos IV, 12: À volta de um círculo circunscrever um pentágono equilateral e equiangular	Cap. IX, 13	---	Cap. 35: Muestra hazer un penthagono al rededor de un circulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 63]
Elementos IV, 13: Num dado pentágono, equilateralo e equiangular inscrever um círculo	Cap. IX, 14	---	Cap. 29: Muestra hazer un circulo dentro de un penthagono [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 61]
Elementos IV, 14: À volta de um pentágono, equilateral e equiangular circunscrever um círculo	Cap. IX, 15	Cap. 34	Cap. 25: Muestra hazer un circulo alrededor de un penthagono, que con su circunferencia toque a sus cinco penthagono, siendo æquilatero e æquiangulo el penthagono [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 60]
Elementos IV, 15: Num dado círculo inscrever um hexágono equilateral e equiangular	Cap. IX, 16	Cap. 34	Cap. 38: Muestra hazer dentro de un circulo un hexagono æquilatero e æquiangulo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 64].
Elementos IV, 16: Num dado círculo inscrever uma figura de quinze ângulos, que deve ser equilateral e equiangular	Cap. IX, 17	---	---

Quadro 11: Mostra os capítulos em que são tratadas proposições dos *Elementos* de Euclides e os que lhes correspondem no *General Trattato* [1560], nos *Fragmentos Mathematicos* [1568] e no *Tratado de Geometria* [1573].

As sete definições que Moya apresenta são as mesmas com que Tartaglia inicia o estudo do livro IV dos *Elementos*: a de figura rectilínea inscrita e circunscrita noutra figura rectilínea, a de figura rectilínea inscrita e circunscrita num círculo, a de círculo inscrito e circunscrito numa figura rectilínea; além disso, explica o que se entende por inserir um

segmento num círculo dado[673]. O significado de figura circunscrita, ou "contingente", é o que actualmente lhe atribuímos. Na *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos* estas definições não são rigorosas, pois não é mencionado o facto de as figuras, inscrita e circunscrita, necessariamente se tocarem. No *Tratado de Geometria* este problema é ultrapassado pela inclusão de uma figura onde está representado um círculo circunscrito a um triângulo. Moya sublinha que o triângulo se chama "figura inscripta" e o círculo se diz "figura circũscripta ò ambiens", porque tem dentro de si o triângulo.

A ordem pela qual no *Tratado de Geometria* são apresentados os problemas de *Elementos* IV é a seguinte:

1º - *Elementos* IV, 10: construção de um triângulo isósceles em que cada um dos ângulos da base é duplo do ângulo no vértice

2º - *Elementos* IV, 5: construção de um círculo circunscrito a um triângulo

3º - Elementos IV, 9: construção de um círculo circunscrito a um quadrado

4º - *Elementos* IV, 14: construção de um círculo circunscrito a um pentágono equilátero e equiângulo

5º - *Elementos* IV, 4: construção de um círculo inscrito num triângulo equilátero

6º - *Elementos* IV, 8: construção de um círculo inscrito num quadrado

7º - *Elementos* IV, 13: construção de um círculo inscrito num pentágono regular

8º - *Elementos* IV, 3: construção de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo

9º - *Elementos* IV, 2: construção de um triângulo inscrito num círculo

10º - *Elementos* IV, 7: construção de um quadrado circunscrito a um círculo

11º - *Elementos* IV, 6: construção de um quadrado inscrito num círculo

12º - *Elementos* IV, 12: construção de um pentágono circunscrito a um círculo

13 º- *Elementos* IV, 11: construção de um pentágono equilátero inscrito num círculo

---

[673] 1. "Una figura rettilinea si dice esser descrita in un'altra figura rettilinea, quãdo ciascun angolo della figura inscritta, tocca ciascuno lato di quella, nellaquale e descritta."; 2. "Similmente una figura vien detta esser descritta cerca a un'altra figura quãdo ciascun lato della circonscritta tocca ciascun angolo di quella cerca laquale e descritta."; 3. "Una figura rettilinea vien detta esser descritta in uno cerchio, quando ciascun angolo della inscritta tocca la circonferentia dello cerchio."; 4. "Et una figura rettilinea vien detta esser descritta cerca de un cerchio quando ciascun lato della circonscritta tocca la circonferentia del cerchio."; 5. "Similmente uno cerchio vien detto esser descritto in una figura rettilinea, quando la circonferentia del detto cerchio tocca ciascun lato de quella tal figura in la qual è descritto."; 6. "Similmente uno cerchio vien detto esser circunscrito a una figura rettilinea quando la circonferentia di quello ciascun angolo di quella tal figura, circa laquale e descrito."; 7. "Una linea retta è detta convenir in un cerchio, quando gli estremi di quella cadeno nella circonferentia di tal cerchio" [Nicolo Tartaglia, 1565, p. 1 e 2 del Libro Cuarto] e, também, em [Nicolo Tartaglia, 1560c, Cap. Primo, f. 17r].

14º - *Elementos* IV, 15: construção de um hexágono equilátero e equiângulo inscrito num círculo.

Esta ordenação não coincide com a dada na versão de Campano nem com a de Tartaglia, mas não é arbitrária; para cada caso estudado (círculo, triângulo, quadrado, pentágono) as construções de figuras circunscritas antecedem as construções de figuras inscritas.

No estudo que se segue, abordaremos apenas alguns destes problemas. A escolha foi baseada no interesse que a resolução nos suscitou, ou no interesse histórico do problema.

a. Construção de um triângulo isósceles especial

Falamos do triângulo em que cada um dos ângulos da base é duplo do ângulo no vértice. Para o construir, Moya propõe o seguinte procedimento: tomar o segmento [AB] do tamanho que se quiser. Dividir esse segmento segundo a proporção que tem o meio e dois extremos[674], já antes referida[675], obtendo-se C. Traçar a circunferência de centro A e raio de comprimento $\overline{AB}$ e marcar nela o ponto D, tal que $\overline{BD} = \overline{AC}$.

Unindo D aos pontos B e A obtém-se o triângulo pedido (figura 59).

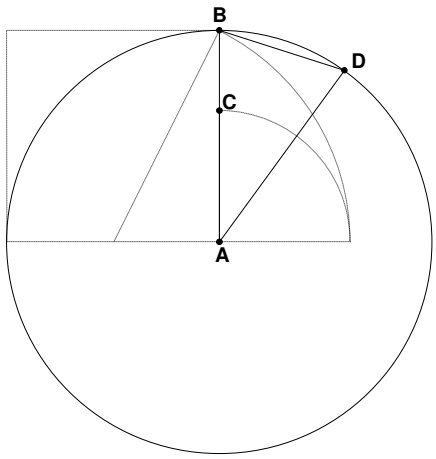


Figura 59: Construção de um triângulo isósceles em que os ângulos da base têm amplitude dupla da do ângulo no vértice. Figura baseada na explicação de Pérez de Moya [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 53].

[674] Dividir una línea, segun proporcion que tenga medio y dos extremos, es dividirla en tales dos partes que la proporcion que vuiere de toda la linea à la mayor parte aya de la mayor a la menor [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 28].

[675] [*Cf.* Terceira Parte, 3.3.2.b].

A construção é descrita com detalhe e os argumentos utilizados são os apresentados no *General Trattato*, como se pode ver pela transcrição seguinte:

Para hazer lo que en este articulo se propone, toma una linea de la quantidad que te agradare, assi como la a.b. la qual dividiras segun proporcion que tenga medio y dos estremos enel punto c. (como se muestra enel capit doze). Luego hecho centro el punto a., y estãdo el compas abierto, segun la distancia de la propuesta linea a.b. descreviras un circulo. Luego del punto a. saca una linea a la circunferencia tan distante del punto b. (estremo de la linea a.b.) quanto vuiere desde el punto a. hasta la c. que sera b.d. Ahora saca una linea desde el punto b. hasta la d. que sera ygual como havemos dicho, a lo que ay desde c. a la a. como muestra b.d. con lo qual auras hecho un triãgulo a.b.d con la condicion propuesta, como se demuestra por la proposicion decima del quarto de Euclides [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 53].

Et par far questo sia tolto una línea retta longa quato si voglia, la qual sai ab & questa sia divisa secõdo che ne insegna la seconda del secondo capo, cioe secõdo la proportione havente il mezo, & duoi estremi in ponto c talmente che quelle, che vien fatto della ab nella bc sai eguale al quadrato della ac & fatto il ponto a centro sia descritto secondo la quantita della detta línea ab il cerchio bde dentro del quale sia accommodata la línea bde eguale alla línea ac & sai produtta la línea da. Hor dico il triangolo abd esser tal qual è stato proposto, come si dimostra sopra la decima del quarto di Euclide, cio è che l'uno, e l'altro di duoi angoli abd et adb che sono sopra la basa bd, è doppio al terzo, chioe al angolo a ch'è l propósito in quanto alla pratica di questo problema [NicoloTartaglia, 1560c, f. 14v].

Moya não faz qualquer alusão à relação existente entre um triângulo nestas condições e um pentágono regular e não utiliza este conhecimento quando, num capítulo mais adiante[676], mostra como se constrói um tal pentágono. É possível que o facto de o problema não poder resolver-se com "modos naturais", como observa Tartaglia[677], tenha contribuido para esta omissão de Moya. No entanto, como se sabe, as duas construções estão intimamente ligadas e o seu conhecimento é de grande utilidade prática.

[676] No capítulo XX intitulado "Muestra hazer el Penthagono sobre una línea recta dada" [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 56].

[677] "Questo problema com modi naturali no si potria resolvere" [Tartaglia, 1560c, f. 14v].

b. Construção de um pentágono 'regular'

Vejamos como Moya obtém o pentágono regular de que necessita para a resolução dos problemas de *Elementos* IV.

Dado um segmento [AB], construir um pentágono regular que tenha por lado esse segmento (figura 60). Começar por construir as perpendiculares a [AB] por A e por B, respectivamente. Depois, com centro em A e B, respectivamente, e raio igual ao lado do pentágono descrever os arcos de circunferência que intersectam essas perpendiculares em D e C. Em seguida, dividir cada um dos arcos AC e BD em cinco partes iguais e tomar em cada uma das circunferências os pontos F e G, de modo que os arcos DF e CG sejam iguais a cada um dos cinco arcos em que os quartos das circunferências foram divididos. Unindo A a F e B a G obtêm-se outros dois lados do pentágono, [AF] e [BG]. Finalmente, o vértice H é determinado pela intersecção da circunferência de centro F e raio [AB] com a circunferência de centro G e raio [AB], na parte de cima "en la parte alta". Unindo H a F e a G obtêm-se os outros dois lados do pentágono.

A construção enferma de uma questão de princípio, pois utiliza a divisão de um quadrante de circunferência em cinco partes iguais, que previamente não foi resolvida com régua e compasso; contudo, Moya não faz qualquer comentário sobre o assunto, nem justifica o procedimento que propõe. É natural que essa construção (aproximada) do pentágono fosse bem conhecida na época[678], mas também é possível que uma fonte de inspiração de Moya tenha sido Bovelle uma vez que a figura 60, que Moya apresenta, faz lembrar a que dá o matemático francês; e, como sabemos, Bovelle não é desconhecido de Moya[679].

[678] Cristóval de Rojas também propõe a mesma construção para os ângulos dos polígonos regulares até ao decágono, inclusivé [Cristóval de Rojas, 1598, ff. 19r-20r].

[679] Moya cita Bovelle a propósito da quadratura do círculo [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 69- 70].

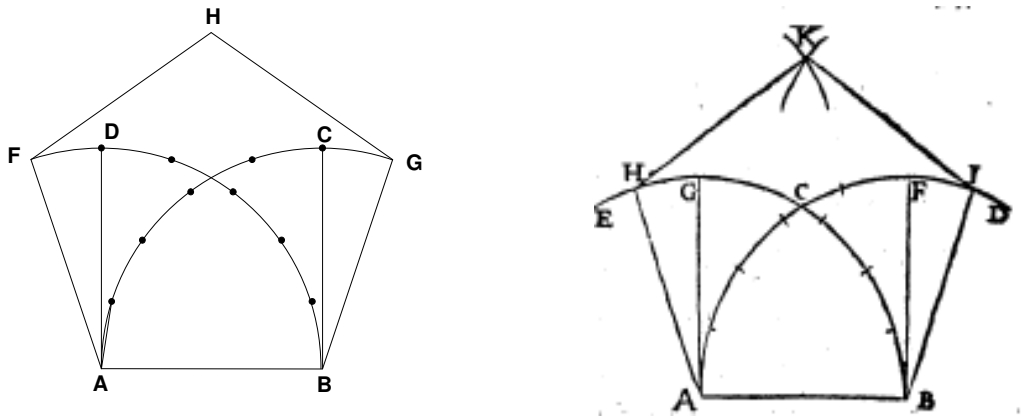


Figura 60: Construção (aproximada) de um pentágono regular: à esqueda, dada por Moya, em [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 56]; à direita, dada por Bovelle [Charles Bovelle, 1551, f. 20r].

Notamos que Moya dá uma outra alternativa de construção aproximada do pentágono, provavelmente obtida por tentativa, embora isso não seja mencionado. Rey Pastor acha estranho que, conhecendo o *General Trattato*, Moya não dê a construção exacta baseada no conceito de divisão de um segmento em média e extrema razão[680]. Mas nós pensamos que Moya pode ter optado por uma construção fácil de executar, acreditando que o método que propõe, embora não seja exacto, pode até tornar-se mais rápido e conduzir a uma figura melhor aproximada do que um método exacto aplicado com pouco rigor. Se assim foi, estava a seguir, precisamente, as recomendações de Tartaglia, que depois de apresentar a construção de um pentágono regular, faz a seguinte observação:

> Questo problema a volerlo conchiudere giustamente, non solamente bisogna, che la tua rega sai giustissima, & che tu operi in luogo perfettamente piano, ma anchora bisogna, che tu sai diligentíssimo nell'operar manuale, la causa è, che alla rissolution di questo tal problema vi occorre molti altri (non molto facili) problemi, tal che ogni piccolo errore fatto nel principio, nel fine della conclusione si fa maggiore. Onde facil cosa saria, che un pratico naturale lo risolvesse a tastone piu presto, & piu giustamente di te in materia, dellaqual cosa mi è parso di avertirtene, si per gli altri, che passano per piu problemi, como per questo[681] [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 14v].

[680] [Rey Pastor, J., 1934, pp. 132-133, Nota de rodapé 1].

[681] Incluimos a nossa tradução livre: "Este problema, para querer conclui-lo correctamente, não só necessita que a tua regra seja certíssima, e que tu operes num lugar perfeitamente plano, mas ainda necessita que sejas diligentíssimo no operar manual, porque na resolução deste tal problema ocorrem muitos outros problemas (não muito fáceis), tais que qualquer pequeno erro cometido no início, torna-se maior no final. Donde seria coisa fácil, que um prático natural o resolvesse por tentativas mais depressa, e mais precisamente do que tu

Dürer, no segundo livro de *Underweysung,* trata da construção de polígonos regulares, em especial dos que não se obtêm à custa do quadrado e do triângulo equilátero. De acordo com Pedoe, as construções dadas não são totalmente originais podendo ver-se algumas em *Geometria deutsch*, uma compilação que apareceu em 1484[682]. Pedoe refere que, nessa obra, Dürer inclui uma construção exacta do pentágono regular, tirada do *Almagesto*, mas também dá uma construção aproximada, feita com um compasso tosco, que constitui o método prático mais rápido conhecido.

c. Construção de um círculo circunscrito a um pentágono regular e de um círculo inscrito num pentágono regular

A construção dos círculos, respectivamente circunscrito e inscrito num pentágono regular, depende, antes de mais, do conhecimento do seu centro. Moya determina este ponto por processos diferentes nos *Fragmentos* e no *Tratado de Geometria*. Na primeira obra obtém o centro intersectando mediatrizes de dois lados; na segunda determina o centro pela intersecção das bissectrizes de dois ângulos contíguos. O raio ("semidiametro") do círculo circunscrito é obtido do mesmo modo nos dois textos: tomando uma abertura do compasso desde o centro a um qualquer vértice, pois, como se demonstra por *Elementos* III, 9 e por *Elementos* IV, 14 todos eles são iguais. A determinação do raio do círculo inscrito só é explicada no *Tratado de Geometria*. Moya determina-a à custa da perpendicular que une o centro ao ponto médio de um dos lados, baseando-se em argumentos análogos aos apresentados no *General Trattato*[683].

d. Construção de um triângulo circunscrito a um círculo e de um círculo circunscrito a um triângulo

Alguns dos problemas propostos no livro IV dos *Elementos* podem resolver-se, facilmente, por tentativas, como observa Tartaglia. Por exemplo, construir: um círculo inscrito num triângulo equilátero (*Elementos* IV, 4), um círculo inscrito num quadrado (*Elementos* IV, 8), um quadrado circunscrito a um círculo (*Elementos* IV, 7), um hexágono equilátero e equiângulo inscrito num círculo (*Elementos* IV, 15). Outros, como a

---

pelo que me parece [que devia] avisar disso, para os outros que passam por mais problemas como este" [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 14v].

[682] [Pedoe, D., 1976, p. 67].

[683] [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 15r].

determinação de um triângulo circunscrito a um círculo[684], dependem de regras geométricas cujo desconhecimento torna impossível a sua resolução. Moya trata este último problema nos *Fragmentos Mathematicos* e no *Tratado de Geometria*, mas em ambos os casos limita o seu estudo ao triângulo equilátero e não fornece detalhes sobre a construção com régua e compasso. Apenas propõe que se divida a circunferência em três partes iguais[685], e que se tomem segmentos de recta, com comprimento igual ao dobro do raio, a partir do centro do círculo e passando pelos pontos de divisão[686]. Unindo os extremos desses segmentos obtém-se o triângulo desejado (figura 61).

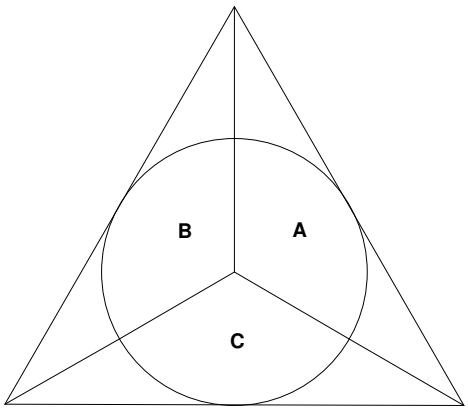


Figura 61: Mostra a figura dada por Moya relativa à construção de um triângulo circunscrito a um círculo [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 62].

Este é um dos problemas em que o estudo feito por Moya é diferente do apresentado no *General Trattato*. Vejamos porquê. Tartaglia não se limita ao caso particular do triângulo equilátero, propondo uma resolução geral em se pretende construir um triângulo semelhante a um triângulo dado e circunscrito a um círculo dado. No entanto, tal como Moya, o matemático italiano não exibe a construção com régua e compasso, fornecendo apenas uma explicação teórica que conduz ao resultado desejado. Assim, dado o triângulo [ABC] e o círculo de centro G (figura 62) começa-se por traçar o segmento [GD] e a recta perpendicular a esse segmento, por D. Depois, marcam-se os ângulo DGE e DGF, suplementares dos ângulos ABC e ACB, respectivamente, cuja intersecção com a

[684] Sobre esta construção Trataglia diz: "Senza li termini, over regole geomettrice di sopra usate sara impossibile, che il'pratico naturale sapesse risolvere un tal problema" [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 13 v].

[685] O leitor já está habilitado a fazer esta construção pois Moya ensinou-a anteriormente [Juan Pérez de Moya, 1573b, cap. 14].

[686] Por lapso, não é este o comprimento indicado em [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 64].

circunferência dada define os pontos E e F. Finalmente, traçam-se perpendiculares à circunferência por E e por F. A intersecção destas rectas define o triângulo pretendido.

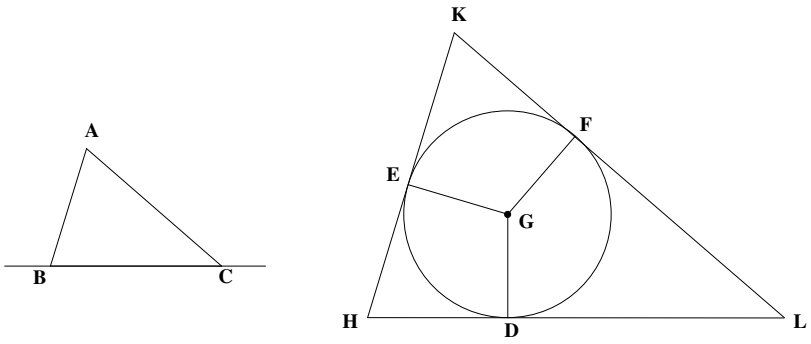


Figura 62: Construção de um triângulo semelhante a um triângulo dado, circunscrito a um círculo dado [Nicolo Tartaglia, 1560, f. 13v].

A simplificação implementada por Moya na abordagem deste problema está também presente noutros casos que trata. Por exemplo, na determinação de um círculo inscrito num triângulo[687] Moya supõe que o triângulo é equilátero[688] e recorre à determinação das mediatrizes dos seus lados para obter o centro do círculo. A restrição imposta por Moya não é colocada por Tartaglia, nem é feita nos *Elementos*[689] de Euclides; nem tal é necessário, uma vez que a construção proposta assenta no conceito de bissectriz e não no de mediatriz.

O segundo problema que Moya trata é o da construção de um círculo circunscrito a um triângulo, cuja utilidade prática, sobretudo na construção de lâminas de astrolábio, refere. A propósito deste assunto, Moya transmite-nos uma ideia muito interessante de que tudo na natureza tem uma razão de existir:

> Esta regla sirve y es necessária para hazer laminas de Astrolabios, y otros instrumẽtos Matemáticos, y basta que una cosa se comunique y use, para entẽder que en algun tiempo la necesidad (que es maestra, e inventora de todas las artes) la deuio para algo ordenar, cõforme aquello que se dize, que ninguna cosa cria na naturaleza (ministra de la primera causa) que sea superflua [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 59].

[687] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 60]

[688] A construção de um triângulo equilátero é dada no "Cap. XVI, Articulo primero" [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 50-51].

[689] Ver *Elementos*, IV, 4.

3.3.5. A oval

Desde a antiguidade que o estudo da oval despertou grande interesse entre desenhadores, pintores, arquitectos e outros artífices, tendo esta curva sido muito usada na construção de iluminuras ou, como também eram conhecidas, "letras de iluminação"[690]. Talvez tenha sido por reconhecer esta utilidade prática que Pérez de Moya incluiu o estudo da oval nos *Fragmentos Mathematicos* e no *Tratado de Geometria*[691].

Moya define a figura oval como "a la que en su forma es semejãte al huevo"[692] e nota que há diversas espécies de ovais, obedecendo cada uma delas a uma regra específica. A construção da oval dada nos *Fragmentos Mathematicos*, que é uma das incluídas no *Tratado de Geometria*, é devida a Tartaglia, e por ele apresentada no *General Trattato*. Trata-se de uma construção descoberta por Tartaglia, em 1547, que é mais geral do que outras indicadas por antigos desenhadores e arquitectos, a que ele faz alusão[693]. Moya diz que tirou a construção de Tartaglia: "esto saque de Nicolo Tartaglia".

a. Construção da oval

Seguindo as indicações de Moya, a oval pode ser descrita por quatro arcos de circunferência, de acordo com a construção seguinte (em cima na figura 63): traça-se um segmento de recta [AB], e um outro [CD], perpendicular a [AB] no seu ponto médio, E. Desenha-se uma circunferência com centro num ponto qualquer de [AB] e que passe por A, e outra circunferência, também com centro num ponto de [AB], e de raio igual ao da anterior, que passe por B. Marcam-se em [CD] dois pontos, F e G, igualmente distantes de E. Traçam-se as rectas definidas por F e por cada um dos centros das circunferências anteriores, designando por H e I os pontos de intersecção de cada uma delas com as referidas circunferências. Repete-se a operação, a partir de G, obtendo os pontos K e J. Com centro em F e raio [FH] desenha-se o arco HMI[694], e com centro em G e raio [GK] ($\overline{GK} = \overline{FH}$)

---

[690] [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 11r].

[691] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 57].

[692] [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 179].

[693] "Un'altra regola per far una figura ovale (secondo il volgo) trovai per un certo mio negotio l'anno 1547" [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 11v].

[694] No texto de está escrito K em vez de H [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 181].

desenha-se o arco KNJ[695]. A figura constituída pelos quatro arcos de circunferência KAH, HMI, IBJ, JNK é a oval.

As duas ovais representadas na figura 63 são semelhantes e embora a oval construída por Moya tenha uma forma mais arredondada que a de Tartaglia, a descrição de Moya é muito parecida com a de Tartaglia. Vejamos:

(…) hazer una línea como la a.b. quã larga o breve quisieres, la qual cruzaras por medio cõ la linea c.d. en angulos rectos enel punto e. Luego en cada un extremo de la linea a.b. haz un circulo igual el uno al otro de tal manera que las circunferencias suyas passen por el fin de la linea a.b. los quales seran grandes, o pequenos segun quisieres, que las puntas de la figura Oval sean mas, ò menos ahusadas. Luego señala dos puntos en la linea c.d. el uno supõgo f. y el otro el punto g. igualmente distantes del punto e. do las dos primeras lineas se cruzan, y notaras que mientras mas estos puntos distaren del punto e., tãnto mas estrecha, o angosta sera la figura, y quanto mas cercanos, mas ancha sera. Luego del punto f. saca dos lineas rectas que cada una passe por el centro del circulo, que seran las lineas f.h. y la f.i. y del punto g. saca otras dos de la misma suerte, como muestran las letras g.k. y g.l. Despues haz centro el punto f. y según la quantidad de la linea f.h., o de la linea f.i. abre el cõpas, y estando el un pie enel. punto f. haz una circunferencia que sera h.m.i. De la misma suerte haras centro el punto g. y según la quantidad de la linea g.k., o de la linea g.l. o cõ la abertura que se esta el compas delineras la circunferencia de la otra vanda k.n.l. Y desta

Tira la linea a.b. longa quanto ti pare di far longa tal figura, & quella divide orthogonalmente (cioe a square) in due parti eguali in ponto e. com la línea c.d. & nelli duoi capi della línea a.b. designarai li duoi cerchii g.a. [h] &i.b.k. (eguali tra loro) talmente, che la circonferenza dell'uno passi peri l ponto a. & quella dell'altro peri l ponto b. & questi tai duoi cerchii si ponno descriver grande, over piccoli, secondo che si desidera di fare piu acute, over piu ottuse le teste, over capi di tal figura, dapoi che si ha descritti questi duoi cerchii eguali, l'uno sopra il centro l. & l'altro sopra il centro m. signarai li duoi ponti n. & o. sopra la linea c d. egualmente distante dal ponto e. quanto ti parra, & sappi cge quanto piu saranno distanti dal detto ponto e. tanto piu venira strretta la detta figura, et per il contrario quanto piu sarãno propinqui al detto ponto e. tanto piu venira larga la detta figura, dapoi che haverai signati li detti duoi ponti, cioe n. & o. dal ponto n. tirarai le due linee n m.h. & n l k. & similmente dal ponto o. tirarai le due o m g. & o l i. fatto questo farai centro il põto n. & secondo la quantita della linea n h. overo nk. Linearai la circonferenza h k. & similmente farai centro il ponto o. & secondo la quantita della línea o g. overo i. linearai la circonferenza g i. &

[695] Observamos que, a construção dada nos *Fragmentos Mathematicos* tem um erro na parte final, pois Moya considera AHMIB uma semicircunferência de centro F. Na *Geometria Pratica y Speculativa* este erro foi corrigido.

manera quedara compuesta la dicha figura Oval como paresce figurado [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 57].

cosi sara compita la detta figura ovale [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 11r-12r]

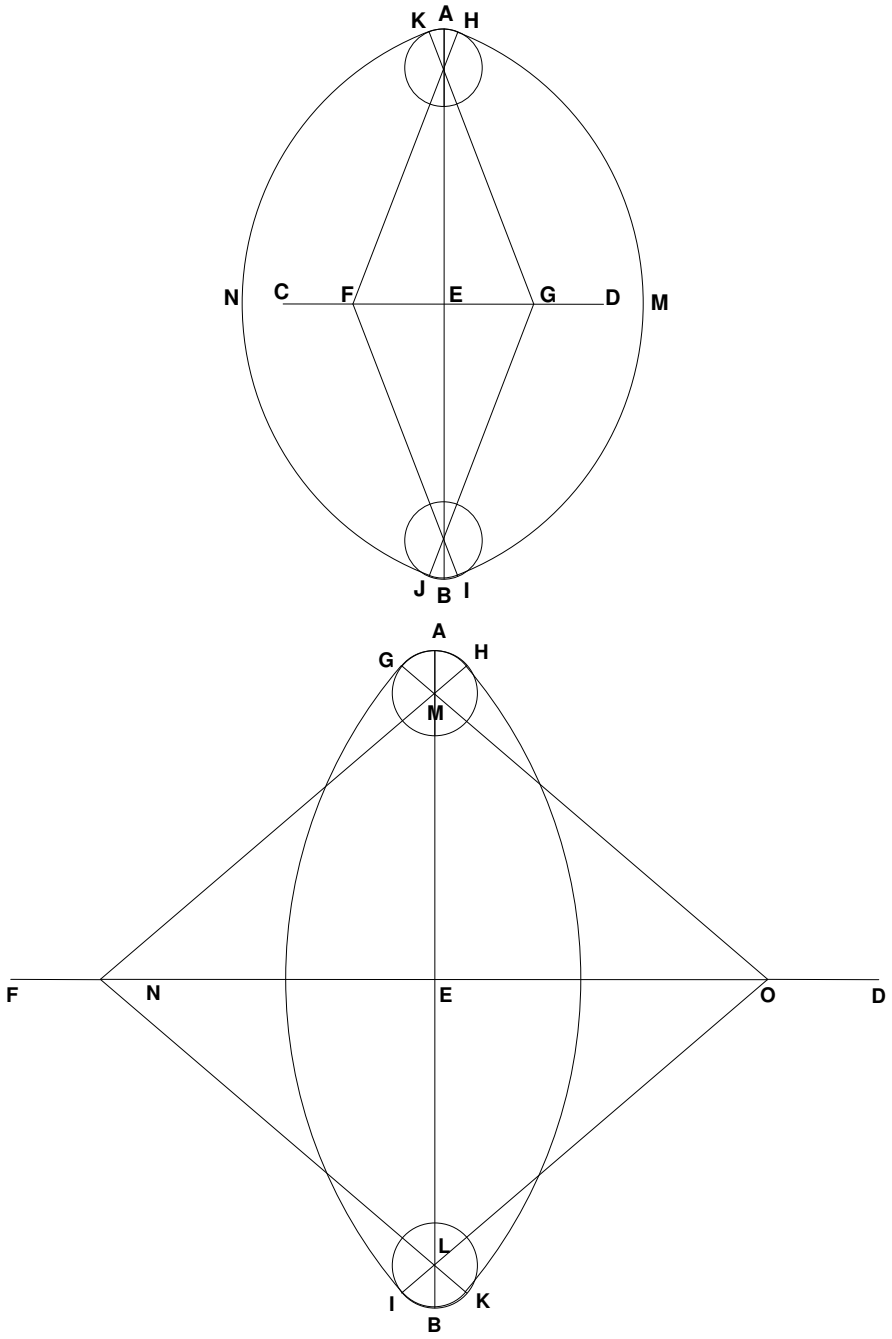


Figura 63: Em cima a construção da oval como é proposta em [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 179-181 e 1573, p. 57]. Em baixo a construção da oval como é proposta em Tartaglia [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 11v-12r].

Antes de apresentar esta construção, Tartaglia refere, em particular, uma outra que diz ser a primeira descrição antiga conhecida[696] (figura 64).

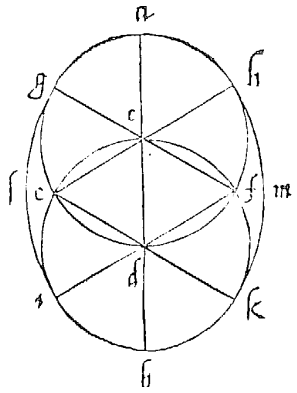


Figura 64: "Construção" da oval dada por Tartaglia [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 11r].

Quando observamos com cuidado esta construção, reparamos que a principal diferença consiste em que o segmento [AB] está dividido em três partes do mesmo comprimento e que os pontos de secção são os centros das circunferências representadas. Por isso, os pontos de intersecção das circunferências pertencem à mediatriz do segmento [AB], tal como se exigia na construção anterior. Isso significa que esta construção é um caso particular dela.

Moya indica, ainda, um modo muito curioso de desenhar figuras semelhantes a ovais, que Tartaglia também refere: consiste em desenhar uma circunferência sobre uma superfície cilíndrica (de cartão), que quando desenrolada e planificada mostra uma figura semelhante a uma oval:

Algnos hazĕ figuras Ovales arrodeãdo un papel a la redõda de un palo rollizo gruesso, y descriviendo alli un circulo cõ la abertura de un cõpas, despues quãdo desarrodeã el papel, queda una figura que imita mas àla Oval que al circulo [Juan Pérez de Moya, 1573, p. 53]

Trova un bastone ben tondo alla similitudine del .ab. intorno delquale isfassarai un mezo foglio di carta supponemmo che sai la .cdef. & nel mezo di quella signara il ponto .g. & farai centro, et descriverai cerchio .hikl. obliquando il compasso nel designar la circonfernza nella curvatura, che è verso .h. & quella, che è verso .k. cioe far, che la circonferenza sai continuata sopra il detto centro .g. & fatto questo desinfassarai la detta

[696] No entanto, nota que não é a dada por Apolónio pois, ao contrário do que acontece aqui, na do geómetra grego nenhuma parte da curva é uma porção de circunferência [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 11r].

> carta, laquale essendo distesa, tal linea fara una figura ovale [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 12r].

O procedimento que Moya descreve é um pouco confuso, mas a figura que Tartaglia mostra permite dar sentido às palavras de Moya (figura 65).

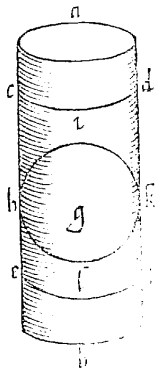


Figura 65: Modo de descrever uma oval com uma só volta do compasso [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 12r].

3.3.6. Duplicação do cubo

Nos *Fragmentos Mathematicos* Moya aconselha todos os que pretendam resolver o problema da duplicação do cubo de um modo simples (designadamente os artesãos), a consultarem o quarto livro de *Geometria* de Dürer, dizendo:

> Alberto Durero enel quarto libro de su Geometria pone la orden practicalmente que se ha de tener para saber doblar, o tresdoblar el cubo, o cuerpo quadrado a forma de dado, porque es regla necessaria para muchas cosas mechanicas la quise poner aqui [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 85].

A menção de Moya a Dürer não nos surpreende. Por um lado, pela grande influência que este autor teve em Espanha[697] e, por outro, pelas características essencialmente práticas deste seu trabalho. Nesta obra, Moya não associa a questão da duplicação do cubo à da inserção de dois meios proporcionais entre um segmento e o seu dobro, limitando-se a apresentar a construção de Dürer, com a indicação dos passos a dar[698].

---

[697] [Vasconcelos, J., 1929, p. 74].

[698] Contudo, a dificuldade que temos na leitura do texto de Durer ainda não nos permitiu concluir se Moya copiou correctamente a construção de Dürer.

No *Tratado de Geometria* Moya revisita este assunto, apresentando a construção dada pelo *ingeniosissimo* Tartaglia, pois entende que ele, melhor do que qualquer outro, mostra uma regra geral para duplicar o cubo[699]. E não menciona o nome de Dürer!

Tartaglia relata que os antigos filósofos, para resolverem o problema da duplicação do cubo, procuraram diversos modos de inserir, em proporção contínua, dois meios proporcionais entre dois segmentos dados[700]. Esses métodos envolvem procedimentos por tentativa e provas matemáticas com base no raciocínio geométrico. Quando os dois segmentos considerados são tais que um é o dobro do outro, esses procedimentos permitem a duplicação do cubo. A resolução do problema de determinação de dois meios proporcionais entre um segmento e o seu dobro foi objecto da atenção de diversos geómetras, que procuraram resolvê-lo recorrendo exclusivamente à régua e ao compasso (como Finé e Stifel) ou a ferramentas mecânicas (como Peletier[701]).

a. Construção de um cubo de volume duplo de um cubo dado

Considere-se um cubo de lado *a* e construa-se o rectângulo [CDFE] de lados *a* e *2a* (figura 66). Tracem-se as diagonais do rectângulo e designe-se por G o ponto de intersecção. Tracem-se, ainda, as semirectas $\dot{E}I$ e $\dot{E}H$, contendo os lados [EF] e [EC], respectivamente. Em seguida, procurem-se os pontos K, em $\dot{E}I$, e L, em $\dot{E}H$, de modo que K, D e L estejam alinhados e que K e L distem igualmente de G. O segmento [FK] é o lado do cubo que se procurava.

Todas as construções envolvidas na determinação de [FK] são feitas com régua e compasso. Moya observa que os pontos K e L se descobrem por tentativa e dá sugestões para que mais facilmente possam ser encontrados:

> (…) y si tirando una linea de un punto a otro [ou seja, de K a L], passar por el punto, o angulo D auras acertado, y si passare baxo, abre mas el compas y señala con el de la misma manera, y si passare alto, cierra el compas hasta tanto que se haga, que la linea que del un

---

[699] Pode ver-se como Tartaglia trata este assunto em [Nicolo Tartaglia, 1560b, ff. 20v-21r].

[700] Tartaglia descreve os métodos de Platão, Heron, Philon de Bizantio, Apolónio, Doclis, Pappo, Sporo, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes e Nicomedes [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 44r-49v].

[701] Peletier [Jacques Peletier, 1573, pp. 61-66]explica o funcionamento de um *gnomom* que permitia a inserção de dois segmentos em proporção contínua geométrica, entre dois quaisquer segmentos dados. Peletier refere, a propósito, que se julgava inventor deste instrumento, que já tinha concebido quando, em 1557, escreveu os *Elementos* de Euclides, mas uns anos mais tarde, pela leitura da obra de Pedro Nunes, soube que Platão havia proposto um instrumento análogo para o mesmo fim. Embora Peletier não mencione o título da obra de Nunes, é facto que este assunto é estudado no *De Erratis Orontii Finaei* [Pedro Nunes, 1546, pp. 15-18].

punto al otro se echare passe justamente por el punto D, como haze la linea KL [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 248].

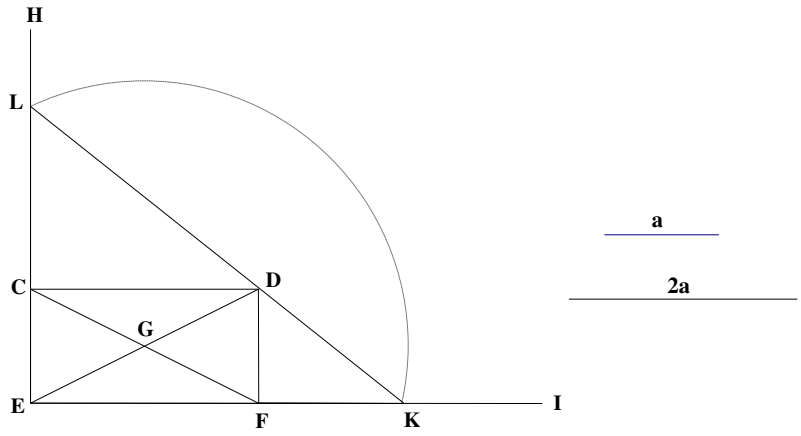


Figura 66: Duplicação do cubo[702] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 249].

Para mostrar que esta construção satisfaz o requerido, Moya adverte que os segmentos [FK] e [CL] são os meios proporcionais entre *a* e 2*a*, procurados, isto é, são tais que:

$$\frac{a}{\overline{FK}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{CL}}{2a}$$

E recorre, como Tartaglia, aos *Elementos* de Euclides, copiando, textualmente, a justificação do matemático italiano:

Lo qual todo se demuestra por la duodecima diffinicion del quinto de Euclides, y por la treynta y seys del onzeno, que insieren en substancia, que siendo quatro lineas cõtinuas proporcionales, la proporciõ del cubo de la primera linea al cubo de la segunda, sera como la proporcion de la primera à la quarta de las dichas lineas [Juan Pérez de moya, 1573b, p. 248]

Tutto questo si approva, & dimostra per la duodecima diffinitione del quinto, & per la trentesimasesta del undecimo, che in sostanza inferiscono, che essendo quattro linee continue proportionali, la proportione del cubo della prima, al cubo della seconda sara, come la proportione della prima alla quarta di dette linee [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 21r]

A construção da inserção de dois meios proporcionais indicada é que Heron dá e demonstra na *Mecânica*[703].

[702] Na figura que Moya apresenta não está visível o arco de circunferência, que por nos parecer elucidativo deixamos aqui a tracejado.

[703] Tartaglia inclui-a no *General Trattato* [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 44r-44v].

A finalizar a exposição sobre a duplicação do cubo, Moya chama a atenção para a relação existente entre três problemas: a inserção de dois meios proporcionais entre um segmento e o seu dobro, a duplicação do cubo e a determinação da raiz cúbica "por linea", questões que não relacionara na sua obra anterior, remete o estudo deste último ponto para o seu livro de *Aritmetica*.

3.3.7. Instrumentos de medida no *Tratado de Geometria*

O estudo da altimetria no *Tratado de Geometria* está melhor organizado do que nos *Fragmentos Mathematicos* e inclui muito mais figuras que facilitam a compreensão da linguagem utilizada. Moya inicia, precisamente, o "Libro Segundo" por explicar em que consiste este capítulo da geometria definindo, assim, altimetria[704]:

> (…) un arte que muestra medir las anchuras y larguras, ò alturas, ò honduras segũdo linea recta de los cuerpos, Por lo ql por estas tres differencias se dize Lõgimetria, ò Altimetria (ò) Profundimetria. Las quales tres cosas se mostraran en este libro de muchos modos, con varios instrumentos, porque el que ignorare, el que quisiere, mida con el que pudiere [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 93].

Em seguida, Moya introduz os instrumentos que vai utilizar, indicando diversos nomes pelos quais alguns deles são conhecidos e o seu modo de funcionamento. Todos os instrumentos apresentados anteriormente nos *Fragmentos Mathematicos* são aqui mencionados: o espelho, a "esquadra", as duas varas, a régua status, a escala altimetra (ou quadrante de sombras) e o quadrante geométrico[705]. No caso do astrolábio, Moya apenas se refere ao dorso, explicando como se pode efectuar com ele diferentes medições. Há, além destes, um outro instrumento, ao qual adiante faremos referência, cujo nome não é indicado e que, nas suas palavras, permite medir distâncias com precisão e rapidez.

Só o "báculo mensorio" é explicado e utilizado pela primeira vez. Depois de uma descrição minuciosa, são trabalhadas as aplicações práticas que consistem na medição de distâncias, de alturas e de profundidades.

---

[704] Nos *Fragmentos Mathematicos* Moya definiu altimetria dum modo análogo, dizendo: "Altimetria trata de la orden de medir las cosas según sus lõgitudines o larguras solamente, assi como la linea [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 2].

[705] Moya observa que o instrumento a que uns autores chamam "quadrante geométrico", outros designam por "quadrado geométrico".

Pela importância de que se revestiam as questões de medida em áreas como a arquitectura, a fortificação, a engenharia, a astronomia, a cosmografia e a navegação, os instrumentos de medida são utilizados e estudados, em trabalhos renascentistas de diversos domínios do conhecimento[706]. Dürer, Serlio, Peletier, Purbaquio, Apiano, Frísio e Finé tratam-os nas suas obras[707]; e não admira que Moya conhecesse os trabalhos destes autores, pois eles estão muito bem representados nas bibliotecas espanholas, o que atesta a grande divulgação que tiveram. Como dizem Vicente Maroto e Esteban Piñeiro[708], no início do século XVI existiam trabalhos de autores espanhóis nos quais o estudo dos instrumentos representava uma parte significativa[709]. Mas nós observamos que, sobre este assunto, o único autor espanhol que Moya menciona no *Tratado de Geometria* é o "doctor" Aguilera[710]. Aguilera é autor da obra *Canones astrolabii universalis*, em quatro livros,

---

[706] Sobre diversos instrumentos usados em arquitectura no século XVI ver [Gessner, A., 2010] e , em especial, as páginas 11 e 12. Notamos que Campano, depois da tradução dos *Elementos* de Euclides, a que se dedicou entre 1255 e 1259, escreveu, ntre 1260 e 1270, um tratado sobre o quadrante [Dictionary of Scientific Biography, III, p. 27].

[707] Peletier, na sua *De L'usage de Géometrie*, descreve um instrumento, do qual se diz inventor, que permite medir as distâncias e alturas por uma só estação [Jacques Peletier, 1573, pp. 47-57]. Purbaquio, num pequeno tratado intitulado *Quadratum geometricum*, publicado em 1516, dá instruções sobre a construção do quadrado geométrico documentando a sua utilidade com uma grande variedade de aplicações. Este trabalho tem apenas 21 páginas e foi publicado postumamente. Regiomontano, na sua *obra Scripta …de Torqueto, astrolabo, armillari, regula magna Ptolemaica, baculoque astronómico*, incentiva os jovens a aprender a trabalhar correctamente com os instrumentos, como observa [Veltman, 2000, p. 405]. Veltman observa ainda que, inspirado nesta obra Copérnico, construiu instrumentos de grande escala, que depois Tycho Brahe aperfeiçoou. Apiano no *Typus orbis universalis*, publicado em 1520, estuda vários instrumentos astronómicos e geográficos. Em 1529, Gemma Frisio publica em Antuérpia, a obra revista de Apiano, com título *Cosmographicus liber Petri Apiani mathematici.* É também em Antuérpia que se publica em 1530 o primeiro trabalho original de Gemma Frísio intitulado *Gemma Phrysius de principiis astronomiae & cosmographiae* e em 1533, a *Cosmographia sive Descriptio universi Orbis, Petri Apiani Libellus de locorum describendorum ratione, et de corum distantiis inveniendis, nunquam antehac visus*. A obra de Apiano e Gemma Frísio foi traduzida em várias línguas, incluindo a castelhana, em que aparece, em 1548, com o título *Libro de la Cosmographía de Pedro Apiano, el qual trata de la descripción del Mundo, y sus Partes, por muy claro y lindo artificio, augmentado por el doctíssimo varón Gemma Frísio doctor en Medicina y Mathematico excellentissimo, com otros dos libros del dicho Gemma, de la matéria mesma. Agora nuevamente traduzidos en Romance Castellano*.

[708] Nesta obra, Vicente Maroto e Esteban Piñeiro fazem uma descrição abrangente e minuciosa dos conteúdos relativos a instrumentos constantes em grande parte dos trabalhos espanhóis do século XVI que muito contribuiu para nos esclarecer sobre este assunto.

[709] E já no final do século, Diego de Álava y Viamont na sua obra *El Perfecto Capitán, instruído en la disciplina Militar, y nueva ciência de la Artilleria* [1590] trata no livro IV de «todos os géneros de medidas necessários para o uso da Artilharia com Planisfério, Astrolábio, Quadrante e outros instrumentos Matemáticos» sublinhando a importância que a altimetria tem para os artilheiros [Soler Selva, 2002, pp. 119 e 129].

[710] Fá-lo a propósito da constituição do dorso do astrolábio, numa breve nota de margem incluída no capítulo intitulado "Trata de seno Recto, y Seno de Cõplemento, y Seno Total, y Seno Verso, y Arco y Corda, y Sagita" [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 33]. Não é a primeira vez que Moya cita Aguilera. No *Libro segundo da Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos en que trata de cosas de astronomia y geographia y philosophia natural y sphera y astrolabio y navegación y reloges* Moya refere o "Astrolabio que en Salamanca ordeno el doctor Aguilera" [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 172].

publicada em 1554, que Moya conhece[711]. No livro dois, Aguilera define os conceitos que dão o título ao capítulo do tratado de Moya que acabámos de referir e no livro III[712] introduz instrumentos como, por exemplo, o "quadratum" (ou dorso do astrolábio) e a "vírgula" (ou vara) e aplica-os à determinação de distâncias, alturas e profundidades[713].

Em 1520, Juan Martín Población [Valência, finais do século XV] publica em Paris a obra *De usu astrolabi compendium*, onde trata da resolução de problemas com recurso ao astrolábio. Como é sabido, o astrolábio, que é considerado o instrumento mais importante da astronomia antiga[714], atingiu a sua máxima popularidade nos séculos XV e XVI. Nas universidades dessa época ensinava-se a utilizar diversos instrumentos[715] e, por isso, não admira que Población, como professor de matemática do *Collège de France*[716], se tivesse debruçado sobre este assunto. De acordo com Maroto e Piñero[717], a parte mais importante do tratado de Población é a respeitante à altimetria, na qual se resolvem problemas de determinação de alturas e distâncias acessíveis e inacessíveis.

Em 1551, o matemático espanhol Juan de Rojas publica em Paris a obra *Illustris viri D. Joannis de Rojas Commentariorum in Astrolabium quod planisphaerium vocant, libri sex nunc primun in lucem editi. His additus est índex capitum se rerum, quae toto opere continentur, locupletissimus*. Este tratado é composto por seis livros, onde o autor descreve a teoria do astrolábio, a sua construção e aplicações[718]. No livro quarto Juan de Rojas explica o funcionamento do planisfério, ou dorso do astrolábio, e utiliza-o para resolver problemas

---

[711] A edição princeps do livro de *Canones astrolabii universalis* é de Salamanca, 1527. Sobre o mesmo assunto Pedro Nunes escreveu um livro, hoje perdido, como se pode ler em http://pedronunes.cienciaviva.pt/docs/estudos1.pdf (Consultado em 20 de Agosto de 2010).

[712] Este livro ocupa as folhas 94v a 125v do *Canones Astrolabii.*

[713] Sobre este tema a obra de Aguilera que consultámos contém apenas uma figura [Aguilera, 1554, página não numerada existente no final da obra], enquanto a de Moya tem muitas figuras que ilustram diversos exemplos de medição. É, por isso, natural pensar que o *Canones Astrolabii* não foi o único trabalho nem porventura o mais influente na *Geometria* de Moya no que respeita à ilustração do modo de utilizar os instrumentos de medida.

[714] Como referem (Michel, A. *Introduction à l'étude d'une collection d'instruments anciens de mathématiques*, Amberes, 1939, citado em [Maroto, M. I. V. e Piñeiro, M. E., 2006, p. 241]).

[715] (López Piñero, J. M., Navarro-Brotons, V. *História de la ciência al País Valencià*, Edicions Alfons el Magnànim, Valência, 1995, p. 73, citado em [Soler Selva, 2002, p. 124]).

[716] Juan Martin Población foi o primeiro professor de Matemática do Collège de Francia, em Paris (1530) [Maroto e Piñeiro, 2006, p. 254].

[717] [Maroto, M. I. V. e Piñeiro, M. E., 2006, p. 254].

[718] Os livros que a compõem são: "De Partibus Planisphærii", "De Usu Partium", "De Domibus Caelestibus", "De dimensionibus", "De Describendis Provinciis" e "De Fabrica Planisphærii". O quinto é uma reimpressão dos primeiros seis capítulos do *Libellus de Locorum Describendorum ratione*, de Gemma Frísius.

de medida de alturas, distâncias e profundidades. Mas Moya não refere Juan Martín Población nem Juan de Rojas.

No estudo que se segue vamos centrar a nossa atenção em cinco instrumentos que Moya trata no *Tratado de Geometria*: a "escala altímetra", ou "quadrante de círculo", o "quadrante geométrico", o "báculo mensório", o instrumento constituído por dois semicírculos e o esquadro[719].

a. Construção da escala altímetra

A escala altimetra é o primeiro instrumento que Moya trata no capítulo da altimetria. Trata-se de um tipo de quadrante que Moya refere como figurando no dorso do astrolábio. Embora este instrumento seja utilizado nos *Fragmentos Mathematicos*, só no *Tratado de Geometria* Moya explica, ainda que abreviadamente, a sua constituição, ilustrando-a com uma figura (figura 67, imagem do lado esquerdo). A escala altímetra pode ser feita de metal ou madeira dura e tem a forma de um quarto de círculo. Numa das hastes que ladeiam o quarto de círculo tem duas "pínolas", cada uma com uma mira, os "agujeros" (indicados por a e b, na figura de Moya). As duas réguas perpendiculares, GH e HI, que definem com as hastes laterais um quadrado, designam-se por "sombra recta" e "sombra versa", respectivamente. Cada uma delas está dividida em 12 partes iguais (ou em quantas partes se desejar). O segmento EH bissecta o quarto de círculo. O instrumento dispõe ainda de um perpendiculo, que pende de C, que é constituído por um fio, CD, com um pequeno peso na extremidade.

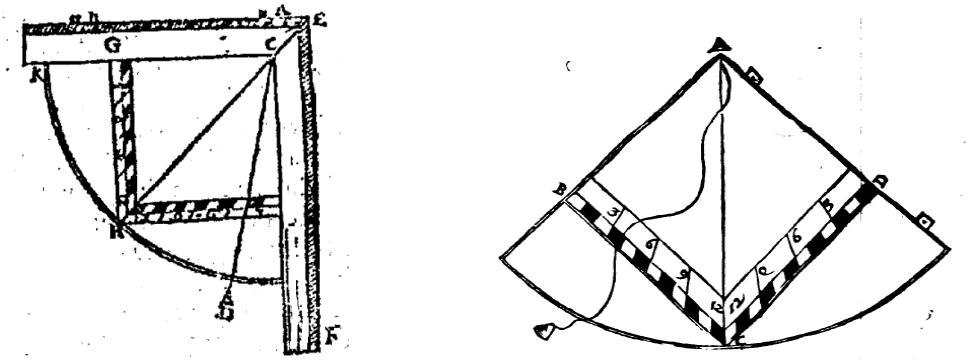


Figura 67: À esquerda a escala altimetra de Moya [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 93]; à direita o quadrante ordinário de Finé [Oronce Finé, 1587, Della geometria, f. 32r].

[719] Estes três instrumentos estão figurados no frontispício da obra de Münster, o que mostra a sua importância; a escala altímetra (do lado direito, ao meio), dois quadrantes (um deles utilizado pelo homem que se encontra no cimo da torre) e o báculo mensorio (que está a ser usado pelo homem mais à direita) [Sebastien Münster, 1551].

Com a escala altímetra, Moya resolve diversos tipos de problemas: mostra como se pode ver se uma praça é plana; ensina a medir a distância entre dois pontos no solo quando o observador está numa janela ou noutro sítio alto, explica como se determina um comprimento (por exemplo de uma vara) quando ela está colocada num ponto alto e o observador está no solo; mostra como se obtém a distância entre duas povoações distantes do observador; ensina a medir a altura (por exemplo, de uma torre) quando se está perto dela e quando entre ela e o observador há um obstáculo; mostra como se podem medir alturas de um edifício pela sombra que o sol ou a lua nele provocam; mostra como se determina a altura do ponto mais alto de uma torre situada no cimo de um monte e como se acha a profundidade de um poço. A escala altímetra é semelhante ao instrumento que Finé designa por quadrante ordinário, para o distinguir do quadrante geométrico (figura 67, imagem do lado direito).

b. Construção do quadrante geométrico ou quadrado geométrico

Moya observa que o instrumento a que uns autores chamam "quadrante geométrico", outros designam por "quadrado geométrico" [720].

O quadrante geometrico de Moya (figura 68, imagem do lado esquerdo) tem, como a escala altímetra, duas vigas graduadas de 1 a 12, formando dois lados consecutivos de um quadrado, que se unem num vértice (D, na figura 68). No vértice oposto (C, na figura 68) está fixa uma vara, o "índex", (que corresponde ao pêndulo existente na escala altímetra), que pode rodar em torno de C, varrendo um ângulo de 90º desde F até A; no índex estão colocados dois agulheiros. Este instrumento é semelhante ao quadrante geométrico que Finé descreve na sua *Geometria*[721], mas o de Finé permite efectuar medições com maior precisão, pois a graduação das varas vai de 1 a 60 enquanto no de Moya vai de 1 a 12.

[720] [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 93].

[721] O quadrante geométrico é o primeiro instrumento de medida que Finé introduz, por considerar que ele é o mais cómodo de todos os que apresenta [Oronce Finé, 1556, p. 3v].

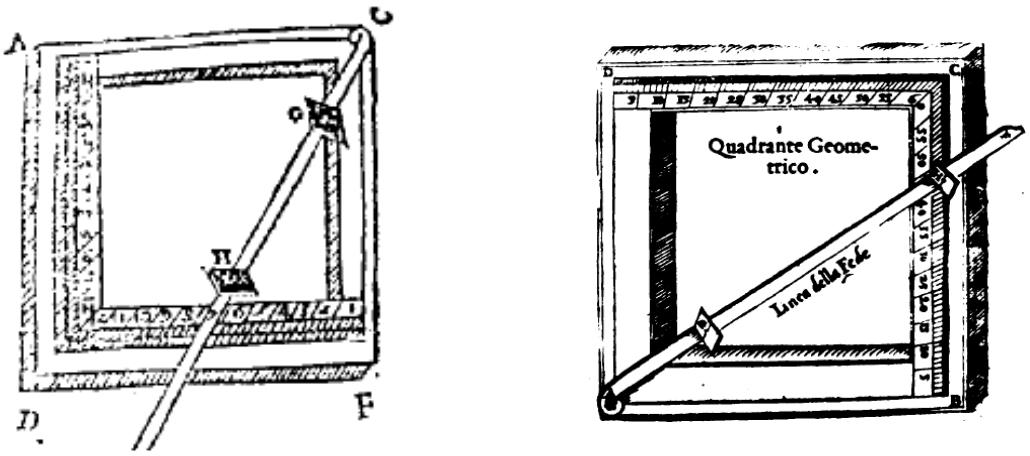


Figura 68: À esquerda está representado o quadrante utilizado por Moya, onde é visível a graduação de 1 a 12 na viga inferior [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 94]. À direita o quadrante geométrico de Finé cuja graduação vai de 1 a 60 [Oronce Finé, 1587, "Della geometria", f. 29r].

Uma diferença visível entre a escala altímetra e o quadrante reside na colocação dos agulheiros. O fio-de-prumo, que não faz parte deste instrumento, é por vezes utilizado como ferramenta auxiliar.

Para medir uma torre, quando o observador está colocado num local mais elevado, Moya descreve um procedimento semelhante ao de Finé; e iclui figuras idênticas (figura 69)[722]. Depois de colocar o quadrante no cimo da torre maior, de modo a que uma das hastes fique orientada para a base da torre menor e que o ponto onde se fixa o índex fique mais perto do observador, move-se o índex até que, espreitando pelos furos dos agulheiros, se veja o cimo da torre que se pretende medir. Nesse momento, prende-se um fio-de-prumo (o "perpendiculo") em qualquer parte do índex e de comprimento tal que, quando esticado, ultrapasse a haste do quadrante. Vejamos a descrição de Moya:

> Si un Geometra estuviesse en lo alto de la torre c.b. y desde alli quisiesse medir el altura de la torre g.e.põ el instrumento mismo del articulo precedente [refere-se ao quadrado geometrico[723]], de modo que con el lado c.a. eches la linea visual hasta el punto c, que es el fundamento del altura que quieres medir, como muestra la linea c.a.e. Luego estando assi el instrumento sin moverlo alça el index, o regla tanto que por los agujeros de sus pinolas veas

[722] Maroto e Piñero tratam, pormenorizadamente, diversas aplicações que Finé faz do quadrante geométrico e notam que os problemas que Moya resolve são idênticos aos tratados na "Geometria Práctica de Finé en quien, como así lo reconoce expresamente, se há inspirado el bachiller jienense al escribir su texto" [Maroto, M. I. V. e Piñero, E. M., 2006, pp. 341-349].

[723] Moya usa aqui a designação de "cuadrado geométrico" com o mesmo significado de "quadrante geométrico", que usou noutros passos do texto.

el punto g. que es lo mas alto de la torre que mides; como muestra la linea visual c.i.g. y estãdo assi fixa la regla, o index, en toda la parte della que te agradare, pon un perpendiculo colgado de un hilo que cayga sobe el lado c.a. del mismo instrumento como denota i.h. [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 133].

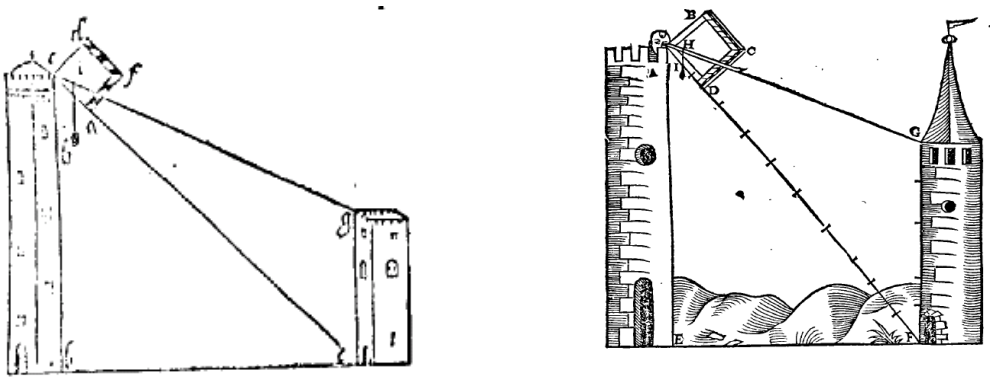


Figura 69: À esquerda: uso do quadrante geométrico na determinação da altura da torre menor, quando o observador está colocado no cimo da torre maior, em [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 134]. Na figura vê-se, ainda que com alguma dificuldade, o quadrante ACDF e o fio-de-prumo IH usados na medição da altura da torre GE, feita a partir de C. À direita: uso do quadrante geométrico por Finé no capítulo "Come mediante esso quadrante Geométrico trivandoti sopra di una altezza maggiore si misuri la altezza minore, & cosi per il cõtrario" [Oronce Finé, 1556, f. 16v].

Recorrendo à figura 70 e usando notação usual para traduzir a explicação dada, temos: os triângulos [CIH] e [CGE] são equiângulos, porque o ângulo HCI é comum a ambos e os ângulos CIH e CGE têm a mesma amplitude (*Elementos* I, 29).

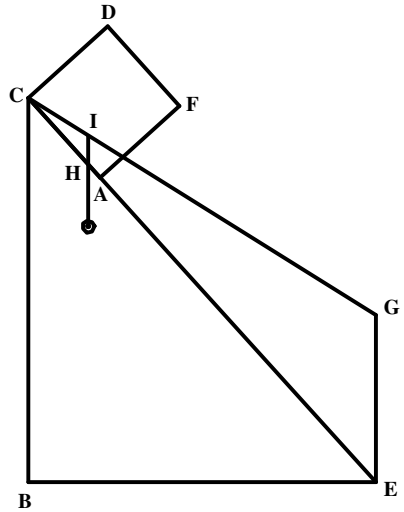


Figura 70: Reprodução da figura 69 à esquerda, cujas letras estão pouco visíveis.

Moya explica que por *Elementos* VI, 4, $\frac{\overline{CH}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EG}}$. Nesta igualdade são conhecidos $\overline{CH}$ e $\overline{HI}$; $\overline{CE}$ determina-se por *Elementos* I, 46. E conhecendo $\overline{CB}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$ sabe-se $\overline{EG}$.

Moya sugere ao leitor que use o fio-de-prumo para obter $\overline{CB}$; e para determinar $\overline{BE}$ reencaminha-o para um capítulo anterior da sua obra onde ensina a utilizar o quadrante. Nesse capítulo, apresentam-se as três posições do índex (figura 71) e as fundamentações teóricas correspondentes a cada uma, com base nos *Elementos* de Euclides.

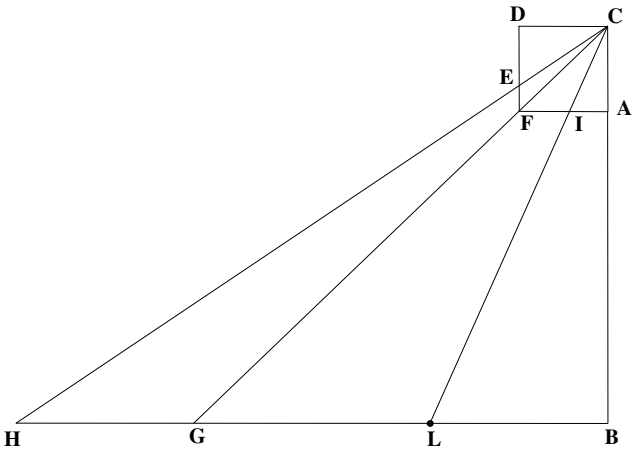


Figura 71: Determinação de distâncias a partir de um local alto, onde se mostram as três posições do índex. Estudo da figura dada por Moya, em [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 110].

Por exemplo, quando o observador, colocado no ponto C, vê o objecto em H, Moya usa os triângulos [DEC] e [HBC], obtendo a igualdade $\frac{\overline{CD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CB}}$ com base em *Elementos* VI, 4. A justificação de que os triângulos [DEC] e [HBC] são equiângulos é baseada na igualdade dos ângulos DEC e CHB (justificada pela proposição *Elementos* I, 29) e na igualdade dos ângulos rectos CBH e CDE (cujo fundamento é a *Petição* 4).

Nos exemplos de aplicação, Moya não usa os valores de Finé, nem a mesma versão dos *Elementos* de Euclides, pois Moya está a consultar a versão de Campano enquanto Finé segue, possivelmente, a versão de Zambert[724].

[724] Enquanto Moya refere a proposição 46 do libro I de Euclides, Finé indica-a como a 47 do mesmo libro. Na versão dos *Elementos* de Campano a proposição 47 é a conversa do Teorema de Pitágoras.

c. Construção do báculo mensorio

O báculo ou como Moya o refere, "báculo mensório" ou "báculo geométrico"[725] é um instrumento rudimentar. Consiste em duas varas resistentes e direitas, de diferentes comprimentos, colocadas perpendicularmente uma à outra, de tal modo que a maior pode deslizar sem dificuldade por um orifício existente na menor. No báculo que Moya descreve, a vara maior[726], de secção quadrada, tem cerca de um dedo de espessura (1,75 cm) e três ou quatro palmos de comprimento (63 a 84 cm). Nela estão marcadas incisões que a dividem em sete partes iguais, mas Moya observa que esse número pode variar, desde que caiba exactamente na vara. A vara menor, com dois ou três dedos de largura (3,5 a 5,25 cm), tem comprimento igual a uma das divisões que estão marcadas na vara maior. Esta vara apresenta no meio um orifício, o *agujero*, no qual a vara maior entra perpendicularmente, podendo a vara menor deslizar perpendicularmente à maior, entre os dois extremos desta última (figura 72)[727].

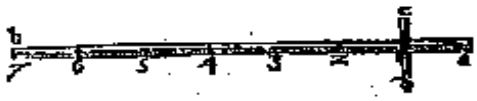


Figura 72: O báculo, ou báculo mensorio [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 96].

Moya explica assim a construção do báculo:

> Toma una vara de gordor de un dedo, o mas, o menos lo que quisieres cuadrada y derecha y larga, de tres, o quatro palmos, y divide su largura en las partes yguales que quisieres, assi como siete, o diez, o mas, o menos, de modo que toda la vara quede dividida justamente en algunas partes, assi como la vara a.b. lo esta en siete. Luego haz una tablilla de dos, o tres dedos ancha, y tan larga como una parte de las en que dividiste la vara, como muestra c.d. y tan gruessa como la misma vara, o mas lo que quisieres, y que tenga en medio un agujero tã cuadrado, que la vara a.b. entre enel tan igual y derechamente que haga a una parte y otra angulos rectos, o yguales, y que sin premir se pueda mover desde el un estremo de la vara hasta el otro, quiero decir, que la tablilla c.d. se pueda mover desde la a. hasta la b. y a la

[725] Pedro Apiano chama-lhe "báculus astronomicus".

[726] De acordo com [Albuquerque, L., 1988, p. 13] nos textos portugueses e espanhóis a vara maior do báculo era geralmente conhecida por virote e a vara menor era designada por soaja e sonanja, respectivamente; mas Moya não usa estes termos para as referir.

[727] A correspondência das unidades dedo e palmo em centímetross é a dada em [Maroto, M.I.V. e Piñero, E.M., 2006, p. 376].

contra que son los dos estremos de la vara a.b. Y esto assi preparado adelante mostraremos usar del para medir anchuras de torres, o paredes, o ventanas, o alturas, o distancias de entre puntos propuestos [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 95].

Este instrumento, que Moya descreve, foi frequentemente usado pelos agrimensores na Idade Média e no Renascimento[728]. Moya refere duas aplicações do báculo, a determinação da largura de uma torre e da altura de um edifício; a diferença na utilização do instrumento consiste na posição em que ele é colocado aquando da observação, como sugerem as imagens que apresentamos na figura 73.

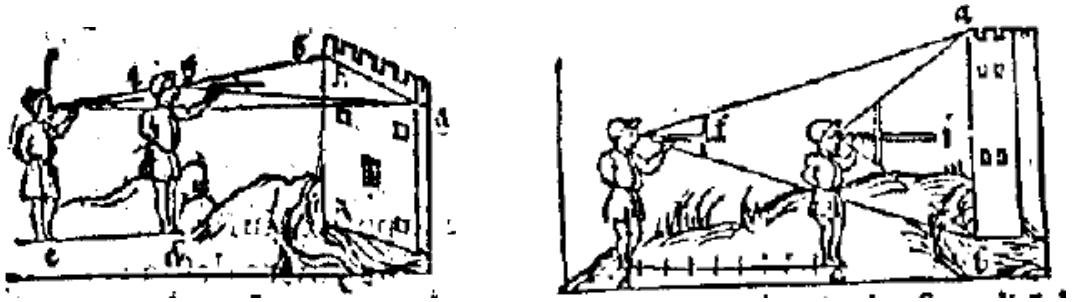


Figura 73: Utilização do báculo na determinação da largura de uma torre (à esquerda) e na determinação da altura de uma torre (à direita) [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 113 e 122].

Para obter, com o báculo, a distância entre dois pontos afastados e inacessíveis (o caso do cálculo da largura de uma torre, que atrás referimos) Moya propõe o seguinte procedimento: o observador fixa a vara menor numa das divisões da vara maior (por exemplo na terceira divisão a contar de A) (figura 74) e em seguida aproxima-se (ou afasta-se) do local onde se encontra o objecto a medir até que, visando por uma das extremidades da vara maior, possa apontar pelas extremidades da vara menor os pontos extremos desse objecto. Nesse momento marca no terreno a posição ocupada. Depois, desloca a vara menor uma posição na vara maior (por exemplo, ficando na segunda divisão) onde repete a pontaria. A medida da distância que se pretende determinar é igual à do comprimento que separa as duas estações, ou seja, AB.

[728] [Albuquerque, L., 1988, p. 10].

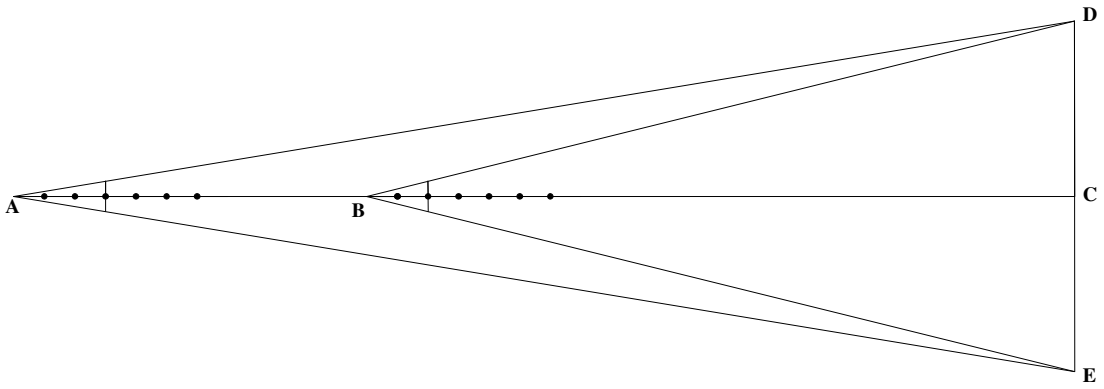


Figura 74: Cálculo da distância $\overline{DE}$, usando as indicações dadas por Moya, em [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 112-113].

Finé explica a constituição e o modo de utilização do báculo ("bastone a misurare", na versão italiana da obra de Finé) que considera a "via mais certa e a mais fácil de todas" para medir distâncias inacessíveis e alturas de edifícios colocados perpendicularmente ao solo[729]. E propõe, problemas muito semelhantes aos que Moya trata no *Tratado de Geometria*, incluindo figuras ilustrativas igualmente semelhantes (figura 75).

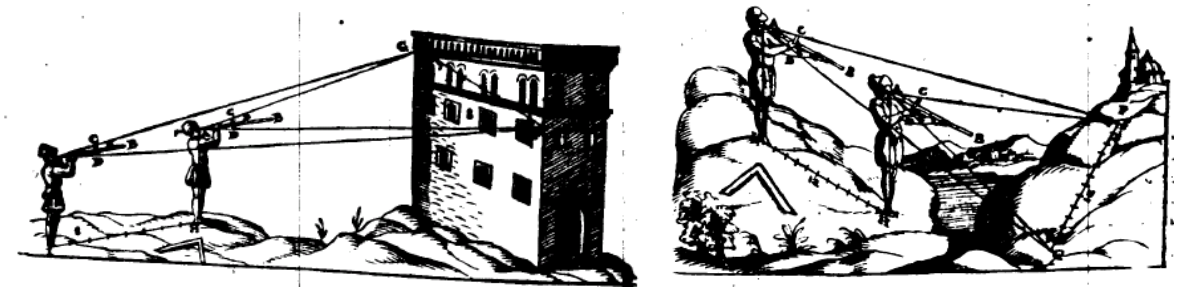


Figura 75: Determinação com o báculo: da largura de uma torre (à esquerda) e da altura de uma torre (à direita) [Oronce Finé, 1587, "Della geometria", pp. 34-34v].

Notamos que o báculo considerado por Moya tem dimensões diferentes do de Finé: enquanto o de Moya tem no máximo cerca de 80 cm de comprimento, o de Finé tem 120cm[730]. Esta diferença torna o instrumento de Moya mais portátil mas, por outro lado, menos rigoroso quando usado na medição de distâncias. Quando se trata da utilidade prática, a questão da dimensão é muito importante, como observa Cristóval de Rojas[731].

---

[729] [Oronce Finé, 1587, "Della geometria", ff. 34r-34v].

[730] [Maroto, M.I.V. e Piñero, E.M., 2006, p. 374].

[731] Diz Rojas: "Nesta matéria de medir distâncias há grandes disputas entre os teóricos e práticos; que os teóricos pensam, que como medem num papel, ou numa mesa, uma distância, que assim lhes há-de acontecer na campanha, e enganam-se em muito, como já tenho desenganado alguns; que sobre uma mesa não havia quem pudesse competir com ele, trazendo grandes especulações e demonstrações, e no campo, onde eu lhe

Moya não apresenta nenhum fundamento teórico que justifique a validade do seu procedimento com o báculo, ao contrário do que se observa quando trata outros instrumentos, em que menciona as proposições dos *Elementos* de Euclides em que se baseia. Maroto e Piñero[732] admitem que Moya não a incluiu por pensar que ela "seria difícil de compreender para qualquer pessoa que não tivesse suficientes conhecimentos de geometria". Parece-nos que esta é uma interpretação aceitável, tanto mais que a opção de Moya é a que se vê noutros trabalhos importantes como, por exemplo, o de Finé e o de Münster[733]. Mas utilizando as propriedades das proporções e os dados de Moya[734] seguem sem dificuldade (de acordo com a figura 74) as seguintes igualdades: $\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{DC}}$ e $\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$ donde resulta, imediatamente, $\overline{DE} = \overline{AB}$. Sem o recurso à simbologia actual, a prova retórica é longa, pois exige que se raciocine sobre uma dupla semelhança de triângulos. Foi o cosmógrafo espanhol García Céspedes quem no seu *Libro de instrumentos nuevos de Geometria muy necessarios para medir distancias, y alturas, sin que intervegan numeros, como se demuestra en la practica,* publicado em 1606[735], apresentou pela primeira vez (como ele mesmo refere) a prova correcta e detalhada, invocando os *Elementos* de Euclides[736].

---

tinha pedido que pusesse em obra tudo o que me tinha dito e quebrado a cabeça, naquele ponto foi-lhe toda a ciência para os pés, e não posso dizer qual a medida porque em 800 passos errou 500, por isso se desenganou e dali em diante começou a exercitar-se na experiência: e a razão de todo este engano é que sendo a distância a medir de alguns mil ou dois mil passos, e o instrumento não maior do que um pé quadrado, vem a ser um pequeno erro no instrumento muito grande na distância, e isto sucede literalmente nas máquinas, ou engenhos, que nos modelos parecem muito verdadeiros e ao fazê-los grandes saem muito pesados, e diferentes do que pareciam em pequenos (…) por isso advirto que o instrumento com que se tenha de medir alguma distância seja o maior que se puder" [Cristóval de Rojas, 1598, f. 80r].

[732] Maroto, M. I. V e Piñero, E. M., 2006, p. 377].

[733] Ver [Oronce Finé, 1587, "Della Geometria", pp. 34r-34v] e [Sebastian Münster, 1551, "De principiis geometriae", p. 50].

[734] [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 112-113].

[735] Andrés García Céspedes compôs esta obra em Lisboa, quando estava nesta cidade ao serviço do arquiduque Alberto VII, genro de Filipe II de Espanha, como se lê na dedicatória, em [Andrés García Céspedes, 1606, "Al sereníssimo señor Archiduque Alberto Conde de Flandres"].

[736] [Andrés García Céspedes, 1606, f. 17r-17v]. Céspedes recorre, sucessivamente, às seguintes proposições dos *Elementos*, (VI, 2; V, 11; VI, 16; II, última proposição; VI, 2; VI, 4; V, 11). Notamos que o báculo que Céspedes refere é ligeiramente diferente do de Moya, pois dispõe de vários agulheiros feitos na vara maior, em vez de ter apenas um agulheiro localizado na vara menor. Deste modo, em vez de ser a vara maior a deslizar ao longo da vara menor, é a menor que, em cada medição tem de ser retirada do agulheiro em que se encontra para ser colocada na posição conveniente. Contudo, este facto em nada altera a ideia por detrás do seu uso.

d. Instrumento constituído por dois semicírculos

Este instrumento, a que Moya não dá nome especial, permite segundo ele determinar distâncias com mais facilidade e precisão do que alguns dos outros atrás indicados. É constituído por uma tábua plana na qual estão desenhadas duas semicircunferências (figura 76), cada uma graduada de 0º a 180º por intervalos de 10º; dos centros das circunferências sai um fio ou régua que Moya aconselha a ser "no muy larga". O segmento definido pelos centros das semicircunferências está dividido em partes iguais (neste caso, 6).

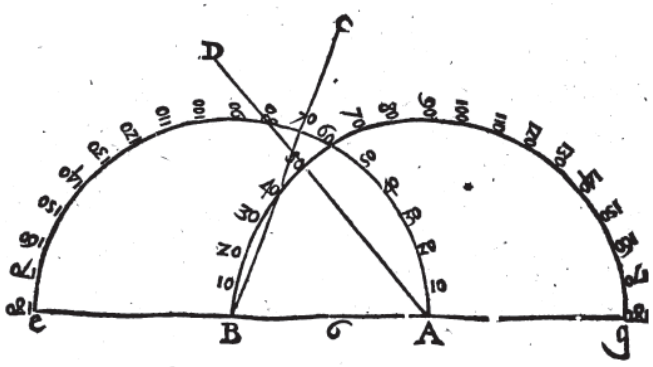


Figura 76: Instrumento de dois semicírculos. A figura mostra a fase final das observações realizadas [Juan Pérez de Moya, 1568, p. 109, e 1573b, p. 104].

Este instrumento é usado nos *Fragmentos Mathematicos* e no *Tratado de Geometria* para determinar a distância do observador a um lugar inacessível. Vejamos o procedimento proposto para medir a distância do ponto B ao ponto inacessível C. No que segue, socorremo-nos da figura 77 para tornar mais facilmente compreensíveis as indicações dadas. Moya começa por colocar o instrumento sobre um local plano, centrando o semicírculo esquerdo em B, onde deve existir uma pínula com um agulheiro. Por esse agulheiro, observa C registando o ponto de intersecção do raio visual com o semicírculo de centro B; supõe que é 70º. Em seguida, deixando uma marca no local do ponto B, desloca-se qualquer número de passos (toma 30) em linha recta levando o ponto B do semicírculo da esquerda a ocupar a posição A' no semicírculo da direita (onde deve existir uma pínula com um agulheiro). De A' observa novamente C, registando o ponto de intersecção do raio visual A'C com o semicírculo da esquerda; supõe que é 80º. Marca estes valores sobre o instrumento, usando os fios que partem dos centros de ambos os semicírculos e obtendo como intersecção o ponto I (note-se que o fio que representamos por AD tem a direcção do raio visual A'C).

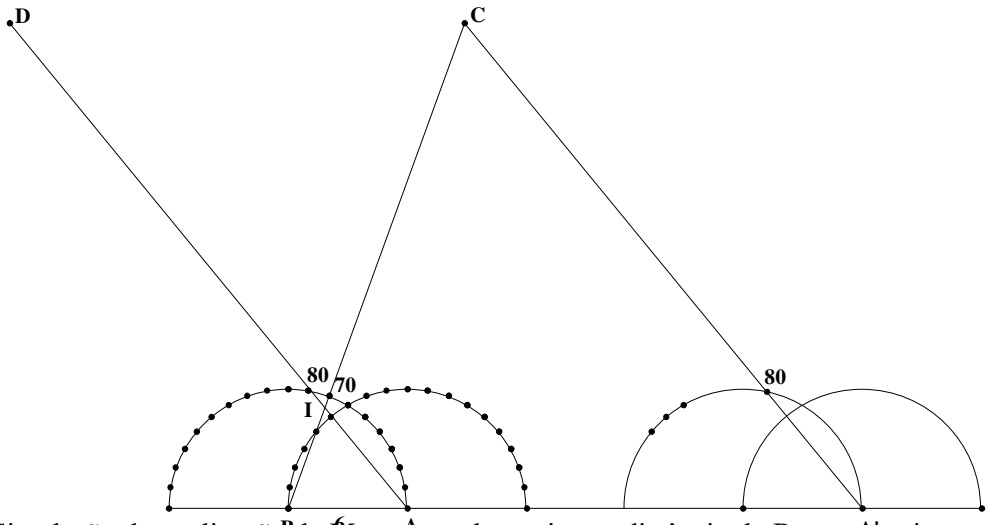


Figura 77: Simulação da explicação de Moya para determinar a distância de B ao ponto inacessível C, usando o instrumento dois semicírculos.

Moya recorre à semelhança dos triângulos que representámos por [BAI] e [BA'C] para determinar $\overline{BC}$, medindo $\overline{BI}$ e sabendo a proporção que existe de $\overline{BA}$ para $\overline{BA'}$.

Gemma Frisio, no *Libritto dela manera de descrivir o situar los lugares*[737], descreve um instrumento que, embora não seja exactamente igual ao de Moya, deve ter servido de inspiração ao nosso autor. Moya não menciona o nome de Frísio a propósito deste instrumento, mas sabemos que conhece a sua obra pois refere-a quando indica outro método de determinação de distâncias[738].

e. O esquadro, ou "esquadra"

O esquadro, ou "esquadra", como lhe chama Moya, é um instrumento simples, muito utilizado pelos carpinteiros[739]. É constituído por duas réguas, cujo material e dimensões Moya não indica, unidas por um dos extremos, formando um ângulo recto[740]. É esta última a principal característica do instrumento. Moya propõe dois processos para averiguar se um esquadro está bem feito. O primeiro consiste em desenhar uma circunferência com centro no vértice do ângulo do esquadro e verificar que os lados do ângulo a cortam numa quarta parte. O segundo recorre à penúltima proposição do primeiro livro dos *Elementos* de Euclides: considerando uma abertura do compasso conveniente, marcando três "tamanhos"

[737] [Gemma Frísio, 1548, ff. 58v-59v].

[738] Ver [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 101].

[739] Finé refere que a esquadra é "usata comunemente dá Machanici" [Oronce Finé, 1587, f. 32v].

[740] Tartaglia chama a este esquadro "squadra materiale" para o distinguir do esquadro para "squadrar il terreni" e nota que os matemáticos lhe chamam "angolo retto" ao esquadro material [Nicolo Tartaglia, 1560a, f. 24].

iguais à abertura do compasso numa das réguas que definem o esquadro e marcando quatro na outra deve observar-se que o segmento que une as extremidades de ambos tem exactamente cinco desses tamanhos.

Apesar de reconhecermos algumas semelhanças entre o exemplo de aplicação de Moya e o de Finé, que a seguir tratamos, não encontrámos no texto do matemático francês qualquer alusão ao modo de verificar que a esquadra está bem construída[741]. Já no texto de Tartaglia essa preocupação é clara, embora os argumentos invocados não coincidam com os de Moya[742].

No *Tratado de Geometria*, o esquadro só é utilizado para determinar a distância entre dois pontos e o procedimento é explicado com base numa figura (figura 78, à esquerda) e supondo que se pretende medir [DB] [as letras da figura estão pouco legíveis pelo que notamos que estão assim colocadas: o ponto B é o que está mais à esquerda e o ponto C o que está mais à direita; o ponto D pertence ao segmento [BC]; A pertence à perpendicular a [BC], por D; E e F pertencem a [AB] e a [AC], respectivamente]. Moya começa por colocar em D uma vara de 6 pés (ou do tamanho que se quiser) perpendicularmente ao plano do solo, dispondo sobre ela o esquadro AEF com o vértice A do ângulo recto coincidente com o cimo da vara; depois orienta o esquadro de modo a ver por AE a outra extremidade, B, do segmento a medir e, quando tal ocorrer, determina o ponto do solo, C, que visualiza por AF. Ficam assim definidos os triângulos [ABD] e [ACD] de ângulos respectivamente iguais e, portanto, de lados proporcionais. Moya não justifica a igualdade dos ângulos (Finé justifica) mas recorre, tal como Finé, a *Elementos* VI, 4 para estabelecer a proporcionalidade entre os lados. Supondo que $\overline{CD}$ tem três unidades, como $\overline{AD}$ tem seis, a proporção de $\overline{AD}$ para $\overline{CD}$ é dupla, pelo que é, também, dupla a proporção de $\overline{BD}$ para $\overline{AD}$; ou seja, $\overline{BD}$ tem 12 unidades. O exemplo de Moya é semelhante ao de Finé, mas Moya usa uma proporção dupla e Finé usa uma tripla[743].

[741] [Oronce Finé, 1587, f. 33r].

[742] [Nicolo Tartaglia, 1560a, f. 24r].

[743] Ver [Oronce Finé, 1587, ff. 33r-33v].

Figura 78: Aplicação da "esquadra" para determinação da distância entre dois pontos. À esquerda em [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 105]; à direita em [Oronce Finé, 1587, f. 33].

3.3.8. Divisão da circunferência

A divisão da circunferência em *n* partes iguais com recurso exclusivamente aos instrumentos de Euclides, a régua e o compasso, foi um tema muito estudado no Renascimento. A resolução deste problema, que é formalmente equivalente à da construção dos polígonos regulares de *n* lados, foi proposta em diversos textos do século XVI e, em alguns casos, os seus autores não limitaram o estudo aos polígonos construtíveis exactamente, apresentando também construções aproximadas para polígonos não construtíveis, e até construções não exactas mas com elevado grau de aproximação para polígonos construtíveis[744].

Moya trata pela primeira vez este assunto no *Tratado de Geometria*, onde explica como se pode dividir a circunferência em *n* partes iguais, com $n = 2, 6, 8, 12, 16, 24, 32$ e 36, embora não relacione esse estudo com o da construção de polígonos regulares de *n* lados. Nos *Princípios de Geometria* o tema é retomado e são também apresentadas construções para a divisão da circunferência em 3, 4, 5, 7, 10 e 11, das quais apenas a da divisão em 3 partes é exacta. Ao indicar estas construções, Moya nota que o seu conhecimento tem uma grande importância na navegação, no estudo dos relógios e na elaboração de lanternas[745].

O estudo da divisão da circunferência em partes iguais, dado por Moya, começa com a construção da divisão de um arco de circunferência em duas partes iguais. O procedimento usado, que consiste na construção da mediatriz da corda que subtende o arco, é o mesmo de Tartaglia[746] e a figura que ambos apresentam é também igual. A única diferença reside na versão dos *Elementos* de Euclides que indicam: Moya invoca a proposição 29 do livro III, o

[744] [Simi, A., 2002, p.14].

[745] [Juan Pérez de Moya, 1584, p. 63].

[746] [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 10r-10v].

que significa que está a consultar a versão de Campano[747], enquanto Tartaglia cita a proposição 30 do mesmo livro.

Notámos que a explicação da construção é bastante pormenorizada o que nos leva a pensar que o objectivo de Moya não era simplesmente prático. Se fosse esse o caso, seria desnecessário recorrer a tais detalhes pois, como sublinha Tartaglia, a bissecção do arco de circunferência pode fazer-se facilmente por tentativas, "abrindo e fechando tantas vezes o compasso quantas forem necessárias"[748].

Moya sabe que uma abertura do compasso igual ao raio da circunferência determina nela um arco com um sexto da amplitude e, como é óbvio, que a divisão em duas partes iguais de um tal arco conduz à divisão da circunferência em doze partes iguais. Um raciocínio como este poderia, então, ser generalizado e aplicado, em particular, à divisão exacta da circunferência em 8, 16, 24 e 32 partes, por exemplo.

No livro IV dos *Elementos* de Euclides, que Moya conhecia, justifica-se a construção de um quadrado, de um triângulo equilátero e de um pentágono regular, inscritos num círculo, bem como a bissecção de um arco de circunferência. Logo, com base nos *Elementos*, é possível justificar as divisões da circunferência do tipo 4×2^n, 3×2^n e $5\times 2^n, n\in IN$, ou seja, a construção dos polígonos regulares com este número de lados. Tartaglia nota, precisamente, isto[749] e faz também observações a propósito da dificuldade e da pouca utilidade das outras divisões da circunferência[750].

---

[747] Em Heath é a proposição *Elementos* III, 30 [Heath, T. L., 1956, II, p. 61]. Ver também em (Campano cit. por [Busard, H. L. L., 2005, I, p. 131]).

[748] Como refere Tartaglia [Nicolo Tartaglia, 1560c, f. 10v].

[749] Bisogna notar, che ciascheduna figura equilátera, che sappiamo descrivere in un cerchio, nel medesismo cerchio saperemo anchora inscriverne, & circonscriverne un'altra del doppio piu lati, & aquella medesima saperemo inscrivere, & circonscrivere il cerchio, per gli archi, alliquali si sottostende li lati di quella figura, divisi in due parti eguali, & per le linee tirate alli ponti di mezo, cioe di lor divisioni dalle estremita di lati della medesima figura, sara fatto di dentro di esso cerchio una figura del doppio piu lati della prima, laquale sara equilátera (per la vigesimanona del terzo di Euclide) & sara anchora equiangola, sapendola inscrivere nel cerchio, saperemo anchora conchiudere, le altre tre, per l'ordine della duodécima, decimaterza, & quartadecima di questo capo. E per tanto perche sapemmo inscrivere un triangolo equilátero, saperemo per questa causa descrivere lo hessagono, & per lo hessagono lo duodecagono, & per lo duodecagono una figura di vintiquattro lati, & cosi in infinito doppiando, & abenche per il triangolo potemmo descrivere lo hessagono (come habbiamo detto) nondimeno di quello habbiamo posto la sua própria regola, dellaquale ne seguita non puoca utilita, similmente anchora, perche sapemmo inscrivere il quadrato, saperemos per questo inscrivere ogni figura, che il numero di lati di quella sai egualmente paro, cioe l'ottagono, & similmente una figura da 16. & da 32. & da 64 lati, & per il penthagono saperemo anchora inscrivere un decágono, & una figura di 20 lati, & cosi continuadamente doppiando quel medesimo, similmente del quindecagono, chioe per quello saparemo inscrivere una figura di 30 lati, & cosi di 60. & di 120. & cosi continuamente doppiando [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff.15v-16r].

[750] E sobre as outras divisões da circunferência, Tartaglia diz: "Ma delle altre figure, che fin hora non è statu parlato, la scientia è difficile, & di puoca utilita, come si narra sopra la ultima del cuarto di Euclide, come

Não temos dúvida que Moya sabia fazer estas construções exactas. Contudo, as divisões da circunferência que explica baseiam-se em considerações sobre o quarto da circunferência, sendo as construções exactas preteridas em favor das aproximadas. Isto é surpreendente, pois estas nem sequer são mais fáceis de executar do que as exactas. Moya não explica por que é que ensina um método aproximado quando para o mesmo fim existe um procedimento exacto; a única justificação razoável que encontrámos para esta estranha opção é que todas estas construções aproximadas usam uma abertura fixa do compasso, que é igual ao raio da circunferência que se pretende dividir[751].

Apresentamos, em seguida, as construções dadas por Moya para a divisão da circunferência em 8, 16, 24, 32 e 36 partes iguais[752]. Estas construções começam todas pela divisão de um quarto de circunferência em 3 partes iguais e não as encontrámos em nenhuma das obras que consultámos.

a. Divisão em 8 partes

Como dissemos, Moya começa por dividir um quarto da circunferência em 3 partes iguais. Para tal, considera o quarto de circunferência JEF, de centro F e diâmetro [HJ]. Com um compasso de abertura igual ao raio da semicircunferência e com centro em J e em E marca os pontos C e A, respectivamente, repetindo este procedimento, agora com centro em H e E, obtendo D e B (figura 79). Deste modo, fica a semicircunferência dividida em 6 partes iguais. Depois traça [BA] e [DC] e marca o ponto de intersecção, G, de [DC] com o semidiâmetro [EF]. Finalmente, traça [GH] e chama-se I ao ponto de intersecção de [GH]

---

che'éla figura settagona, la nonagona, la undecagona, & cosi quella di 13 lati, & infinite altre, dellequali (com'è detto) appresso di mathematici non se ne ha la scientia, vero è che se noi sappessimo designare un triangolo di duoi lati eguali, che l'uno, & l'altro di duoi angoli, che sono sopra la basa di quello, & che sapessimo anchora dividere ciascheduno di detti angoli in tre parti eguali, saperessimo descrivere in uno dato cerchio lo settagono, come fu fatto di sopra del penthagono, & cosi se sappesimo designare un triangolo di duoi lati eguali, che ciascheduno delli duoi angoli, che stanno sopra la basa fusse quadruplo all'altro saperessimo anchora in un dato cerchio descrivere la figura nonangola, & cosi che fusse quincuplo, & che sapessimo dividere ciaschheduno di quelli in cinque parti eguali, saperessimo….Et quantunque sin hora da speculativi mathematici non si habbia scientia alcuna del settagono, nonagono, undecágono, & altri ne che gli sia cognito il modo, over regola di saper dimostrativamente descrivere in un proposto cerchio alcuno di quelli, ne similmente circonscrivere alcuni di quelli al cerchio, nondimeno tai problemi apresso al pratico naturale sono facili, perche tutti a tastone gli mandara a essecutione sensibilmente in matéria, & perche son certo, che questo mi sara concesso, non voglio cerca cio darme alcun figural essempio." [Nicolo Tartaglia, 1560c, ff. 15v-16r].

[751] Agradeço a Jens Høyrup a troca de impressões sobre este assunto.

[752] Depois de ter concluído a divisão da circunferência em 32 partes iguais, Moya observa que isso "es necessario en la navegacion para descrevir los Rũbos de los 32 vientos comunes".

com [BA]. Conclui que $\overline{HI}$ é a corda que subtende o arco de 1/8 da circunferência de centro F e raio [FJ]. Vejamos as indicações de Moya:

> Si quisieres dividir una quarta de un circulo en dos partes, divide con el abertura del compas con que se vuiere hecho el circulo el medio circulo en seis partes, como diximos enel articulo sexto deste cap. Y cada quarta en tres. Luego de las divisiones de una quarta saca lineas parallelas hasta las divisiones de la otra quarta como las lineas ab y cd muestran. Luego del punto g dõ el semidiametro fe corta ala linea cd saca la linea gh y lo que vuiere desde h hasta i sera la mitad de una quarta, que es el proposito. Lo qual sabido facil cosa sera dividir la circunferẽcia de un medio circulo en quatro partes, y la de todo el circulo en ocho [Juan Pérez de Moya, 1573b, pp. 43-44].

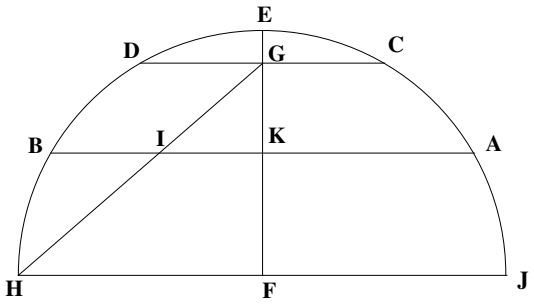


Figura 79: O segmento [HI] tem medida aproximadamente igual à da corda que subtende um arco da circunferência dada com amplitude igual a 1/8 dessa circunferência [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 43].

Como facilmente se vê, esta construção não é exacta. De facto, supondo K o ponto médio de [AB] e *r* a medida do raio da semicircunferência, tem-se: $\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$, $\overline{FK} = \frac{1}{2} r$ e $\overline{HG} = \frac{\sqrt{7}}{2} r$, donde $\overline{HI} = \frac{\sqrt{21}}{6} r$. Pode ver-se que, se [HI] fosse a corda correspondente a um arco de 1/8 de circunferência, seria $\overline{HI} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, r$, que é diferente de $\frac{\sqrt{21}}{6} r$. No entanto, trata-se de uma boa aproximação, por defeito, pois o módulo da diferença entre os valores exacto e aproximado é da ordem $0{,}002\, r$.

b. Divisão em 16 partes

A construção começa com a marcação dos pontos A, C, E, D, B e com o traçado das cordas [BA] e [DC]. Estes passos e a marcação do ponto de intersecção, G, (figura 80)

realizam-se do mesmo modo que no problema anterior. Depois, traça-se [DI] e marca-se o ponto L, de intersecção de [DI] com [BA]. Por fim, traça-se [GH] e determina-se o ponto K, de intersecção de [GH] com [DI]. [KL] é o segmento de recta que permite dividir o quarto da circunferência em quatro partes iguais e, portanto, dividir a circunferência em 16 partes. Como se pode verificar, $\overline{\mathrm{KL}} = \frac{\sqrt{73-40\sqrt{3}}}{5} r$, pelo que se conclui que esta construção possibilita uma aproximação cujo erro é inferior a 0,005*r*.

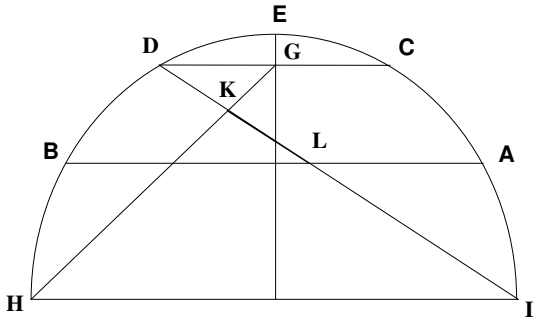


Figura 80: O segmento [KL] tem medida aproximadamente igual à da corda que subtende um arco da circunferência dada com amplitude igual a 1/16 dessa circunferência [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 44].

c. Divisão em 24 partes

Sejam A, D, E, F, J, H pontos nas condições da figura 79, atrás indicada. Tracem-se os segmentos [AH] e [DF] e designe-se L o seu ponto de intersecção (figura 81). Moya afirma que o segmento [FL] tem comprimento aproximadamente igual ao da corda de um arco de 1/24 da circunferência dada.

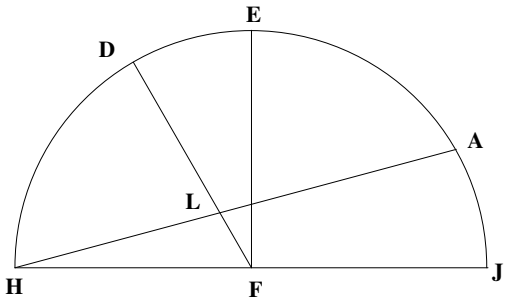


Figura 81: O segmento [FL] tem medida igual à da corda que subtende um arco da circunferência dada, com amplitude igual a 1/24 dessa circunferência [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 43].

Facilmente se pode provar que $\overline{\mathrm{LF}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}\, r$ e que, portanto, esta construção dá um valor aproximado por excesso, sendo o erro cometido inferior a 0,007 *r*.

d. Divisão em 32 partes

Sejam A, B, C, E, F e H pontos nas condições da figura 79. Tracem-se os segmentos [BF] e [AH] e designem-se X e Y os pontos de intersecção de [AH] com [BF] e [EF], respectivamente (figura 82). Finalmente, trace-se $\dot{\mathrm{C}}\mathrm{Y}$ e designe-se I o ponto de intersecção de $\dot{\mathrm{C}}\mathrm{Y}$ com [BF]. De acordo com Moya, [XI] é uma corda de comprimento aproximadamente igual à oitava parte da quarta da circunferência de centro F e raio [HF]. Pode mostrar-se facilmente que $\overline{\mathrm{XI}} = \sqrt{\frac{558-315\sqrt{3}}{338}}\, r$ é uma boa aproximação, por defeito, do comprimento da corda que subtende o arco de 1/32 desta circunferência, pois o erro cometido é inferior a 0,005*r*.

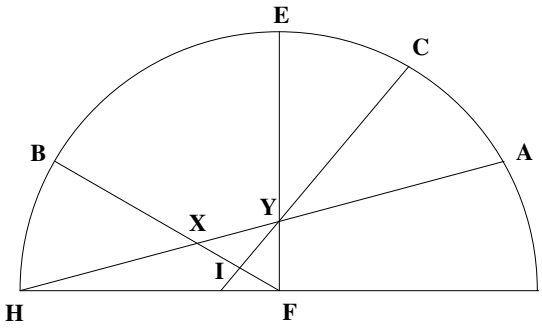


Figura 82: O segmento [XI] tem medida igual à da corda que subtende um arco da circunferência dada com amplitude igual a 1/32 dessa circunferência [Juan Pérez de Moya, 1573b, p. 44].

e. Divisão em 36 partes

Como se sabe, as divisões da circunferência que acabámos de tratar admitem construções exactas com régua e compasso, mas o mesmo não se verifica para a divisão da circunferência em 36 partes iguais. A possibilidade de uma tal divisão está relacionada com a da trissecção do ângulo, que constituiu um dos três problemas clássicos da Antiguidade[753]. Moya não refere explicitamente este assunto, mas apresenta uma construção aproximada da

[753] No século XVIII, Gauss indicou como condição necessária e suficiente para a construtibilidade de um polígono regular de *n* lados, a seguinte: $n = 2^k p_1.p_2...p_t$, com $k \geq 0$ e $p_t = 2^{2^t}+1$, primos ímpares distintos. Estes números p_t são chamados números de Fermat. Fermat conjecturou que os números desta forma eram primos e é verdade que os primeiros cinco números desta sequência o são, mas Euler mostrou que o sexto número não é primo. Pode ver-se uma construção exacta de um polígono de 17 lados em [Bold, B., 1982].

divisão de um quarto da circunferência em 9 partes iguais, que conduz à divisão aproximada da circunferência em 36 partes iguais (figura 83).

Vamos explicar, resumidamente, o procedimento de Moya, começando por notar que ele começa com a divisão do quarto de circunferência em três partes iguais, tal como nas quatro construções que acabámos de apresentar.

Sejam L, I, H e K pontos de trissecção dos quadrantes CBE e ABE (figra 83). Traçem-se os segmentos [HI], [KL] e [EL]. Designe-se por D o ponto de intersecção de [KL] com o semidiâmetro [EB], perpendicular a [AC], e por M o ponto de intersecção de [HI] com [EL]. Traçe-se [ID] e designe-se por N o ponto de intersecção de [ID] com [EL]. De acordo com Moya, $\overline{\mathrm{MN}}$ é o comprimento da corda que subtende o arco de 1/36 da circunferência de centro B e raio [AB]. Pode mostrar-se sem dificuldade que $\overline{\mathrm{MN}} = \sqrt{\frac{1072 - 616\sqrt{3}}{169}}\, r$ é uma boa aproximação, por defeito, do comprimento da corda que subtende o arco de 1/36 desta circunferência, pois o erro cometido é inferior a 0,002 *r*.

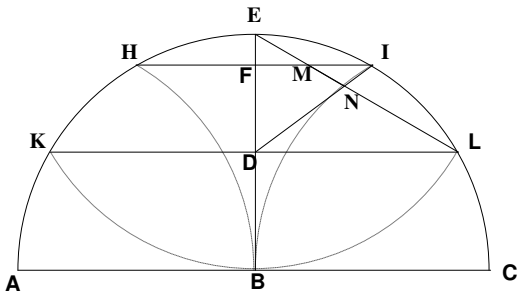


Figura 83: O segmento [MN] tem medida igual à da corda que subtende um arco da circunferência dada, com amplitude igual a 1/36 dessa circunferência. Os arcos de circunferência não são visíveis na figura apresentada por Moya [JuanPérez de Moya, 1573b, p. 43].

No segundo livro de *Fragmentos Mathematicos*, Moya tinha já indicado uma construção (figura 84) para a divisão do quarto de circunferência em nove partes, que ele considerava uma boa invenção, e que atribuia a Rodrigo Zamorano[754]:

[754] Rodrigo Zamorano foi cosmógrafo e catedrático da Arte de Navegar na Casa da Contratação de Sevilha. Foi ele quem publicou, em 1576, a primeira tradução espanhola dos seis primeiros livros dos *Elementos* de Euclides, intitulada *Los seis Libros Primeros dela Geometria de Euclides. Traduzidos en lĕgua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contrataciõ de Sevilla*. O manuscrito desta obra, intitulado *Los seis libros primeros de los Elementos Geometricos de Euclides philosopho megarense. Rodrigo çamorano interprete* encontra-se na Biblioteca Nacional de España (Mss 12440). [Maroto, M. I. V. e Piñero, M. E., 2006, pp. p. 225-239] observam que a historiografia da ciencia espanhola apenas menciona as traduções impressas de Rodrigo Zamorano e de Luis Carducha [Madrid, 1637], catedrático de Matemáticas e Artilharia, e a manuscrita de Juan Cedillo Díaz, que se encontra na Biblioteca Nacional de España. E referem a obra de Cristoval de Rojas [Rojas, 1598] e a *Prática*

Este inventó Rodrigo Zamorano, vezino de Medina de Rioseco, den se las gracias que se devem a los primeros inventores de alguna cosa buena, que lo meresce por su claro y raro ingenio [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 436].

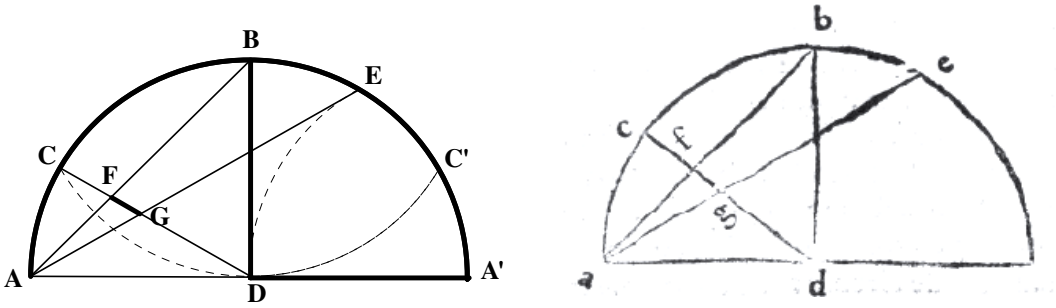


Figura 84: Divisão do quarto da circunferência em nove partes iguais dada por Rodrigo Zamorano. À direita, figura apresentada em [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 436].

Essa construção pode ser resumidamente explicada do seguinte modo: Considera-se a circunferência de centro D e raio [AD], na qual [BD] é perpendicular a [AD]. Tomam-se os pontos C e E, sobre a circunferência, de modo que AC e BE sejam arcos de 1/3 de quadrante da circunferência. Traçam-se, em seguida, os segmentos [AB], [AE] e [CD] e marcam-se os pontos, F e G, de intersecção de [CD] com [AB] e com [AE], respectivamente. [FG] é "aproximadamente" igual à corda que subtende um arco de amplitude igual a 1/36 do quarto da circunferência dada. Pode mostrar-se facilmente que $\overline{\mathrm{FG}} = \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{3}}\, r$ constitui um valor aproximado, por defeito, da corda referida, com erro inferior a 0,02 *r*.

É curioso observar que, embora em 1567 Moya tivesse considerado uma boa invenção esta construção de Zamorano, no *Tratado de Geometria*, que publicou em 1573 indicou outro modo para obter, com régua e compasso, uma melhor aproximação do lado do polígono de 36 lados inscrito numa circunferência de raio *r* (aquela que a figura 83 mostra).

Rey Pastor[755] faz alusão a esta última construção apresentada no *Tratado de Geometria*, notando que ela parece ser, tal como as dos polígonos de 8, 16, 24 e 32 lados, devida a Porres Osório, advogado mexicano e amante da matemática, residente em Espanha

---

manual y breve Compendio de Artillería [1626] composta por Julián Firrufino, catedrático de Matemáticas do Consejo de Indias, como exemplo de traballhos onde está incluída uma tradução parcial dos *Elementos*.

[755] [Rey Pastor, 1934, p. 132, nota de rodapé 1 e p. 139, nota de rodadé 1].

e autor de *Nuevas Proposiciones Geométricas*[756]. Mas Rey Pastor não mostra nenhuma destas construções, limitando-se a observar que elas não são mais simples do que as exactas conhecidas, e que o erro cometido no caso do polígono de 36 lados é da ordem das milésimas.

No artigo *La enseñanza de las matemáticas en la Nueva España*, Corral[757] também refere a dívida de Moya para com Porres Osório relativamente aos modos como no seu *Tratado de Geometria* divide a circunferência em mais de 12 partes, mas não fornece nenhuma informação adicional sobre este assunto, nem indica a data de impressão do trabalho de Porres Osório.

No livro *Breve História de la Ciencia en México*[758] os autores dizem, a certo passo, o seguinte sobre Juan de Porres Osório: "Escribió una obra de título *Nuevas proposiciones geométricas*, que influyó en el celebre *Tratado de matemáticas*, de Juan Pérez de Moya. Porres ideó nuevos métodos para dividir la circunferencia, así como para la construcción aproximada del polígono de treinta y seis lados con un error de (0.001), que fueron aprovechados por Pérez de Moya".

Podemos afirmar que nenhuma das três indicações anteriores é novidade, pois é o próprio Moya que na carta que dirige ao leitor, no *Tratado de Mathematicas,* afirma ter reproduzido os processos de Porres Osório:

> Los modos de dividir una circunferência de un circulo en mas de doze partes, que pusimos enel capitulo catorze, del primeiro libro de Geometria, son de Juan de Porres Ossorio de Mendonça, Legista, natural de Mexico, vezinho de Ciudad Real [Juan Pérez de Moya, 1573a, El Bachiller Juan Pérez de Moya, al letor].

Por outro lado, esta indicação de Moya leva-nos a concluir que a afirmação feita por Altamirano[759], quando diz que a obra de Juan de Porres Osório se conheceu por volta de 1580, está errada ou que Pérez de Moya consultou uma versão anterior desse trabalho.

---

[756] Rey Pastor aponta 1570 como data possível de impressão deste trabalho de Porres Osório, baseando-se no testemunho dado por Vallin, em *Cultura Científica de España no século XVI* .

[757] [Corral, M. M., 2000, p. 61].

[758] [Todd, L.E., Canseco, C.G., Morantes, C.G., 2009, p. 50].

[759] [Altamirano, C., 2008, p. 70].

3.4. *Principios de Geometria*

3.4.1. Novas divisões da circunferência

Na obra *Principios de Geometria*, Moya dá uma construção exacta da divisão da circunferência em 3 partes iguais, e construções aproximadas para as divisões da circunferência em 5, 7 e 11 partes "iguais", mas não dá qualquer pista sobre a sua proveniência. Sobre as construções aproximadas limita-se a observar que na prática funcionam.

a. Divisão em 5 partes

Embora no *Tratado de Geometria* Moya tivesse observado que dividir uma circunferência em cinco partes iguais era equivalente a inscrever numa circunferência um pentágono regular, só nos *Princípios de Geometria* explica como isso se pode fazer expondo uma construção que é facilmente exequível e que, apesar de aproximada, conduz, como veremos, a uma boa aproximação. No seu texto não há qualquer referência às construções exactas de Euclides e de Ptolomeu[760].

O procedimento começa com a construção de dois diâmetros perpendiculares, [AB] e [CX] (figura 85).

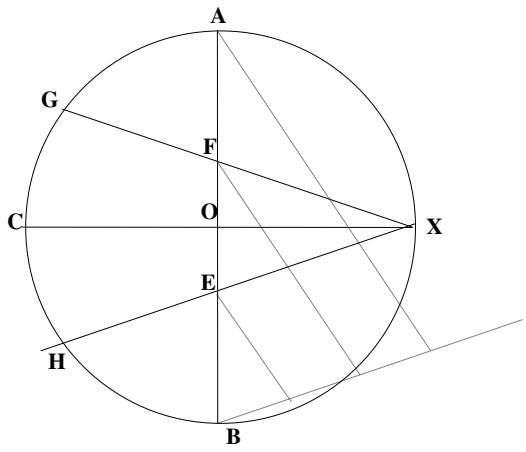


Figura 85: Divisão aproximada da circunferência em cinco partes iguais [Juan Pérez de Moya, 1584, f. 63r].

[760] Euclides, *Elements* IV, 11; Ptolemy, *Ptolemy's Almagest*, G.J. Toomer, ed. and trans. (London: Duckworth, 1984), I.10, pp. 48-49.

Em seguida, divide-se um dos diâmetros, por exemplo [AB], em três partes iguais obtendo os pontos E e F, e traçam-se as semirectas $\dot{X}E$ e $\dot{X}F$, que cortam a circunferência em H e G, respectivamente. Moya afirma que o arco GH é a quinta parte da circunferência[761].

Se a construção fosse exacta, o segmento [GH] seria igual ao lado, *l*, do pentágono inscrito no círculo, o que não se verifica. De facto, designando por *d* a corda [GX] (que seria a diagonal do pentágono), e usando a semelhança dos triângulos [GHX] e [FEX], obtém-se $\frac{\overline{GX}}{\overline{GH}} = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ [762]. Ora, como se sabe, o lado e diagonal do pentágono regular verificam a condição, $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b. Divisão em três, sete e onze partes

Já antes vimos que Moya sabe como se divide, exactamente, a circunferência em seis partes iguais, o que lhe permitia obter imediatamente, por duplicação, um arco com comprimento igual a um terço da circunferência. Contudo, nos *Princípios de Geometria*, apresenta uma outra construção da divisão da circunferência em três partes iguais. Expomo-la seguidamente.

Considere-se a circunferência de centro H e raio [EH] (figura 86) e seja M o ponto médio de [EH]. Trace-se a mediatriz, AD, de [EH]. Os pontos de intersecção desta recta com a circunferência determinam um arco menor, AD. Moya afirma que este arco é a terça parte da circunferência, ou seja, $\overline{AD}$ é a corda que divide a circunferência em três partes iguais. A construção é exacta, como facilmente se verifica; basta observar que, por ser $\overline{MH} = \frac{\overline{AH}}{2}$, a amplitude de $\angle AHE$ é 60º e, portanto, o arco AED é 1/3 da circunferência.

Utilizando ainda a mesma figura, considere-se o ponto N, de [AD], tal que $\overline{DN} = \frac{1}{3}\overline{DA}$. Moya observa que $\overline{AM}$ e $\overline{DN}$ dividem aproximadamente a circunferência dada em 7 e em 11 partes, respectivamente, ou seja, constituem aproximadamente os lados do heptágono e do undecágono regulares inscritos no círculo representado.

---

[761] [Juan Pérez de Moya, 1584, ff. 62v-68r].

[762] Sobre este assunto ver [Silva, M. C. e Malet, A., 2008, p. 127].

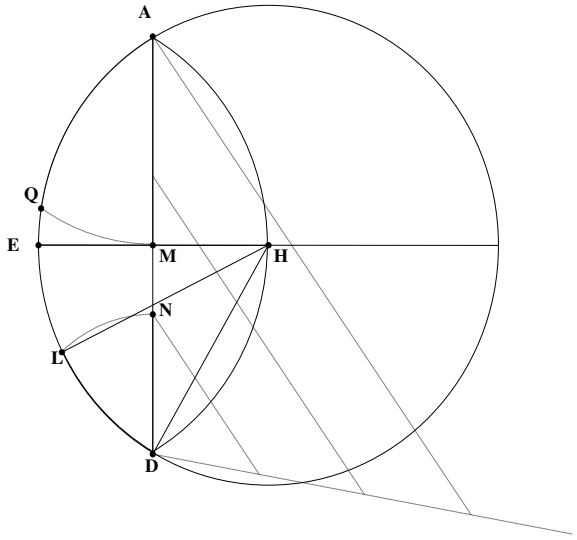


Figura 86: Proposta de Moya para a divisão da circunferência em três, em sete e em onze partes iguais. A figura de Moya não inclui a divisão do segmento [AD] em três partes iguais [Juan Pérez de Moya, 1584, p. 64r].

Embora a prova destas afirmações não seja apresentada, pode ver-se sem dificuldade que $\overline{\mathrm{AM}} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ é um valor aproximado por defeito, com erro inferior a 0,002 *r*, do lado do heptágo inscrito no círculo de raio *r*, e que $\overline{\mathrm{DN}} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$ é um valor aproximado por excesso, com erro inferior a 0,002 *r*, do lado do undecágono inscrito nesse círculo[763].

Notámos que foi, possivelmente, devido à facilidade em realizar a construção do heptágono inscrito num círculo e à boa aproximação que ela possibilita, que levou Dürer a inclui-la na sua obra[764].

4. Considerações finais

O nosso trabalho mostra que a originalidade da contribuição de Moya para a geometria está em que em cada momento e em cada uma das suas obras soube escolher o meio mais eficaz de transmitir conceitos de utilidade prática e adequar os conteúdos tratados às necessidades dos mais diversos utilizadores desta ciência. Como vimos, os temas que Moya desenvolve e que, em grande parte, foram objecto de estudo de importantes autores renascentistas, reflectem bem a sua constante preocupação de actualização e divulgação. Se

[763] Basta comparar os valores de $\overline{\mathrm{AM}}$ e de $\overline{\mathrm{DN}}$ com $2\,sin\left(\frac{360^o}{14}\right)$ e com $2\,sin\left(\frac{360^o}{22}\right)$, respectivamente.

[764] [Pedoe, D., 1976, p. 68].

é certo que o conteúdo e métodos incluídos nas diferentes obras geométricas de Moya podem não ser considerados originais, sobretudo se comparados com os de alguns tratados de geometria do Renascimento, também é verdade que o mesmo não se verifica se restringirmos a nossa apreciação aos textos espanhóis da mesma época. Na bibliografia existente, o principal tratado espanhol de geometria que precede o de Moya é devido a Ortega. Este trabalho foi publicado pela primeira vez em 1512, mas foi reimpresso diversas vezes durante o século XVI. Uma das versões melhoradas do *Tractado subtilissimo d'Arismetica y de Geometria* [Ortega, 1552] mostra um texto geométrico muito elementar, oferecendo apenas exemplos numéricos do quotidiano. Pelo contrário, Moya inclui, em especial no seu *Tratado de Geometria*, muitas construções geométricas com régua e compasso, das quais dá explicações minuciosas fundamentadas nos *Elementos* de Euclides. Ficou claro que Moya cita frequentemente os *Elementos*, que conhece na versão de Campano e de Zamberto. Esta última particularidade é tanto mais importante quanto, como referimos, não existia na época nenhuma tradução, em língua espanhola, desta obra de Euclides. Moya recorre, frequentemente, ao *General Trattato*, de Tartaglia, mas cita, outros nomes como Peletier, Forcio (Ringelberg), Dürer, Vitrúvio, Cardano, Frísio, Aguilera, o que nos permite aferir da diversidade dos seus conhecimentos. De alguns destes autores chega a indicar, embora por vezes apenas de forma incompleta, os títulos das obras que lhe serviram de inspiração, como acontece quando menciona a "*Geometria* de Joachimo Forcio", a *Geometria, libro 4*, de Dürer, a *Arquitectura, libro 6*, de Vitrúvio, o "*Tratado sobre la descrição dos lugares, que anda com a Cosmographia de Pedro Apiano*, de Gemma Frísio", ou o *Astrolabio*, de Juan Aguilera, mostrando-nos mais claramente alguns dos seus interesses. Destas obras, Pérez de Moya selecciona os conteúdos que melhor correspondem ao objectivo do seu trabalho: a divulgação dos princípios geométricos a todos aqueles para quem a geometria era uma ferramenta indispensável. As suas obras foram certamente uma referência muito importante para quem, sobretudo em Espanha, recorria à geometria como ferramenta de trabalho. Por outro lado, as chamadas de atenção regulares para detalhes que podem simplificar ou esclarecer certos assuntos que trata, mostram-nos a faceta de um professor preocupado e competente.

Moya é geralmente referido pela sua reputação de aritmético, contudo pensamos que o trabalho que desenvolveu no campo da geometria o permite colocar num lugar de relevo como vulgarizador desta ciência.

QUARTA PARTE

1. Notas sobre as convenções de transcrição ortográfica do texto manuscrito

A transcrição que aqui propomos está lexicalmente muito próxima do original. Introduzimos, no entanto, algumas alterações com as quais procurámos tornar a apresentação do texto mais uniforme e, sobretudo, melhor legível. Os critérios que adoptámos foram os seguintes:

ORTOGRAFIA

1. Separámos as palavras unidas e unimos as sílabas ou letras escritas separadamente, quando tal ocorria indevidamente.
2. Mantivemos os lapsos resultantes de omissões, juntando entre parêntesis rectos as palavras omitidas seguindo-os da palavra latina [*sic*]. Remetemos para uma nota de rodapé a correspondente correcção, para que esses lapsos não comprometessem a leitura do texto.
3. Omitimos as repetições.
4. Desdobrámos as abreviaturas pois considerámos que o seu interesse era pouco significativo; com a sua utilização o autor teve apenas como objectivo a economia de tempo. (Por exemplo, em vez de diz^{e} escrevemos Diziembre).
5. Sempre que tivemos dúvidas na leitura de uma palavra seguimo-la de um ponto de interrogação, entre parêntesis rectos.
6. Reproduzimos a numeração que se encontra no manuscrito mantendo a numeração romana quando o autor a preferiu à numeração indo-arábica. Omitimos os pontos que frequentemente precedem os numerais ordinais e também os que lhes sucedem, quando não se trata de pontos finais. Mantivemos a escrita de numerais ordinais, mesmo nos casos em que ela é abreviada.
7. Mantivemos a acentuação conforme o original, mas eliminámos acentos diacríticos hoje incorrectos. (Por exemplo, mantivemos sem acento as palavras “asi” e “segun”, e eliminámos os acentos de “créce” e “cô”).
8. Normalizámos a capitalização respeitando a adoptada no *Diccionario de la Real Academia Española*: escrevemos com maiúscula a primeira letra dos nomes próprios de pessoas e cidades; de deus e de jesus; dos pontos cardeais, colaterais e intermédios; das palavras sol, luna, ecuador e zodíaco. Do mesmo modo, usámos maiúscula na escrita da primeira letra dos signos do zodíaco. Tal como se observa no *Diccionario de la Real*

Academia Española, mantivemos a inicial dos nomes dos meses do ano em letra minúscula.

9. Adoptámos para nomes dos ventos dados na rosa-dos-ventos os indicados na *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana* [Madrid, 1993] uma vez que no *Diccionário da Real Academia Española* apenas são referidos os nomes dos ventos principais, colaterais e intermédios. Tomámos para nomes dos trinta e dois ventos os seguintes: Norte, Sur, Este, Oeste, Nordeste, Noroeste, Sudeste, Sudoeste, Nornordeste, Nornoroeste, Esnordeste, Esudeste, Sursudeste, Sursudoeste, Oesudoeste, Oesnoroeste, Norte cuarta al nordeste, Nordeste cuarta al norte, Nordeste cuarta al este, Este cuarta al nordeste, Este cuarta al sudeste, Sudeste cuarta al este, Sudeste cuarta al sur, Sur cuarta al sudeste, Sur cuarta al sudoeste, Sudoeste cuarta al sur, Sudoeste cuarta al oeste, Oeste cuarta al sudoeste, Oeste cuarta al noroeste, Noroeste cuarta al norte, Noroeste cuarta al sur, Norte cuarta al noroeste. Estes nomes só foram usados quando correspondiam exactamente aos utilizados por Moya, diferindo deles apenas na ortografia, ou seja, nos casos em que Moya usou outros nomes para os ventos, respeitámos a sua opção. (Por exemplo, em vez de "gueste" usámos "oeste"; mas não substituímos "4ª" por "cuarta".)
10. Uniformizámos os nomes dos ventos que Moya atribui a outros autores tomando como referência os indicados na *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo Americana* [Madrid, 1993]. Usámos as seguintes designações: ábrego, aparctios, aquilón, argestes, austro, bóreas, brumal, céfiro, cierzo, coro, etesio, favonio, euro, fénix, jaloque, leveche, líbio, libonoto, maestral, mistral, noto, poniente, septentrión, siroco, solano, subsolano, tramontano e trascias.
11. Normalizámos os nomes de ilhas, de cidades e de autores. (Por exemplo, tomámos Azores, em vez de Açores; Aristoteles, em vez de Aristote, Arist., aristot., aristoteles, Aristo; Plínio em vez de plino, plinio, e pli.).
12. Em geral, mantivemos a ortografia e o género das palavras, não efectuando qualquer correcção gramatical, pelo interesse filológico que atribuímos ao conhecimento da grafia original de um texto do século XVI. (Por exemplo, mantivemos "el aguja", "el altura", o "el estrella").
13. Em alguns casos pontuais procedemos a alterações. Foi o que sucedeu com o "ç" que substituimos por "z" ou "c", conforme o caso; com o "x" que substituimos por "j" e com o "v" que substituimos por "b".

14. Quando no manuscrito eram usadas síncopes diferentes da mesma palavra, uniformizámos a grafia e escrevemos a palavra por extenso com a grafia actual. (Por exemplo, usámos "porqué" em vez de " porq̂ ", "pq", "porq").
15. Transcrevemos o "s" caudado duplo como "ss" e o simples como "s".
16. Transcrevemos o "f" duplo por "f".
17. Mantivémos o uso de "do" com o significado de "donde".

PONTUAÇÃO e REDACÇÃO

1. Indicámos entre parêntesis rectos as palavras que se apresentam parcial ou totalmente ilegíveis, mas cujo sentido textual permita a sua reconstituição.
2. Sempre que uma palavra era ilegível, indicámos entre parêntesis rectos e em itálico a palavra [*ilegível*].
3. Inserimos no texto, entre os sinais <...>, os elementos do texto que se encontram entre linhas ou marginalmente.
4. Introduzimos vírgulas, pontos e traços, sempre que estes elementos facilitavam a compreensão do texto, indicando-os entre parêntesis rectos (Por exemplo, em vez de "Siguiendo la regla 125", escrevemos "Siguiendo la regla [,] 125").
5. Ignorámos a transcrição das poucas palavras e frases rasuradas por considerarmos que não contribuem para o esclarecimento do conteúdo.

APRESENTAÇÃO GRÁFICA

1. Adoptámos um formato contínuo, respeitando os parágrafos do texto original.
2. Indicámos as folhas em branco entre parêntesis rectos e em itálico.
3. Numerámos as páginas de acordo com a numeração aposta no documento original, acrescentando-lhe, a numeração da mão do autor, quando existe. Colocámos as numerações entre parêntesis rectos, no início de cada folha e pela ordem que as referimos. Indicamos por [p.n.n.] as páginas não numeradas.
4. Indicámos os símbolos do zodíaco e os símbolos do sol e da lua pelos nomes que lhes correspondem.
5. Remetemos para nota de rodapé os esclarecimentos que nos pareceram úteis.

Observação: Algumas das palavras e frases que estavam mal legíveis no manuscrito puderam ser interpretadas e reconstruídas por meio de diversas passagens da obra *Fragmentos Mathematicos* [1567], onde Moya explorou estes temas. Notamos, além disso, que a identificação de algumas letras e abreviaturas nos foi facilitada pela consulta da obra *Manual de Paleografía Diplomática Española de los siglos XII al XVI*, de D. Jesús Muñoz y Riviero [Madrid, 1917].

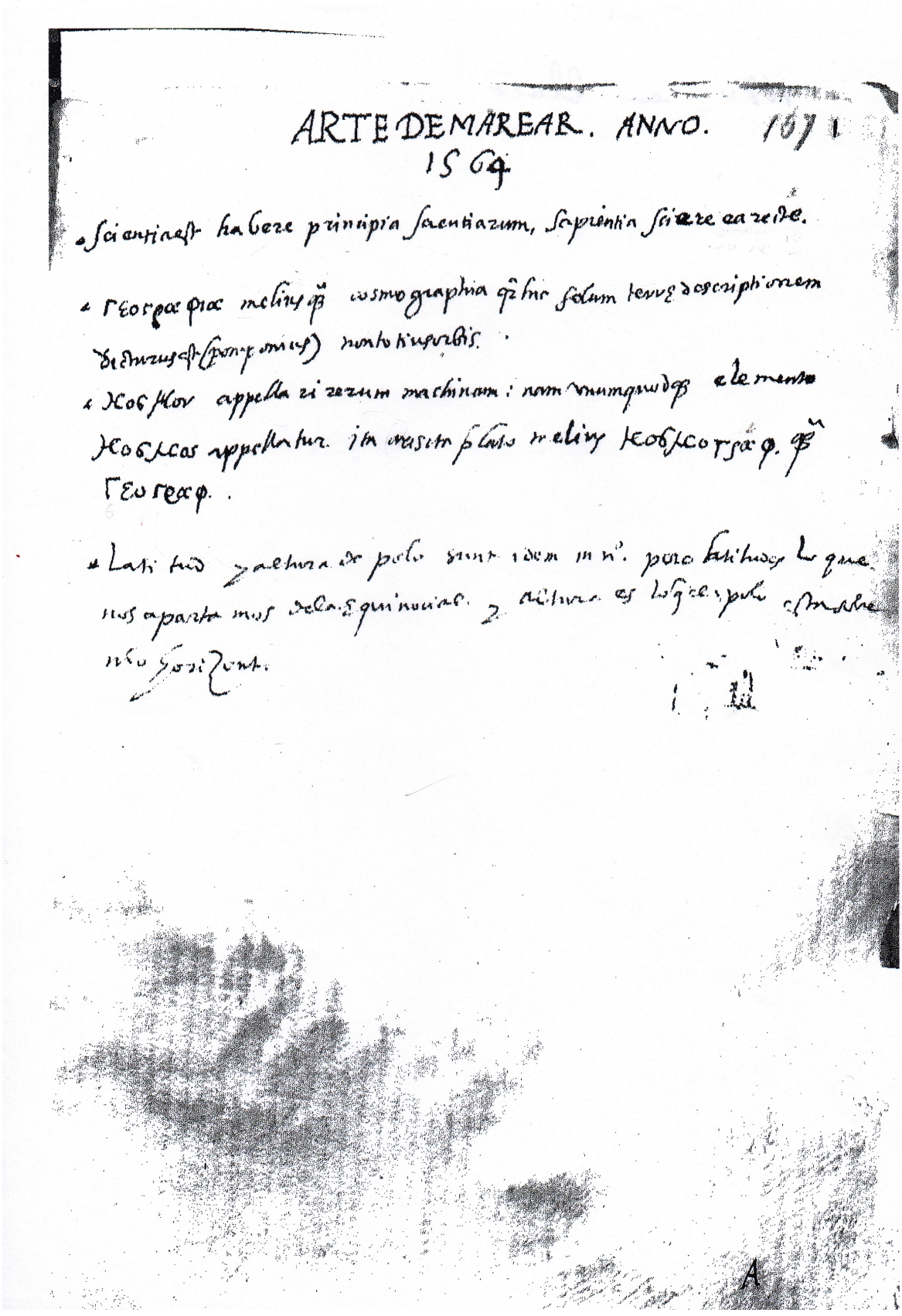
Incluimos, em seguida, uma lista das palavras letras e formas gráficas que foram substituidas ou normalizadas:

original	transcrição	original	transcrição
abaxo/abaxar	abajo/abajar	derº	Derecho
ado	a do	dexa	Deja
adoesta	a do esta	diffª	Diferencia
alaparte	a la parte	dixeron	Dijeron
alas	a las	dize	Dice
alça	alza	diz^{e}	Diciembre
alçar	alzar	dsde	Desde
alçando	alzando	e	En
amano	a mano	efficiente	Eficiente
asde	has de	enº	Enero
aũ	aun	enel	en el
avendo	habiendo	espanô	Español
avierto	abierto	êtrando	Entrando
ay/aya	hay/haya	exº, $^{o}_{ex}$, exºpº	Ejemplo
baxo	bajo	gra	grado, grados
braçada/bracio	brazada/brazo	grã	Gran
circũferencia	circunferencia	grade	Grande
cô	con	hade	ha de
coluna	columna	hasde	he de
comiença	comenza	haze, hazer	hace, hacer
cônel	con el	hõbre	Hombre
correspõden	corresponden	ima	Imán
creçer	crecer	islla/ ysla	Isla
créce	crece	Juº	Juan
d	de	j. xpo	Jesús Cristo
d el	del	lamar	la mar
dela, delas	de la, de las	laql	la cual
debaxo	debajo	llamã	Llaman
deleql	de laquela	lũbre	Lumbre

original	transcrição	original	transcrição
M; M_i	minutos	q̂dar	Quedar
mª	misma	q̂d	Cantidad
m̂ , mº	media, medio	qesto	que esto
mês	mes	ql	que la, que lo
mũdo	mundo	qlquiera	Cualquiera
n^{a}	nadir	quº	Cuando
nº, n^{os}	numero, numeros	quaderno	Cuaderno
nobre	nombre	quantidad	Cantidad
nordesteâ	nordestean	quanto	Cuanto
Nordt	Nordeste	redõda	Redonda
novi^{e}	noviembre	relox	Reloj
n r̂a , n r̂o	nuestra/o	rũbo	Rumbo
nro	nuestro	segũ	Según
ora (tempo)	hora	sª	Segunda
orizonte	horizonte	sellega	se llega
ot^{e}	octubre	setentrion, septentrion	Septentrión
outro/ outra	otro/ otra	setiẽbre, set^{e}	Septiembre
p̂	por	Sevilla	Sevilla
p^{e}	parte	siº	Sin
pº	Pedro	siguẽ	Siguen
pa	para	Sles	se les
peq̂nas	pequeñas	Sô	Son
perteneçientes	pertenecientes	Spanõ	Español
por	por	syllabos	Sílabas
porq	porque	tpo, tpôs	tiempo, tiempos
porq̂ , pq,	porqué	ũ	Una
priº, prî	primero	uviese	Hubiese
pte, pt^{e}	parte	viẽto	Viento
q, q̄ , q̂ , q̃	que	Zenith	Zenit
q̄^{da}	queda	î	1ª

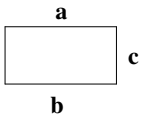
original	transcrição	original	transcrição
3̂	3ª, 3º		Tauro
4̂ , 4º	4ª, 4º		Geminis
	ch		Sagitario
	h		Virgo
	q		Piscis
	st		Leo
	z		Acuario
	Aries		Cancro
	Libra		Capricornio
	Escorpio		

2. Transcrição do manuscrito L-III- 24 (ff. 167-200) da Real Biblioteca del Monasterio de El Escorial



Frontispício do manuscrito *Arte de Marear*, onde se distingue a informação em castelhano "Latitud y altura de polo sunt idem in numero. Pero latitud es lo que nos apartamos de la equinoccial y altura es lo que el polo esta sobre nuestro horizonte".

[f. 168v] <·> Si el ambito de la tierra es 6300 leguas. Como dicen algunos que de costa de mar se ha navegado hay mas de 8000 leguas. Rs[765] que por las vueltas de ab hay 4 de a b c habra mas de 11.

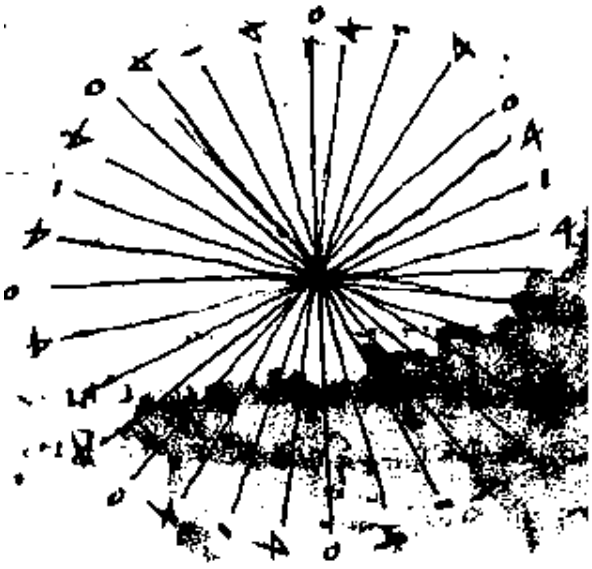


<ya ·> Rumbos son las rayas de las cartas de marear que se ponen por los vientos.

<·> Derrota[766] – dicen los marineros por decir de do sale y do va. Quier[e] decir que es el camino que por la mar se hace o deve hacer. Ejemplo: que derrota lleva hulano de Canaria, quiere decir que va a la Canaria.

<1 ·> Declaracion de los rayos de "las cartas" de marear. Los rayos negros denotan vientos enteros que son los ocho principales. Con rayos verdes se denotan los medios vientos. Que son otros 8. Con los colorados se denotan 16 cuartos de viento que son todos 32. Como se demuestra en estas lineas.

Los 0es [zeros] denotan los 8 vientos enteros. Los
Unos, los medios. Los cuatros, los cuartos.



<2 ·> Declaracion de la carta de marear. Si quiero saber buscar en la carta de marear un pueblo [,] assi como Sevilla [,] mirare la latitud de Sevilla que son 37 grados y la longitud y a do se juntaren los dos hilos como se
[f. 169; f.2] hace en las tablas de Tolemeo [*sic*] y hallaras al pueblo que quisieras.

<3 ·> La 3ª regla muestra saber lo que por agua dista un pueblo de otro por linea recta. Ejemplo de Sevilla a la Isla de la Madera cuanto hay [¿]. Pon dos puntos del compas el uno en Sevilla y el otro en la dicha isla y ve al escala de las leguas y hallaras en Medina 250 leguas [*ilegível*].

---

[765] Rs deve ter o significado de "responde".

[766] "Derrota, quiere dezir caminho" [Juan Pérez de Moya, 1567, f. 35]. Derrota – el camiño que debe haceres y el que en efecto se hace, ya sea por un ya por distintos rumbos, para trasladarse de unos puertos a otros [Fernández Navarrete, M., 1831, p. 209].

<4 ·> Para saber un pueblo o isla de los que estan en la carta de marear que latitud o altura de polo tiene, saberse ha poniendo el compas en la linea equinoccial que es la linea colorada y el otro pie pon le en Sevilla y despues en el escala que sube hacia arriba deste modo hallaras la latitud del tal pueblo.

<5 ·> La 5ª regla es saber por qué rumbos o vientos se ha de navegar. Para esto se supone que a do quiera que estuviera mi navio, que esta en medio de todos los 32 vientos. Esto supuesto yo pongo que estoy en Sevilla y que quiero ir a las Canarias. Mirare en la carta de marear do esta Sevilla y allí hechare mis 32 vientos poniendo mi septentrión [de la tierra] hacia do esta el de la tierra y esto asi hecho mirare el rumbo que mas derecho fuera a las Canarias y por aquel caminare. Y si no oviere rumbo que derechamente vaya a Canaria caminaré por el que mas lo fuere y mudar despues la derrota. Finalmente, conocido el rumbo por do he de ir enderezaré el aguja para alli con el mastil guiando el navio de modo que vaya derecho por el dicho rumbo. Y el aguja

[f. 169v] su parte del norte siempre se va derecha lo que puede al norte. De modo que la carta de marear muestra el viento y el aguja muestra seguir el tal viento.

<·> Este camino que se hace por agua es en uno de tres modos.

<·> El primero, por camino derecho y esto es caminando por la equinoccial adelante que es del este a oeste. Que es de oriente a occidente, y al contrario. O por algun paralelo de la equinoccial equidistante [.] El cual camino no se senala leguas porque por el no se sabe lo que se anda. Mas saber se a cada grado corresponde 17 leguas y $\frac{1}{2}$. Si no es a respeto [por comparación con]de lo que otros dias suelen andar con viento buena [mar] o mala.

<·> El segundo camino es caminar subiendo. Esto es cuando de menos grados suben a mas. Como si uno sale de Sevilla que tiene 37 grados y quisiese navegar para una isla que tiene 40 o mas o menos. Y esto es cuando caminan del sur a norte en el cual camino a cada grado tambien le corresponden otras 17 leguas y media. Caminando por via recostada que son por alguno de los 14 rumbos, sus colaterales que van subiendo na costa. De lo cual notaras que aun que dezimos subir en la mar no hay cuestas. Y a estos rumbos a cada grado le corresponde diferentes leguas como se mostro en la hoja 42 que esta antes desta en este mismo cuaderno.

<3 ·> El tercero modo es caminar descendiendo como cuando se camina de un pueblo que tiene mas altura de polo a otro que tiene menos. Y es como caminando de norte a sur o por rumbo acostado que son otros 14 vientos sus colaterales a los cuales vientos a cada grado le

corresponden diferentes leguas como se mostro en el hoja 42 que precedió deste cuaderno. Estos 3 caminos se declaran como el que sube una escalera o desciende o se anda paseando [f. 170; f.3] en un escalon.

<·> Pues para saber lo que uno ha andado pongo por ejemplo que uno sale de Sevilla que tiene 37 grados de altura de polo y va a una isla que tiene 50. A cabo de algunos dias toma el altura del norte por las reglas que para ello hay y hallase en 40 grados [.] Luego ya le consta que ha subido 3 grados. Pues mirar por el rumbo que va que leguas corresponden a cada grado y hacer la cuenta. Y asi de todos. Pero si se viese estar en los 37 grados entende que no ha salido del meridiano [paralelo] de Sevilla y que va hacia do halla menos mucho mas. Y entonces ha necesidad de echar punto.

Echase punto tomando primero el altura del norte, como en las reglas dello se ha mostrado. Cipongo [sic] que se toma en 40 grados. Y este [hubiera salido] de 37, bien sabe segun esto que ha caminado 3 grados pero no sabe en que parte esta [.] Para verlo pone la punta de un compas en 40 grados, que dice que se halla, y el otro pie pongalo en un parallelo cualquiera a esta altura [.] Esto para [no] alzarse ni abajarse de los dichos 40 grados. Y vengan como [*ilegível*] de las puntas hasta que tope con otro compas el cual ha de tener el un pie en el punto do partio la nave y la otra punta en un rumbo que vaya derecho porque no discrepe del derecho de por do va el navio caminando. Llevando los puntos hacia delante y como rastrando. Y yendo llegando asi el un compas al otro las puntas de uno como estan contra las del otro, hasta tanto que la punta del un compas quede nota de do salio el

[f. 170v] el [sic] navio tope y se encuentre con la punta del otro compas que salio de los 40 grados. Y alli do se toparen es el sitio o lugar do el tal navio se halla. Y agora que sabe el lugar y el rumbo por do fue, multiplique los grados que ha caminado por las leguas que a cada uno le corresponde segun el rumbo que llevo. Y asi sabra lo que ha andado y lo que le falta por andar[767].

<·> Tomar altura del Sol. Haciendo que entren los rayos del Sol por los agujericos de la alidada del astrolabio y como muestra la 4ª y 5ª regla de Medina para marear. Aunque este astrolabio sirva el de Aguilera para ello. Mejor es uno que traen los marineros de laton y muy pesado.

---

[767] Moya propõe que se "ache o ponto", ou seja, que se determine o lugar onde a embarcação se encontra, sabendo três coisas: a latitude desse lugar, o ponto donde partiu e a direcção do movimento. Como a diferença de latitudes é conhecida, pois sabe-se qual é a latitude dos lugares de partida e de chegada, e como, além disso, sabendo o rumo pode recorrer a um regimento de léguas no qual fica a conhecer quantas léguas correspondem a 1º de meridiano (ou seja, 1º de latitude) em cada uma das direcções dos 32 ventos, bastará multiplicar a diferença de latitudes pelo número de léguas indicado na tabela para obter a distância, em léguas, entre o ponto de partida e o ponto onde se encontra.

<·> Con el altura de Sol y la declinacion suya y con saber hacia do van las sombras de los cuerpos se sabe lo que estamos apartados de la equinoccial[768].

<·> El altura del polo se toma de noche con la ballestilla mirando con la una parte el horizonte y con la otra parte de la tablilla las guardas. Y a esta altura se anade o quita ciertos grados como se declara en el 3º notable del altura del polo en Medina o en la hoja 38(769) deste cuaderno[770].

<·> El movimiento de la aguja quando esta cerca la piedra iman y como por una parte esta piedra llama al Norte y con otra al Sur. Y tocando un cuchillo con la piedra

[f. 171; f. 4] iman el cuchillo alza una aguja.

<·> Cuando dicen las sombras hanse de entender las que el Sol hace al mediodia y no a otro tiempo.

<·> Distancia se toma por apartamiento.

<Ya ·> Nordestear. Y noroestear del aguja. Cuando el aguja se aparta del polo hacia el Nordeste se dice que nordestea y cuando se aparta hacia el Noroeste se dice que noroestea. Lee la hoja 6. signo y la hoja 11signo [771].

<· ¶ > Nombres y vocablos de mareantes que sirven por principios para esta ciencia.

<Ya ·> Ampolleta es reloj de arena que sirve para medir hora.

<Ya ·> Singladura es lo que anda el navio en un dia. Jornada.

<Ya ·> Bajos a do hay poca agua. Y hay piedras.

<Ya ·> Recuestas a do hay poca agua y arena sin cesar.

<Ya ·> [Baya] Bahía. Lea se con tres syllabas. Es paradera de navios abierto. Y no hay la misma seguridad que como cuando estan en puerto.

<Ya ·> Puerto es como Sevilla, Lisboa, Cartagena. Hay en ellos seguridad para los navios.

<Ya ·> Quilla. El fundamento o lo debajo del navio o fundamento sobre que se hace.

<Ya ·> Isleos. Son unos islotes sin poblacion.

<Ya ·> Barra es una entrada de puerto que por otra ninguna parte el navio no puede entrar ni salir.

---

[768] [*Cf.* Quarta Parte, 3.4.2].

[769] A folha referida não existe no manuscrito.

[770] [*Cf.* Quarta Parte, 3.4.1].

[771] Pensamos que estes símbolos têm apenas como função a de conectar o assunto tratado nas duas folhas onde estão desenhados, remetendo o leitor de uma para a outra.

<Ya ·> Brújula [*ílegível*]. Es el aguja de marear.

<Ya ·> Paraje. Ejemplo Pedro esta en 24 grados de altura y Juan tanbien esta en paraje de Pedro quiere decir que Juan también esta en 24 grados de altura.

<Ya ·> Placer son bajos de arena. Senalan se con unos punticos asi . Y son muy bajos cuando hay mas puntos y [*ilegível*][772] ocho [¿] cuando son pocos. Y cuando estos baxos son piedra senalanse

[f. 171v] con crucicicos asi .

<Ya ·> Unas decidas [¿] pequenas denotan islillas que casi el agua las cubre.

<Ya ·> Restinga es bajo pequeno de arena. Y figuranle con pocos puntos. Y si es de piedras, ponen pocas cruzes.

<Ya ·> Arrecife es lo mismo que restinga.

<Ya ·> Mesa del Sol es la tórrida zona por quien anda por ella.

<Ya ·> Surgir es parar o hechar ancoras.

<Ya ·> Zarpar. Caminar o quitar o alzar ancoras.

<Ya ·> Cabeza de agua [es] la mayor creciente.

<Ya ·> Aguas vivas. Lo mismo que cabeza de agua.

<Ya ·>Aguas muertas. Cuando va menguando la mar.

<Ya ·> Fluxo es creciente.

<Ya ·> Refluxo [,] menguante.

<Ya ·> Pleamar [,] mar crecido o lleno.

<Ya ·> Bajamar [,] vaciar o menguarse la mar.

<Ya ·> Ventar tramontana es soplar o hacer viento siroco.

<Ya ·> Escalamos. Son las clavijas de palo.

<Ya ·> Popa [*sic*] es la cabeza del navio o galera.

<Ya ·> Proa [*sic*] [es] cabo de la galera o nao.

<Ya ·> Quartales. A do van guardadas las velas.

<Ya ·> Fogon. La cocina.

<Ya ·> Dar carena es renovar o remendar el navio.

<Ya ·> Cuadernos. Lo que llamamos costeros.

<Ya ·> Caballares. Es lo que dezimos bordes.

<Ya ·> Teneos a la banda, por acostaos a una parte.

---

[772] A palavra é ilegível mas o significado é claro; é o contrário de muito baixos.

<Ya ·> Yea Yea, por tira de aquí o de esto.

<Ya ·> Gato. Lo mas alto del mastil.

<Ya ·> Escandalar [.] La camara sobre que esta el aguja.

<Ya ·> Crujia. Es el camino o senda que va desde la proa a la popa.

<Ya ·> Topa. Los carruchos [*sic*][773] con que suben las velas.

<Ya ·> Postiza. El lugar a do asientan los remos [.]

<Ya ·> Vela maestra. Es la mayor de 3 [.]

<Ya ·> Vela mesana. La mediana entre 3 [.]

[f. 172; f. 5]

DE MA [REAR]

<Ya ·> Vela del trinquete. La menor de tres.

<·> Al viento cierzo le dicen tramontana.

<·> Al ábrego [,] medio poniente.

<·> Al solano [,] levante.

<·> Al gallego, poniente.

<Ya ·> Gumera [*sic*][774], maroma.

<Ya ·> Puntal, poste.

<Ya ·> Maymoneta, estaca en que atan las velas.

<Ya ·> Escota. Maroma con que templan las velas.

<Ya ·> Ciaboga quiere decir volver essa galera.

<Ya ·> Galera empavesada. Galera armada.

<Ya ·> Dar al traves. Perderse por tormenta.

<Ya ·> Hacer aguada, por traigamos agua.

<Ya ·> Bogar es Remar.

<Ya ·> Leva remo, por no remeis mas.

<Ya ·> Barbeta es la carrucha con que meten el esquife.

<Ya ·> Espalderes. Los remeros de popa.

<Ya ·> Proales. Los que andan en el barco.

<Ya ·> Bogavante. Al primero remero.

<Ya ·> Tercerol. Al postrero.

<Ya ·> Pone la popa en Sevilla. Por navegad a Sevilla[775].

---

[773] Devia ser "garruchos".

[774] Devia ser "gúmena". [Ver Vocabulari Marítim Catalá- Castellà; Castellano-Catalán, de J. M. Martínez, H. Terán, L. C. Relat, 1984, p. 198].

<Ya ·> Esperon. La nariz de la galera.

<Ya ·> Lastre es [aquello] con que cargan la galera.

<Ya ·> Nocher [¿]. Es el que guarda la ropa.

<Ya ·> La mar. Quiere decir amargura.

<Ya ·> Sentina. Es el mal olor que sale de una parte de la galera.

<Ya ·> Chusma. Es la congregacion de todos los remeros.

<Ya ·> Esgotar. Sacar agua de la galera.

<Ya ·> Panol. La despensa.

<Ya ·> Calma. Estar mar sosegada.

<Ya ·> Bonança. Lo mismo que calma.

<Ya ·> Tempestad. No estar sosegada.

<Ya ·> Tormenta. Lo mismo que tempestad.

[f. 172v] <Ya ·> Comitre. El que rige el navio o galera.

Ir en popa. Es navegar con buen viento.

Ir a orza [.] Por nave[ga]r a medio viento.

Antena. A do se prenden las velas.

Candaliza. A la maroma con que suben las velas.

Zaborra. Es la carga de arena o piedra que ponen en el bajel para que la nao tenga peso. La galera no le hechan este peso.

Caminar de rota batida. Es caminar por via derecha.

Marcar el aguja. Quiere decir enmendalla o tocalla. Ha de se saber prepararla para que muestre el norte. Lee la hoja 80. Bolviere a marear cap. primero del [6º] libro. Marcar otras veces quiere decir ver o tomar.

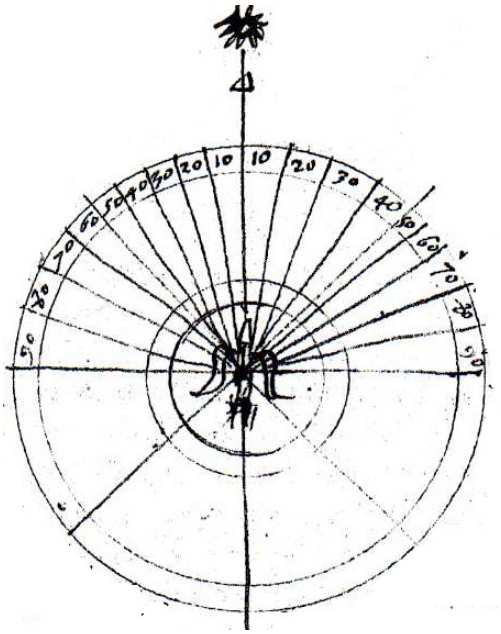
Derrota. Camino.

[f. 173; f. 6]

DE MAREAR. Cuaderno 2º.

¶ Para conocer cuanto nordestea el aguja

[775] Isto parece contradizer o uso que habitualmente se faz da palavra popa.



[À direita da figura] Cuando el aguja senala el polo bien, ni nordestea ni noroestea. Cuando no senala el norte sino que declina hacia oriente se dice nordestear [,] si hacia occidente se dice noroestear. Toman nombres de los vientos colaterales del norte. Y por mucho que se aparte el aguja demuestra. El verdadero norte es $\frac{1}{4}$ que es de uno aire a otro porque los 32 vientos [.] son 32 cuartas. Pasa a esta senal <**>.

[À esquerda da figura] <> Esta $\frac{1}{4}$ vale 11 grados y $\frac{1}{8}$ porque 360 grados partidos a los 32 vientos a tanto le cabe.

Para entender de lo que sirve esta figura pasa a 6 hojas inclusive do esta esta figura **Λ** que es hoja 11[776].

<> El nordestear de las agujas no es otra cosa sino no ensenar el polo en el meridiano donde estan. Y nota que en las islas de los Azores y mas precisamente en la del Cuervo senalam las agujas el verdadero polo. Nota por la diversidad de los aceros y de las piedras que ceban no todos demandan el polo en un meridiano [.] Antes unos en un meridiano mas oriental [,] otros en otro mas occidental. Aun que la diferencia es poca. Nota navegando de la isla del Cuervo o de alguna de las de los Azores en las cuales el aguja pontualmente demanda el polo [,] yendo a occidente las agujas noroestean y navegando del mismo meridiano a occidente[777] nordestean.

---

[776] Esta indicação é correcta. Na folha 11 existe uma chamada de atenção indicada por este sinal.

[777] Onde se le occidente devia ler-se *oriente*.

[f. 173v] Y cuanto mas las agujas se passan del dicho meridiano a una de las dichas bandas o de oriente a occidente tanto mas o menos nordestean. O noroestean. Segun la parte do caminan.

Nota. Si la una parte de la dicha isla y navegando por un paralelo que este 90 grados de longitud de la dicha isla del Cuervo las agujas iran siempre acrecentando en su nordestear o noroestear. Y pasando de los dichos 90 grados por el mismo paralelo por la misma proporcion que hubiesen nordesteado o noroesteado se tornarian a emendar hasta tanto que llegando a otros 90 grados que serian todos 180 de longitud de la dicha isla del Cuervo [,] la aguja tornaria a demandar precisamente el polo. Y se tornase caminando su viaje al rededor con la misma derrota a volver a la dicha isla tornaria a hacer sus diferencias [.] Por la misma orden y proporcion que hasta 90 grados irian las agujas nordesteando y de los 90 grados arriba hasta volver a la dicha isla del Cuervo irían noroesteando de manera que en llegando a la isla demandarian el polo verdadero.

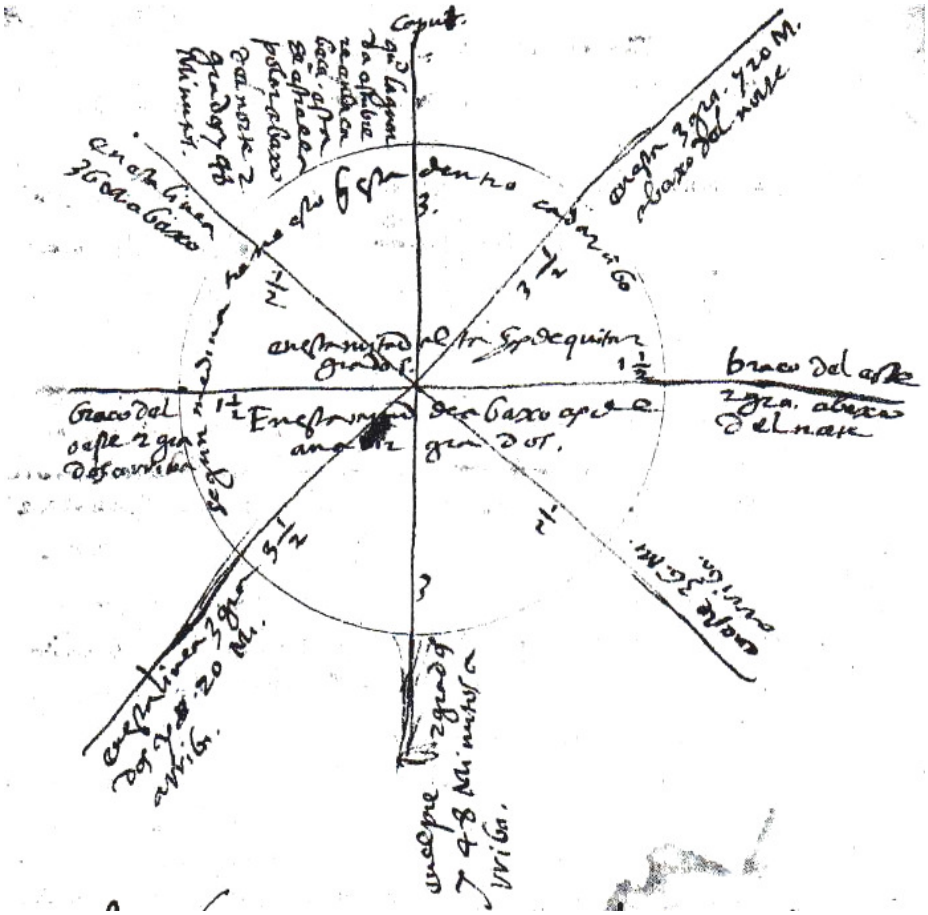
Si se camina de norte a sur. Las agujas no se dice nordestear ni noroestear.

[f. 174; f. 7] ¶ Tomar el altura del polo.

<·> Toma tu ballestilla de noche y mira cuando la guarda de la bocina arrumbare con el estrella polar que es el norte. Lo cual biene siempre a ser en uno delos 4 rumbos principales y no puede ser otra parte. Y cuando ubieres arrumbado quiere decir cuando la 1ª estrella de la boca de la bocina estubiere derecha con el norte en la cabeza o pies o brazos entonces mira la elevación del norte sobre el horizonte con la dicha ballestilla. < Para saber sigues ado esta esto senal ◘> Y si fuere que tomaras las guardas de la banda de tierra has de anadir todo lo que esta en cada rumbo. Y si estubiere de la banda del cielo las guardas has de quitar. < Nota> La media banda de hacia tierra se llama la $\frac{1}{2}$. Que esta hacia nos otros o hacia bajo. Y la otra que esta hacia arriba se llama $\frac{1}{2}$ de hacia el cielo. Usan estos nombres los marineros. Y lo que quedare es la altura del polo. Y la latitud de tal region. Nota que en los 4 vientos principales que son norte sur [.] Levante poniente has de aguardar que la <primera estrella de la > boca que dicen de la bocina este derecha con el norte lo cual se ve mirando por la tablilla de la ballestilla muy derecha. Y cuando no rumbease en estos 4 sino en los otros 4 generales despues destos entonces no hay que ygualar la bocina con el norte, sino arrumbar las dos estrellas que estan en la boca de la bocina con uno de los 4 vientos fuera de los primeros [.] Esto se hace ladeando la tablilla de la ballestilla y mirando si estas

dos estrellas estan derechas con alguno de los 4 vientos mayores [,] fuera de oriente [,] sur [,] occidente [,] norte[778].

[f. 174v]



[Legenda da figura] [Dentro do círculo junto à circunferência] Segun Medina tiene esto que esta dentro cada rumbo.

[No círculo e sobre o diâmetro horizontal] En esta mitad alta has de quitar grados.

[No círculo e sob o diámetro horizontal] En esta mitad de abajo has de anadir grados.

[No exterior da figura, começando na parte superior e descrevendo o sentido horário] Cuando la guarda estubiere en la cabeza esta el estrella polar abajo del norte 2 grados 48 minutos [.] En esta 3 grados y 20 minutos abajo del norte [.] Brazo del este 2 grados abajo del norte [.] En este 36 minutos arriba [.] En el pie 2 grados y 48 minutos arriba [.] En esta linea 3 grados y 20 minutos arriba [.] Brazo del oeste 2 grados arriba [.] En esta linea 36 minutos abajo.

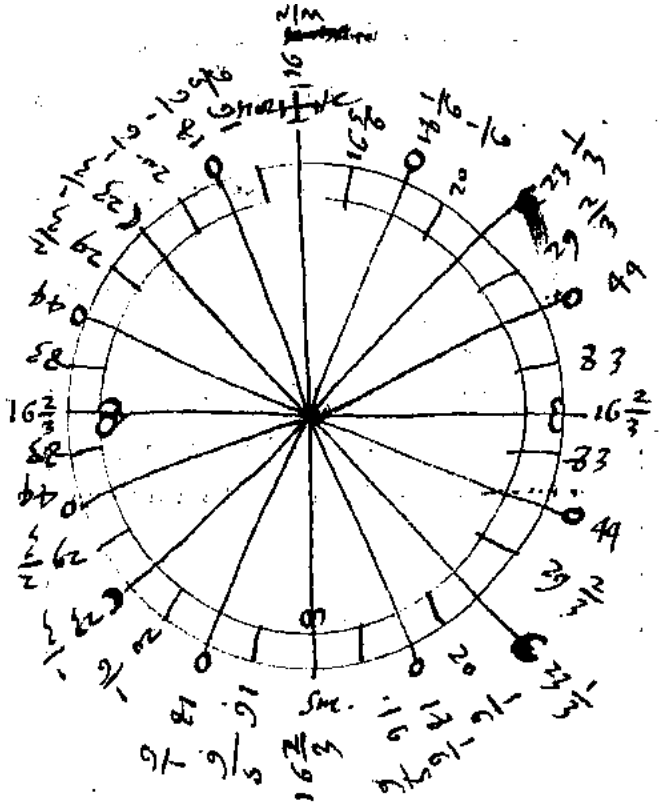
[778] [*Cf.* Quarta Parte, 3.4.1].

Esta es la figura para saber lo que se ha de anadir o quitar a lo que se hallare con la ballestilla de altura de norte. Nota que con la ballestilla veras lo que dista una estrella de otra. Asi como sacas lo que hay desde el horizonte al norte [.] Con la ballestilla se ha de tomar el altura del horizonte a la parte norte despues de que las guardas sean puestas en uno de los 8 vientos dichos[779].

[f. 175; f. 8] <·> Y es de notar que la estrella del norte hace un circulo alrededor del polo que tiene de diametro 7 grados [.]

<·> Nota mas que la parte celeste se comienza desde este y se acaba en el oeste porque en estas se quita lo que tienen [,] los rumbos del altura del norte [,] para saber la del polo. Y la parte terrestre se comienza a contar desde oeste hasta llegar al este en los rumbos de la cual parte se ha de anadir lo que cada uno tuviere en altura que del norte se tomare[780].

[f. 175v]



[À direita da figura] Sobre estas diferencias de leguas que corresponden a cada grado segun el rumbo lee la 4ª hoja inclusive do esta esta senal

[779] A frase é pouco clara mas parece-nos que significa estimar o ângulo entre o horizonte e a estrela Polar.

[780] [*Cf.* Quarta Parte, 3.4.1].

En esta figura se pone las leguas que corresponden a cada grado segun la opinion de los que dicen que el mundo tiene de circunferencia 6000 leguas. Otros dicen que tiene 6120 leguas y segun esto a cada grado de los de norte a sur tiene 17 leguas[781].

<·> Nombres de los vientos en el aguja del marear.

0. Norte: Sur.
1. Norte Sur: 4ª del Nordeste Sudoeste.
2. Nornordeste. Sursudoeste.
3. Nordeste Sudoeste: 4ª del Norte Sur.

[f. 176; f. 9]

4. Nordeste. Sudoeste
5. Nordeste. Sudoeste: 4ª del Este Oeste
6. Esnordeste: Oesudoeste
7. Este Oeste: 4ª del Nordeste Sudoeste
8. Este: Oeste
9. Este. Oeste: 4ª del Noroeste Sudeste
10. Esudeste. Oesnoroeste
11. Noroeste Sudeste: 4ª del Este Oeste
12. Noroeste: Sudeste
13. Noroeste. Sudeste: 4ª del Norte Sur
14. Nornoroeste. Sursudeste
15. Norte Sur. 4ª del Noroeste Sudeste
0. Norte: Sur.

Gueste. Oeste. Ueste. Todo es uno quiere decir Poniente. Occidente

¶ Nombres de los vientos segun Medina[782]

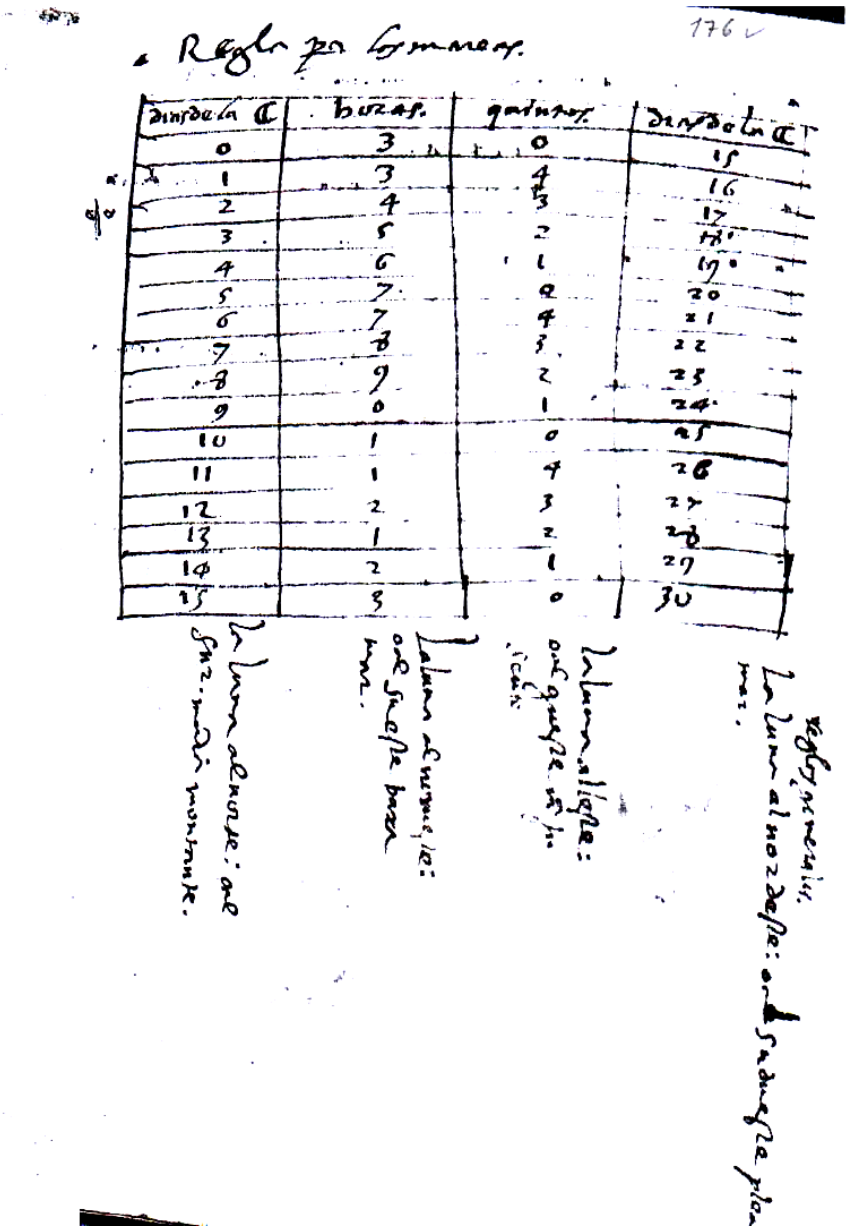
1.	Norte	17.	Sur
2.	Norte 4ª al nordeste	18.	Sur 4ª al sudoeste
3.	Nornordeste	19.	Sursudoeste
4.	Nordeste 4ª al norte	20.	Sudoeste 4ª al sur
5.	Nordeste	21.	Sudoeste

[781] De acordo com o *Diccionario de la Lengua Española da Real Academia Española*, "en el antiguo sistema español" uma légua terrestre equivale a 5572,7 metros.

[782] Estes nomes são, de facto os indicados por Medina [Pedro de Medina, 1545, f. 20v], a única diferença que notámos é que Moya abrevia a escrita, em alguns deles, tomando, por exemplo, *4ª* em vez de *quarta*.

6. Nordeste 4ª al este
7. Esnordeste
8. Este 4ª al nordeste
9. Este
10. Este 4ª al sudeste
11. Esudeste
12. Sudeste 4ª al este
13. Sudeste
14. Sudeste 4ª al sur
15. Sursudeste
16. Sur 4ª al sudeste
22. Sudoeste 4ª al oeste
23. Oesudoeste
24. Oeste 4ª al sudoeste
25. Oeste
26. Oeste 4ª al noroeste
27. Oesnoroeste
28. Noroeste 4ª al oeste
29. Noroeste
30. Noroeste 4ª al norte
31. Nornoroeste
32. Norte 4ª al noroeste

[f. 176v]



Reglas por las mareas: [da esquerda para a direita, sob a figura]

La Luna al norte: o al sur media montante

La Luna al norueste: o al sueste baxa mar

La Luna al leste: o al oeste media jusante

La Luna al nordeste: o al sudoeste pleamar.

[f. 177; f. 10]

<·> Una hora se divide en 60 minutos de hora.

<·> Una hora es 15 grados. Que a cada grado le corresponden 4 minutos de hora.

<·> 15 minutos de grado valen un minuto de hora.

<·> Media hora. Es 30 minutos de hora.

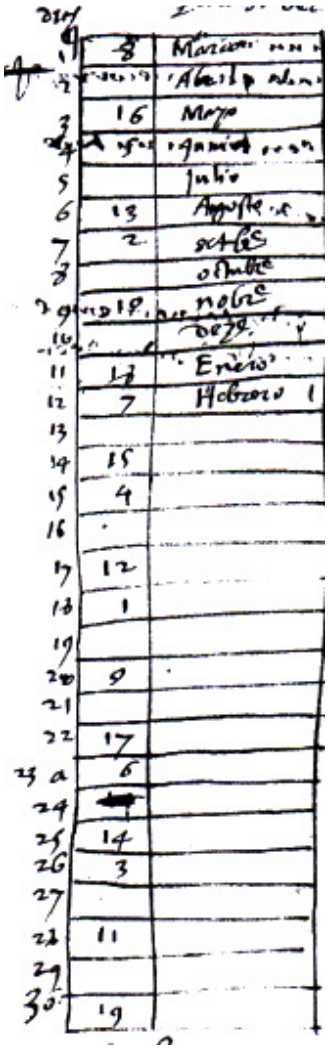
<·> $\frac{1}{4}$ de hora es 15 minutos de hora.

<·> El mundo se divide en 2 partes. La una oriental y la otra occidental. La oriental se divide en

tres. Asia. Africa. Europa. La occidental en dos. America.

[f. 177v]

Para saber las conjunciones de la Luna[783]



Sabido el aureo numero del ano en que estas [,] cuenta del mes que quisieras hasta la casa del aureo numero del ano que estas y a tantos dias del tal mes como casas andares sera la conjuncion. Y si se acabare la coluna cuenta de nuevo.

Ejemplo para entender esta tabla. Pregunto a cuantos de marzo es conjuncion este ano de 1563. Mira el aureo numero deste ano que es 6 ado esta y hallar le as en el punto *a*. Cuenta ahora desde el espacio de marzo hasta el cuantos dias hay contando inclusive. E seran 23. E asi diras que el ano 1563 a 23 de marzo fue conjuncion de Luna. Y en abril fue a 22 por que de abril hasta el 6 de aureo numero hay 22 espacios. Y asi por los otros meses hasta deciembre. Y llegando a enero ha de mudar aureo numero porque es otro ano.

Nota si el aureo numero estuviese arriba del mes de lo cual quieres saber la conjuncion. Daremos vuelta a la tabla.

[f. 178; f. 11] Ejemplo. El ano que hubiese 16 de aureo numero a cuantos de agosto sera conjuncion. Cuenta desde agosto los espacios que hay hacia abajo e habra 28. Comienza la tabla sobre estos 28 hasta llegar al áureo numero que seran 28 y di que a 28 de agosto sera la conjuncion[784].

[783] No manuscrito está representada a lua por um símbolo de quarto minguante.

[784] [*Cf.* Quarta Parte, 3.6.1].

<⌐> <·> Esto depende de la hoja 6 antes desta inclusive [.] Sobre la figura del nordeste fo 6ª. La cual figura sirve para que se haga de papelones, muy ygual y dividida en las lineas que tiene y otros tantos a la parte inferior [.] Y de raya a raya hay 10 grados. Han de estar divididos sus 10 de uno en uno asi Ejemplo. Y ha de quedar sola la circunferencia porque lo demas ha de estar horadado o cortado para que se ponga de modo que el aguja este dentro y apunte la flor en alguna senal de ella para que se vea lo que nordestea o noroestea o cuando muestra perfectamente al norte. Lo cual mostrara cuando derechamente estubiere o senalare en lo alto en la raya que el instrumento tiene un triangulo porque aquel es el norte. Lo cual no hara sino es cuando estuvieren en las islas de los Azores o del Cuervo [.] La razon de lo cual no se alcanza [,] porque alli y no en otra parte. Unos dicen por propiedad que alli tiene el cielo [,] otros porque dicen que hay montes de piedra [f. 178v] en espuma y asi queria ir hacia ella [.] Lo mejor es dejarlo a que no fue Dios servido que supieremos la causa [.] Y por esta razon, porque no bien muestra el norte [,] que [en] los agujos que hacen en Sevilla este la flor que muestra el norte un poquito hacia occidente. Y los aceros o puntos que estan tocados estan mas hacia oriente porque aun que los puntos tocados en la piedra iman no noroesteen aqui derecho el norte a lo menos este la flor mas derecha que ellos.

<·> El punto por fantasia [.] Muchas veces por causa de nublados ni de dia ni de noche se puede saber el altura del polo.Y por esto el maestro suele por su juicio decir pues en tantos dias que camino y con buen tiempo o malo mi navio suele andar tanto. Luego tantos grados abran dado [,] sabido esto. Hecha punto como hemos mostrado y puede acertar y puede herrar. Lo cual no se sabe cierto hasta tanto que vea Sol o el norte.

<⌐> Depende esto de la 4ª hoja antes de esta sobre las leguas que a cada grado se le da segun el rumbo. Ejemplo. Podria alguno dudar

[f. 179; f. 11] diziendo pues todas las lineas que del centro salen a la circunferencia son yguales de do viene que caminando un meridiano adelante por agua a unos grados les corresponden mas leguas por unos rumbos que por otros.

Para esto se supone que hiendo de sur a norte o al contrario [,] o de oriente a occidente [,] a cada grado le sale 17 ½ leguas mas fuera destos 4, los otros rumbos diferentemente les responden [.] Y esto es porque toda linea recta es mas breve que la curva [.] Para lo cual supongo esta bola o esfera redonda.

Estan dos hombres en el punto o centro *a*. Y el uno quiere ir hacia el norte que es el punto *c* y el otro hacia el punto *b*. Si cuando el que va al

[f. 179v] norte llega al punto *d* ha [*sic*] andado un grado de latitud [,] cuando el que va[785] al punto *b* le preguntasen lo que ha subido de latitud [,] dira que otro grado porque era una bola maciza. Estando en un paralelo algunos al rededor tan apartados seran del norte los unos como los otros [.] Y asi el que esta en el punto *d* y el que esta en el punto *b* tan apartado estan uno como otro del polo porque cada uno se es allegado un grado [.] Pero no por esto ha dejado de andar mas camino el que fue de punto *a* al punto *b* que el que fue del punto *a* al punto *d*. Esto mejor se demuestra como tengo dicho con una esfera o bola. De modo que segun la longitud tuviere la tierra tanto mas sale a cada grado cuanto mayor longitud tuviere y por esto en los vientos que estan colaterales al este y oeste tiene mas leguas cada grado que los demas.

< Lee la hoja 90 de la arte de marear > ¶ Cap. Trata de Marear

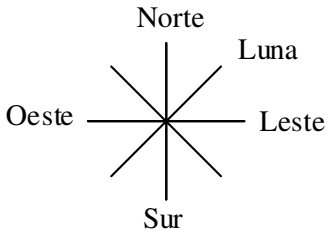
< Lee una tabla a 3 hojas antes de esta> Cuando la Luna esta enfrente del rumbo principal que dicen noroeste es baja mar y pro

[p. 180; f. 13] siguiendo hacia el norte en cada rumbo o viento va creciendo de $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{8}$ de modo que cuando esta enfrente del norte haga crecido la mitad de lo que ha de crecer que es media marea y $\frac{4}{8}$ [,] es $\frac{1}{2}$. Y cuando llega al nordeste ha crecido todo lo que ha de crecer [.] Y cuando llega al este ha de menguado la $\frac{1}{2}$. Y cuando llega al sudeste ha de menguado

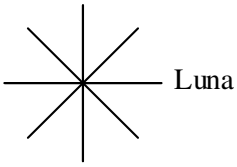
[785] Em nota acima da linha, está acrescentado <llega >.

todo lo posible. Y cuando llega al sur ha crecido otra vez la $\frac{1}{2}$. Y cuando llega al sudoeste ha crecido todo lo que puede. Y cuando llega al oeste ha descrecido la $\frac{1}{2}$. Y cuando llega al noroeste ha descrecido lo posible que es lo que dezimos baja mar.

Ver se ha cuando la Luna llega a estas partes y otras cualesquieras de los 32 rumbos con el aguja de marear porque estando el aguja queda y que apunta al sur e como [¿] ella se tiene el cuidado. Miraremos cuando de noche se parece la Luna por derecho de que rumbo de los que el aguja tiene senalados esta la Luna asi como si la Luna estuviese asi



diremos que esta en nordeste. Y si estuviese asi

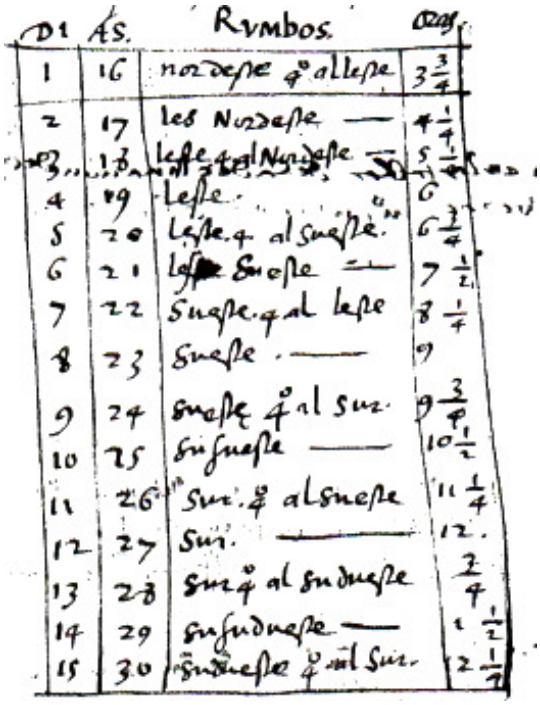


diremos que esta en [p. 180v] este [,] que es oriente porque la veo en su derecho. Y asi arribando a cualquiera hora que oviere Luna se ve como va la creciente o menguante [,] y cuando no hay Luna sobre en el rumbo que esta el Sol igual diremos. La mar crece deste modo [.] Del primero 4º de Luna que es desde 1 dia hasta 8 [,] la mar cada dia mengua mas. Y <a> esto dicen aguas muertas. El 2º cuarto que es desde 8 dias hasta los 15 la mar crece cada dia mas. Y llamanse aguas vivas. El 3º $\frac{1}{4}$ de Luna que es desde 15 hasta 22 mengua la mar como en el primero 4º. Y en el 4º cuarto que es de 22 hasta 30 crece como en el 2º 4º. Estos crecientes y menguantes no son en todos tiempos y lugares yguales, porque hacen diferencia en unas partes y tiempos a otras [,] esto por la postura de la costa y por vientos demasiados y por otras causas que hay. Pero en toda costa de este oeste con tiempos sosegados se hallan yguales como muestran estas reglas. La Luna es causa destos fluxos y refluxos que la mar hace no solo por su lumbre. Porque mientras mas lumbre tiene mas

marea hay en estas mareas cada dia. Hay crecente y menguante aun que en diferente tiempo causados por el mote rato[786] del Sol y Luna. Por su oculta propiedad [.]

[f. 181; f. 14] < Lee la hoja 90 del arte de marear> < Lee la hoja 31 que se declara mejor esta tabla>

Tabla para las crecientes



D1	As.	Rvmbos	
1	16	nordeste 4º al este	$3\frac{3}{4}$
2	17	les Nordeste —	$4\frac{1}{4}$
3	18	leste [illegible]	$5\frac{1}{2}$
4	19	Leste.	6
5	20	Leste.4 al sueste.	$6\frac{3}{4}$
6	21	Leste Sueste —	$7\frac{1}{2}$
7	22	Sueste.4 al leste	$8\frac{1}{4}$
8	23	Sueste. —	9
9	24	sueste 4º al sur.	$9\frac{3}{4}$
10	25	Sursueste —	$10\frac{1}{2}$
11	26	Sur.4 al sueste	$11\frac{1}{4}$
12	27	Sur. —	12.
13	28	sur4 al sudueste	$\frac{3}{4}$
14	29	sursudueste —	$1\frac{1}{2}$
15	30	sudueste 4º al sur.	$2\frac{1}{4}$

Esta tabla se entiende deste modo. Al principio estando 1.16 nordeste 4ª al este $3\frac{3}{4}$. Quiere decir que el 1º dia de Luna y a 16 dias de Luna esta el Sol al nordeste 4ª al este por ser pleamar mar. Y esta marea sera a las 3 horas y $\frac{3}{4}$ de hora de la manana. Finalmente 1 [*sic*] horas de la primera marea son horas antes mediodia [,] 2ª son horas de despues de mediodia.

[f. 181v] Veremos en que rumbo anda el Sol de dia mareando lo con el aguja quiero decir mirando (como dijimos de la Luna) enfrente de que rumbo anda [.] Y de noche por la cuenta del norte.

<·> En las tablas de la declinacion del Sol que es a mediodia veras cuando entra el Sol en la equinoccial.

<·> La hondura o profundidad del agua de la mar se sabe por un cordel y un plomo que se dejan sumir.

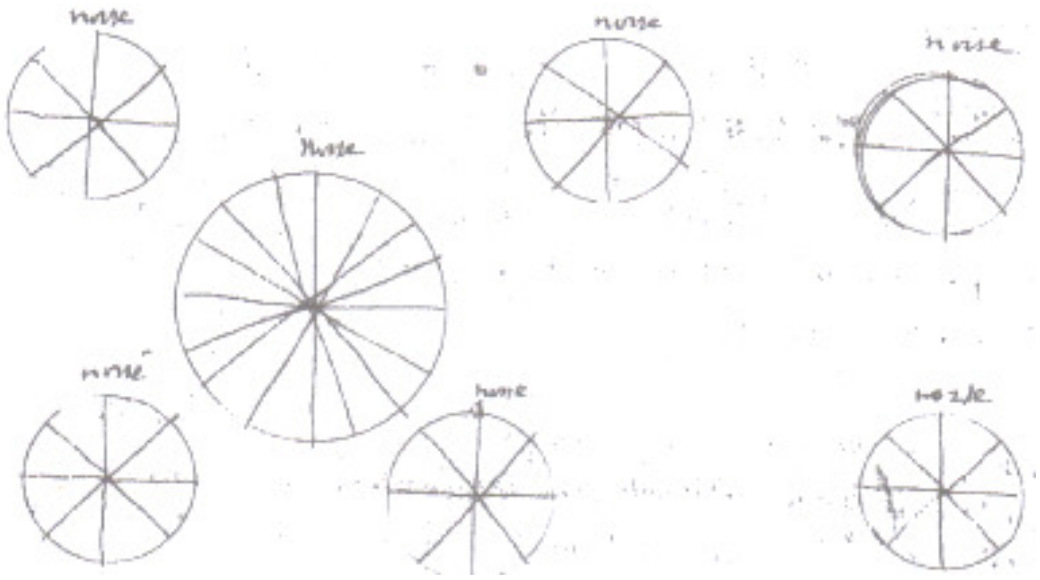
[786] Não encontrámos este termo nas pesquisas que efectuámos. Observamos, no entanto, que Moya deve querer referir-se ao "motuum ratio", isto é, a razão dos movimentos do Sol e da Lua.

<Ya ·> Nota. En la costa de Espana que es del estrecho de Gibaltar hasta el cabo de San Vicente a cada diez brazados de hondura les corresponde una legua. Quiero decir que si uno se echar este cordel y halle 15 brazadas de hondura entendera que esta legua y media de tierra.

<Ya ·> Una nao de 400 toneladas para sustentar se ha menester 4 brazadas de agua.

<·> Nota mas en las cartas de marear esta en medio una figura grande que denota el aguja y sus 32 vientos y alrededor hay otras muchas

[f. 182; f. 15] y pequenas. A este modo pues en las pequenas llamamos norte a las que suben hacia el norte de la grande.



Y asi los demas rumbos de las pequenas se nombran por la orden que en la grande pues se sabe. Y aquello es el norte [.]

<·> Puesta el aguja al Sol por la sombra que hace el capitel o en que se tiene [,] la misma aguja muestra el rumbo en que anda el Sol a la tal hora.

Regla 1ª de

<·> Los dos movimientos que el Sol hace cada dia. Uno del levante a poniente y otro de norte al sur. Y la 2ª diferencia que es de norte al sur es la diferencia de altura meridiana por que andado se llega o aparta hacia los tropicos. Y mientras mas se llega al tropico de cancro mas se llega al norte y se aparta del sur. Y mayor altura meridional tendran las regiones que estan entre el tropico de cancro y el polo del mundo. De modo que toma la diferencia de levante a poniente por lo

[f. 182v] que decimos latitud o ortus. Como decimos en el 1º libro de astrolabio. Y la 2ª diferencia que dice de norte a sur toma por lo que dezimos altura meridiana. La cual cada hora se varia.

Regla 2ª de [*ilegível*] cosas para el marear con las agujas

<·> Sobre la 2ª razon [,] que es la postrera [,] dice: es de saber que en las islas de los Azores el aguja muestra el Norte y si caminasemos despues por un rumbo apartado hacia oriente entonces nordestea que es cuando no muestra el Norte sino un poco mas hacia oriente [.] Dice pues que se le heche reguardo [,] quiere decir que si para ver las leguas por un rumbo apartado del meridiano de la isla de los Azores que por hacer la cuenta de los leguas que contare por otro rumbo que este una cuarta de viento mas llegando unos hacia el meridiano de las islas dichas. Y por las leguas que correspondieren alli se hara la cuenta. Lo mismo se ha de hacer si caminaramos por la otra parte hacia occidente de tal arte apartados del meridiano destas islas que el aguja noroestease [.] Entonces no haces la cuenta por el rumbo que hemos tenido sino por el rumbo de una $\frac{1}{4}$ llegando hacia el meridiano de las dichas islas. Lee la hoja sexta.

[f. 182; f. 16]

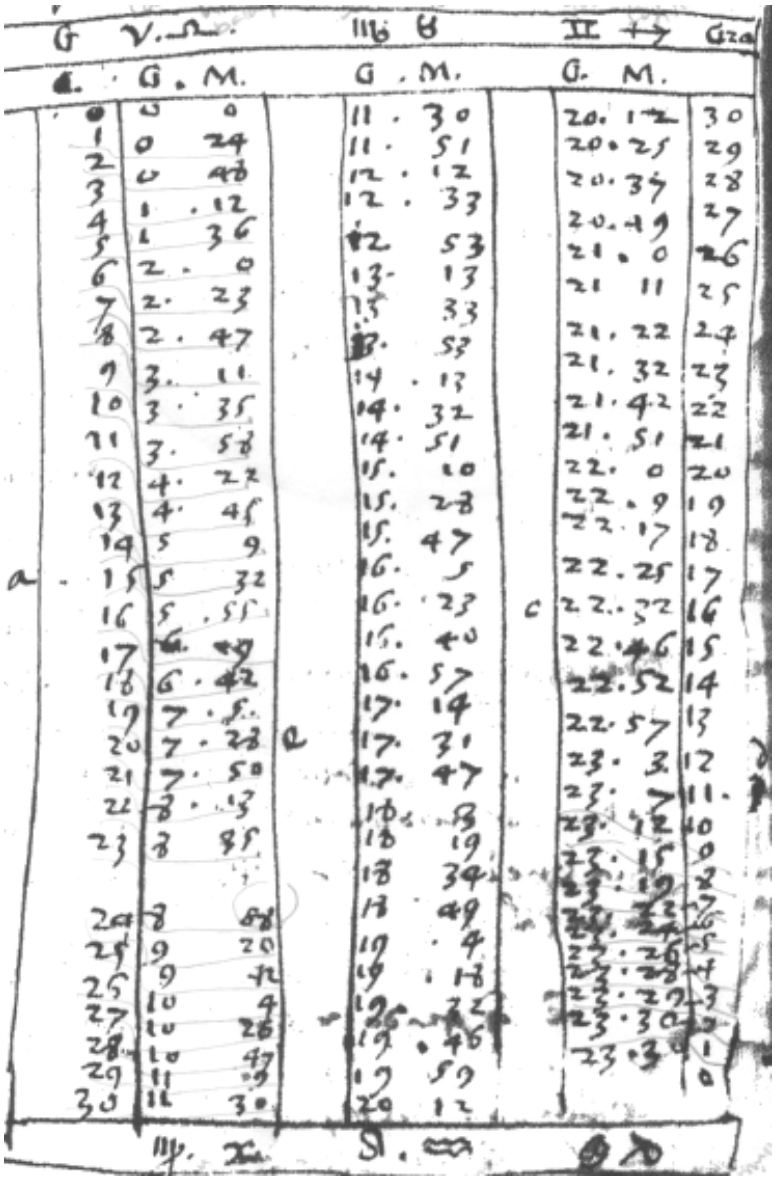
¶ Cosas pertenecientes a la arte de marear cuaderno 2º

Cap. Muestra saber de dia el altura del Norte

<·> Para entendimiento desto es necesario saber tomar el altura del Sol cada dia la cual se ha de tomar conel astrolabio puntualmente. Con el astrolabio poniendo las pinolas de modo que el Sol entre por ellas [.] Y para ver se les antes de medio dia [,] ver se ha con el astrolabio porque mirando una vez [,] y luego aguardar un poco, luego mirar otra [.] Si todavia va creciendo el altura [,] aun no es medio dia. En comenciando a bajar [,] ja paso el medio dia [.] En comenciando a bajar ja paso el medio dia. El altura del Sol se entiende lo que el Sol mas sube sobre nuestro meridiano.

Luego es necesario saber cada dia la declinacion del Sol. Que es saber lo que mas se allega a la equinoccial. Lo que se sabe por las tablas que ponen todos los mareantes o por la tabla que a la vuelta de la hoja hallaras. El uso de la cual es que el dia que quisieres saber la declinacion del Sol veras por el astrolabio o cuadrante que grado de signo anda el Sol o por la figura de pº [Pedro] Apiano. Y si anduviere en algun signo delos que estan en la parte alta desta tabla [,] sirve te con los grados de signo de la mano izquierda [.] Y si en los bajos [,] de la derecha [.]

[f. 183v] Y si el signo fuere septentrional la declinacion sera septentrional. Y si austral, austral.



[f. 184; f. 17] Los signos de la parte de arriba desta tabla[787] son Aries, Libra, Escorpio, Tauro, Geminis, Sagitario. Los de bajo son Virgo, Piscis, Leo, Acuario, Cancro, Capricornio[788].

Ejemplo. Pongo que a 15 de Sagitario quiero saber la declinacion del Sol. Porque Sagitario es de los que estan arriba toma el 15 a la parte izquierda que es ado esta la *a* y va derecho hasta llegar al Sagitario. Y hallaras que aquel dia que el Sol estuviere en 15 de Sagitario es

[787] Nesta tábua falta uma linha de dados que, possivelmente, é a que corresponde a 15º nos signos de Câncer e Capricórnio.

[788] No manuscrito estão representados simbolicamente os signos.

la declinacion 22 grados y 32 minutos[789]. Y lo mismo fuera estando en Geminis porque esta renglera es para estos 2. Y para Escorpio y Tauro es la otra. Y para Aries y Libra es la de a mano izquierda. Otro ejemplo [,] a 12 de Virgo que declinacion sera la del Sol [,] quiere decir cuanto se allegara a la equinoccial. Toma el 12 en los numeros de la mano derecha hacia do esta la V[790]. E tomaremos el 12 como muestra *d*. Y pasa hasta llegar a Virgo como muestra la letra *e*. E sera la declinacion 7 grados y 28 minutos. Y asi sirve estas dos rengleras a Piscis. Y a Leo y a Acuario[791] la que tiene sobre si. Y a Cancro y Tauro [*sic*, léase Capricornio] la que tiene sobre si. Pero nota que [f. 184v] el dia que esto quieres hacer no son grados justos sino que es grado y medio o mas o menos entraras 2 veces en la tabla [,] quiere decir que proporcionaras. Ejemplo a 1grado y treinta minutos de Aries que declinacion corresponde. Pues porque en esta tabla son grados justos y en este ejemplo se ofrece un grado y 30 minutos tem este aviso en que miraras a un grado de Aries que declinacion hay y hallaras haber 24 minutos. Mira luego a 2 grados de Aries que hay e hallaras haber 48. Luego un grado se he aumento 24. Pues 30 minutos sale 12 minutos. Y 24 de un grado son todos 36 pues a grado y $\frac{1}{2}$ de Aries diras que hay 36 minutos de declinacion del Sol. Y asi de mas o menos grados y minutos.

¶ Reglas de las sombras

Luego tener cuenta en que si el Sol anda desta banda de la equinoccial hacia septentrión juntare lo que falta del altura del Sol hasta llegar a 90 con la declinacion de aquel tal dia y la [f. 185; f. 18] suma sera lo que yo estoy apartado de la equinoccial [.] Y por el consiguiente tendre otra tanta altura de polo. Ejemplo. Yo tome un dia el altura del Sol y halle 60 grados de altura. Pues de 60 para hasta 90 que es lo que falta para llegar a mi cenit faltan 30 [.] Asi mismo este dia mire la declinacion del Sol y halle 20 pues juntando 30 con 20 hacen 50 [.] Pues 50 grados estare yo ahora segun este ejemplo apartado de la equinoccial. Y otros 50 tendra en esta tierra [,] do este ejemplo hice [,] de altura de polo. Y sabido esto sabiendo de do parti y los grados que de do parti tambien sabre los que he andado. Y sabido los que he andado o arrodeado [¿] multiplicados por las leguas que correspondiere a cada grado segun el rumbo por do navegue [,] entendere las leguas. Pues volviendo al proposito dice este

[789] Este valor não é o que se vê na tabela apresentada por Moya, mas sim o que está na linha abaixo. O lapso está relacionado com o facto, que mencionámos na nota anterior, de na 5ª coluna só haver 30 entradas enquanto todas as outras tem 31.

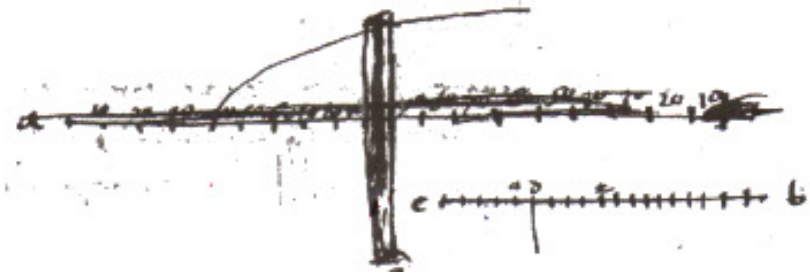
[790] Este *V* deve referir-se à inicial de Virgo.

[791] Em vez do nome, no manuscrito vê-se o símbolo de aquário.

ejemplo que 50 grados estare yo apartado de la equinoccial. Esto es porque yo soy centro de mi horizonte y desde la una parte del horizonte y echando un meridiano que pase por mi cenit habra desde el horizonte al cenit 90 grados por cada parte [.] Pues el Sol tiene 60 de altura luego 30 le faltaron para llegar al cenit porque

[f. 185v] cosa cierta es que cuando a mediodia en punto se toma el altura del Sol que entonces esta en mi meridiano pues si esta 60 grados subido sobre mi meridiano falta le han 30 para llegar a mi cenit si pudiera llegar. Pues 30 y veinte que dijimos que tiene de declinacion que es lo mismo que decir que esta apartado 20 grados de la equinoccial hacia el septentrión pues estando el entre la equinoccial y mi y ambos estamos hacia el septentrión luego cierto es que yo estare apartado [,] o por mejor decir mi cenit estara apartado de la equinoccial hacia el polo 50 grados como hemos dicho.

[f. 186] Y si el Sol estuviere en la otra parte de la equinoccial hacia la parte del sur mira lo que falta al altura del Sol para llegar a 90. Y de ello quita la declinacion del Sol de aquel dia. Y lo que quedare eso estara apartado de la equinoccial. Ejemplo. Estoy en 30 grados de altura del Sol faltan 60 por noventa <asi mismo este dia> tengo 10 de declinacion [.] Pues de 60 quitando 10 quedan 50. Pues 50 estoy apartado de la equinoccial. Y tanta es el altura del Norte. Figura desto[792].



Si el Sol hallo a mediodia que ha subido 40 grados sobre mi meridiano cierto es que si hubiera de llegar a mi cenit que le faltara 50. De los cuales quitando 10 que tine declinacion que quiere decir que esta 10 apartado de la equinoccial hacia el sur luego lo Sol estara en la linea *cb* en el punto *a*. Y la equinoccial en el punto *d*. Y yo estare 40 grados apartado segun este ejemplo de la equinoccial que sera en el punto *e*. Y por estos dos ejemplos sabiendo yo que estoy en la parte septentrional cuando el Sol estuviere en los signos septentrionales ser

[f. 186v] vir nos hemos de la primera regla. E cuando yo estando me a la parte setentrional y el Sol en la parte meridional servir nos hemos de la 2ª regla. Que no hay necesidad de saber las sombras. Pero si saliendo al agua en dos o tres dias que ande en el agua se me olvidara el saber a do estoy y para eso se pondran adelante ciertas reglas para saber por las sombras se

[792] Não conseguimos interpretar a figura que Moya apresenta.

estoy entre el Sol y la equinoccial o se la equinoccial esta en medio de ambos o yo en medio o si yo estoy entre el septentrión y el Sol en el sur. Ejemplo [:] Pero antes que dello se trate me parece conviene saber cuanto se puede elevar el Sol sobre mi meridiano en el mayor dia del ano que es en el tiempo de San Bernabeu y cuanto en el menor dia que es por Santa Lucia.

<·> Saber cuanto se eleva el Sol sobre el horizonte lo mas en el mayor dia e cuanto en el menor. Para lo cual digo que el Sol sube sobre [*sic*] hacia el septentrion [,] que es el circulo Cancro [,] 23 grados y medio [.] Pues en Sevilla hay 37 grados de altura de polo [,] pues quito 23 y medio de 37 e quedaran 13 y medio [,] pues estos 13 y medio menos de 90 [,] sube por nuestro meridiano el dia de san Bernabeu[793]. Porque en 13 y medio deja de llegar a mi cenit y desde el horizonte hasta el cenit hay 90 pues qui

[f. 187; f. 20] tando de 90 [los] 13 $\frac{1}{2}$ quedan 76 e medio. Tanto sube el Sol en el mayor dia en Sevilla por el meridiano mio. Para saber cuanto sube el menor dia del ano juntare 37 grados que hay en Sevilla de altura del polo con 23 e medio que el Sol aquel dia tiene de declinacion hacia la parte del sur e seran 60 $\frac{1}{2}$[.] Lo que falta para 90º que es 29 y medio esto sube sobre el meridiano el dia de Santa Lucia. La causa es porque en Sevilla tengo 37 grados declinacion de polo de lo cual se sigue que mi cenit estara 37 grados apartado de la equinoccial [.] Y mas 23 grados y medio que este dia esta el Sol apartado de la equinoccial hacia la parte del sur porque esta en el signo de Capricornio son todos 60 $\frac{1}{2}$ grados pues de mi cenit al horizonte hay 90. Luego lo que falta de 60 $\frac{1}{2}$ hasta 90 que son 29 $\frac{1}{2}$ esto es lo que el menor dia del ano el Sol puede subir sobre el horizonte.

[f. 187v] Reglas de las sombras

<1ª ·> Cuando el Sol tuviere su declinacion para el Norte y las sombras fueren hacia el Norte nuestro

Y las sombras fueren hacia el Norte.

<2ª> El hombre esta mas hacia el Norte que el Sol. Y el Sol esta entre la equinoccial y el hombre. En tal caso haras lo que se dijo en la primera regla de las dos que precedieron.

[793] O dia de são Barnabé ("san Bernabeu") é o dia 11 de Junho e o de santa Luzia ("santa Lucía") é o dia 13 de Dezembro; ambos os dias coincidiam aproximadamente com os solstícios de verão e inverno, antes da reforma gregoriana.

<3º ·> Segunda regla. Es cuando el Sol tiene su declinacion hacia un polo y las sombras del hombre van hacia el otro polo. Ejemplo. En esta regla hay 4 diferencias. La primera cuando los grados de distancia fueren de mayor cuantidad que los grados de la declinacion porque en tal caso de la distancia se restara la declinacion y lo que restar habra del hombre a la equinoccial. Y estara la equinoccial entre el hombre y el Sol. Y el hombre estara para el polo por hacia do las sombras fueren al mediodia. Esto es lo que se dijo en la 2ª regla.

Mas porque aqui hemos dicho este nombre distancia. Y declinacion. Notaremos que hay grados de elevacion que son los grados que el Sol se levanta sobre el horizonte. Y grados de distancia que son los que hay desde el cenit hasta el Sol por un mismo meridiano.

[f. 188; f. 21] Y grados de declinacion que es lo que el Sol se aparta de la equinoccial hacia cualquiera de los tropicos. Volviendo al proposito la 2ª diferencia de la 2ª regla es cuando los grados de declinacion fueren mas que los grados de distancia. Y en tal caso de la declinacion se restara la distancia. Y lo que quedare habra del hombre a la equinoccial y el hombre estara entre el Sol y la equinoccial y el hombre estara para el polo a do el Sol tuviere su declinacion.

La 3ª diferencia es cuando los grados de distancia son iguales con los de la declinacion. Y en tal caso el hombre esta en la equinoccial porque se mide tanto que es lo que hay de cenit al Sol es 10 y la declinacion del Sol que es lo que se aparta de la equinoccial es otros 10 luego yo estare en la equinoccial pues hay <de mi cenit al Sol 10>.

La 4ª es cuando no hay grados de declinacion y hubiere grados de distancia. Porque en tal caso en los mismos grados de distancia estara el hombre apartado de la equinoccial para el polo a do fueren al mediodia las sombras. Porque cuando tratare de sombras ha de ser entendida sombra que hace a mediodia y no por la manana ni de la tarde.

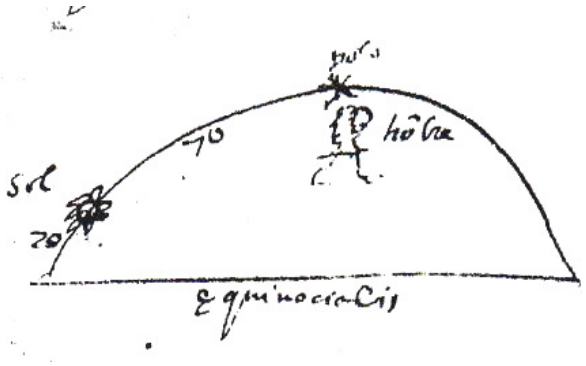
¶ Regla 3ª

Cuando los grados de elevacion fueren 90. Al tener el Sol por el cenit [,] hay dos diferencias en esta regla. La 1ª cuando el Sol no tuviere declinacion ninguna el hombre y el Sol son en la equinoccial: [*sic*] La 2ª es cuando el Sol tuviere declinacion el cual declinacion estara el hombre apartado de la equinoccial para hacia el polo do el Sol tuviere su declinacion. La cual se sabe mirando si anda en los signos septentrionales o australes.

[f. 188v] ¶ Regla 4ª

< ·> Cuando los grados de elevacion fueren iguales a los de declinacion el hombre estara debajo del polo para do el Sol tuviere su declinacion. Y tendra la equinoccial por horizonte porque si la elevacion del polo es 20 falta le para llegar a mi cenit 70. Y 20 que tiene de declinacion que es lo que el esta llevando se hacia mi apartado de la equinoccial hacen 90.

Luego de mi a la equinoccial hay 90. Luego tengo la equinoccial por horizonte y estare yo debajo del polo. Y del polo do estuviere yo.



Si el Sol se eleva sobre el horizonte 20 faltan le 70 para llegar al cenit del hombre: y 20 que tiene de declinacion el mismo Sol que es quando esta apartado 20 grados de la equinoccial. Pues si del hombre al Sol hay 70 y del Sol a la equinoccial 20 luego el hombre dista de la equinoccial en 90. Pues ha de estar en el Norte el hombre y la equinoccial sera su horizonte.

[f. 189; f. 22] <·> El Sol en 365 dias y 5 horas y $\frac{4}{5}$ de hora hace dos equinoccios y dos solsticios. Y como el bajo [¿] común [,] hace de las 5 horas y $\frac{4}{5}$ [ilegível] han retrogradado los dichos equinoccios y solsticios desde que nuestro redentor .j. xpo [*sic*][794] nacio quinze dias. El primero equinoccio que el Sol hace es a los 10 de marzo y dice se equinoccio vernal. Y entra entonces en el signo de Aries en el cual tiempo en todo el universo hay igualdad de noches y dias. A los 11 de junio hace el Sol el primero solsticio entrando en el signo de Cancro y de aqui vuelve retrogradando a hacer segundo equinoccio. En el cual tiempo desde 11 de marzo hasta 13 de septiembre que el Sol tiene declinacion de septentrional gasta 187 dias. El 2º equinoccio acontece a 13 de septiembre y dice se hiemal entrando el Sol en el principio de la Libra. En el cual tiempo tambien hay igualdad de dias y noches en el universo. Hace el Sol su 2º solsticio llamado hiemal a los 13 de deciembre entrando el Sol en Capricornio. Y de aqui vuelve retrogradando a hacer el primero equinoccio. Y desde 14 de septiembre hasta 10 de marzo que el Sol tiene declinacion austral gasta 178 dias y en el ano de bisiesto 179. El circulo del Sol es circulo mayor. El Sol se aparta de la equinoccial a cada parte 23 grados

[f. 189v] y medio que juntos hacen 47 [.] Estos gasta la torrida zona que otros llaman mesa del Sol.

---

[794] Significa Jesús Cristo.

¶ Para saber porque rumbo del aguja sale el Sol

<Ya ·> Mediado marzo. Sale el Sol al Este y pone se al Oeste. <gueste es occidente>

<Ya ·> Mediado abril. Sale el Sol al este 4ª del Nordeste y pone se al Oeste 4ª del noroeste.

<Y> Mediado mayo. Sale al Esnordeste y pone se al Oesnoroeste.

<Y> Mediado junio. Al Nordeste 4ª del este y pone se al Noroeste 4ª del oeste.

<Y> Mediado julio. Sale al Esnordeste y pone se al Oesnoroeste.

<Y> Mediado agosto. Sale al Este 4ª del nordeste y pone se al Oeste 4ª del noroeste.

<Y> Mediado septiembre. Sale al Este y pone se al Oeste.

<Y> Mediado octubre. Sale al este 4ª del sudeste pone se al oeste 4ª del sudoeste.

<Y> Mediado noviembre. Sale al Esudeste y pone se al Oesudoeste.

<Y> Mediado deciembre. Sale al Sudeste 4ª del este y pone se al Sudoeste 4ª del oeste.

<Y> Mediado de enero. Sale al Esudeste y pone se al Esudoeste.

<Y> Mediado febrero. Sale al Este 4ª del sudeste y pone se al Oeste 4ª del sudoeste.

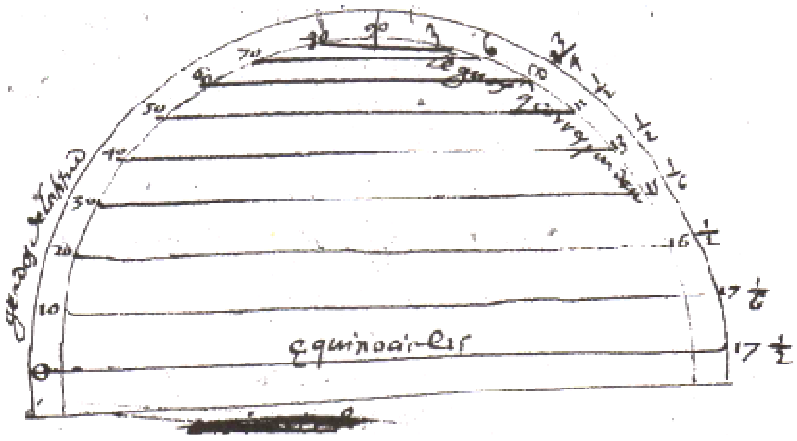
<·> Sacar la linea meridiana. Hace un circulo y en el centro hinca un palo y tomaras el meridiano con un buen reloj de arena. Deste modo. Contar las horas de noche y restar las de 24 y los demas sera el dia y luego en saliendo el Sol contar en el dicho reloj la $\frac{1}{2}$ y aquello sera el mediodia. Mirando en un circulo la sombra do es la linea <meridional fincado un palo> lo mismo con el astrolabio, tomar a cualquiera hora el altura del Sol antes de mediodia y despues de mediodia. Guardar. A tomar otra vez el Sol en otros tantos grados elevado del horizonte. Y partir aquella distancia por medio. Y aqui do fuere el medio sera el mediodia[795].

[f. 190; f. 23] <·> Entre cielo y cielo no hay cosa vacia. La groseza de cada uno puede se saber mirando el altura del planeta que tiene [,] sabiendo el [del] primero. Y por esta regla se puede saber cuanto hay de aqui al primero cielo de la Luna mirando su altura. Otros dicen que por la proporcion de los elementos porque a una parte de tierra le corresponden 10 de agua y a una de agua 10 de aire y a una de aire 10 de fuego.

<·> Lo que vale cada grado de los paralelos de la equinoccial al polo.

---

[795] Todo este parágrafo se destina a explicar 2 processos alternativos para determinar a linha meridiana, isto é, a direcção N-S do local do observador. Um dos processos utiliza a ampulheta ("reloj de arena") e o outro recorre às sombras produzidas por uma vareta quando nela incidem os raios solares. No caso da ampulheta, a ideia é a seguinte: em 24 horas 'contam-se' quantas delas são de noite; subtraindo a 24 esse número, obtém-se o número de horas diárias do Sol. Tomando metade desse valor a partir do momento em que o Sol nasce, obtém-se o momento do meio-dia solar, que dá a direcção N-S do observador. No caso do Sol, toma-se um círculo, fixando no centro uma vara e marca-se nele a sombra produzida pela vara em dois momentos igualmente distantes do meio-dia, um antes e outro depois do meio-dia (como se sabe, as sombras produzidas são iguais). O ponto médio desse segmento define, com o centro do círculo a direcção N-S do observador.



Aun que andando por la equinoccial o por otro cualquiera paralelo no se sabe los grados que se andan. Si por conjetura se supiere los grados que un navio anda por lo que otras veces suele entenderas que

a cada grado de la equinoccial le corresponden 17 leguas y $\frac{1}{2}$. Y a cada grado de un paralelo 10 grados apartado le corresponden 17 leguas y $\frac{1}{6}$. E asi van de 10 en diez tomando bola como en la figura parece.

[f. 190v] ¶ De la semejanza o forma del polo antartico

<·> En el polo antartico esta el cruzero asi como aca [,] en el nuestro artico decimos [,] la bocina. El cual es desta forma [,] que tiene 4 estrellas en cuadro y una pequena en un lado.

Eleva se del verdadero polo 30 grados. Asi como el Norte del polo artico se eleva tres grados segun algunos y segun otros 3 $\frac{1}{2}$. Pues asi el otro dicen que se eleva 30. De modo que cuando tomaremos el cruzero del polo antartico elevado 30 grados podemos decir que estamos debajo de la equinoccial. Y si lo tomaremos en 31 grados tendremos un solo grado de elevacion de polo. Y asi por semejante.

Otros le figuran asi.

Otros asi.

Otros dicen que estan dos cabezillos desta manera y que se andan alrededor [.] Y que en medio esta

el polo. Los que van al Peru lo conocen porque se guian con el.

[f. n.n; f. 32] 4º de marear

<Fo. 20. b f.6> <·> Caminar a la bolina o navegar a la bolina es cuando uno do quiera que se halla quiere ir hacia el Norte el cual ha de navegar por el viento que dicen sur.

<Ya> Y porque no corre aquel [,] toma otro viento el mas cercano a el que puede [,] y desde que ha navegado un trecho por el si le sale otro mas derecho camina por el.

<Ya ·> El semidiametro de un horizonte [,] quiero decir de mi a una cualquiera parte de mi horizonte [,] hay 32 leguas. Otros dicen es que lo que la vista alcanza de ver hasta de nos parecer que el cielo toca con la tierra es la parte dicha. Entonces a esto que a unos se les hace mas a otros menos segun las vistas de cada uno.

<·> Puedese tomar altura de polo sin ver bien el horizonte con tener una cana hincada tan alta como mi vista. Y puniendo la vista en la ballestilla en lo alto desta cana [¿] la estrella polar.[796]

<·> Puedese tomar altura de polo cuando la estrella horologial o boca de bocina no se parecer por haber nubes. Siguiendo nos por la 9ª o sexta o 3ª estrella por que andan a 9 o a 6 o 3 horas atras della.

<Ya ·> Cap. 8 fo. 31. a la vuelta lib.3.[797] Do dice que es derrota. Derrota quiere decir os encamina o guia al Norte. Para entender esto destos rumbos se ha de suponer que siempre desde el lugar do partimos hasta el lugar do vamos haber

[f. 191v] cien leguas de camino o distancia. Las figuras[798] que se siguen significan los rumbos que voy apartado del camino o rumbo que habia de llevar. La primera figura sirve para cuando voy un rumbo apartado del rumbo que habia de llevar la 2ª [,] dos; la 3ª 3. E hasta 14.

Debaxo de cada figura hay tres colunas de numeros. La 1ª cujo titulo es leguas de camino siguen las leguas que uno ya anduvo por aquel rumbo desde el lugar do sale.

---

[796] O significado parece estar claro. A cana espeta-se no solo e sobre ela coloca-se a balestilha, o que permite fazer a observação da Polar.

[797] Esta referência diz respeito à *Arte de Navegar* de Pedro de Medina [1545].

[798] As figuras referidas não se encontram no manuscrito.

La 2ª coluna cujo titulo es Rumbo muestra el rumbo que ha de tomar para ir al lugar do queria desde el lugar do se halla. La 3ª cujo titulo es leguas de apartamiento siguen las leguas que hay desde el punto do se halla este hombre hasta el lugar do queria ir. Ejemplo:

< > Supongo que uno queria navegar hacia el Norte y que iba a un pueblo que distaba de do salio cien leguas. E pudo ir con el viento Sur que iba derecho al Norte por do ele habia ir. Pero supone que hallo el viento Sur 4ª al sudeste el cual viento va a parar o levar este hombre a un rumbo apartado (de los 32 que hay) hacia la mano yzquierda del Norte o parte occidental. Supongo que este hombre camina por este viento 90 leguas o las que fueren mas o menos como se ofrecer. Busco las 90 leguas en la 1ª coluna que tiene em cima este titulo leguas de camino e frontero de las debajo del titulo rumbos hallo un 5 en la 2ª coluna [.] El cual dicho que tome en este lugar el 5º rumbo del que habia de levar apartado hacia la otra parte contraria del rumbo que levaba [,] que en este ejemplo es hacia la mano derecha [,] para volver hacia el pueblo do iba para [f. 191] que se le tomase hacia la otra banda izquierda iba mas apartando me. Y la 3ª coluna enfrente de las 90 leguas que tome en la 1ª coluna responde con 22 leguas [.] Y da me esto a entender que habiendo andado estos 90 leguas estoy apartado del lugar do iba 22 leguas. E porque desde do me parti hasta do iba habia cien leguas [,] y habia do ande 90 [,] aun me faltan 22. Luego 12 leguas he arrodeado yiendo por este rumbo 1º apartado de lo cual habia de llevar.

<·> Frontero del *c* de la primera coluna de la figura 1al 92 de la 3ª coluna de las leguas se ha 22 y sera este 22 e 92. Signase porque es yendo por el 2º rumbo como parece en la 2ª figura habiendo ando [do] *c* leguas por el, no dista del lugar mas de XL pues en la 1ª figura yiendo por un rumbo apartado andando *c* leguas por que ha de estar apartado 92 leguas estando este rumbo casi la mitad mas cerca de donde ba. Y por esto digo que es 22 leguas de grado. Y asi proceden todas estas figuras por esta orden.

Nota. Si los lugares distasen mas de cien leguas o menos hare una regla de 3. Ejemplo. Supongo que voy a un pueblo que de mi a el hay 500 leguas y habia de caminar hacia al Norte [.] Y camine por un rumbo 60 apartado como esta dicho. Y andando por el 84 leguas dire por regla de 3. 500 me dan 84. 100 que san las leguas por que estas figuras estan hechas que me daran. Vendran $16\ \frac{4}{5}$. Los cuales $16\ \frac{4}{5}$ de legua buscare en la 1ª coluna. E porque no la hallo sino 50 que es lo menos al cual 50 le responde un rumbo 60 en la 2ª coluna. Y el

[f. 191v] 16 $\frac{4}{5}$ es poco menos de $\frac{1}{3}$ de 5 [50] [¿] tomare la 3ª parte de un rumbo al contrario del que levaba e dire que tengo de navegar $\frac{1}{3}$ de rumbo hacia la otra parte derecha [.] Y las leguas que me faltaba para do voy se sabran. Restando las leguas que andube por este rumbo que fueran 84 de las que habia del lugar do me parti hasta do habia de ir [,] que son 500 [,] e quedaran 416 e poco mas o menos. Y esto es porque yendo por el 1º rumbo apartado y ande tan poco en respeto de lo que habia de andar [,] rodease [¿] muy poco. Pues pongo que andube por el dicho rumbo 400 leguas por ver lo que disto del lugar do iba miro por la regla que hice regla de tres diciendo si 500 leguas me dan 400 que me daran *c*, que es el numero para do se fizieran estas reglas. Sigue la regla e vendran 80 leguas [.] Estas 80 busca las aqui o el numero mas cercano a ellos. Si no estubieren justos en la 1ª coluna e hallares 4 rumbos en la 2ª coluna y adelante 25 leguas por las cuales 25 leguas haras otra regla de 3 diziendo si 80 leguas que estan aqui en la primera coluna me dan 25 que me daran 400 que son las que andube. E vendran 125. Luego ando por este 1º rumbo 400 leguas y me faltan 125 por llegar do iba. A 20 dio 25 porque 500 habia desde do me parti hasta do habia de ir. E e [*sic*] quedara claro que babiendo andado 400 leguas por este 1º rumbo apartado de do iba tomare el 4 rumbo e me faltaran 125 leguas por do voy.

Esto usa una regla de 3. Pudieras hacer diciendo si 100 me dan 25

[f. 192] 500 que me daran. Siguiendo la regla [,] 125. Que es lo mismo que vimos.

<·> En la vuelta de la plana 35[799] en yverso [*sic*][800] siguiendo de do dice la 2ª figura. Y notar se a que a este viento [¿]

[f. 192v][801]

[f. 193][802] Arte de Marear cuaderno 3

[f.n.n.] "Papel suelto despues de 193"[803]

Gratum, gerens, fluvium, fundebat, Eurus, com. Dicta, divina, Dei, cuncta, Diana, aevi[804].

---

[799] Esta *plana* não faz parte do manuscrito.

[800] Quer dizer verso.

[801] De acordo com a indicação dada pelo Escorial, esta folha está em branco.

[802] Esta folha apenas tem o título. A folha seguinte está em branco.

[803] Esta indicação não é da mão do autor. Ao contrário das folhas anteriores, esta está escrita à largura e não ao comprimento.

[804] A descodificação de algumas destas palavras só foi possível por comparação com o texto *Chronographia o Reportorio de Tiempos* [Jerónimo de Chaves, 1584, f. 125].

Pues para hacer la computatiom habemos de saber que cada diction de estas sirve a su signo y hacer

de esta arte. Para saber 5 de mayo en que grado esta Sol diremos assi [:] mayo es lo 5 mes desde enero. Tomar la quinta diction que es "Eurus"[805]. Y porque comienza en e y es quinta en la orden de el abece tomaremos 5 y anadir se an los dias de el mes y tres mas y aquel sera el numero de los grados do esta el Sol: para la tablilla de saber el signo del Sol.

[f. 194; f. 25] Viento. Lee el canon 28 del 1º Lib. de Astrolabio[806]
y el canon 10 del 6 Lib. del astrolabio[807]

El viento es una exhalacion caliente y seca, lateralmente movida a la redonda de la tierra. Otros dicen ser el viento un desatamiento del aire, siendo disueltas y con movidas las partes mas sutiles y humidissimas del [,] mediante la virtud del Sol. < Metheo II Distinctio. 6 >[808] Segun Aristoteles aire es cuando fuere impelido en grande parte tinendo casi por fuente las exhalaciones calidas y secas las cuales poco a poco congregadas se viene a causar el viento. < Lee la hoja 3 letra A> La causa de los vientos eficiente es el Sol. Desecando la tierra y alzando las secas exalaciones las cuales siendo evaporadas de la tierra y queriendo subir en lo alto son expelidas de la frialdade que esta en la media region del aire. Y segun que diversamente son expelidos asi son movidos diversamente los vientos a la redonda de la tierra y asi suelen ser nombrados segun son las regiones de la tierra por do passan y reciben cualidades extranas unos de otros y son de diversas condiciones [.] Y por conseguiente

---

[805] Mantivemos a transcrição em latim porque é assim que Moya usa este nome na sua explicação.

[806] Esta referência diz respeito à obra *Canones Astrolabiii universalis secundoaediti autore Doctore Ionne Aguilera Praefectoaerarii Salmantinae Ecclesie & astrologie publico in eiusdem Civitatis scholie professore. Salmanticae.* Ver canon 28 em [Juan Aguilera, 1553, f. 44].

[807] Não compreendemos esta indicação, pois na versão do *Astrolabio* de Aguilera, que consultámos, há apenas 4 livros.

[808] A indicação não está completamente visível no manuscrito, mas temos a certeza que se trata do livro II. Ver [*Aristote, Météorologiques*, tome II. Texte établi et traduit par Pierre Louis. Paris, 1982, pp. 80-86]. No capítulo 6, intitulado *La rose des vents*, Aristóteles fala da posição dos ventos, indicando os que se opõem entre si, os que não tem contrários, os que podem soprar ao mesmo tempo e a natureza e o nome de cada um. Os nomes que Aristóteles dá aos ventos que tem contrários são os seguintes: *Zéphyr*, o que vem de occidente da equinoccial; o seu contrário é *Apéliote*, que vem de oriente. *Borée* ou *Aparctias* vem do norte e o seu contrário é o *Notos*. O *Caecias* que vem do nordeste e o seu contrário o *Lips*, que vem do sudoeste. O *Euros*, que parte do sudeste e cujo contrário é o *Argeste* ou *Olympias*, ou ainda *Sciron*, que sopra de noroeste. Os ventos que não têm contrários são o *Thrascias*, vento de nor-noroeste e o *Mésés*, nor-nordeste, o *Phénicias*, que vem do su-sudoeste. É muito curiosa a razão invocada para a existencia de mais ventos provenientes das regiões boreais do que das regiões meridionais, e que aqui reproduzimos. Segundo Aristóteles, a parte habitada da Terra situa-se a norte e a quantidade de água e de neve que é lançada para esta parte é muito maior porque estas regiões estão sob o Sol e sob o seu percurso: a água e a neve fundidas infiltram-se no solo onde são aquecidas pelo calor do Sol e da Terra e é essa a razão pela qual a evaporação é mais importante e se produz por uma vasta extensão.

causan diversos efectos. De esto lee la sylba de Pedro Mexia[809] libro 4 cap. 22 y passa a la 4ª hoja inclusive a esta ado esta esta senal **Δ** [810].

Aire

<Ya ·> La natura del aire es seca y humida tiene mas predominante la humidad. La region SW ya se considera en 3 partes. La suprema region se dice estar hasta el cabo de la Luna por su conjunto a la region del fuego y esta region accidentalmente [es] es caliente y seca. La infima de junto a nosotros es caliente y humida y accidentalmente en unas partes mas que en otras [.] Y por lo refugio de los rayos del Sol por el herir directo y son perpendiculares. Y aqui hay mas calor en la tal region que no en las regiones que hieren oblique o a soslayo. La region media es fria y aqui se congela granizo y piedra.

<No > <Ya> Los vientos de su propria naturaleza son calidos por razon do ser causados de abundancia de exhalaciones calientes y secas. Y si algunas veces parecen ser frios esto proviene por razon de pasar por regiones frias y movier se juntamente con el aire que esta lleno de mucho vapor frio. De la manera que es el soplo de un

[f. 194v] hombre que de cerca es calido y de lejos es frio por razon del aire de entremedios de do pasa que es lleno de vapor frio[811]. En lo hallo primero la razon de los vientos. Lee Plinio lib. 7 cap. 56[812].

Los antiguos solamente nombraron 4 vientos que procedian de los 4 angulos pliegos[813] del mundo. Estos eran subsolano que sale del oriente. Austro del mediodia. Favonio del poniente. Septentrión de la parte Norte o polo artico. Andronico Egipciano nombro ocho / otros mostraran 12 vientos conforme una esfera plana como astrolabio tiniendo consideracion a los 12 signos celestes. Otros 16. Otros han considerado 34. Los mareantes del mar oceano y de levante cuentan os 32. Considerando la plana superficie del horizonte dividir se ha en 32 partes yguales. Hablando fisicalmente [*sic*] podemos en tender los vientos ser infinitos porque de cada un punto del horizonte se considera proceder un viento y como en la linea horizontal se pueden considerar infinitos puntos. Asi podemos entender

---

[809] De acordo com a edição de 1540 da *Silva de varia lecion* de Pedro Mexía, impressa em Sevilla, que só contém três livros, a informação de Pérez de Moya está errada. O tema está tratado no capítulo 22 do "livro I", fólios 22v-23v.

[810] Este sinal não se encontra em nenhum outro lugar do texto.

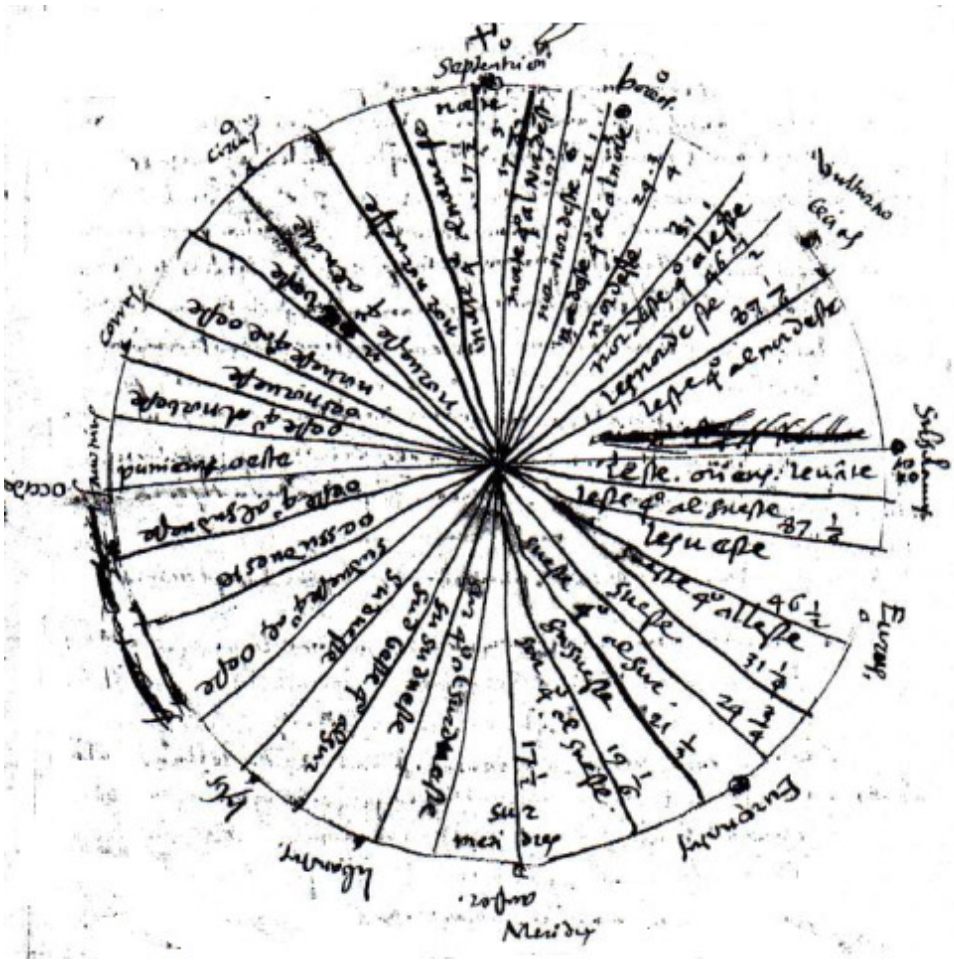
[811] Todo este parágrafo é cópia integral de [Jerónimo de Chaves, 1584, f. 90r].

[812] Refere-se, certamente, à *Historia Natural*, de Plínio. No capítulo que Moya indica, Plínio expõe a lista das invenções e dos inventores do mundo, atribuindo a descoberta da astronomia a Atlas e a teoria dos ventos a Eolo, filho de Helena. Ver [Schilling, R., 1977, VII, p. 116].

[813] Possivelmente no sentido de "marcados".

proceder de cada uno un viento. Dejando esta infinidade tratemos de los que los antiguos trataron.

Pues considere se el circulo llamado Meridiano intersecarse con el horizonte en dos puntos opuestos/ y los otros 2 que son 4. Y de aqui vinieron a llamar 4 vientos dichos cardinales/ para los otros vientos intermedios notaron los dos solsticios que el Sol hace en el ano pues de los 2 puntos del circulo del horizonte destos dos tropicos imaginaron proceder otros dos vientos unos a la parte del oriente otros a la parte del poniente. Otro viento que corriese del polo artico y otro del antartico. Plinio lib.2 cap. 47 dice[814] aquilón o bóreas septentrión y oriental. Y entre el llama [f. 195][815] [f. 196; f. 27] do septentrión y el poniente corre un viento llamado trascias. Del angulo cardinal del mediodia corre el viento austro y entre el y el poniente brumal corre un viento llamado libonoto. Y entre el austro y el oriente brumal corre euroaustro[816].



[814] Ver [Beaujeu, J., 1950, pp. 51- 57].

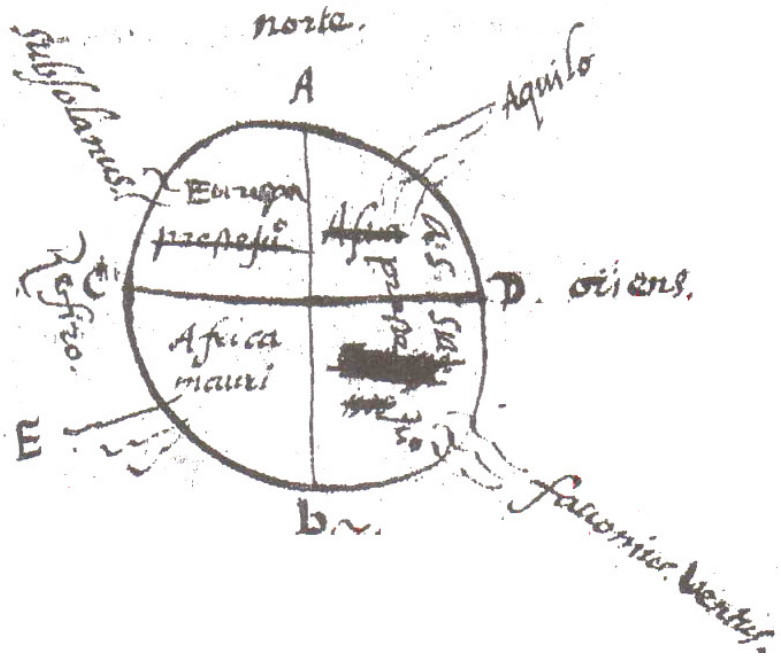
[815] Esta página tem a numeração errada. A que segue à página anterior é a que está paginada com 196. Por isso, é com a página 196 que continuamos a transcrição.

[816] Esta descrição está em [Jerónimo de Chaves, 1584, ff. 91r-92r].

<·> Septentrión que los Griegos dicen aparctios [,] y los del levante tramontana. Los mareantes del mar oceano le nonbran nordt. Es frio y seco. Causa frio aparta los nublados aprieta los cuerpos purifica los humores ahuyenta el aire corrupto y pestilencial causa serenidad[817].

[f. 195; f. 29][818] <·> Los planetas que goviernan los 4 vientos [:] Jupiter. El cierzo. Sol. El oriental. Luna. Occidental. Marte. Ábrego y meridiano.

<·> A. Septentrión. Dice se asi porque toma denominacion de la provincia de do viene que se dice asi. Y porque de la parte do viene es fria y seca este aire tiene las mismas cualidades. Acarrea serenidad. Y hielo. El vulgo le nombra cierzo, bóreas.



<·> B. Meridies. Mediodia. Viento meridiano. Llamase en Andalucia viento morisco. Llueve con el en esta nuestra tierra. Dice se austral y porque esta region es calida y humida le llamaran los griegos noto que quiere decir humiditas. Tiene las mismas cualidades que su region y asi concilia luvias y tempestades. Llama le Aristoteles en sus problemas euro.

<·> C. Ocidens. Occidente. O poniente. Los aires que de aqui vienen son secos y frios. Gallego.

<·> D. Oriens. Oriente porque sale de aqui el Sol. O levante. El viento se dice solano. Con el lluebe en Murcia. Son vientos calidos y humidos.

---

[817] A mesma definição em [Jerónimo de Chaves, 1584, f. 92v].

[818] Esta folha parece estar, tal como a anterior, fora de ordem. Transcrevemo-la nesta ordem por nos parecer que é essa a correcta.

<·> E. Ábrego que otros llaman austro. En esta nuestra region es caliente y humido. En otras es frio y seco. Como en Africa. Segun Aristoteles en sus problemas es tan frio en Africa como a nos otros. El cierzo es viento nubloso y llueve con el en esta nuestra provincia. Y cuando supla este ábrego se enjendran hembras pintan le flaco y muerto en los mapas porque es frio. Y cuando viene a nosotros porque ha pasado por la equinoccial viene caliente.

<·> Homero (como Plinio refiere) no conoci [ci]o mas destes 4 vientos. Despues se conocieron otros 4 que son 8. Tres orientales, y 3 occidentales y un ábrego del mediodia, y otro cierzo hacia el Norte. Despues se han

[f. 195v] conocido otros muchos a los cuales los marineros llaman bastardos y bastardillos, medios vientos y minutos.

<·> El céfiro dice Aristoteles ser el mas saludable viento que se plana por los campos eliseos segun Homero. Porque ni es caliente como los orientales y ábrego, ni frio como los occidentales y cierzo.

<·> En los demas el cierzo y septentrional es mas salubre, por la serenidad que hace y seg[uri]dad. Cuando esto viento corre se digere mejor. Y se apetecen las viandas como Aristoteles en sus problemas dice.

<·> Ábrego que por otro nombre dicen austro causa enfermedades.

<·> El Rey Eolo era el dios de los vientos [,] porque hay alli valles y collados grandes. Es una de las nueve islas dicese Lipari.

Obregón canonigo de Leon[819] y su ayo estevan baycan [¿] hale de escrivir.

[f. 196v] <Ya ·> Cyrcio nasce a la parte diestra del septentrión. Los griegos llaman trascias. El español llama gallego. Los italianos [,] gallico porque venia de hacia Francia. Los franceses [,] cierzo. Los del levante le dicen maestral o tramontana maestral. Los del mar oceano le dicen noroeste y otros nornoroeste. Es templadamente frio y muy excesivamente seco. Suele causar granicos nieves. Este corre tan recio a veces que a la provincia de Narbona se le volan los techos de las casas. *Pli. Lib 17 cap 11* [820].

---

[819] A referência a Obregón mais completa que encontrámos diz respeito a Antonio de Obregón y Zerezeda, erudito espanhol do século XVI, cónego da catedral de Leon, estudioso de literatura, dedicado especialmente ao estudo da obra de Petrarca. Obregón compôs a monografia intitulada *Los triunfos del Petrarca en la medida y numero de versos que tienen en el toscano con su glosa*, impressa em Salamanca, em 1581. Notas colhidas em [Astorgano Abajo, A., 1999, p. 625].

[820] Para saber o que Plínio diz a este propósito ver [Littré, É., 1848-1850]. Disponível em http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre17.htm (Consultada em 15 de Novembro de 2009). Notamos, no entanto, que embora Pérez de Moya dê como referência Plínio, o parágrafo ao qual esta nota está associada é a reprodução, quase textuaL, do incluído em [Jerónimo de Chaves, 1584, f. 92v].

<Ya ·> Bóreas se dice asi de los griegos porque sopla de boatu y con gran sonido. Los latinos le nombran aquilón por el buello [vuelo] grande del águila. *Plinio lib (18) cap. 34* [821] dice que se dice bóreas etesio soplando mas suavemente que lo que suele. Los de levante unas veces le llaman griego y otras griego tramontano. Los del mar oceano le nombran nornoroeste [*sic*] [822]. Es viento frio y seco. De naturaleza no llueve. Dana las flores y frutas quema las viñas quita virtud y fuerza a los arboles aprieta los nubes <Lib. P 34> [823] causa tronidos y rayos. Llueve con este viento en Africa. Cuando este corre ni ara ni se siembra nada.

Estes 3 vientos se dicen septentrionales empiece a los phisicos.

<·> Subsolano nace a la parte oriental equinoccial. Los griegos le llaman apeliotes. Los del mar del levante le dicen viento levante. Los del mar oceano este. Es viento caliente y seco templadamiente. <Cap 27 de natura rerum >[824] <·> Cecias corre de la parte oriental estival. Beda le llama vulturno. Plinio le llama al contrario porque dice que corre de la parte oriental brumal. Y llamase por otro nombre euro. Otros le dicen helesponto porque corria de aquella parte. Deseca las costas por ser demasiadamente caliente. Y su calor es algun tanto remiso por llegar se a septentrión. Lucrecio <lib 5> le nombra altitonans porque engendra en el aire los truenos. Los de levante de dicen griego levante. Los del mar oceano lesnordeste.

[f. 197; f. 28] <·> Euro corre del oriente brumal. Dicen le los latinos vulturno. Plinio lib 2 cap 47[825]. Los griegos [,] euro. Los levantiscos [,] jaloque levante. Los del mar océano [,] esudeste. Es excesivamente caliente y remissamente seco. Congrega nublados.

<·> Estes 3 dichos son nombrados vientos orientales. Son sanos principal cuando corren al albor del dia aunque pareça alterar los cuerpos.

---

[821] Para ver o que Plínio diz sobre o assunto pode consultar-se [Littré, É., 1848-1850]. http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre18.htm (Consultada em 15 de Novembro de 2009).

[822] Em [Jerónimo de Chaves, 1548, f. 93] lê-se nornordeste.

[823] Refere-se à *Historia Natural* de Plinio, livro XVIII, cap. 34.

[824] A identificação desta referencia só foi possível após comparação do manuscrito com a obra *Chronographia o Reportorio de Tiempos* de Jerónimo de Chaves, onde ela se encontra explicita [Jerónimo de Chaves, 1584, ff. 93-93v].

[825] Em *Histoire Naturelle* (Libre II, XLVII (1)) de Plínio pode ler-se o seguinte: "Les anciens n'ont compté que quatre vents, et Homère (*Od*. Y, 295) n'en nomme pas davantage pour les quatre points cardinaux, division qui bientôt parut trop grossière. A ces quatre l'âge suivant en ajouta huit, division qui, à son tour, parut trop subtile et trop fractionnée. Alors on jugea convenable de prendre un terme moyen, et d'ajouter à la division trop succincte quatre vents pris à la division trop nombreuse. Il y a donc deux vents dans chacune des quatre parties du monde. Le Subsolanus (est), venant du lever du printemps; le Vulturne (sud-est), venant du lever de l'hiver: les Grecs appellent le premier Aphéliotes, le second Eurus; I'Auster (sud), venant du midi; l'Africus (sud-ouest), venant du coucher de l'hiver". [*Pline l'Ancien, Histoire Naturelle*. Édition d'Émile Littré. Paris, Dubochet, 1848-1850]. Texto disponível em http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre17.htm (Consultado em 15 de Novembro de 2009).

<·> Austro corre del angulo del mediodia. < Auligelio lib 22. c.11> [826] Los gregos llaman noto [,] de notis [,] que [significa] [¿] humor por los agrios [¿] y humidades que causa. Los levantiscos le dicen medio jorno. Los del mar oceano llaman sur. Algunos le dicen vendaval. Es un viento caliente y humido. Suele ser fulminoso. Engendra nublados causa lluvias condensa el aire salvo en Africa que causa serenidad. Suele ser viento pestilencial. Como dice Sant Isidro lib. 13 cap 11 ethimologia.

<·> Euro austro a quien los griegos llaman euronoto nasce a la parte diestra de austro. Los levantiscos llaman medio jorno jaloque. Los del mar oceano [,] sursudeste. Otros [,] austro siroco. Es caliente y humido congrega nubes causa pluvias. Algunos le llaman fénix porque viene hacia Fenicia.

<·> Austro africo nace a la parte sinistra del viento austro. Los griegos le llamaran libonoto por ser entre el africo a quien llamaran libos y el austro a quien dijeran noto [.] Los levantiscos le dicen medio jorno lebeche [,] otros austro garbino. Los del mar oceano sursudoeste. Es caliente remisamente y humido en exceso. Es danoso y enfermo.

<–> Estos 3 arriba dichos son dichos vientos meridionales. Son danosos abren los poros del cuerpo y mueven los humores interiores.

<·> Favonio nace del poniente equinoccial. Dice se asi afovendo porque tiene virtud de recriar y de engendrar. El griego le dice céfiro como quien dice viento que trae vida. Los levantiscos le dicen poniente. Los del mar océano [,] oeste. Es frio y humido. Hace producir las flores. <Plinio lib.18, cap. 26> Resuelve las nubes yeladas. Cuando este corre es bueno injerir [injectar] y sembrar vinas y podarlas y la oliva se huelga con el.

[f. 197v] <·> Africo nasce del occidente brumal. Los griegos le dicen lybs [*sic*]. Los levantiscos [,] poniente lebecho. Los del mar oceano [,] oesudoeste. Otros [,] garbino. Es frio templadamente. Y humido mucho. Llueve y trae tempestad y truenos y relampagos.

<·> Coro nace del poniente estival. Los griegos le dicen argestes. Otros cirineo. Otros olimpia. Oracio le dice iapix. Los levantiscos le dicen poniente maestral. Los del mar oceano oesnoroeste. Es moderadamente humido y excesivamente frio. Es perniciosisimo y pestilencial. En el oriente causa nublados en india es serenidad.

<–> Estos 3 son dichos occidentales. Cuando corren son a la noche mas sanos que a la manana pero suelen ser nocivos maiormente el coro o calabrez. El mas sano de los vientos todos es el aquilón y el subsolano. Los mas danosos el coro o calabrez y el austral. <Vitruvio

[826] É possível que se trate da obra *Noctes Atticae* de Auligélio (c. 125-180), que não consultámos.

lib1cap 4 y lib 7>. La casa conviene este edificada de modo que reciba sanos y en ela dobles vientos hace le advertir los aires mas sanos que corren en la tal region porque no todos los vientos en diversas regiones guardan unas mismas cualidades. Segun que aquilón en Africa llueve con el y en Andalucia causa serenidad y austro al contrario.

<·> Andalucia. Los escritorios y libreros tegan las puertas y lumbres al oriente y no abra polilla ni moho en los libros.

<·> Aposentos de dormir acaten al oriente hacia alli tengan echo la lumbre.

<·> Pans los tengan la lumbre y acaten al septentrión o hacia do viene la aquilón. Y asi se conservará mejor el pan que en otros aires. Y las bodegas lo mismo.

<·> El aceite acate al mediodia o region caliente.

<·> Uvas granadas, mançanas por guardarlas. Y otros semejantes cojan se en Luna menguante y sobre tarde con que no haya llovido sobre ellas. Y el aposento a do se han de guardar tengan lumbre al septentrión.

[f. 198; f. 29] <finite o [que]siti [¿]> <·> Sylva de varia lecion. lib 4 cap. 22. El viento se causa y es un humo o aviento que llaman exhalacion seca y caliente que con la fuerza y virtud del Sol y de las estrellas se levanta de la tierra: Lo cual queriendo subir para arriba con su calor y livianeza llegando a la region media del aire que es fria de la contraria calidad es extornada y repelida [.] Y como naturalmente no supre ella descender para bajo y no puede para arriba camina por do puede en redondo y por los lados y en su impeto y fuerza mueve y altera el aire de manera que ella y el aire asi munido es lo que llamamos vientos correndo unas veces a una y otras partes como vemos. Y esto es mas o menos segun la mas o menos materia y fuerza que se ofrece. Y la definicion de Seneca que dice que viento es aire movido es falso. Verdad es que viento es aire movido pera esto es con la exhalacion y humo dicho de tal manera que la exhalacion siempre va junta con el hasta que se gasta y resuelve. Y asi cesa despues el viento.

Nombres de los vientos menores

[E]l marinero español nombra vientos maestros a los 4 generales [.] Conviene saber al viento oriental llaman ellos este. Al poniente su contrario dicen oeste. Al septentrional [,] norte. A su contrario [,] sur que es al mediodia. Entre estos ponen otros 4 y dan le los nombres compuestos de los 4 susodichos. Deste modo que entre el este y el norte ponen uno e llaman le nordeste derivando lo de ambos. Y entre el norte y el oeste ponen otro y llaman lo noroeste. Haciendo la misma derivan uno entre el oeste [,] que es poniente [,] y el sur ponen otro y llaman le sudeste [sudoeste]. Y entre el sur y el este ponen otro y dicen le sudeste. Y despues destos 8 senalaron otros 8 entre ellos asi mismo en igual distancia y proporcion a

los cuales llaman medios vientos y dan les nombres de sus vecinos y colaterales. Diciendo al que cai entre el norte y el nordeste nornordeste. Y al que esta entre el este y el mismo nordeste esnordeste. Y el seguiente entre el este y el sudeste esudeste.

[f. 198v] Y al otro entre el sur y el sudeste nombran sursudeste. Y al otro como entre el sur y el sudeste ponen sursudoeste y en medio del sudoeste y el oeste ponen al que llaman oessudoeste y al del otro lado en medio del y noroeste dicen ver oesnoroeste y entre el norte y el mismo noroeste colocan al nornoroeste. Y asi son 16. Entre estos en iguales distancias ponen otros tantos. Llaman los cuartos de modo que son por todos 32. Dan les nombres del vecino viento principal.

<Ya ·> Ojo [¿]. El elemento puro no se puede ver porque lo que es puro carece de colore. Lo que no tiene color no es visible. Cosa elementada decimos a cualquiera cuerpo compuesto de 4 elementos. No que esten los elementos formalmente mas virtualmente en el mixto.

[f. 199; f. 30] ¶ Si el Sol esta mas cerca en un tiempo que en otro

<Ya ·> El ivierno hallan los astrologos estar el Sol mas cerca de nosotros que el verano. Porque con un instrumento astronomico que dicen radius o rayo que es como ballestilla hallan que el Sol tiene en el invierno mas diametro que no en el verano. Lo cual si siempre estuviese en una misma distancia siempre se veria un mismo diametro. Pues a diametros diferentes circulos diferentes les compite. Y porque las cosas de mas lejos [,] como regla de perspectiva demuestra [,] parecen menores pues si el Sol a un tiempo parece menor y en otro mayor no podria esto ser sino es que en un tiempo esta mas apartado y otro mas llegado. Lo cual es verdad como consta por la theorica suya. Mira sobre esto el 4º de la Sphera de Sacrobosco de circulis et motibus planetarum. Lee Apiano cap. 9 del instrumento de la theorica del Sol.

<Ya ·> Sobre el andar del Sol y Luna[827] por los 32 vientos cada dia se entiende imaginando (como es la verdad) que el Sol y Luna cada dia y cada uno por si al movimiento rato dan una vuelta. El Sol la da entera y la Luna $\frac{4}{5}$ de hora mas da su vuelta [.] Pues dividiendo esta vuelta que dan con el meridiano y horizonte en 4 partes el punto que esta en el meridiano superior

[f. 199v] que es do esta al mediodia el Sol [,] dice este libro sur. El punto del oriente dice este. El que esta en el meridiano de la media noche inferior se dice norte. El que esta en el occidente se dice oeste. Y los puntos entremedios destos los declara y nombra por nombres

[827] Em todos casos em que neste parágrafo se refere ao Sol e à Lua, Moya coloca os símbolos que lhes correspondem em vez das palavras que os identificam.

de vientos. Y esto es lo que Medina dice en la regla 4ª de la hora en que vienen las mareas cuando dice notando que estos vientos no se han de imaginar en el horizonte do el aguja. Lo que dice puesto el suple circulo en angulo debajo del horizonte. Hacer angulo en el horizonte quiere decir que se corte este circulo en el horizonte de tal manera que la una parte del circulo quede debajo de horizonte y la otra en cima.

< Sol> <Ya ·> Para saber el Sol en que rumbo anda cada hora nota que a mediodia siempre esta en el meridiano que es lo que el marinero dice sur. Y a media noche en el meridiano inferior opuesto al dicho. Que es lo que el marinero dice norte. Y en cada $\frac{3}{4}$ de hora pasa un rumbo mas adelante de suerte que se quisieres saber a cualquiera hora en que rumbo anda el Sol toma las horas de depues de mediodia o de media noche parte las por $\frac{3}{4}$ e lo que viniere sera el rumbo por do esta el Sol adelante del rumbo de mediodia se las horas son de despues de mediodia o adelante del rumbo de la media noche se las horas fueren despues de media noche.

<Luna> <Ya ·> Para saber en que rumbo anda la Luna a cada hora sabe primero en que rumbo esta el Sol como esta dicho. Y sabe este dia que lo quieres ver cuantos son de Luna. Los cuales

[f. 200; f. 31] dias de Luna multiplica por 12 que es lo que la Luna se aparta cada dia del Sol e lo que viniere parte lo por $11\frac{1}{4}$ que es lo que hay de un rumbo a otro por todo 360 grados del zodiaco [,] por 32 rumbos. Y lo <que> viniere seran los rumbos que la Luna esta apartada del Sol hacia tras que segun el proprio movimiento del Sol o Luna que sera desde occidente hacia oriente. Y al se acabar este numero sera el rumbo do esta la Luna.

<Ya ·> La tabla de los crecientes que esta en la hoja 14 para mejor entender la nota que aqui en esta tabla se nos ponen las horas en que llega la Luna al meridiano superior o inferior cada dia de los de Luna como aqui dice [.] El 1º dia que se entiende un dia despues de la conjunción [,] viene la marea a las 3 e $\frac{3}{4}$ de la tarde y el 16º dia de Luna viene a las $3\frac{3}{4}$ de la manana. Quiere decir que a las $3\frac{3}{4}$ de la tarde viene a estar la Luna en el meridiano superior a un dia de Luna. A 16 de Luna esta en el meridiano inferior y el Sol esta en el nordeste 4ª al

este. Sobre esto del andar el Sol y la Luna por los 32 rumbos lee la arte de marear fo. 90 et 81[828].

<Ya ·> De noche por la cuenta del norte se ve en que rumbo anda el Sol en sacando la hora que es. Supongo ser las 4 de despues de media noche. Multiplica por 15 que son los grados que el Sol anda en una hora al moto rato. E parte por $11\frac{1}{2}$ [829] que son los grados que dista un rumbo de otro y el cociente cuenta lo desde el norte que es el meridiano de la media noche que se le dicen las horas. Y si estas horas son de despues de [medio] dia contaras desde el sur. Que es el meridiano superior o la parte que en el norte decimos cabeza [.] Y do se cumplire el nº alli esta el Sol.

[828] Refere-se, naturalmente, à *Arte de navegar*, de Medina.

[829] O valor que consta no manuscrito é 11 ½ em vez de 11 ¼. Trata-se, naturalmente, de um lapso. Moya não comete este erro noutra passagem do texto (pp. 199v-200), em que se refere à mesma correspondência.

3. Anotações ao manuscrito *Arte de Marear* de Juan Pérez de Moya

3.1. Introdução

A *Arte de Marear* foi escrita por Pérez de Moya, em 1564. É um manuscrito pertencente à *Real Biblioteca del Monasterio de El Escorial*, onde está identificado por L-III- 24 (ff. 167-200)[830]. As folhas que o compõem estão numeradas consecutivamente, pela mão do autor, de 1 a 31, com excepção da vigésima quarta folha; mas esta numeração não obedece à ordem inicialmente por ele indicada[831]. O manuscrito tem em destaque os títulos, ou rubricas, que se apresentam pela ordem seguinte: "Nombres y vocablos de mareantes que sirven por princípios por esta ciência", "De marear", "De Marear, Cuaderno 2º", "Para conocer cuanto nordestea el aguja", "Tomar el altura del polo", "Nombres de los vientos en el aguja del marear", "Nombres de los vientos segun Medina", "Para saber las conjunciones de la Luna", "Cap. Trata de Marear", "Cosas pertenecientes a la arte de Marear, cuaderno 2º.", "Cap. Muestra saber de dia el altura del Norte", "Reglas de las sombras", "Para saber porque rumbo del aguja sale el Sol", "De la semejanza o forma del polo antartico", "4º de marear", "Viento. Lee el canon 28 del 1º Lib. de Astrolabio y el canon 10 del 6 Lib. del astrolabio", "Aire", "Nombres de los vientos menores" e " Si el Sol esta mas cerca en un tiempo que en otro". É, também, feita referência a um "cuaderno 3º", mas está inscrita numa página em branco. O manuscrito contém 13 figuras e 4 tabelas.

Este trabalho de Moya está incompleto; há alusões a páginas e a figuras que não se encontram nele e a uma outra obra que tem exactamente o mesmo título, *Arte de Marear*. Esta última indicação levou-nos, inicialmente, a colocar a hipótese de Moya ter composto um tal texto[832]; mas os estudos que fizemos não nos permitiram chegar a conclusões

---

[830] O manuscrito pertenceu à Biblioteca do Conde-Duque de Olivares, copista da obra de Juan Pérez de Moya: Juan Carrillo de Albornoz, como consta na informação do Arquivo do Escorial.

[831] Damos, em seguida, a correspondência entre a numeração final do manuscrito, a sua numeração inicial e a numeração que lhe corresponde no volume do Escorial onde está arquivado; identificamos com NN as folhas não numeradas e com NP as folhas cuja numeração não é perceptível: [1-NP-167; NN-46-168; 2-47-169; 3-48-170; 4-49-171; 5-50-172; 6-37-173; 7-37-174; 8-38-175; 9-39-176; 10-40-177; 11-42-178; 12-43-179; 13-44-180; 14-45-181; 15-NN-182; 16-29-183; 17-30-184; 18-(31)-185; 19-32-186; 20-33-187; 21-34-188; 22-35-189; 23-36-190; (32)-32-191; NN-NN-191; NN-NN-192; NN-NN-193; 25-NP-194; 26-NP-195; 27-(2?) -196; 28-NP-197; 29-NP-198; 30-NP-199; 31-NP-200].

[832] Assim pode levar a supor a seguinte frase de Moya escrita no manuscrito (pp. 15v e 31): "Como deciamos en el 1º libro de astrolábio", onde é mencionado um "1º libro de astrolábio" que não existe em nenhuma das obras impressas de Moya.

fundamentadas[833], até porque nos apercebemos que o manuscrito refere a *Arte de Navegar*, de Pedro de Medina, como *Arte de Marear*[834]. Não podemos, portanto, afirmar que Moya redigiu uma *Arte de Marear* numa versão definitiva, embora a existência de uma segunda numeração das folhas que constituem o manuscrito nos leve a admitir, como possível, que ele contém fragmentos de uma obra mais vasta em que o autor teria já trabalhado ou estaria a trabalhar.

Apesar da dispersão e desorganização reveladas na ordem dos títulos que atrás indicámos, é possível delinear na *Arte de Marear* um fio condutor em que são recorrentes temas de navegação estimada e de navegação de altura, com os problemas que lhes estão associados. O manuscrito inclui o estudo dos ventos, da agulha de marear, a questão da marcação do ponto ("echar ponto"), e dá a conhecer um conjunto de procedimentos utilizados para a determinação da latitude, compreendendo a apresentação de regimentos[835] ─ das léguas, do Norte e das sombras ─ e uma tábua de declinação do Sol igual à que Pedro Nunes incluiu no *Tratado que ho doutor Pero nunez Cosmographo del Rey nosso senhor fez em defensam da carta de marear: cõ o regimẽto da altura,* publicado em 1537, e mostra os esforços feitos para superar o problema do desconhecimento da longitude. Além destes conteúdos, o texto inclui informação subsidiária para quem desconhece as mais elementares noções da arte de navegar; como, por exemplo, a referência às diversas partes de uma embarcação e os termos por que são conhecidos os perfis costeiros, etc[836].

---

[833] Navarrete, na sua *Disertación sobre la historia de la naútica y de las ciencias matemáticas que han contribuido a sus progresos entre los españoles*, publicada a título póstumo em 1846, faz alusão a este manuscrito que afirma ter visto na "librería alta del Escorial" e sublinha que "es un tratado de navegación aunque todavía en borrador, y sin el orden y método que le correspondia" [Fernándz Navarrete, M., 1846, sem paginação, nº 61]. Sobre o mesmo texto, deixamos, também, a opinião de [Picatoste Rodríguez, F., 1868, p. 251]: "Parece que este libro no llegó a concluirse: es como una colección de apuntes o borradores para formar una obra".

[834] Por exemplo, pudemos verificar pela consulta da *Arte de Navegar*, de Medina, que quando Moya diz "lee la arte de marear fo. 90" está a referir-se a esta obra.

[835] Regimiento: Libro en que se daban a los pilotos las reglas y preceptos de su facultad (*Diccionario de la Lengua Española da Real Academia Española*).

[836] Moya descreve assim algumas das partes principais de um navio: "Antena es adonde se prenden las velas; Candaliza es la maroma [corda grossa] con que suben las velas; Zaborra es la carga de arena o piedra que ponen en el bajel para que la nao tenga peso; Maymoneta é la estaca con que atan las velas; Escota é la maroma con que templas las velas; Topa são los carruchos con que suben las velas; Postiza é el lugar adonde asientan los remos; Vela maestra es la mayor de três; Vela mesana es la mediana entre 3; Vela del trinquete es la menor de 3; quilla es la parte de baxo del navio". E explica o significado de "Baxos": local com pouca água e pedras; "Requesta": onde há pouca água e muita areia; "Placer": são baixos de areia; "Bahía": é um paradeiro de navios, mas menos seguro do que um puerto; "Varra": é a entrada de um porto.

3.2. Fontes

Da leitura do manuscrito constata-se que, na sua elaboração, Juan Pérez de Moya se socorre dos textos de diversos autores seus contemporâneos, como Medina, Apiano e Aguilera, cujos nomes menciona. De Medina refere o nome da obra designando-a, imprecisamente, por "Arte de Marear", quando o título é *Arte de Navegar*. Mas mostraremos no decurso do nosso trabalho que Pérez de Moya utiliza, também, outros textos, cujos títulos e autores omite. Tal é o caso da *Suma de geographia* [1530] de Martín Fernandéz de Enciso, do *Tratado del Sphera y del Arte del Marear* [1535] de Francisco Faleiro, do *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar* [1551] de Martín Cortés, do *Tratado que ho doutor Pero nunez Cosmographo del Rey nosso senhor fez em defensam da carta de marear* [1537] de Pedro Nunes e da *Chronographia o Reportorio de Tiempos*[837] [1548] de Jerónimo de Chaves.

Três anos após a escrita do manuscrito é publicada em Salamanca a obra *Fragmentos Mathematicos* cujo segundo volume inclui temas de astronomia e de navegação já tratados por Moya na *Arte de Marear*; aquela é, portanto, a primeira obra impressa conhecida, de Moya, onde se encontram assuntos tratados no manuscrito. Os *Fragmentos Mathematicos* [1567] têm características bastante diferentes da *Arte de Marear*. Trata-se de um trabalho extenso, diversificado e organizado, em que o autor mostra os seus vastos conhecimentos. Esta diferença de paradigma traduz-se, também, noutros aspectos peculiares como o que se prende com uma maior exigência no que toca às definições e raciocínios apresentados e com o modo como a informação é divulgada. De facto, e ao contrário do que se observa no manuscrito, as explicações dadas privilegiam a forma retórica, não se socorrendo o autor, tão frequentemente, de desenhos e esquemas elucidativos. Isso implica que ao leitor é exigida uma maior capacidade de abstracção. No tocante às fontes, Moya pôs de lado trabalhos de carácter mais prático e circunscrito à navegação, privilegiando a informação contida em obras mais abrangentes como as de Medina, Cortés e Nunes, a quem menciona explicitamente, por diversas vezes. Moya conhecia bem a obra de Apiano, à qual se referiu no manuscrito e nos *Fragmentos Mathematicos*; e, por inerência, sabia dos comentários e acrescentos que lhe fizera Frísio. De ambos se aproveita para compor o segundo volume dos *Fragmentos Mathematicos*.

[837] No nosso trabalho usámos a edição de 1584, que não foi, seguramente, a que Moya consultou. A edição prínceps é de 1548.

Antes de abordarmos em detalhe o texto de Pérez de Moya, apresentamos uma breve síntese dos trabalhos que atrás referimos.

A *Suma de geographia* de Enciso foi a primeira obra de náutica impressa em Espanha; foi publicada pela primeira vez em Sevilha, em 1519, e reimpressa na mesma cidade, em 1530 e em 1546, em versões corrigidas[838]. Esta obra apresenta um tratado da esfera, baseado no sistema ptolomaico, e uma parte consagrada à arte de navegar que contém procedimentos práticos de utilidade para os pilotos que se aventuravam ao mar; entre eles, mostra tábuas para determinar a declinação do Sol em todos os dias do ano, expõe métodos para o cálculo da latitude por altura do Sol e da estrela Polar e processos para a determinação do número de léguas percorrido por cada um dos 32 rumos da rosa-dos-ventos. Sobre Martín Fernandez de Enciso sabe-se que era bacharel e foi participante activo nas tarefas de exploração e colonização da América Central, passando a maior parte da sua vida no Novo Mundo[839].

O *Tratado del Sphera y del Arte del Marear* do português Francisco Faleiro foi impresso em Sevilha, em 1535[840]. Trata-se de uma obra muito rara onde se estudam temas de cosmografia e náutica. Está dividida em duas partes: na primeira, apresenta uma descrição da Esfera Celeste baseada no *De Sphera* de Sacrobosco[841]; na segunda, trata de todos os temas de navegação que Enciso já incluíra no seu trabalho, mas Faleiro acrescenta-lhe informação sobre a declinação magnética, expondo um instrumento original para a sua determinação, a que mais adiante nos referiremos[842]. Francisco Faleiro era natural da Covilhã e esteve ao serviço do rei de Espanha; juntamente com seu irmão, o bacharel Rui Faleiro, acompanhou os preparativos da viagem de Fernão de Magalhães[843].

---

[838] O título de versão de 1530 é *Suma de geographia que trata de todas las partidas y províncias del mundo: en especial delas índias. Trata largamente del arte del marear juntamente com la esphera en romance: conel regimiento del sol y del norte: agora nuevamente emendada de algunos defectos que tenia en la impressiõ passada*. A versão que consultámos foi a existente na Cervantes Virtual. Contudo, na Biblioteca Nacional de Portugal há exemplares da obra de Enciso, de 1519 e de 1530. Para uma descrição destes exemplares pode consultar-se [Leitão, H. e Martins, L., 2004, pp. 211-212].

[839] [López Piñero, J. M., 1979, p. 199].

[840] [López Piñero, J. M., 1979, p. 200], [Ventura, M. S.,1985, p. 42], [Bensaúde, J., 1995, vol. IV, p. 18]. Consultámos a reprodução facsímil da obra de Faleiro incluída na obra do historiador português Joaquim Bensaúde que indicamos na bibliografia.

[841] [Lopéz Piñero, J. M., 1979, p. 200].

[842] [*Cf.* Quarta Parte, 3.5].

[843] De acordo com [Fernández Navarrete, M., 1846, Tercera parte, sem paginação, nº 16] Francisco Faleiro foi para Espanha com Fernão de Magalhães e por "Real cédula fecha en Barcelona en 30 de abril de 1519" foi aceite por criado de S. M., com o salário de "35 mil mrs. al año", para integrar a armada que ia para a Índia; mas, ao que se sabe, não chegou a embarcar.

Dos trabalhos citados no manuscrito, a *Arte de Navegar* de Medina é a que mais vezes é mencionada. Esta obra foi publicada em Valladolid em 1545 e é dedicada ao Príncipe D. Filipe. A *Arte de Navegar* foi considerada uma referência importante para os marinheiros e pilotos, e teve uma ampla divulgação em Espanha e no estrangeiro, em particular em França[844]. Este trabalho está dividido em oito livros cujos títulos dão uma ideia dos temas que interessavam à navegação: do mundo, da sua ordem e composição; do mar, dos seus movimentos e de como foi inventada a navegação; dos ventos, da sua qualidade e nomes, e como se há-de navegar com eles; da altura do Sol e como se há-de reger por ela a navegação; da altura dos pólos; das agulhas de navegar; da Lua, e como os seus crescentes e minguantes servem na navegação; dos dias do ano.

Pedro de Medina (1493-1567) nasceu, ao que parece, em Sevilha e viveu quase toda a vida nesta cidade, consagrando-se principalmente a tarefas relacionadas com a náutica, como um dos cosmógrafos adscritos à *Casa de Contratación*[845]. Embora não fosse um marinheiro, mas sim um homem de letras de formação universitária, antes de escrever o seu livro Medina quis experimentar as dificuldades com que se deparavam os pilotos e, por isso, embarcou e navegou por diversos lugares, o que lhe permitiu, também, perceber quais as matérias de que os mareantes, na prática, mais precisavam[846].

No prólogo da *Arte de Navegar*, Medina justifica a urgência de uma obra como a sua por não existirem professores na arte de navegar, nem livros onde os navegantes pudessem instruir-se sobre estas matérias[847]:

> Y con todo esto, ni ay maestros que esta arte enseñen, ni de ninguno ay noticia que hasta agora aya escripto modo de navegar, y assi los mas pilotos solamente tienen el uso dela navegación por lo qual cada uno sigue su opinión o parecer, de dõde acontece muchas vezes

[844] Este trabalho conheceu quinze edições em francês, quatro edições em holandês, três em italiano e duas em inglês [Sellés, M. A., 2004, p. 183].

[845] [López Piñero, J. M., 1979, p. 200]. A *Casa de la Contratación* começou a funcionar em 1503, em Sevilha, tendo como objectivos orientar e controlar o comércio relacionado com as descobertas e fomentar o estudo e progresso da náutica. O primeiro *Piloto mayor de la Casa de la Contratación* foi Américo Vespúcio, que tomou posse em 1508 com a incumbência de realizar as cartas de marear e de anotar nelas os territórios que se fossem descobrindo. Em 1552 foi criada na *Casa de la Contratación* a cátedra de cosmografia e navegação destinada à formação dos pilotos. Nela explicavam-se: um tratado da esfera, o regimento de navegação para conhecimento da altura do Sol e do Pólo, o uso e construção da carta de marear, a construção e manejo de instrumentos como o quadrante, a balestilha, a agulha de marear, o astrolábio, e ministravam-se outros conhecimentos necessários aos mareantes, como o dos dias da lua e os horários das marés [Fernández Navarrete, M., 1846, Parte Tercera, sem paginação, nº 7, 8, 9].

[846] [Pedro de Medina, 1563, f. III].

[847] Sobre a biografia de Medina, a sua obra e actividade, veja-se [Fernández Navarrete, M., 1846, sem paginação, nº 9 e nos 22- 25].

> hallar se en una nao navegando dos o tres pilotos, y el uno dize que según su cuenta la nao va navegando por tierra, y otro según la suya, dize que la tierra le esta muy lexos, esto causa el carescer de la verdadera ciencia dela navegacion: y de qui es, que muchas naos y gentes se pierden, y otros se hallan en grandes peligros daños y trabajos [Pedro de Medina, 1545, Prólogo].

O *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar* de Martín Cortés foi impresso em Sevilha, em 1551, mas estava já concluído em 1545 quando foi publicada a *Arte de Navegar* de Medina[848]; por isso, o seu autor não pôde aproveitar-se dos respectivos conhecimentos[849]. O estilo de Cortés é mais claro que o de Medina e a sua exposição é mais metódica e está melhor ordenada[850]. O trabalho está dividido em três partes. Na primeira trata da composição do mundo e dos princípios necessários à navegação; na segunda estuda os movimentos do Sol e da Lua e os efeitos que estes astros produzem – conjunções, eclipses, divisão do tempo – propõe processos para determinar o lugar e a declinação do Sol e as horas da noite, e aborda o tema das marés; na terceira parte trata da composição de instrumentos de uso na navegação e explica o seu modo de funcionamento. Esta obra teve grande divulgação em Inglaterra, onde conheceu nove edições em inglês[851].

Sabe-se pouco sobre a vida de Martín Cortés; nasceu em Bujalaroz, no reino de Aragão, como indica o frontispício da sua obra . Em 1530 Cortés mudou-se para Cádiz onde viveu grande parte da sua vida, e em 1567 fixou-se em Sevilha aí falecendo em data que se desconhece, mas anterior a 1582[852].

Pela sua estrutura e extensão e pelo nível científico que atingiram, tanto a obra de Medina como a de Cortés constituiram autênticos tratados sistemáticos de arte de navegar[853]. É, portanto, natural aceitar que Moya se tenha baseado nelas para escrever o seu trabalho.

O *Tratado que ho doutor Pero nunez Cosmographo del Rey nosso senhor fez em defensam da carta de marear: cõ o regimẽto da altura*, que mencionaremos abreviadamente por *Tratado em defensam da carta de marear*, é um trabalho de conteúdo náutico, que foi

---

[848] A informação do ano de conclusão da obra é dada no respectivo título, quando Martín Cortés, que então vivia em Cádiz, dedica a obra ao rei D. Carlos V.

[849] Na verdade, Martín Cortés inclui no final da sua obra uma vastíssima lista de autores que consultou e dela não consta o nome de Medina.

[850] [López Piñero, J.M., 1979a, p. 164].

[851] O impacto da obra em Inglaterra justificou a sua tradução em inglês. Foi impresso em Londres, em 1561 [Fernández Navarrete, M., 1846, Tercera Parte, sem paginação, nº 17].

[852] [Fernández Navarrete, M., 1846, tercera parte, nº 30].

[853] [López Piñero, J. M., 1979, p. 200].

publicado dentro do *Tratado da Sphera* [Lisboa, 1537]. Além deste trabalho, o *Tratado da Sphera* contém um outro texto de náutica, o *Tratado que o doutor Pero Nunez fez sobre certas duuidas da navegação*, e a tradução para português de três trabalhos científicos: o *Tratado da Esfera* de Sacrobosco, o Livro I da *Geografia* de Ptolomeu e os capítulos relativos ao Sol e à Lua da *Theoricae novae planetarum* de Peurbach, a que Nunes acrescentou anotações importantes[854].

O *Tratado em defensam da carta de marear* começa com o estudo da carta de marear e inclui considerações sobre o regimento das léguas, as tábuas de declinação do Sol, a determinação da altura do pólo pela estrela Polar, o nordestear e noroestear das agulhas, a determinação da hora pelo rumo do Sol. Pedro Nunes ensina como se navega por círculo máximo, dá o regimento da altura do pólo ao meio-dia, explica como se toma a altura do polo quando há Sol, dá um regimento das léguas; o texto inclui uma "tavoa das declinações" e tábuas dos lugares do Sol que indicam a posição do Sol na Eclíptica, num qualquer dia do ano para os anos de 1537 a 1540.

Pedro Nunes (1502-1578) foi professor nas universidades de Lisboa e de Coimbra, Cosmógrafo do Reino e Cosmógrafo-Mor do Reino[855].

A primeira impressão da *Chronographia o Repertório de Tiempos* de Jerónimo de Chaves foi feita em Sevilha, em 1548. A obra compõe-se de quatro partes, ou "tractados". A primeira parte trata do tempo e da sua divisão, apresentando um resumo das idades do mundo desde a sua criação. A segunda parte contém a descrição geral do mundo, com os seus elementos, Terra, Água, Ar, Fogo e a Região celeste, de cujo movimento resulta o tempo. Inclui o estudo da posição dos céus e planetas bem como das características de cada um dos doze signos. A terceira parte trata de assuntos relativos ao calendário e às festas móveis; contém um lunário com todos os eclipses até ao final do século dezasseis. A quarta está relacionada com o tempo; indica aos médicos a altura adequada ao tratamento de algumas doenças, as mudanças de clima (chuvas, ventos, tempestades, etc.). A obra contém, ainda, um catálogo das principais cidades cristãs na região da Europa e Índias Ocidentais do mar Oceano[856].

---

[854] Para mais detalhes ver [Leitão, H., 2002, pp. 48-49].

[855] Para mais detalhes sobre a biografia ver http://scientia.artenumerica.org/noniana/biografia.html (Consultada em 3 de Novembro de 2010).

[856] Esta obra teve pelo menos doze edições em Sevilha, durante o século XVI, tendo sido também impressa em Lisboa, em 1576 [Wilkinson, A. S., 2010, p. 122]. A *Chronographia* deve ter sido muito lida em Portugal, pois dela existem 7 exemplares na Biblioteca Nacional de Portugal [Leitão, H. e Martins, L., 2004, pp. 177-179].

Jerónimo de Chaves (1523-1574) era Mestre em Artes e em Medicina e ocupou em 1552 a cátedra de Cosmografia criada nesse ano na *Casa de la Contratación*. Além da obra que o tornou conhecido, a *Chronographia*, escreveu um *Tratado de la Sphera* [Sevilha, 1545] que é a tradução da *Sphera mundis* de Sacrobosco[857]. Chaves foi "Cosmographo de su Magestad y professor Real de Cosmographia en Sevilla", como se lê no frontispício da sua *Chronographia ò Reportorio de los Tiempos* impressa em Sevilha, em 1561.

Tomando como ponto de partida os aspectos mais relevantes incluídos no manuscrito *Arte de Marear*, propomo-nos mostrar que o conteúdo deste texto de Pérez de Moya compreende saberes essenciais à prática e ao aperfeiçoamento da pilotagem no século XVI. A diversidade de ensinamentos de navegação que o trabalho apresenta e o modo peculiar como Moya os aborda, matérias que exploraremos no decurso do nosso trabalho, levam-nos a considerar a possibilidade de se tratar de um conjunto de apontamentos destinados à prática docente, em aulas a ministrar a marinheiros ou a aspirantes a sê-lo.

No que se segue, expomos os principais conceitos tratados por Moya na *Arte de Marear*, bem como os métodos e ferramentas de que ele se socorre no decurso do seu manuscrito. A nossa análise teve em conta as referências que Moya indica, ou apenas insinua, e outras às quais fomos conduzidos por pequenos detalhes existentes no texto, entre os quais salientamos figuras e tabelas. Embora pensássemos, de início, seguir a "ordenação" que parece estar subjacente à que Moya procura implementar no manuscrito, essa metodologia não se mostra exequível, pois alguns temas são recorrentes em diversos momentos desse trabalho e outros, depois de iniciados, são remetidos para partes posteriores do texto. Optámos, por isso, por desenvolver o nosso estudo de acordo com o esquema seguinte:

a) As cartas planas: os rumos; os regimentos das léguas
b) Determinação da latitude: regimento do Norte e regimento do Sol
c) A agulha de marear e a questão da determinação da longitude
d) As marés
e) A *Arte de Marear* e os *Fragmentos Mathematicos*

[857] *Enciclopédia Universal Ilustrada Europeo Americana*, vol. 17, pp. 122-123. É possível consultar o *Tratado de la Sphera* de Jerónimo de Chaves digitalizado no "Fondo Antiguo" da Universidad de Sevilla.

3.3. As cartas planas

3.3.1. Os rumos

Os primeiros conceitos dados na *Arte de Marear* são o de rumo e o de derrota[858]: os rumos, ou "rumbos" como se denominam em castelhano, são as linhas com que na carta de marear se denotam os ventos usados na navegação[859]. A derrota é o caminho que se faz por mar, de um lugar a outro:

> Rumbos son las rayas de las cartas de marear que se ponen por los vientos. Derrota – dicen los marineros por decir de donde sale y donde va. Quiere decir que es el camino que por la mar se hace o deve hacer [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 68v].

Moya considera o vento como uma emanação quente e seca, que se desloca à volta da Terra. Esta definição de vento dada na *Arte de Marear* não é original, pois é a que Jerónimo de Chaves apresenta na sua *Chronographia o Reportorio de Tiempos*, que a seguir transcrevemos:

El viento es una exhalacion caliente y seca, lateralmente movida a la redonda de la tierra [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 194r].	El viento es una exalacion caliente y seca, lateralmente movida a la redõda de la tierra [Jerónimo de Chaves, 1584, f. 89v].

São, também, muito semelhantes às da *Chronographia o Reportorio de Tiempos* os nomes e as descrições dos ventos, que Moya reproduz quase textualmente, e as referências a Plínio[860]. Moya indica outros nomes pelos quais são conhecidos estes ventos, como: trácias, galego, gálicas, cierzo, mistral, norueste e nornorueste, conforme os povos das regiões que atravessam.

---

[858] [*Cf.* Quarta Parte, 2, nota de rodapé].

[859] "Rhombos" é, também, uma designação que Moya usa com o mesmo significado [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 35].

[860] Na *História Natural* de Plínio pode ler-se o seguinte: "La considération des vents est importante aussi. Dans la province Narbonnaise, dans la Ligurie et une partie de l'Étrurie, on regarda comme inhabile celui qui plante sous le vent Circus (II, 46), et comme habile celui qui choisit une exposition oblique à ce vent: c'est lui en effet qui tempère l'été dans ces contrées; mais la violence en est d'ordinaire si grande, qu'il enlève les toits. Quelques-uns subordonnent le ciel au sol : quand ils plantent un vignoble dans un lieu sec, ils l'exposent au levant et au nord; dans un lieu humide, au midi. On emprunte aux variétés mêmes de la vigne des motifs d'élection: on plante des vignes précoces dans les expositions froides, afin que le raisin en mûrisse avant le froids." [Littré, E.,1848-1850, Libre XVII (XVII), II (10)]
http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre17.htm (Consultada em 15 de Novembro de 2009).

Cyrcio nasce a la parte diestra del septentrion. Los griegos llaman thracias. El español llama gallego. Los italianos gallico porque venia de hacia Francia. Los franceses cierzo. Los del levante le dicen maestral o tramontana maestral. Los del mar oceano le dicen norueste y otros nornoroeste. Es templadamente frio y muy excesivamente seco. Suele causar granicos nieves. Este corre tan recio a veces que a la provincia de Narbona se le volan los techos de las casas. *Pli. Lib 17 cap 11* [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 196v].

Cyrcio nasce a la parte diestra del Septentriõ. Los Griegos llaman Trascias. Los Españoles llaman Gallego. Los Italianos Gallico, porque venia de hazia Francia. Los Franceses lo llamavã Cierço. Los de Levante lo suelen nombrar Maestral o Tramontana maestral. Los del mar Oceano en commun lo llaman, unas vezes Noruest, y otras Nornoruest. Es un viento templadamente frío, y excesivamente seco, suele causar granizos y nieves. Suele este (como escrive Plinio Libro 17, Capit 11) correr tan rezio, que en la provincia de Narbona se lleva los techos de las casas [Jerónimo de Chaves, 1584, f. 92v].

Pérez de Moya considera 32 ventos assim divididos: 8 inteiros ("enteros") ou principais; outros 8 "medios" colocados a meia distância entre os principais; e os restantes 16, os "quartos", assinalados entre os dois tipos indicados. Esta classificação era na época habitualmente utilizada pelos mareantes e coincide com a dada por Medina na *Arte de Navegar*[861].

Para explicar a origem dos ventos, Moya recorre, também, a Medina e refere, sob o título "Nombres de los vientos segun Medina", os 32 nomes que Medina adopta[862]. Estes são: "Norte, Sur, Leste, Oeste, Nordeste, Sueste, Sudueste e Noroeste", para os oito ventos principais; "Nornordeste, Lesnordeste, Lessueste, Susueste, Susudueste, Oesnoroeste, Nornoroeste e Oessudueste", para os meios ventos e "Norte 4ª al nordeste, Nordeste 4ª al norte, Nordeste 4ª al leste, Leste 4ª al nordeste, Leste 4ª al sueste, Sueste 4ª al leste, Sueste 4ª al sur, Sur 4ª al sueste, Sur 4ª al sudueste, Sudueste 4ª al sur, Sudueste 4ª al oeste, Oeste 4ª al sudueste, Oeste 4ª al noroeste, Noroeste 4ª al oeste, Noroeste 4ª al norte e Norte 4ª al noroeste", para os quartos. Não obstante, Moya alude a opções que sobre este assunto

[861] Medina [Pedro de Medina, 1545, f. 19v] diz: "Estos ocho vientos se llaman en la navegación vientos enteros, o principales entre los quales se señalan otros ocho, que se llaman medios vientos o medias partidas, no porque ellos tengan menos fuerça que los primeros, mas porque se describen entre los ocho vientos suso dicho. (…) Entre estos diez y seys rumbos de vientos y medios vientos se señalan otros diez y seys que se nombran cuartas" [Pedro de Medina, 1545, f. 19v].

[862] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 175v-176r]. Medina indica esses ventos numa figura que apresenta no capítulo VI da sua obra, intitulado "Como los vientos delas cartas de marear ciñen la redondeza del mundo para navegar por ellos" [Pedro de Medina, 1545, f. 20v].

fizeram outros autores. Nota que os "antigos" consideravam apenas os quatro ventos seguintes: o levante ("subsolano"), o vento sul ("austro"), o do poente ("favonio") e o do norte ("setentrion"); e que outros autores indicavam outras opções, como, por exemplo, 12 (tantos como os signos celestes), ou 32, como consideravam os "mareantes do mar oceano e de levante" (entendemos que ao mencionar os mareantes de levante Moya se referia aos que navegavam no mediterrâneo[863]):

> Los antiguos solamente nombraron 4 vientos que procedian de los 4 angulos pliegos del mundo. Estos eran subsolano que sale del oriente. Austro del medio día. Favonio del poniente. Septentrión de la parte norte o polo artico. Andronico Egipciano nombro ocho, otros mostraran 12 vientos conforme una esfera plana como astrolabio tiniendo consideracion a los 12 signos celestes. Otros 16. Otros 34. Los mareantes del mar oceano y de levante cuentan os 32 [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 194v].

Deve ter sido por reconhecer a importância dos ventos, sobretudo na navegação, que Moya inclui no seu trabalho uma figura com a localização de cada um. Nela, usa os números 0, 1 e 4 para identificar os ventos inteiros, os meios ventos e os quartos de vento (figura 87) notando que se deviam representar, respectivamente, a negro, a verde e a vermelho[864]. É curioso observar que as cores que Moya diz que devem ser utilizadas são precisamente as que usualmente se empregavam para distinguir as "linhas de rumagem" nas cartas iluminadas, embora a bordo se usassem cartas de marear menos vistosas que serviam de auxílio aos pilotos[865].

Apesar de Moya enfatizar o uso da cor na representação dos ventos, verificámos que o manuscrito está escrito a uma só cor. Talvez isso signifique que estamos perante uma versão preliminar e que num trabalho impresso seriam usadas as três cores.

---

[863] De acordo com Navarrete, levante é toda a parte de costas do Mediterrâneo [Fernández Navarrete, M., 1831, p. 336].

[864] Martin Cortés propõe o uso das cores negra, verde ou azul e vermelha, para o mesmo fim. Segundo ele diz "Es costumbre pintar sobre el centro de algunas destas agujas, o de las mas con diversas colores y con oro una flor o roseta diferenciado las líneas y señalando las com letras o con alguna señal especialmente se señala el norte con una flor de lys y el leste con una cruz" [Martín Cortés, 1551, ff. 62r-62v].

[865] Fontoura da Costa refere que era deste modo que as mesmas cores se usavam nas cartas iluminadas, como por exemplo o *Mapa* de Cantino, de 1502, mas sublinha que estas cartas não se destinavam ao uso de bordo [Costa, A. F., 1960, pp. 195 e 207].

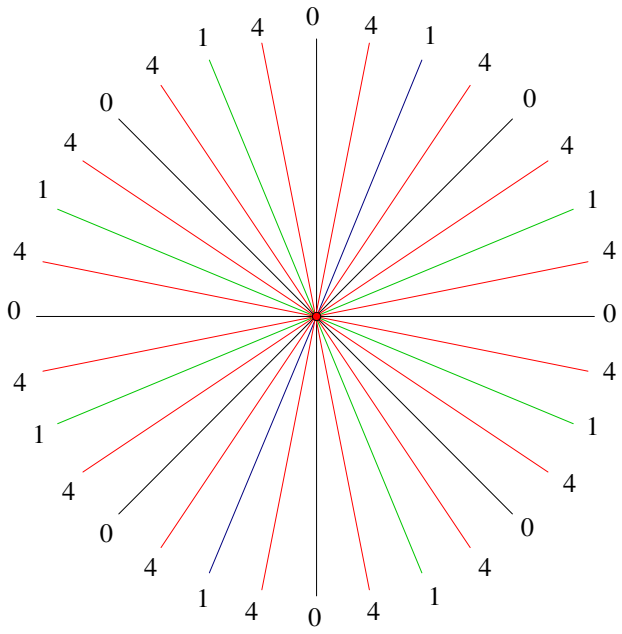


Figura 87: Moya indica os oito ventos "enteros" com um 0, os oito ventos "médios" com 1 e os dezasseis "quartos" com um 4, mas, ao contrário do que afirma no texto, não os representa a cores distintas [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 168v].

No decurso da *Arte de Marear*, Moya refere-se, por diversas vezes, ao tema dos ventos, dedicando mesmo um 'capítulo' a indicar os nomes por que os marinheiros espanhóis tratam os 32 ventos e a explicar as suas regras de formação[866].

No *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar*, Martín Cortés inclui uma representação dos 32 ventos usados na navegação (figura 88) e sublinha que os marinheiros do "mar oceano" usavam nomes que deviam ter origem na língua alemã ou flamenga, porque estas nações navegavam nesse mar, e que os navegantes do mar mediterrâneo designavam os ventos por nomes de origen toscana, tendo em conta a parte do mar donde sopravam; por exemplo, vento "gregal", o que vinha da Grécia, "siroco", o da Síria, etc[867].

[866] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 198r-198v].

[867] [Martín Cortés, 1551, ff. 61r-61v].

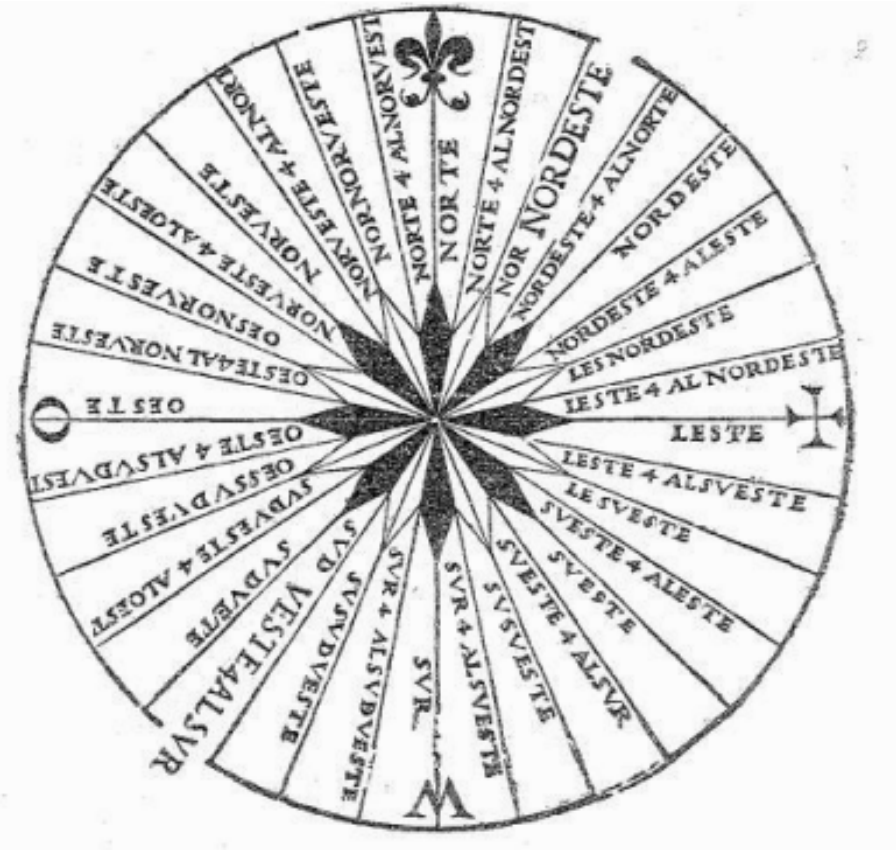


Figura 88: "Demonstración de los vientos" apresentada em [Martín Cortés, 1551, ff. 61r-61v].

As cartas de marear constituíam um auxiliar indispensável à navegação; elas permitiam ao piloto saber a sua situação, determinar a distância entre os locais de partida e chegada e a latitude de cada um. Com estas informações, ele podia definir o percurso a seguir adaptando-o, quando necessário, aos ventos mais convenientes. Medina redige, assim, os benefícios das cartas de marear:

> Entre los instrumentos que a la navegacion son necessários, es uno la carta de marear, porque sin esta no se podria hazer buena navegación, pues en ella el piloto o navegante vee el lugar donde esta, y el lugar donde espera yr, y vee el altura de grados que cada cosa tiene, assi que, conoce si hade yr derecho he ygual, o si hade yr subiendo o desciendo. Vee assi mesmo que viento o vientos le han de servir en su derrota, y donde hade dexar uno y tomar otro. Tanbien vee la distancia del camiño que hade andar, quantas leguas tiene, y assi ordena en todo como mejor le convienen [Pedro de Medina, 1545, f. 22r].

No manuscrito, Moya refere-se à marcação, na carta de marear, de uma povoação da qual se conhecessem a latitude e longitude, tomando como exemplo a cidade de Sevilha.

Mas a descrição do procedimento, que recorre à junção de dois fios, é vaga e prejudicada pela ausência de uma figura:

> Si quiero saber buscar en la carta de marear un pueblo, assi como Sevilla, mirare la latitud de Sevilla, que son 37 grados, y la longitud, y a do se juntaren los dos hilos como se hace en las tablas de Tolemeo y hallaras al pueblo que quisieras [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 168v-169r].

Apiano, na sua *Cosmographia*, mostra como determinar numa carta a cidade de Paris, conhecidas as suas coordenadas geográficas, latitude e longitude. A figura de que se socorre é muito curiosa e parece ilustrar bem a descrição de Moya (figura 89).

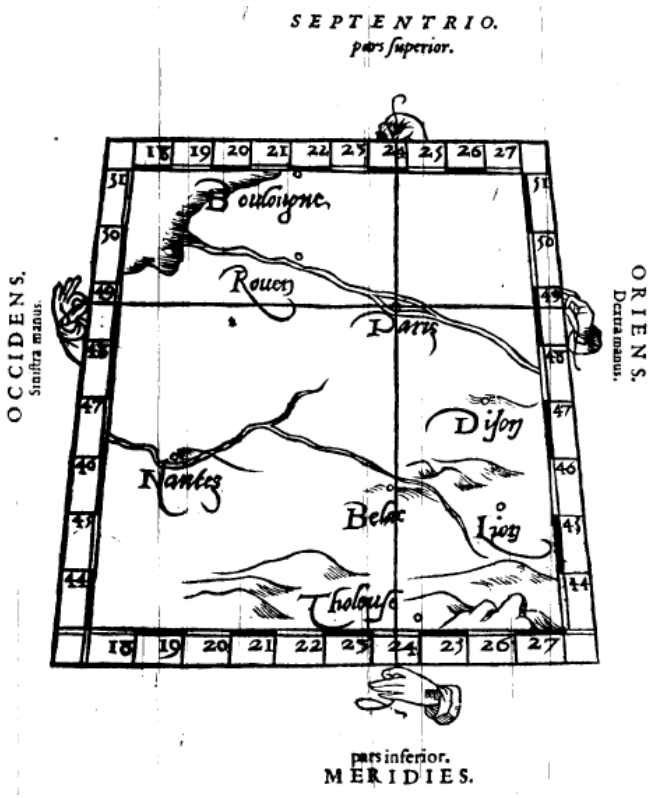


Figura 89: Localização da cidade de Paris pelas suas coordenadas geográficas: latitude e longitude [Pedro Apiano, 1553, f. 28v].

Moya não inclui na *Arte de Marear* qualquer representação da carta de marear, apesar da alusão frequente que lhe faz; no entanto, como mostraremos em seguida, sabemos que ele utiliza a carta (figura 90) que Medina inclui na *Arte de Navegar*. Esta carta foi, aliás,

bastante conhecida naquela época, tendo sido reproduzida no *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar*, de Martín Cortés[868].

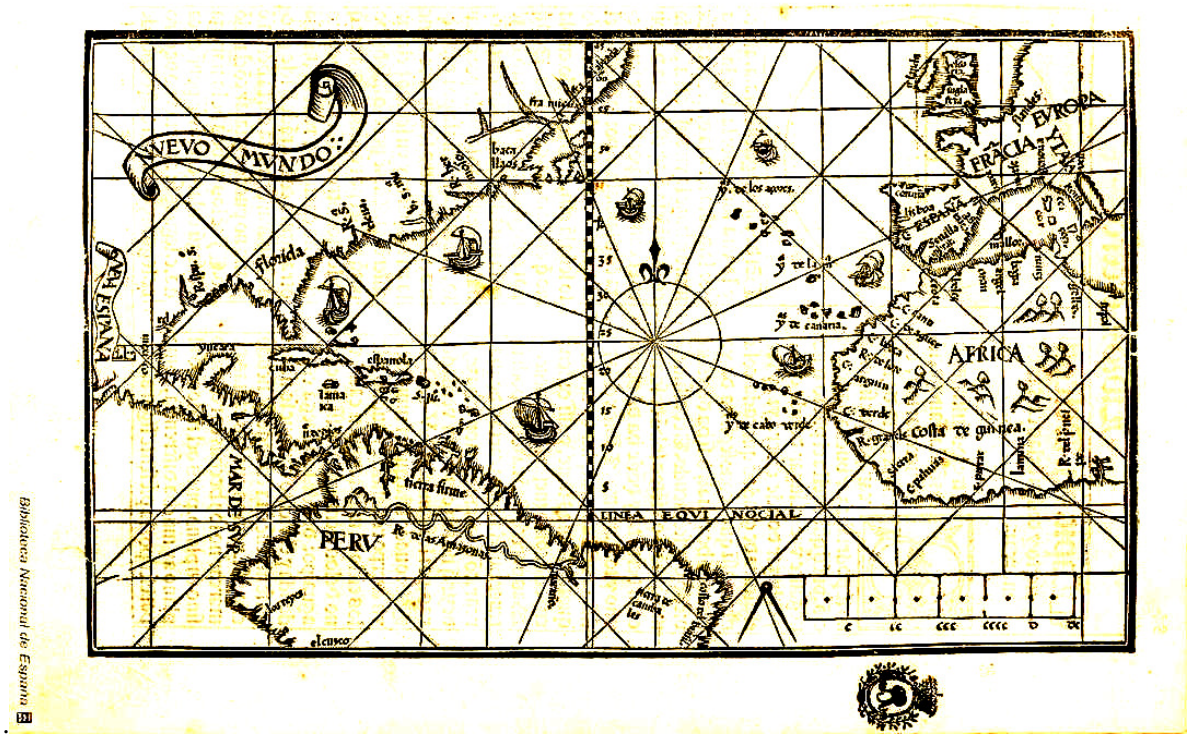


Figura 90: "Carta de navegar" incluída na *Arte de Navegar* [Pedro Medina, 1545, livro III, cap. VI, folha não numerada depois do verso do fólio XXI]. Cópia do exemplar, em formato digital, da Biblioteca Nacional de Espanha.

Na "carta de navegar" de Medina estão desenhadas duas escalas. Uma, a tracejado, que começa na linha equinocial e se prolonga perpendicularmente a ela, para cima. Esta escala está graduada de 0º a 65º, com marcações de grau em grau, mostrando em destaque os valores múltiplos de 5: é a escala de latitudes. A outra, situada no canto inferior direito, estabelece a correspondência em léguas[869], entre a distância na carta e a distância real – Cortés refere que os marinheiros lhe chamam tronco de léguas[870]. Tem ainda representado o Trópico de Câncer e outros paralelos, e uma rosa-dos-ventos com 16 ventos (os 8 principais e os 8 médios). Dispondo de uma ferramenta como esta, é fácil determinar a distância entre

[868] [Martín Cortés, 1551, f. 67r].

[869] De acordo com o *Diccionario de la Lengua Española da Real Academia Española*, "en el antiguo sistema español" uma légua terrestre equivale a 5572,7 metros, e uma légua marítima equivale a 5555,55 metros. Navarrete diz: "llámase légua marina ò marítima la vigésima parte de la extension lineal de un grado de meridiano terrestre, que por consecuencia consta de seis mil seiscentos cincuenta varas castelhanas, y dividida en tres millas, sirve de tipo en todas las medidas del pilotagem por la cuenta de estima [Fernández Navarrete, M., 1831, p. 334].

[870] [Martín Cortés, 1551, f. 64r].

duas povoações indicadas na carta; basta colocar cada uma das pontas do compasso em cada um dos locais e transportar a abertura do compasso, assim tomada, para a escala de léguas, estabelecendo a correspondência respectiva. Usando esta carta e procedendo de acordo com as explicações dadas por Moya, chegamos à mesma conclusão que ele apresenta: a distância, em linha recta, entre Sevilha e a Ilha da Madeira é 250 léguas. A carta possibilita, também, a determinação da latitude de um lugar que esteja marcado nela. Para isso, toma-se com o compasso a distância entre o referido lugar e a linha equinocial, e transporta-se essa distância para a escala da carta, colocando um pé do compasso na origem da escala e o outro pé sobre a escala; este segundo pé indicará, directamente, a medida da latitude procurada.

O processo que permite assinalar, na carta de marear, o ponto exacto em que uma embarcação se encontra num dado momento, por conhecimento do ponto de partida e do rumo pelo qual navega, ficou conhecido, nos textos náuticos da época, por "achar o ponto". Moya refere-o como "echar punto" (ou por "echar punto por esquadria"). Este procedimento envolvia dois compassos que se utilizavam como Moya descreve: colocava-se uma ponta de um deles no ponto de partida e a outra na linha de rumo pela qual a embarcação navegava. Por outro lado, colocava-se uma ponta do outro compasso sobre a escala de latitudes na graduação correspondente à latitude observada no momento em que se pretendia conhecer a posição da embarcação e a outra ponta deste compasso no paralelo mais próximo traçado na carta, correspondente à linha de rumo este-oeste. Depois, deslizavam-se, simultaneamente, os dois compassos ao longo das referidas linhas de rumo até que as pontas de ambos se tocassem num ponto. Era esse o ponto pretendido.

Na *Arte de Marear*, Moya ilustra o modo de achar o ponto, tomando o exemplo particular de uma embarcação que parte de Sevilha, que considera com 37º de latitude, e se desloca para uma ilha à latitude de 50º[871]:

> Echase punto tomando primero el altura del norte, como en las reglas dello se ha mostrado. Cipongo [sic] que se toma en 40 grados. Y este [hubiera salir] de 37, bien sabe segun esto que ha caminado 3 grados pero no sabe en que parte esta. Para verlo pone la punta de un compas en 40 grados, que dice que se halla, y el otro pie pongalo en un parallelo cualquiera a esta altura. Esto para no alzarse ni abajarse de los dichos 40 grados. Y vengan como de las puntas hasta que tope con otro compas el cual ha de tener el un pie en el punto donde partio la nave y la otra punta en un rumbo que vaya derecho porque no discrepe del derecho de por

[871] Não sabemos se Moya estaria a pensar nas ilhas dos Açores, nomeadamente na ilha do Côrvo, à qual se refere noutros momentos; mas nesse caso estava a cometer um grande erro, por excesso, na indicação da latitude, uma vez que se sabe hoje que essa ilha tem 39º 40´de latitude Norte.

do va el navio caminando. Llevando los puntos hacia delante y [como rastando]. Y yendo llegando asi el un compas al otro las puntas de uno como estan contra las del otro, hasta tanto que la punta del un compas quede nota de do salio el navio tope y se encuentre con la punta del otro compas que salio de los 40 grados. Y alli do se toparen es el sitio o lugar do el tal navio se halla [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 3r].

A descrição do procedimento dado por Moya para "achar o ponto" pode ser simulada como segue (figura 91). Suponha-se uma carta de marear na qual está representada uma rosa-dos-ventos. Suponha-se, ainda, que a embarcação parte de um ponto P e segue o rumo NNE (Nor-Nordeste). Seja L a latitude do local em que a embarcação se encontra no momento M em que se pretende determinar a sua posição na carta e OE o rumo da direcção oeste-este que está mais próximo de L. O ponto da carta em que a embarcação se encontra no momento M, P', obtém-se por intersecção da paralela a OE, por L com a paralela à direcção NNE, que passa por P.

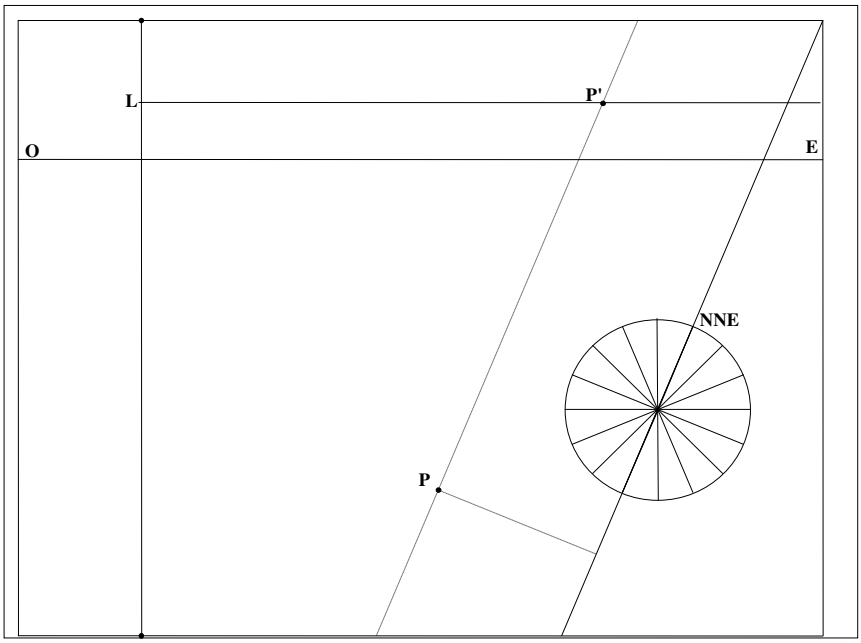


Figura 91: Simulação do processo descrito por Moya para "echar punto". O ponto P' é o local onde se encontra a embarcação quando está à latitude L, supondo que partiu de P e navegou por um rumo NNE.

Quando não era possível determinar a latitude do lugar em que a embarcação se encontrava, o que sucedia quando o céu estava encoberto e não permitia ver a estrela Polar ou o Sol, a posição da embarcação era estimada pelo rumo e pelo número de dias de viagem

decorridos, supondo o que normalmente se andava por esse rumo. Tratava-se de um procedimento muito pouco fiável, a que Moya chamava "echar punto por fantasia" [872]:

> El punto por fantasia. Muchas veces por causa de nublados ni de dia ni de noche se puede saber el altura del polo.Y por esto el maestro suele por su juicio decir pues en tantos dias que camino y con buen tiempo o malo mi navio suele andar tanto. Luego tantos grados abran dado sabido esto. Hecha punto como hemos mostrado y puede acertar y puede herrar. Lo cual no se sabe cierto hasta tanto que vea sol o el norte [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 178v].

A questão de saber qual a distância a que o mareante se encontrava do seu destino, depois de ter percorrido uma dada distância levando um certo rumo, é tratada no manuscrito sob o título "4º de Marear" e o estudo feito por Moya baseia-se na *Arte de Navegar* de Medina[873]. Moya não menciona o nome da obra nem o do autor, mas há uma referência ao "Cap. 8 fo. 31. a la vuelta lib.3.", que apesar de concisa é suficiente para permitir assegurar esta filiação[874]. Aliás, o texto apresentado faz menção a 14 figuras que não se encontram no manuscrito e sobre as quais Moya tece comentários que se ajustam perfeitamente às figuras dadas na referida obra de Medina. De facto, na descrição de Moya lê-se que sob cada uma delas existe um quadro constituído por três colunas, no qual consta a seguinte informação: na 1ª coluna é indicado o número de léguas que se andou pelo rumo em que se navegou; na 2ª coluna está referido o rumo que se terá de seguir para atingir o lugar de destino supondo que o número de léguas já percorridas é o indicado na 1ª coluna; na 3ª coluna está registado o número de léguas a que o navio se encontra do destino:

> Debaxo de cada figura hay tres colunas de numeros. La 1ª cujo titulo es leguas de camino siguen las leguas que uno ya anduvo por aquel rumbo desde el lugar do sale. La 2ª coluna cujo titulo es Rumbo muestra el rumbo que ha de tomar para ir al lugar do queria desde el lugar do se halla. La 3ª cujo título es leguas de apartamiento siguen las leguas que hay desde el punto do se halla este hombre hasta el lugar do queria ir [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 191v].

---

[872] Moya também se refere ao ponto de fantasia, no segundo livro dos *Fragmentos Mathematicos* [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 34].

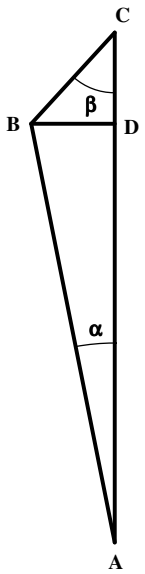
[873] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, folha não numerada imediatamente depois de f. 190v].

[874] Na *Arte de Navegar* de Medina, no verso da folha 31, que faz parte do *libro 3*, encontra-se o capítulo 8 intitulado "De la cuenta que el piloto ha de tener en su camino quando navega con viento diferente a su derrota".

As figuras que Moya menciona (das quais fazem parte as duas que apresentamos na figura 93, que Moya não reproduz) permitem ao piloto saber qual o rumo que há-de seguir e a quantas léguas se encontra do destino, quando o vento não é favorável à derrota ou as condições atmosféricas obrigam a embarcação a mudar frequentemente de rumo.

Moya toma, tal como Medina, o exemplo de um navegador que pretende deslocar-se de um certo lugar a outro à distância de 100 léguas, a Norte do sítio onde se encontra. Admite, além disso, que o vento da direcção Sul-Norte, que seria favorável, não soprava nesse momento e que a direcção da viagem se fazia pelo primeiro rumo (na figura 93, o rumo pelo qual se está a navegar é o que está indicado com a cruz). Em seguida supõe que, depois de percorrer 90 léguas pelo rumo 1, o navegante queria saber onde se encontrava e qual a direcção a seguir para chegar mais rápidamente ao seu destino. Recorre, então, à tabela (figura 93 à esquerda) e entrando na linha correspondente a 90 léguas fica a saber que se passar a navegar pelo 5º rumo orientado para a parte contrária daquela em que navegava ("apartado hacia la otra parte contraria del rumbo que levaba, que en este ejemplo es hacia la mano derecha") está a 22 léguas do lugar de destino.

Socorremo-nos da figura 92 para interpretar a explicação de Moya:



Distância de A a C = 100 léguas

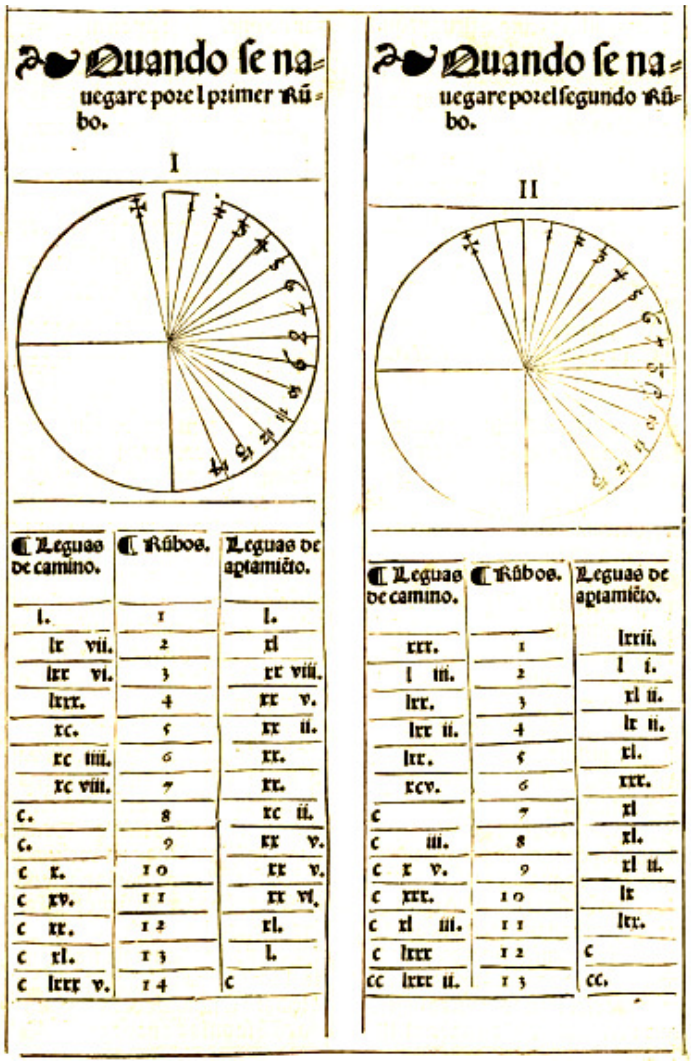
Direcção de AB dada pelo rumo 1, ou seja, $\alpha = 11{,}25º$

Distância de A a B = 90 léguas

Direcção de BC dada pelo rumo 5, ou seja, $\beta = 5 \times 11{,}25º = 56{,}25º$

Distância de B a C $\approx 21{,}12$ léguas

Figura 92: Partindo do lugar A, se se deslocasse pelo rumo "próprio" (AC) o mareante encontrava o lugar C a 100 léguas de distância. Deslocando-se pelo primeiro rumo ($\alpha = 11{,}25º$), depois de percorrer 90 léguas encontra-se no lugar B. Deve então navegar pelo rumo 5 ($\beta = 56{,}25º$) para chegar ao seu destino, o lugar C, que fica a cerca de 22 léguas de distância.



Quando se na-
uegare pozel primer Rú-
bo.

I

Leguas de camino.	Rúbos.	Leguas de aptamiẽto.
l.	1	l.
lx vii.	2	xl
lxx vi.	3	xx viii.
lxxx.	4	xx v.
xc.	5	xx ii.
xc iiii.	6	xx.
xc viii.	7	xx.
c.	8	xc iii.
c.	9	xx v.
c x.	10	xx v.
c xv.	11	xx vi.
c xx.	12	xl.
c xl.	13	l.
c lxxx v.	14	c

Quando se na-
uegare pozel segundo Rú-
bo.

II

Leguas de camino.	Rúbos.	Leguas de aptamiẽto.
xxx.	1	lxxii.
l iii.	2	l i.
lxx.	3	xl ii.
lxx ii.	4	lx ii.
lxx.	5	xl.
xcv.	6	xxx.
c	7	xl
c iii.	8	xl.
c x v.	9	xl ii.
c xxx.	10	lx
c xl iii.	11	lxx.
c lxxx	12	c
cc lxxx ii.	13	cc.

Figura 93: Estas duas tabelas dizem respeito à navegação pelo 1º rumo (a da esquerda) e pelo 2º rumo (a da direita). Em cada uma delas, há 3 colunas: na 1ª coluna é indicado quantas léguas se andaram pelo rumo em que se navega; na 2ª coluna está referido o rumo que se terá de seguir para atingir o lugar de destino supondo que o número de léguas já percorridas é o indicado na 1ª coluna; na 3ª coluna está registado o número de léguas a que o navio se encontra do destino [Pedro de Medina, 1545, f. 32v].

Para testarmos os valores relativos à navegação pelo primeiro rumo, dados na figura 93 (tabela à esquerda) elaboramos o quadro seguinte (quadro 12).

Valores de β	AB (em léguas)	BD = AB sinα (em léguas)	BC = $\frac{\text{BD}}{\sin\beta}$ (em léguas)	BC Valores dados na tabela (figura 93) (em léguas)
1º rumo; $\beta = 11{,}25º$	50	9.8	50.0	50
2º rumo; $\beta = 2\times 11{,}25º$	67	13.1	34.2	40
3º rumo; $\beta = 3\times 11{,}25º$	76	14.8	26.7	28
4º rumo; $\beta = 4\times 11{,}25º$	80	15.6	22.1	25

5º rumo; $\beta = 5\times 11{,}25º$	90	17.6	21.1	22
6º rumo; $\beta = 6\times 11{,}25º$	94	18.3	19.9	20
7º rumo; $\beta = 7\times 11{,}25º$	98	19.1	19.5	20
8º rumo; $\beta = 8\times 11{,}25º$	100	19.5	19.5	22(*)
9º rumo; $\beta = 9\times 11{,}25º$	100	19.5	19.9	25
10º rumo; $\beta = 10\times 11{,}25º$	110	22.5	23.2	25
11º rumo; $\beta = 11\times 11{,}25º$	115	22.4	27.0	26
12º rumo; $\beta = 12\times 11{,}25º$	120	23.4	33.1	40
13º rumo; $\beta = 13\times 11{,}25º$	140	27.3	49.2	50
14º rumo; $\beta = 14\times 11{,}25º$	185	36.1	94.3	100

Quadro 12: Navegação pelo 1º rumo. Na segunda coluna, os valores de AB são as léguas de caminho já andadas pelo 1º rumo. Na terceira coluna, os valores de BD indicam a distância a que o navegador se encontra do rumo directo. Na quarta coluna dão-se os valores BC, que indicam a distância que é necessário percorrer, pelo rumo β, para atingir o ponto de chegada. Na última coluna são incluídos os valores dados por Medina (figura 93). (*) O valor indicado por Medina é 92, mas Moya propõe que se substitua por 22.

Comparando os valores de BC, dados por $\mathrm{BC} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\sin\beta}$, com os da figura 93, observamos que a tabela de Medina para o primeiro rumo, que Moya usa, oferece aproximações grosseiras. No entanto, tendo em conta que a distância considerada é 100 léguas (são cerca de 550 km), o erro é irrelevante.

Notamos que ambos os autores aludem a que o procedimento se pode generalizar a quaisquer outras distâncias. Assim, se a distância for 200 léguas, toma-se na primeira coluna o dobro do valor que lá consta e mantendo a segunda coluna conclui-se que se está ao dobro da distância que a terceira coluna indica. Os cálculos que a generalização envolve são triviais, mas evidenciam a superioridade aritmética de Moya. De facto, enquanto Medina propõe um multiplicador para cada caso, Moya resolve o problema com uma regra de três simples, como se vê pelos excertos seguintes:

Si los lugares distasen mas de cien leguas o menos hare una regla de 3. Ejemplo. Supongo que voy a un pueblo que de mi a el hay 500 leguas y habia de caminar hacia al

Si el camino fuere de dozientas leguas andareys el dos tãto delos números dela primera coluna (…) Y si fuere el camino de trezientas léguas, andar se há el tres tanto de los numeros dela primera coluna.

Norte. Y camine por un rumbo 60 apartado como esta dicho. Y andando por el 84 leguas dire por regla de 3. 500 me dan 84, 100 que san las leguas por que estas figuras estan hechas que me daran [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 191r].

Assi que, a cada cient leguas que se acrescentaren de camino, dareys outro tanto numero del que estuviere en la primera (…) Y si el camino huviere cincuentas, o mas o menos, dareys la mitad, tercio, quarto o quinto, o segun el numero fuere [Pedro de Medina, 1545, f. 32r].

Relacionado com este tópico, Moya faz a correcção de um lapso existente na *Arte de Navegar*, o que testemunha a sua leitura atenta e crítica deste texto e mostra um raciocínio lógico interessante. Vejamos do que se trata: observando os valores dados por Medina relativos à navegação pelos dois primeiros rumos (figura 93), Moya nota que na linha que corresponde a 100 léguas de caminho os números registados na terceira coluna, respectivamente 92 léguas e 40 léguas, não podem estar simultaneamente correctos, uma vez que o segundo rumo é mais afastado do que o primeiro; e propõe que se substitua o primeiro por 22. A razão da escolha deste número não é explicada embora o seu valor não ande, como vimos, muito longe do valor real.

3.3.2. Os Regimentos das léguas

Os regimentos de léguas constituíam importantes auxiliares de navegação muito divulgados nos princípios do século XVI[875]. Tratava-se de conjuntos de regras que forneciam duas informações: o número de léguas que era necessário navegar entre dois lugares situados em paralelos que diferissem 1º de latitude segundo rumos distintos do rumo norte-sul e fazendo com ele um ângulo conhecido[876] (vulgarmente referido como relevar) e o número de léguas de distância a que a embarcação se encontrava do rumo norte-sul (vulgarmente referido como afastar).

Na *Arte de Marear*, Pérez de Moya observa que, o facto de dois observadores se encontrarem num mesmo paralelo à superfície da Terra não significa que a distância de cada um deles a um outro ponto dessa superfície seja a mesma[877]. Para o justificar, supõe dois homens partindo do mesmo ponto, A, da superfície terrestre (figura 94) e admite que um se dirige para norte, no ponto C, e outro para o ponto B, numa direcção diferente. Quando,

[875] [Albuquerque, L., 1991, p. 245].

[876] De acordo com Navarrete, os regimentos de navegação eram livros que se davam aos pilotos, em que constavam as regras e preceitos da arte de navegar [Fernández Navarrete, M., 1831, p. 461].

[877] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 179r].

depois de um deles ter caminhado na direcção Sul-Norte e o outro noutra direcção, se encontram ambos no mesmo paralelo, o primeiro em D e o segundo em B, estão à mesma altura, mas o segundo percorreu um caminho mais longo que o primeiro; e o percurso será tanto mais longo quanto mais próxima a sua direcção for da direcção colateral à Este-Oeste. Vejamos a explicação que dá:

> Estan dos hombres en el punto o centro *a*. Y el uno quiere ir hacia el norte que es el punto *c* y el otro hacia el punto *b*. Si cuando el que va al norte llega al punto *d* ha [*sic*] andado un grado de latitud [,] cuando el que va al punto *b* le preguntasen lo que ha subido de latitud [,] dira que otro grado porque era una bola maciza. Estando en un paralelo algunos al rededor tan apartados seran del norte los unos como los otros [.] Y asi el que esta en el punto *d* y el que esta en el punto *b* tan apartado estan uno como otro del polo porque cada uno se es allegado un grado [.] Pero no por esto ha dejado de andar mas camino el que fue de punto *a* al punto *b* que el que fue del punto *a* al punto *d*. Esto mejor se demuestra como tengo dicho con una esfera o bola. De modo que segun la longitud tuviere la tierra tanto mas sale a cada grado cuanto mayor longitud tuviere y por esto en los vientos que estan colaterales al este y oeste tiene mas leguas cada grado que los demas [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 179r].

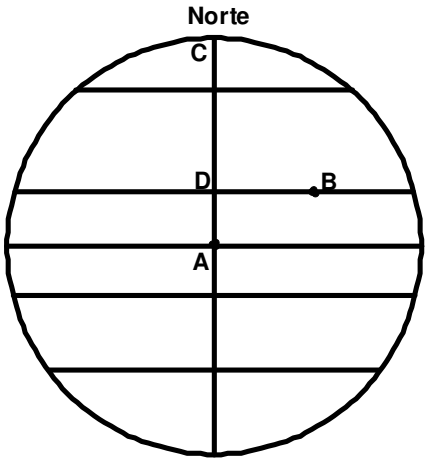


Figura 94: Com esta figura Moya pretende chamar a atenção para que a distância percorrida ao longo da superfície da Terra varia com o rumo. D e B estão à mesma altura (ou seja, estão à mesma distância de C) porque estão no mesmo paralelo, mas a distância de B a A é maior do que a distância de D a A [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 179r].

Podemos simular a explicação de Moya, supondo que A, B e D (figura 95) são tais que B e D estão no mesmo paralelo terrestre (ou seja, à mesma altura), e que o arco de meridiano AD tem 1º de amplitude. Conhecendo a amplitude do ângulo A e sabendo qual o

comprimento do meridiano terrestre facilmente se pode resolver o triângulo [ABD] [878], por aplicação da lei dos senos: $\frac{a}{sen\,\mathrm{A}} = \frac{b}{sen\,\mathrm{B}} = \frac{d}{sen\,\mathrm{D}}$.

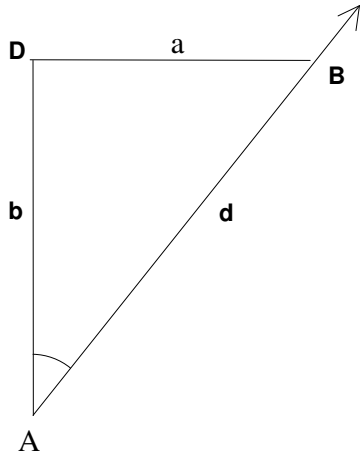


Figura 95: Determinação da distância *d*, de A a B, conhecidos *a* (= BD) e o rumo AB[879].

Os regimentos permitiam, portanto, aos mareantes, a informação directa das distâncias *d* e *a* (figura 95) quando conhecido o rumo pelo qual se navegava.

Como se viu, nos cálculos intervinha o comprimento do meridiano terrestre, e, como o valor adoptado nem sempre foi o mesmo, isso justifica a existência de diversos regimentos. O texto mais antigo em que está exposto um regimento das léguas é o *Guia Náutico de Munique* [c. 1509] onde os cálculos são feitos tomando o comprimento do meridiano terrestre igual a 6300 léguas, donde um arco de 1º de meridiano teria 17½ léguas de comprimento. Este valor veio substituir o anteriormente adoptado, de 16 léguas e 2/3[880]. No entanto, esta substituição não teve aceitação geral e ao longo do século XVI diversos trabalhos ainda mantiveram ambas as opções. Foi o que se verificou com a *Suma de geographia*, de Enciso, com o *Tratado del Sphera y del Arte del Marear,* de Faleiro, e

[878] Pedro Nunes, no *Tratado em defensam da carta de Marear*, observa que os cálculos não são difíceis, dependendo apenas da aplicação da lei dos senos [Pedro Nunes, 1537, f. 142].

[879] Fontoura da Costa usa os termos *relevar*, para a distância *d*, e *afastar*, para a distância *a*, conservando as designações dos Manuais de Munich e de Évora [Costa, A. F., 1960, pp. 355 e 357]; mas Moya não emprega estes termos.

[880] [Albuquerque, L., 1991, p. 245].

mesmo com o *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar*, de Cortés, publicado muito mais tarde. Esta ocorrência está, aliás, bem documentada nas palavras de Cortés[881].

Tal como acontece com os outros regimentos de que adiante falaremos, os regimentos das léguas podem ter diversos modos de apresentação, como sejam enunciados retóricos, tabelas ou rodas. É desta última forma de apresentação que nos vamos ocupar, seguidamente. Conforme o nome sugere, as rodas têm a forma de círculos, ou de coroas circulares; em particular nas rodas de léguas estão desenhados raios, ou pedaços de raio, na direcção dos rumos (sete em cada quadrante, formando cada raio com o seguinte um ângulo de 11,25º), cada um deles indicando uma certa quantidade de léguas que depende do valor considerado para perímetro da Terra.

Na *Arte de Marear*, Moya apresenta duas rodas de léguas, nas quais indica apenas os valores do relevar. A 1ª roda (figura 96) está construída com base na suposição de que o perímetro da Terra é igual a 6000 léguas, o que significa que a cada grau de meridiano corresponde um arco de comprimento igual a $16\frac{2}{3}$ léguas; mas, como ele observa, há autores que consideram outros valores, como, por exemplo, 6120 léguas para perímetro da Terra, o que corresponde a tomar 17 léguas por 1º de meridiano terrestre.

[881] En las cartas de marear que tuvieron los grados a diez y seis leguas y dos tercios diremos que destas contiene da redõdeza de tierra y agua seis mill leguas. En las cartas que tuvieren a diez y siete léguas y médio por grado destas diremos que contiene seis mill y trezientas leguas [Martín Cortés, 1551, f. 23v].

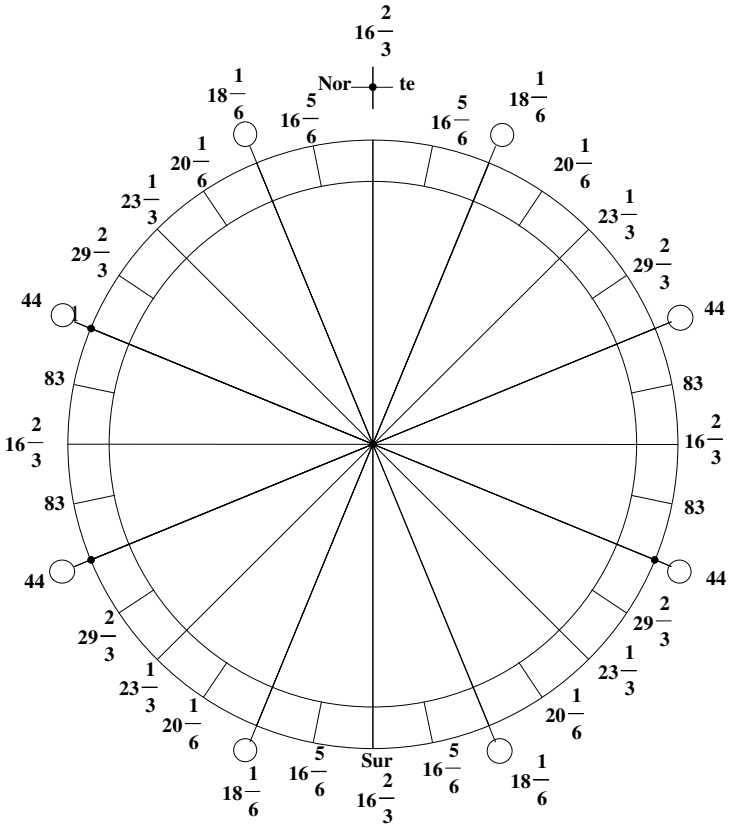


Figura 96: Mostra quantas léguas correspondem a cada uma das direcções dos 32 ventos, considerando que um arco de 1º de meridiano terrestre tem de comprimento $16\frac{2}{3}$ léguas [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f.175v].

Os valores indicados nesta roda foram possivelmente calculados pela fórmula $d\sin(\alpha)=16\frac{2}{3}$, onde α é o ângulo que define o rumo, ou seja, o ângulo definido pela direcção do rumo com a direcção da equinocial. Por exemplo, para $\alpha=22{,}5º$ é $d\approx 44$, como mostra a roda[882].

A 2ª roda (figura 97) corresponde ao caso em que o meridiano terrestre tem de perímetro 6300 léguas[883].

---

[882] Verificámos que os outros valores dados na roda também não diferem muito dos valores obtidos pela fórmula indicada. É claro que esta fórmula não pode aplicar-se quando $\alpha=0º$, mas neste caso a direcção é a de um círculo máximo, por isso toma-se a correspondência de 1º a $16\frac{2}{3}$ léguas, tal como para os meridianos.

[883] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 179r]. Também se pode encontrar a correspondência entre 1º e $17\frac{1}{2}$ léguas nas páginas 169v e 190r do manuscrito.

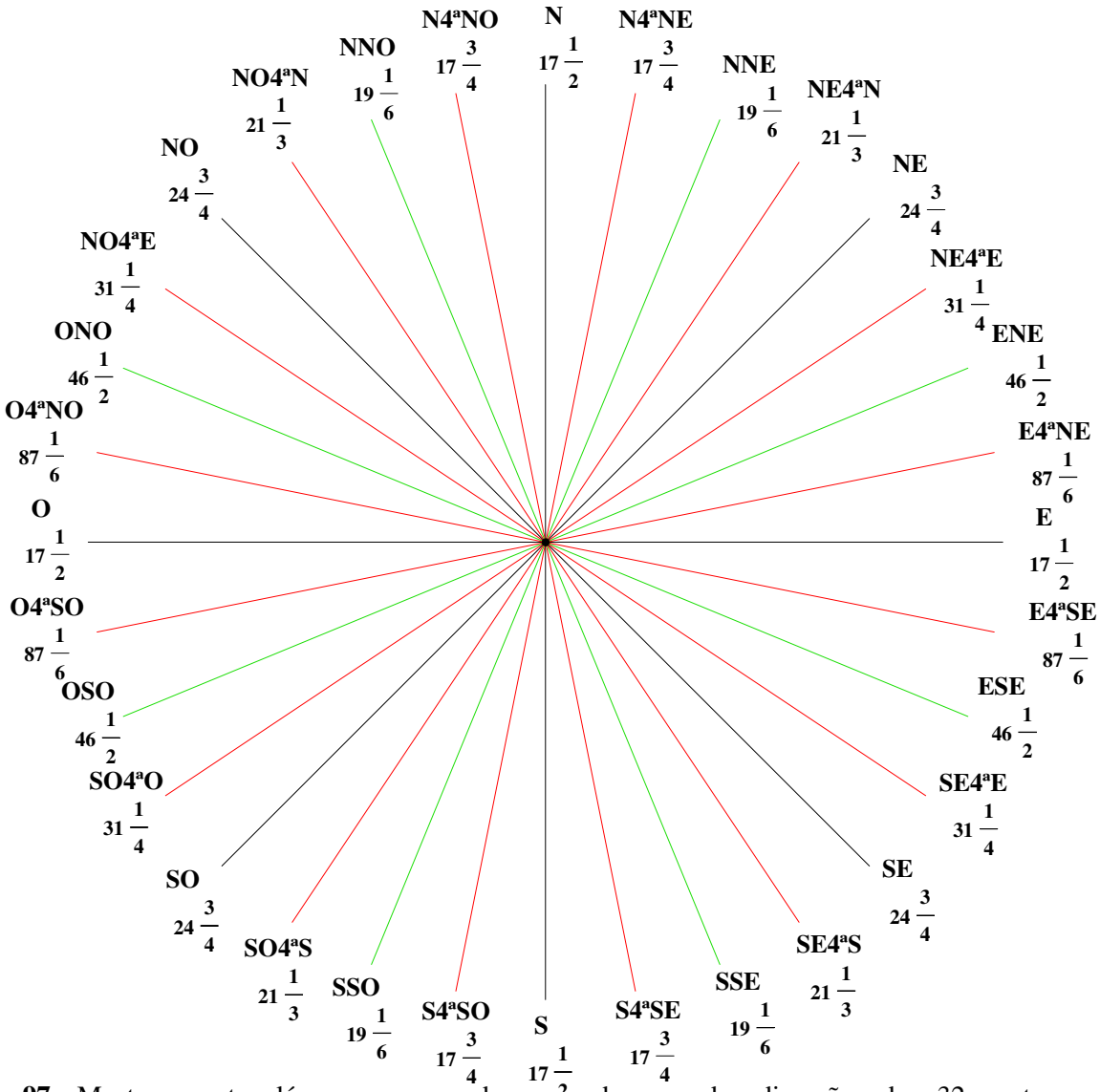


Figura 97: Mostra quantas léguas correspondem a cada uma das direcções dos 32 ventos, considerando a correspondência de $17\frac{1}{2}$ léguas a 1º de meridiano. (Adaptação da figura incluida no manuscrito). Os valores indicados no primeiro quadrante desta roda estão reproduzidos na última coluna do quadro 13[884] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 196r].

Na *Arte de Navegar*, Medina também considera que 1º de meridiano tem $17\frac{1}{2}$ léguas de comprimento e observa que esta correspondência só se verifica nos círculos máximos, isto é, no Equador e nos meridianos[885]. Apesar de, como nota, os círculos menores terem, igualmente, 360º de amplitude, o comprimento que lhes corresponde é menor do que o de

[884] Os números inscritos no quadrante inferior direito da figura estão errados, pois Moya saltou o valor correspondente a "sur 4ª al sueste" onde devria ter colocado 17 ¾, de acordo com os valores que indica no quadrante superior direito para "norte 4ª al nordeste".

[885] [Pedro de Medina, 1545, f. 21r].

um círculo máximo, devido à esfericidade da Terra[886]. Ainda no que toca às rodas das léguas, quando comparamos os valores que Enciso, Faleiro, Medina, Nunes e Moya apresentaram nas suas obras, observamos algumas coincidências curiosas. No caso em que o comprimento de 1 grau de meridiano é tomado por $16\frac{2}{3}$ léguas, os números indicados por Moya coincidiram com os de Faleiro, e quando o grau de meridiano é tomado por $17\frac{1}{2}$ léguas os valores dados por Moya são os mesmos que os de Enciso. Surpreende-nos que Moya não tenha indicado, em nenhuma das rodas, os valores de Medina (figura 98) não obstante ter apresentado uma figura elaborada em moldes muito semelhantes aos seus, no caso da correspondência entre um grau e $17\frac{1}{2}$ léguas (veja-se a figura 97).

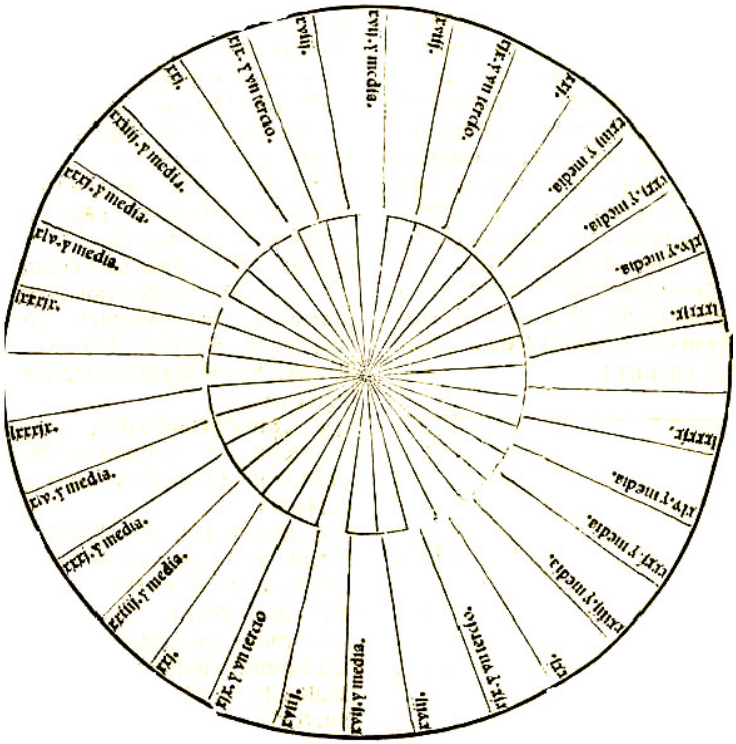


Figura 98: Roda das léguas de Medina [Pedro de Medina, 1545, f. 34v]. Os valores indicados na roda são apresentados no quadro 13.

[886] Dizendo: "Antes que declare el numero de léguas que a cada grado se han de dar en cada uno delos rumbos dela navegacion. Cõviene aqui dezir que es la causa porque ala redondeza del mundo de leste a oeste, y de norte a sur se dan a cada grado diez y siete leguas y médio y no mas, y entre otros rumbos aunque son yguales a estos se cuentan mas léguas por grado que no enestos" [Pedro de Medina, 1545, f. 33v].

No quadro 13 destaca-se a semelhança entre os valores considerados por todos os autores que referimos[887].

Rumo		Enciso [1530, f. 21v]	Faleiro [1535, f. 84]	Faleiro [1535, f. 85]	Nunes [1537, ff. 173-174]	Medina [1545, f. 34v]	Cortés [1551, f. 88r]	Moya [1564, f.175v]	Moya [1564, f.196]
Quartas	Graus								
0	0	$17\frac{1}{2}$	$16\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	$16\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{2}$
1	$11\frac{1}{4}$	$17\frac{3}{4}$	$16\frac{5}{6}$	$17\frac{5}{6}$	$17\frac{5}{8}$	18	$17\frac{5}{6}$	$16\frac{5}{6}$	$17\frac{3}{4}$
2	$22\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{6}$	$18\frac{1}{6}$	$19\frac{1}{6}$	$19\frac{3}{8}$	$19\frac{1}{3}$	19	$18\frac{1}{6}$	$19\frac{1}{6}$
3	$33\frac{3}{4}$	$21\frac{1}{3}$	$20\frac{1}{6}$	$21\frac{1}{3}$	21	21	$21\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{6}$	$21\frac{1}{3}$
4	45	$24\frac{3}{4}$	$23\frac{1}{3}$	$24\frac{3}{4}$	$24\frac{3}{4}$	$24\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	$23\frac{1}{3}$	$24\frac{3}{4}$
5	$56\frac{1}{4}$	$31\frac{1}{4}$	$29\frac{2}{3}$	$31\frac{1}{4}$	$31\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$	$29\frac{2}{3}$	$31\frac{1}{4}$
6	$67\frac{1}{2}$	$46\frac{1}{2}$	44	$46\frac{1}{2}$	$45\frac{3}{4}$	$45\frac{1}{2}$	$45\frac{11}{15}$	44	$46\frac{1}{2}$
7	$78\frac{3}{4}$	$87\frac{1}{6}$	83	$87\frac{1}{6}$	$89\frac{3}{4}$	89	$89\frac{2}{3}$	83	$87\frac{1}{6}$

Quadro 13: Comparação dos valores das léguas de relevar que correspondem a 1º de meridiano, para todas as "quartas"[888], constantes em diferentes fontes. Na 1ª coluna, o número "0" indica a direcção Norte-Sul; o "1" corresponde a 1/8 de quadrante, ou seja, à direcção que faz um ângulo de 11º e ¼ com a direcção Norte-Sul; o "2" corresponde a 2/8 de quadrante, e assim sucessivamente, até 7, que corresponde a 7/8 de quadrante. Os valores adoptados por Faleiro são os indicados no *Manual de Munich*.

Um outro dado muito importante na navegação era o do comprimento de um arco de paralelo correspondente ao ângulo de 1º, para paralelos a diferentes latitudes. Pérez de Moya condensa essa informação numa figura (figura 99) em que regista, do lado direito, as léguas que correspondem a cada grau de paralelo para todos os paralelos cuja distância à equinocial é um múltiplo de 10 menor do que 90, marcados à esquerda.

[887] Fontoura da Costa [Costa, A. F., 1960, p. 357] apresenta um quadro intitulado "Regimento ou cânon português das léguas" em que inclui os valores de diferentes regimentos das léguas; entre eles encontra-se o de Munich, o de Enciso [1519], o de Faleiro [1535] e o de Pedro Nunes [1537]. Notamos que na coluna correspondente a Enciso, o valor indicado para duas quadras não está correcto: deveria ser 19 1/6, em vez de 17 1/6.

[888] Também em [Pedro de Medina, 1563, f. 13v].

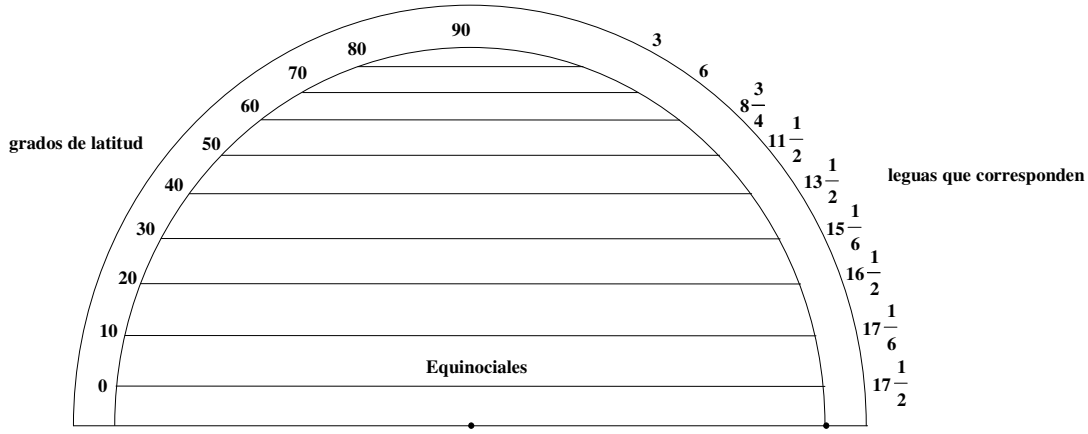


Figura 99: "Lo que vale cada grado de los paralelos de la equinoccial al polo" [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 190r].

Neste caso, Moya toma $17\frac{1}{2}$ léguas como comprimento de um arco correspondente a um grau equinocial (ou Equador). A figura mostra que, por exemplo, o arco de um grau do paralelo de latitude 10º tem de comprimento $17\frac{1}{6}$ léguas, e que o arco de um grau do paralelo de latitude 20º tem de comprimento $16\frac{1}{2}$ léguas.

> Si por conjetura se supiere los grados que un navio anda por lo que otras veces suele entenderas que a cada grado de la equinoccial le corresponden 17 leguas y ½. Y a cada grado de un paralelo 10 grados apartado le corresponden 17 leguas y 1/6. E asi van de 10 en diez tomando bola como en la figura parece [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 190r].

Moya não explica que cálculos conduziram a estes valores, e nós não encontrámos esta figura em nenhuma das obras que referimos na quarta parte deste trabalho. Contudo, no *Tratado em defensam da carta de marear*, de Pedro Nunes, existe uma outra figura (figura 100) que é usada para determinar quantas léguas correspondem a um grau de paralelo, qualquer que seja a latitude desse paralelo[889], que nos pode ajudar a compreender como foram obtidos os valores indicados por Moya. Vejamos como é constituída e como Pedro Nunes a utiliza.

Começamos por observar que a figura do tratado de Pedro Nunes é formada por um quadrante de círculo BAC (na figura, estas letras estão pouco visíveis e são minúsculas), no

[889] O assunto em questão é estudado sob o título "Pello quadrante saberemos as legoas que val o grão de qualquer paralelo" [Pedro Nunes, 1537, f. 181].

qual está desenhada uma semicircunferência de diâmetro [AB]. Vemos, ainda, que [AB] tem marcações de $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{2}$, numeradas de 1 em 1, de 0 a $17\frac{1}{2}$ (em léguas); que [AC] tem marcações de 2 em 2, numeradas de 10 em 10, de 0 a 100 (em graus) e que o bordo do quadrante tem marcadas 90 divisões, não numeradas (correspondentes à latitude). Na figura de Nunes (figura 100 à esquerda) não está representado um fio-de-prumo (Pedro Nunes chama-lhe "margarita") que deve ficar preso em A, e que de acordo com a utilização que Nunes refere tem que ter comprimento superior ao do raio do quadrante.

Suponhamos que se pretende determinar quantas léguas correspondem a um grau de paralelo, conhecida a sua latitude. O uso que Pedro Nunes faz deste "quadrante" pode ser assim explicado[890]: marca-se na escala do bordo, a partir de B (e para C), o número de graus da altura do paralelo; suponhamos que se obtém um ponto D (que não está registado na figura) e leva-se a "margarita" do fio-de-prumo até D. Em seguida, marca-se a intersecção do fio-de-prumo com a semicircunferência de diâmetro [AB]; seja E esse ponto (não indicado na figura). Transporta-se a distância AE para [AB], rodando o fio em torno de A, e obtém-se na escala [AB] o ponto F que indica o número de léguas que corresponde a 1º do paralelo referido. Pedro Nunes diz:

> Pello quadrante saberemos as legoas que val ho grao de qualquer paralello per esta arte: andara hũa linha com sua margarita presa no centro .a. e trazelaemos ao grao per que dista ho tal paralelo do equinocial contando de .b. pera .c. e notaremos ho encontro do meyo circulo com a Margarita: a qual posta sobre ho meyo diametro das legoas nos dira quantas legoas val ho grao do dito paralello: e posta sobre .a.c. nos amostrara que qual proporção tem ho numero que a margarita amostra cõparado a centro tal tem ho dito paralello pera ho circulo mayor [Pedro Nunes, 1537, f.181].

[890] No decurso da explicação usaremos letras que não estão na figura, uma vez que a figura que apresentamos é digitalizada da obra de Nunes.

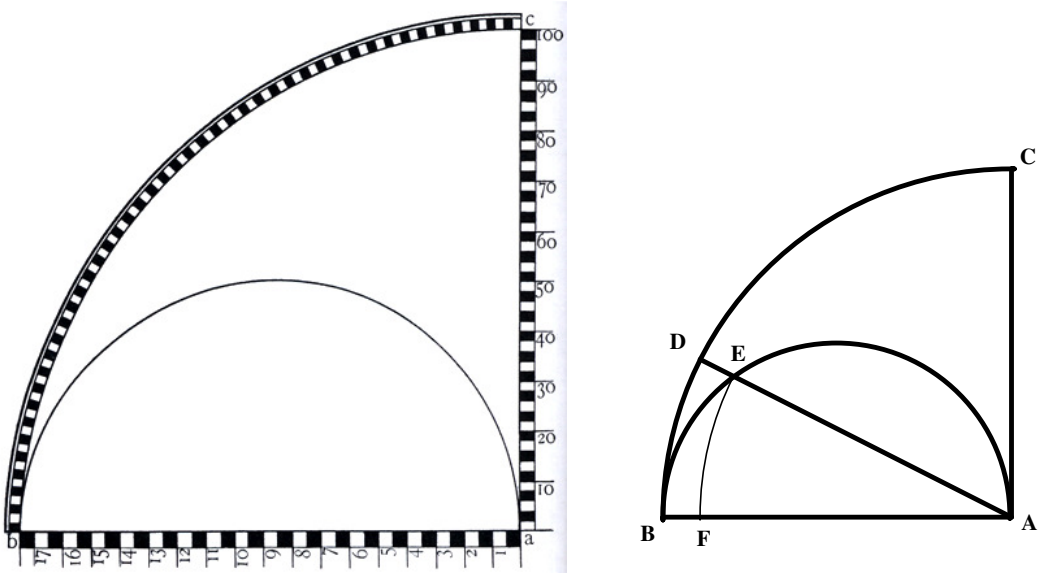


Figura 100: À esquerda, figura incluída em "Pello quadrante saberemos as legoas que val o grão de qualquer paralelo" [Pedro Nunes, 1537, f.180].

Pedro Nunes observa que, em lugar de se usar este quadrante, também se pode usar apenas o meio círculo de dentro, graduando-o em 90º [891]. Nós entendemos esta observação do seguinte modo: supondo que já é conhecida, por meio do quadrante que a figura 100 (do lado esquerdo) representa, a correspondência entre o comprimento em léguas do arco de meridiano correspondente a um grau, para todos os valores da latitude, bastará tomar a semicircunferência que está dentro da figura, marcando num dos quartos de circunferência a graduação de 0º a 90º e no outro quarto os correspondentes valores de léguas. Dispor-se ia, assim, de uma "tabela", fácil de utilizar, análoga à que Moya usa na *Arte de Marear*, que a figura 99 mostra.

3.4. Determinação da latitude: Ferramentas e estratégias

3.4.1. O Regimento do Norte e a latitude pela estrela Polar

Desde a Antiguidade que se sabia que a latitude de um lugar é medida pela altura do pólo celeste nesse lugar, isto é, pelo ângulo do meridiano do lugar compreendido entre o Pólo e o horizonte. Na verdade, se um lugar tem δº de latitude Norte, o mesmo δº de latitude celeste ou declinação assinalará o zénite, pelo que o pólo celeste estará afastado do zénite 90º- δº. Como o ângulo entre o zénite e o horizonte é 90º, o ângulo formado pelo pólo

[891] [Pedro Nunes, 1537, f. 181].

celeste e pelo horizonte (ou seja, a altura) é δº. Para ilustrar esta equivalência, o historiador López Piñero mostra-nos uma figura (figura 101) que dois conhecidos astrónomos franceses, Lucien Rudaux (1874-1947) e Gérard Vaucouleurs (1918-1995)[892], usaram para o mesmo fim.

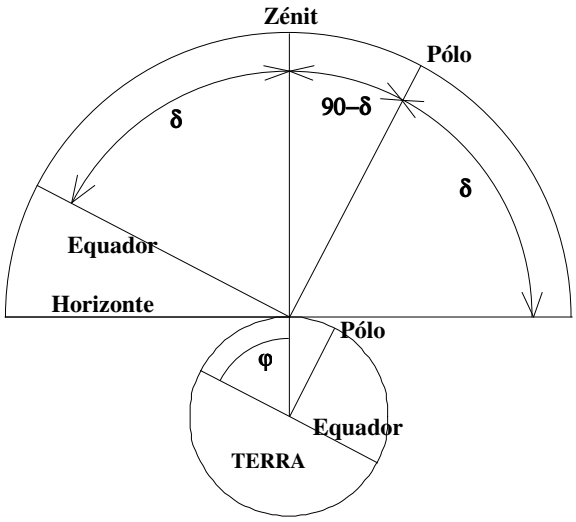


Figura 101: Latitude terrestre, φ, e declinação (ou latitude) celeste, δ, de um astro situado no zénite.

Um dos modos de que os navegantes se poderiam socorrer para obter a latitude do lugar em que a embarcação se encontrava era recorrer à estrela Polar. Para efectuar a medição, o piloto devia munir-se de uma balestilha, de um quadrante ou de um astrolábio e colocar-se junto do mastro do navio, pois este era o lugar onde a oscilação da embarcação menos se fazia sentir[893]. Estas recomendações que Moya dá na *Arte de Marear* são também apontadas por Medina na *Arte de Navegar*[894].

O problema que se colocava nesta operação era o de saber reconhecer no céu a direcção do pólo. Como nas proximidades do pólo Norte a estrela Polar era a única que podia mais facilmente ser observada no céu, era a ela que recorriam os navegadores, embora soubessem que a Polar descrevia diariamente um círculo aparente em torno do pólo que

---

[892] [López Piñero, J. M., 1976 a, p. 122].

[893] No segundo volume de *Fragmentos Mathematicos* Moya descreve um instrumento a que chama "baculo" ou "baculo mensorio" e explica como ele se utiliza, por exemplo, na medição de larguras e alturas de edifícios distantes do local de observação. A este instrumento, que é também conhecido como báculo de Jacob, e às aplicações que lhe dá Moya já nos referimos em detalhe na Terceira Parte desta dissertação **[***Cf.* Terceira Parte, f. 3.3.7.c**].** No estudo de questões astronómicas, Moya refere a "balestilla" sem explicar se se trata ou não do mesmo instrumento. De facto, a balestilha é constituída por duas varas, tal como o báculo, mas está graduada de forma completamente diferente. Martín Cortés explica, com detalhe, como proceder à graduação da balestilha [Martín Cortés, 1551, ff. 80r-81v]. Sobre a graduação da balestilha ver [Costa, A. F., 1960, pp. 23-24].

[894] [Pedro de Medina, 1545, ff. 70r-70v].

correspondia a uma distância polar de cerca de 3º 30'[895]. Isto significa que numa volta realizada em cada 24 horas a estrela Polar está, relativamente ao observador, umas vezes abaixo do pólo e outras vezes acima; na primeira situação a Polar está entre o horizonte e o pólo, pelo que há mais graus do horizonte ao pólo do que do horizonte à Polar; quando a Polar está acima do pólo, este está entre ela e o horizonte pelo que há menos graus do horizonte ao pólo do que do horizonte à polar. Tornava-se, portanto, necessário introduzir uma correcção aos valores obtidos por medição directa da latitude pela altura da Polar. O conjunto de regras utilizadas para corrigir a latitude dada pela observação da estrela Polar, de modo a obter a latitude do lugar, ficou conhecido por "Regimento do Norte"[896].

Para se compreender os termos em que o "Regimento do Norte" está descrito, lembramos que, como diz Medina, a Ursa Menor ou Buzina (Bozina para os marinheiros espanhóis) é constituída por 7 estrelas, das quais 3 estão dispostas em forma de meio círculo e as restantes 4 formam um quadrângulo[897]. A estrela Polar ocupava a extremidade do meio círculo (ou boca pequena da Buzina); as duas do extremo oposto chamavam-se guardas (definiam a chamada boca grande) (figura 102)[898]. A posição das guardas determinava as correcções indicadas no "Regimento do Norte"[899].

---

[895] Luís Albuquerque refere que a distância polar da estrela era de 3º 25' em 1500, daí concluindo que o valor 3º 30' adoptado pelos pilotos estava muito próximo do valor exacto [Albuquerque, L., 1986, p. 293]. Na obra *A Astronomia de «Os Lusíadas»*, Luciano Pereira da Silva explica que "no ano de 1000 a.C o pólo estava mais perto da estrela β do que da α da Ursa Menor pelo que a Guarda dianteira foi a estrela polar dos Fenícios. No ano do nascimento de Cristo, o pólo distava 11º ¾ da estrela α da Ursa Menor, aproximando-se depois sempre mais. No final do século XV esta distância era 3º ½ e no final do século XVI era menos de 3º. Hoje é de 1º 10' e irá diminuindo até ao ano de 2095, em que atingirá o valor mínimo de 26'. Então o pólo começará a afastar-se da actual Polar." [Silva, L. P., 1972, pp. 148-149].

[896] Luís Albuquerque nota que o Regimento do Norte começou a ser usado pelos marinheiros portugueses do século XV, tendo sido pela sua aplicação que começou a navegação por alturas [Albuquerque, L., 1965, p. 35].

[897] El estrella del norte muy mirada y conocida de todos los navegantes, es la primera delas siete estrella de que se cõpone la ossa menor que vulgarmente se llama bozina. Estas siete estrellas parescen claras y resplandescientes, las três como un médio circulo, y las quatro como un quadrângulo [Pedro de Medina, 1545, f. 71r].

[898] O facto de esta figura estar incluída na obra de Medina constitui, na opinião de Luís Abuquerque, um testemunho de que "quase de certeza" o regimento era ainda seguido em meados do século XVI [Albuquerque, L., 1986, pp. 247-248].

[899] A principal era a guarda dianteira assim chamada por ser a que vai à frente no movimento diurno aparente da constelação. Fontoura da Costa refere uma oitava estrela na boca grande da Ursa Menor, também visível a olho nu alinhada com as duas guardas mas que os marinheiros não contavam, talvez por ser muito menos luminosa do que as outras duas [Costa, A. F., 1960, p. 39].

Figura 102: Mostra um observador empunhando uma balestilha dirigida para a Ursa Menor; na constelação estão indicadas as duas guardas (no lado de cima do quadrilátero) e a estrela do Norte (a Polar). Na figura está ainda desenhado um círculo cujo centro é o Pólo e que simula o trajecto da Polar [Pedro de Medina, 1563, f. 35v].

Alguns "Regimentos do Norte"[900] existentes em diversos livros de navegação compostos no século XVI têm uma forma que possibilitava uma consulta muito fácil. São "rodas" semelhantes às que indicámos para as léguas, em que estão marcadas as posições dos 8 ventos principais dados pelo alinhamento da Polar com a guarda dianteira da Ursa Menor no seu movimento diário em torno do Pólo Norte e as correspondentes correcções a introduzir em cada um dos casos. É esse, por exemplo, o caso da roda que Faleiro apresenta (figura 103) e que aqui incluímos pela extraordinária semelhança com a dada por Moya.

[900] O primeiro Regimento do Norte conhecido tem origem portuguesa e foi composto ainda no século XV [Costa, A. F.,1969, p. 54].

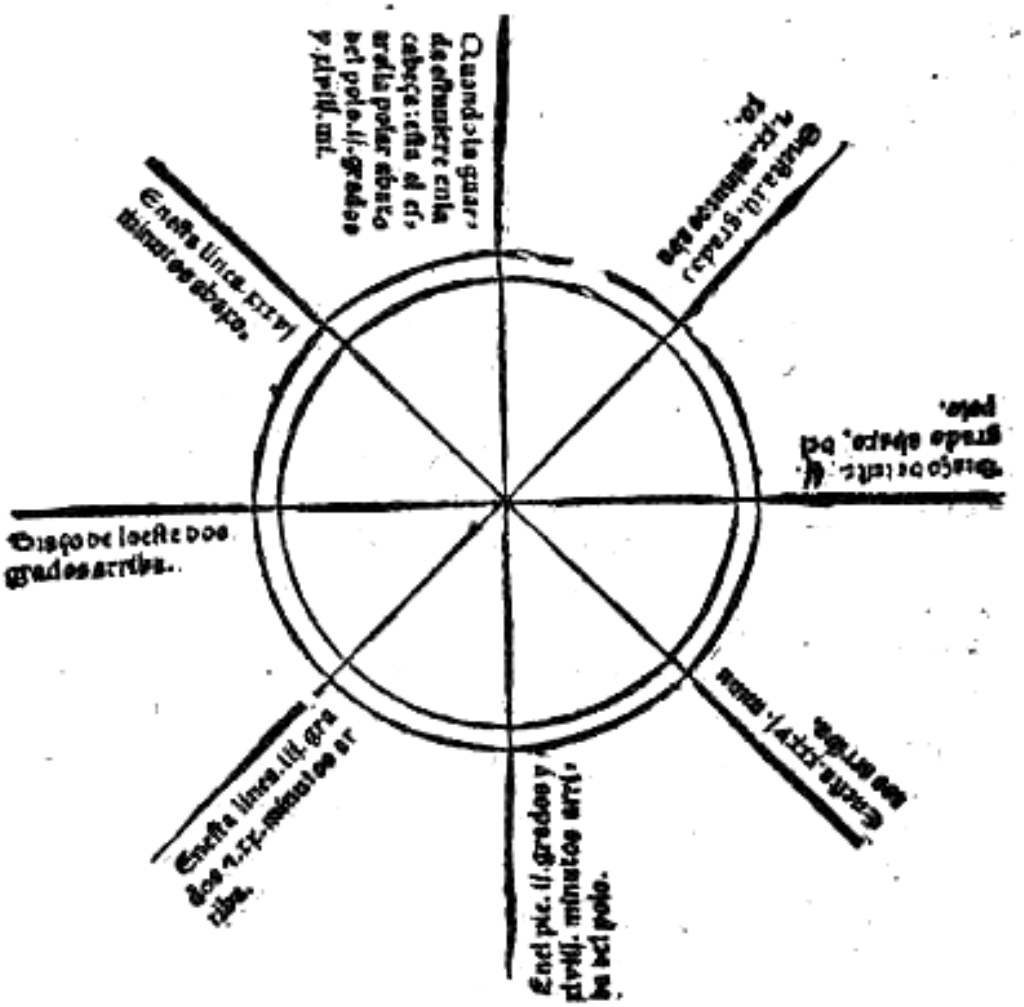


Figura 103: Roda das alturas. Dada por Faleiro sob o título "Regimiẽto del pólo", no T*ratado del Sphera y del Arte del Marear* [Francisco Faleiro, 1535, f. 66].

Na *Arte de Marear*, Moya expõe dois Regimentos do Norte, registando numa só roda os valores correspondentes a cada um (Figura 104). Dentro da circunferência, e sobre cada uma das linhas que definem as direcções norte, sul, este, oeste, nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste, coloca os números que copia de Medina, como deixa indicado na figura. Fora da circunferência, e sobre as mesmas direcções, indica outros valores, mas não dá qualquer informação acerca da sua proveniência. Sobre o modo de utilizar a figura, Moya explica que a primeira coisa a fazer é determinar, com a balestilha, a altura da Polar quando as guardas estiverem num dos 8 ventos principais:

> Esta es la figura para saber lo que se ha de anadir o quitar a lo que se hallare con la ballestilla de altura de norte. Nota que con la ballestilla veras lo que dista una estrella de otra. Asi como sacas lo que hay desde el horizonte al norte. Con la ballestilla se ha de tomar el altura del

horizonte a la parte norte despues lo que las guardas sean puestas en uno de los 8 vientos dichos [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 174v].

E observa que a altura do Pólo se obtém adicionando, ou subtraindo, ao valor obtido a correcção indicada na figura:

Nota mas que la parte celeste se comienza desde leste y se acaba en el oeste porque en estas se quita lo que tienen los rumbos del altura del norte para saber la del polo. Y la parte terrestre se comienza a contar desde oeste hasta llegar al leste en los rumbos de la cual parte se ha de añadir lo que cada uno tuviere altura que del norte se tomare [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 175r].

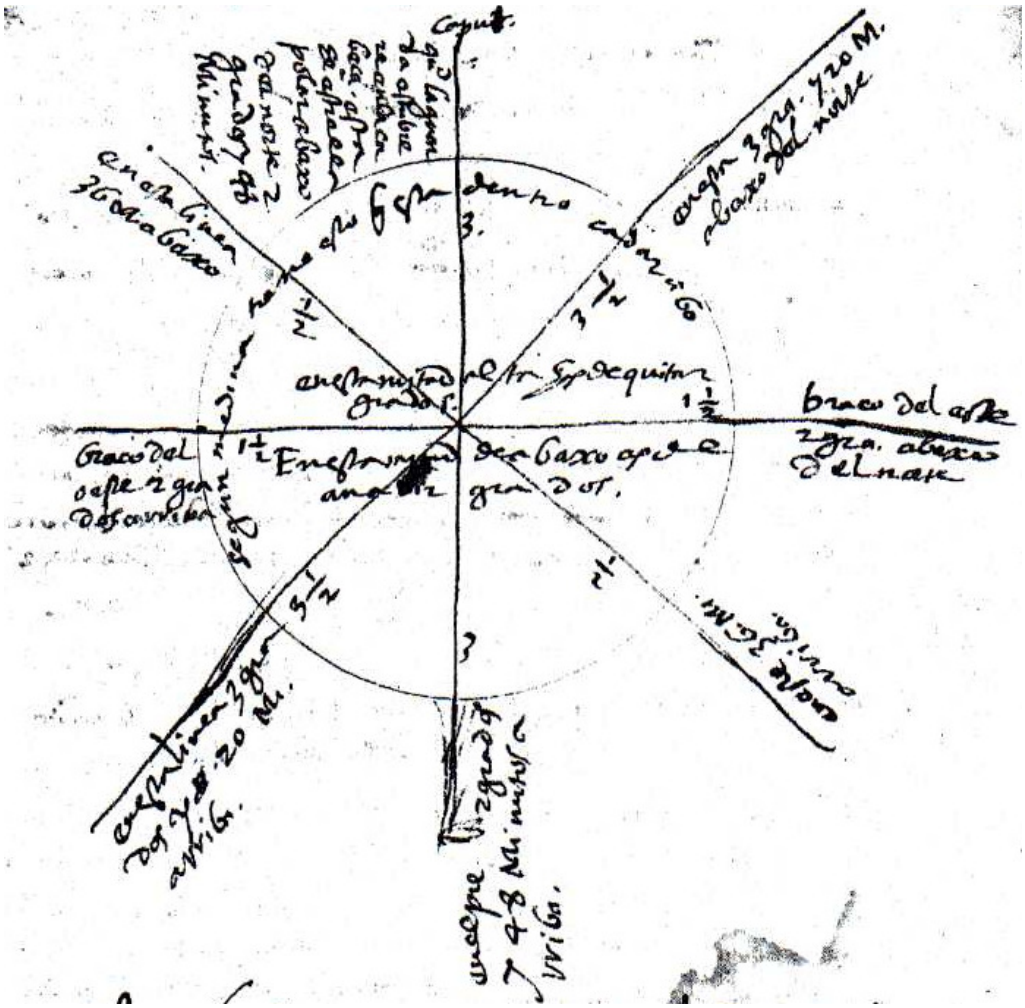


Figura 104: Roda das alturas. Esboço feito por Moya no manuscrito [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 174v].

Concentremo-nos, agora, nas correcções indicadas por Moya e interpretemos os dados constantes nas figuras baseados na explicação de Faleiro, que é mais clara do que a do nosso autor. Para mais facilmente acedermos a esses números, elaborámos os desenhos abaixo (figura 105) onde colocámos, em notação usual, os elementos correspondentes aos dados nos dois regimentos do Norte compreendidos no manuscrito. Suponhamos, a título de exemplo, que, num certo momento, determinávamos a altura da Polar e que, nesse momento, a guarda estava na *cabeça*. Nesse caso, para saber a altura do Pólo, teríamos que adicionar 2º 48' ao valor obtido, uma vez que, para essa posição da guarda, o regimento refere que a estrela Polar está abaixo do Pólo. No entanto, se aceitarmos as correcções de Medina, em vez de 2º 48' teremos de adicionar 3º. As outras quantidades referem-se às outras 7 direcções principais.

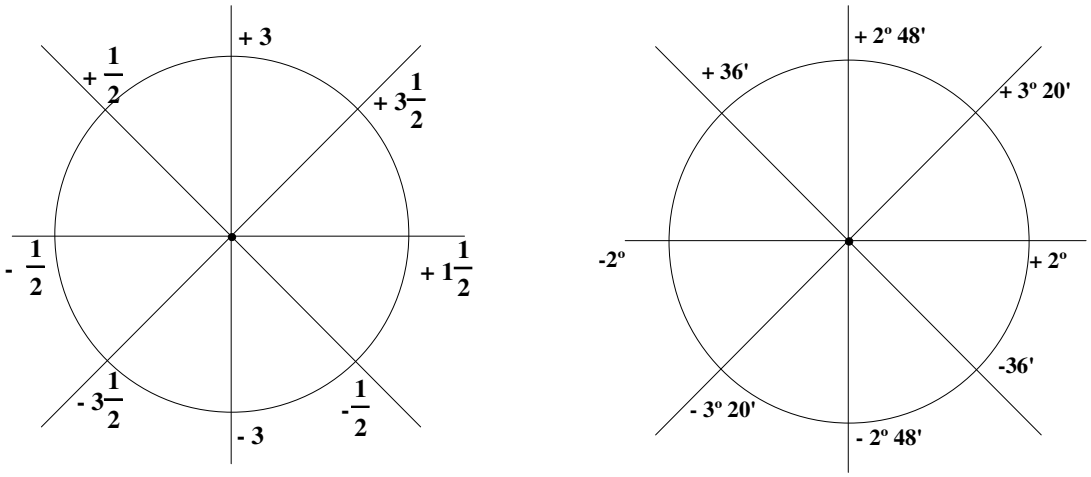


Figura 105: Regimentos da estrela Polar (aqui apresentados em notação usual). Indicam as correcções aditivas e subtractivas a introduzir à altura da Estrela Polar para obter a latitude do lugar de observação: à esquerda, valores que Moya refere no manuscrito, atribuindo-os a Medina; à direita, valores indicados por Moya, que ele não imputa a nenhum autor [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 174v].

A divulgação na *Arte de Marear* deste último regimento (que não é dado na *Arte de Navegar* de Medina), a cuja proveniência Moya não fez referência, colocou-nos dois desafios. Por um lado, o de averiguar se ele tinha já sido divulgado em obras de outros autores e, neste caso, em quais; por outro, o de saber se os valores nele indicados eram mais aproximados dos correctos do que os dados por Medina, que são, também, os constantes no *Guia Náutico de Munique*, já antes referido[901]. No *Curso da História da Náutica*, de Luís Albuquerque, encontrámos uma possível resposta para as questões que levantámos. No

[901] [*Cf.* Quarta Parte 3.3.2].

capítulo que dedica ao regimento da Polar, o historiador português refere que ao longo do século XVI se mantiveram os valores do *Guia Náutico de Munique* e nota que são conhecidos apenas dois trabalhos onde se indicam outros valores: o da *Suma de geographia,* de Enciso, e o do *Tratado del Sphera y del Arte de Marear,* de Francisco Faleiro, ambos editados em Sevilha. Albuquerque chega mesmo a aventar a hipótese de ter sido Enciso o primeiro autor a mencionar valores diferentes dos dados no *Guia Náutico de Munique*. Como tivemos oportunidade de verificar pela consulta destas obras, os números que constam nesses dois regimentos são também os mesmos que encontrámos no manuscrito de Moya, o que mostra que, possivelmente, elas foram uma fonte para o nosso autor. Para tornar mais evidente a analogia entre os três trabalhos, no que se refere a este assunto, elaborámos o quadro comparativo que apresentamos a seguir (quadro 14).

Posições das Guardas	Regimento tradicional [português, séc. XV]	Enciso [1530]	Faleiro [1535]	Medina [1545]	Cortés [1551]	Moya [1564]		Moya [1567]
Norte	+ 3º 0'	+ 2º 48'	+ 2º 48'	+ 3º 0'	+ 3º 0'	+ 2º 48'	+ 3º 0'	+ 3º 0'
Nordeste	+ 3º 30'	+ 3º 20'	+ 3º 20'	+ 3º 30'	+ 3º 30'	+ 3º 20'	+ 3º 30'	+ 3º 30'
Este	+ 1º 30'	+ 2º 0'	+ 2º 0'	+ 1º 30'	+ 1º 30'	+ 2º 0'	+ 1º 30'	+ 1º 30'
Sudeste	– 30'	– 36'	– 36'	– 30'	– 30'	– 36'	– 30'	– 30'
Sul	– 3º 0'	– 2º 48'	– 2º 48'	– 3º 0'	– 3º 0'	– 2º 48'	– 3º 0'	– 3º 0'
Sudoest	– 3º 30'	– 3º 20'	– 3º 20'	– 3º 30'	– 3º 30'	– 3º 20'	– 3º 30'	– 3º 30'
Oeste	– 1º 30'	– 2º 0'	– 2º 0'	– 1º 30'	– 1º 30'	– 2º 0'	– 1º 30'	– 1º 30'
Noroeste	+ 30'	+ 36'	+ 36'	+ 30'	+ 30'	+ 36'	+ 30'	+ 30'

Quadro 14: Comparação das correcções para a altura do Pólo adoptadas em obras espanholas do século XVI. Os valores relativos à coluna do regimento tradicional foram extraídos de Albuquerque[902]; nas duas colunas seguintes mostram-se os números dados por Enciso na *Suma de geographia* e por Faleiro no *Tratado del Sphera y del Arte del Marear*; na quinta coluna estão os valores indicados por Medina na *Arte de Navegar* e nas três da direita apontam-se opções de Pérez de Moya na *Arte de Marear* e nos *Fragmentos Mathematicos.*

Queremos ainda sublinhar dois aspectos. O primeiro é que as correcções indicadas por Moya no manuscrito estão registadas numa linguagem muito semelhante à utilizada por Enciso e Faleiro. Em nosso entender, a única diferença que talvez valha a pena assinalar é a que diz respeito à numeração: enquanto nos textos de Enciso e de Faleiro ainda vemos a

[902] [Albuquerque, L., 1972, p. 79].

numeração romana, no de Moya é utilizada a numeração indo-arábica. Estas analogias sobressaem quando cotejamos a mesma passagem em Moya e em Enciso:

Cuando la guarda estubiere en la cabeza esta el estrella polar abajo del norte 2 grados 48 minutos.
Brazo del este 2 grados abajo del norte.

En esta [i.é. Nordeste] 3 grados y 20 minutos abajo del norte.

En esta linea [i.é.Noroeste] 3 g medio abajo.

Brazo del oeste 2 grados arriba.

En esta linea [i.é. Sudoeste] 3 grados y 20 minutos arriba.
En el pie 2 grados y 48 minutos arriba.

En esta [i.é. Sudeste] 36 minutos arriba.
[Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 174v].

Quando la guarda del norte esta en la cabeça el estrella polar esta dos grados y xlviij minutos abaxo del polo.
Estando las guardas eneste braço [i.é, leste] esta la estrella baxo del pólo ii grados.
Estando la guarda enesta línea [i.é. Nordeste] esta la estrella baxo del pólo três grados y xx minutos.
Estando las guardas enesta linea [i.é, Noroeste] esta la estrella debaxo del polo xxxvj minutos.
Estando las guardas eneste braço [i.é, Oeste] esta la estrella encima del polo dos grados.
Estando la guarda enesta linea [i.é, Sudoeste] esta la estrella encima del polo tres grados y xx minutos.
Estando la guarda enel pie esta la estrella encima del polo dos grados y xlviij minutos.
Estando la guarda enesta línea [Sudeste] esta la estrella encima del polo xxxvj minutos.
[Martín Fernandéz de Enciso, 1530, f. 22r].

Ainda a este propósito, notamos que Albuquerque cita estudos portugueses que mostram que os valores correctivos indicados por Enciso estão mais próximos dos verdadeiros do que os que foram dados no *Guia Náutico de Munique*[903]. Contudo, nós não temos argumentos que sustentem que foi por essa razão que Moya os incluiu na *Arte de Marear* e inclinamo-nos, até, a pensar que não; pois se assim fosse Moya não os teria omitido nos *Fragmentos Mathematicos*, que publica três anos mais tarde. De qualquer modo, esses números mais correctos não eram adoptados pelos pilotos, para quem a precisão dos valores tomados não excedia, em geral, um quarto de grau[904].

[903] Como mostram os estudos feitos, em meados do século XX, pelo oficial de Marinha Fontoura da Costa e pelo matemático Manuel dos Reis [Albuquerque, L., 1972, p. 78-79].

[904] [Albuquerque, L., 1972, p. 79].

O segundo aspecto é a coincidência entre os valores indicados por Moya nos *Fragmentos Mathematicos* e os constantes na *Arte de Navegar*, o que mostra que naquele trabalho a sua fonte foi Medina.

3.4.2. O Regimento do Sol e a latitude pelo Sol

O recurso à estrela Polar para determinar a altura do Pólo Norte (ou a latitude do lugar de observação) nem sempre era praticável; não podia fazer-se quando as viagens de navegação passavam para sul do Equador nem noutras situações em que essa estrela fosse igualmente invisível. No manuscrito Moya aponta duas possibilidades: uma, para de noite e para o hemisfério norte, que passa pela utilização de outras estrelas da constelação *Ursa Menor* e a outra, para de dia, que recorre ao Sol.

> Puede se tomar altura de polo cuando la estrella horologial o boca de bocina no se parecer por haber nubes. Siguiendo nos por la 9ª o sexta o 3ª estrella por que andan a 9 o a 6 o 3 horas atras della [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, folha não numerada depois de 190v].

O Sol era a estrela de que os mareantes frequentemente se socorriam para obter a latitude, pois conhecendo a distância zenital, medida ao meio dia solar, ou seja, quando o Sol passa pelo meridiano, era possível calcular a latitude do lugar desde que se possuisse uma tabela de declinações. A importância do Sol era tão grande na navegação que Medina sublinha que o conhecimento da altura do Sol permitia não só indicar o caminho a seguir, como corrigir algum erro que anteriormente se tivesse cometido na marcação do rumo do navio[905]. Por outro lado, comparando esse conhecimento com o que se obtinha recorrendo a outras fontes como, por exemplo, a Polar, Medina chega mesmo a afirmar a sua supremacia, assemelhando-o a uma prova aritmética, que permitia descobrir o erro, quando ele existisse:

> Esta altura del sol tiene excelẽcia entre todas, porque es, como prueva de arismetica, que enseña el yerro que en los números ay [Pedro de Medina, 1545, f. 36r].

[905] Una dlas cosas mas subtiles, y de mayor entendimiento que enel arte del navegar ay, es el altura del sol, porque esta enseña verdaderamente el camino que el que navega haze o ade hazer. En tal manera, que si yerro alguno en su viaje a hecho, por esta altura lo conoce [Pedro de Medina, 1545, f. 36r].

É certo que, para determinar a latitude, além do Sol podiam igualmente utilizar-se outras estrelas, mas os pilotos não tinham o hábito de o fazer[906]. Talvez por essa razão Moya privilegiasse, no manuscrito, a determinação da latitude pelo Sol. Moya considera, como Medina, que o Sol realizava, diariamente, dois movimentos: um, de oriente para ocidente, com o qual estava relacionada a latitude ou "ortus", e outro, de norte para sul, do qual resultavam as diferenças nas alturas meridianas:

> Los dos movimientos que el Sol hace cada dia. Uno del levante a poniente y otro de norte al sur. Y la 2ª diferencia que es de norte al sur es la diferencia de altura meridiana por que andando se llega o aparta hacia los tropicos. Y mientras mas se llega al tropico de cancro mas se llega al norte y se aparta del sur. Y mayor altura meridional tendran las regiones que estan entre el tropico de cancro y el polo del mundo. De modo que toma la diferencia de levante a poniente por lo que decimos latitud o ortus. Como decimos en el 1º libro de astrolabio. Y la 2ª diferencia que dice de norte a sur toma por lo que dezimos altura meridiana. La cual cada hora se varia [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 182v-183r].

Estes dois movimentos são os que Medina designa por "forçoso" e "próprio", respectivamente; pelo primeiro, considerava ele que em cada 24 horas o Sol dava uma volta completa ao mundo, de levante para poente; o segundo tinha a duração de "trezentos e sessenta e cinco dias e seis horas menos poca cantidad". Na contagem do tempo, Medina desprezava esta pequena quantidade de doze minutos acumulando as seis horas no quarto ano que passava a ter mais um dia do que os anteriores. Medina designava este último ano por ano bissexto[907].

Moya nota que o Sol, no seu movimento, gastava 187 dias entre o equinócio de Março (10 de Março) e o de Setembro (13 de Setembro) e 178 dias entre o equinócio de Setembro e o de Março:

> El primero equinoccio que el Sol hace es a los 10 de marzo y dice se equinoccio vernal. Y entra entonces en el signo de Aries en el cual tiempo en todo el universo hay igualdad de noches y dias. A los 11 de Junio hace el Sol el primero solsticio entrando en el signo de cancro y de aqui vuelve retrogradando a hacer segundo equinoccio. En el cual tiempo desde

[906] Luís Albuquerque refere, a este propósito, a opinião de Pedro Nunes, segundo a qual os homens do mar conheciam pouquíssimas estrelas [Albuquerque, L., 1989, p. 77]. http://zircon.dcsa.fct.unl.pt/dspace/bitstream/123456789/136/1/5-5.PDF (Consultada em 22 de Setembro de 2010).

[907] [Pedro de Medina, 1545, ff. 37r-38r].

> 11 de marzo hasta 13 de septiembre que el Sol tiene declinacion de septentrional gasta 187 dias. El 2º equinoccio acontece a 13 de septiembre y dice se hiemal entrando el Sol en el principio de la Libra. En el cual tiempo tambien hay igualdad de días y noches en el universo. Hace el Sol su 2º solsticio llamado hiemal a los 13 de deciembre entrando el Sol en Capricornio. Y de aqui vuelve retrogradando a hacer el primero equinoccio. Y desde 14 de septiembre hasta 10 de marzo que el Sol tiene declinación austral gasta 178 dias y en el ano de bisiesto 179 [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 189r].

Sobre a questão da determinação da latitude por recurso ao Sol, notamos que a principal dificuldade em realizar a medição resultava do facto de este astro, no seu movimento aparente, mudar constantemente de posição em relação à Terra. Ao contrário do que se verifica com as estrelas chamadas fixas, cuja declinação se mantém constante, a declinação do Sol (isto é, a sua distância angular ao Equador celeste) varia ao longo do ano. Isso significa que, para se determinar a latitude de um lugar por meio do Sol, não basta conhecer a altura deste astro[908]; é também preciso saber a sua declinação na data de observação. É desse estudo que vamos tratar, destacando as preocupações de Moya sobre o assunto.

a. Determinação da altura do Sol

Para determinar a altura meridiana do Sol ao meio-dia, começava-se a fazer medições da altura do Sol antes do meio-dia, quando este astro ainda subia no horizonte e faziam-se medições sucessivas até ao momento em que a sua altura deixava de crescer para começar a diminuir. Nesse momento lia-se o valor atingido, que indicava a altura do astro na sua culminação, isto é, ao meio-dia local verdadeiro; este procedimento ficou conhecido por "pesar o Sol"[909].

Na *Arte de Marear*, Moya usa o astrolábio e, embora não explique como ele se constrói, aconselha a que seja pesado e de latão. Estas opções estavam, naturalmente, relacionadas com a resistência do material, com o facto de ele não se deformar facilmente com o tempo, como sucede com os de madeira e, também, com a necessidade de contrariar o balançar do navio, uma vez que, sendo pesado, mais facilmente se mantinha na vertical, em suspensão[910]:

---

[908] A altura é o complementar da distância zenital.

[909] Assim o designavam os marinheiros portugueses [Silva, L. P., 1972, p. 166].

[910] Também Pedro Nunes no *Tratado em defensam da carta de marear* refere a importância deste aspecto na construção do astrolábio, dizendo: "Pera as quaes cousas teremos hũa lamina circular de algũa matéria sólida &

Aunque este astrolabio sirva el de Aguilera para ello. Mejor es uno que traen los marineros de laton y muy pesado [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 170v].

Luciano Pereira da Silva[911] nota que o astrolábio naútico tinha apenas as peças destinadas a medir a altura dos astros, o limbo graduado, a alidade com duas pínolas, ou mediclina, e a argola de suspensão.

A pesagem do Sol (figura 106) era uma prática muito frequente entre os marinheiros, que Moya descreve assim: primeiro suspendia-se o astrolábio e em seguida orientava-se a mediclina para o astro de modo que um raio solar passasse pelos orifícios das pínulas, fazendo-se, então, a leitura no limbo.

Con el astrolabio poniendo las pinolas de modo que el sol entre por ellas [.] Y para ver se les antes de medio dia [,] ver se ha con el astrolabio porque mirando una vez [,] y luego aguardar un poco, luego mirar otra [.] Si todavia va creciendo el altura [,] aun no es medio día. En comenciando a bajar [,] ja paso el medio dia. El altura del Sol se entiende lo que el Sol mas sube sobre nuestro meridiano [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 183r].

Figura 106: Mostra a "pesagem do Sol" com o astrolábio [Pedro de Medina, 1563, f. 15v].

Nos equinócios da Primavera e do Outono, com o Sol no Equador, a declinação deste astro é nula. Mas quando tal não se verifica, as regras que permitiam obter a latitude de um lugar (φ) sabendo a altura do Sol ao meio-dia local (h) e a declinação do Sol no dia da

---

de conforme grossura que com ho tempo nã faça mudança: e será boa de latão como sam as de estrelabio assi planas" [Pedro Nunes, 1537, f. 165].

[911] [Silva, L. P., 1972, pp. 163-164].

observação (δ) eram conhecidas. De acordo com o "Regimento da declinação" do *Manual de Munich*, para um observador no Hemisfério Norte (Figura 107) traduzem-se em notação usual pelas expressões seguintes[912]:

1) $\varphi = 90 - h + \delta$, se o Sol estiver no Hemisférico Norte (isto ocorre, desde o equinócio da Primavera ao do Outono) e o observador a Norte do Sol;

2) $\varphi = h + \delta - 90$, se o Sol estiver no Hemisférico Norte e o observador a Sul do Sol.

3) $\varphi = 90 - (h + \delta)$, se o Sol estiver no Hemisfério Sul.

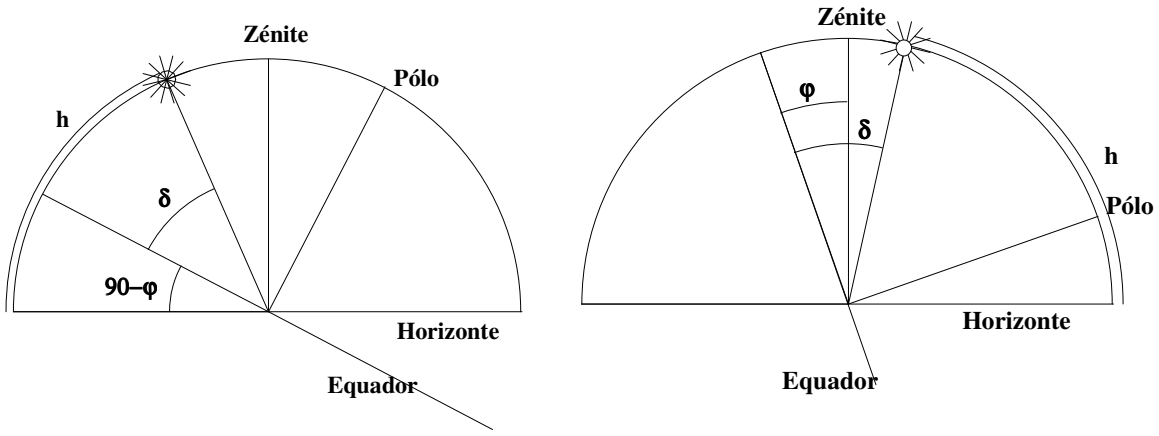


Figura 107: A figura do lado esquerdo corresponde ao caso 1) em que o observador está a Norte do Sol e a do lado direito corresponde ao caso 2) em que o observador está a Sul do Sol.

Uma vez conhecida a altura meridiana do Sol (*h*), faltava apenas saber a declinação deste astro no momento de observação e decidir qual das fórmulas das sombras aplicar. O valor da declinação do Sol era dado por tabelas existentes para o efeito, a que nos referiremos mais adiante[913]. Para a escolha da fórmula a utilizar, os marinheiros recorriam, geralmente, ao estudo das sombras[914], assunto ao qual os autores de textos de navegação do século XVI dedicaram uma atenção especial. Enciso, Faleiro, Nunes, Medina e Cortés exploraram com mais ou menos detalhe este tema, indicando regras que contemplam as diferentes posições relativas do Sol, do Equador e do observador[915]. Medina trata-o de forma

[912] [Costa, A. F., 1960, p. 68] e [Albuquerque, L., 1972, pp. 93-94].

[913] [*Cf.* Quatra Parte, 3.4.2.b].

[914] Uma outra possibilidade era usar a agulha magnética, como refere Manoel Pimentel na *Arte de Navegar* [Manoel Pimentel, 1746, p. 37].

[915] [Francisco Faleiro, 1535, ff. 67-72] e [Pedro Nunes, 1537, f. 156].

exaustiva ao longo de vinte e uma páginas da sua *Arte de Navegar,* documentando as explicações dadas com figuras elucidativas[916].

Como Moya observa, com a altura e a declinação do Sol, e o conhecimento da posição da sombra que ele produz, é possível determinar a latitude[917] do lugar de observação.

No manuscrito, Moya refere que, quando o Sol anda a norte da Equinocial (ou seja, do Equador), se obtém a altura do Pólo somando à diferença entre 90º e a altura do Sol a declinação do Sol nesse dia. E explica, com um exemplo, que se num certo dia, num certo lugar, a altura do Sol for 60º e a sua declinação for 20º, esse lugar estará 50º afastado da Equinocial[918]. A figura 108, que elaborámos, mostra a situação que Moya trata: o Sol está a 60º de altura e tem declinação $\delta = 20º$, donde o zénite do observador está $\varphi = (90º\text{-}60º) + \delta = 50º$ afastado do Equador.

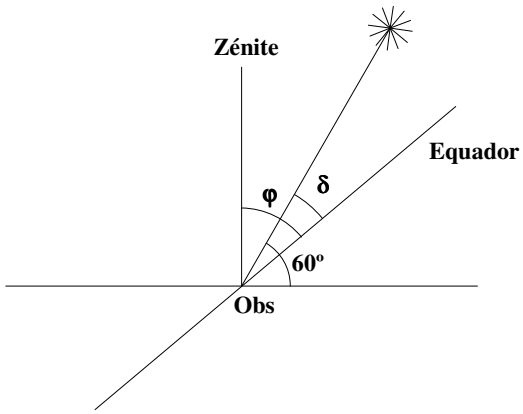


Figura 108: Interpretação da explicação dada por Pérez de Moya para a determinação da latitude de um lugar por observação do Sol.

As regras que acabámos de ver podem ter outra utilidade: a de obter a altura do Sol num dado local, quando são conhecidas a latitude do lugar e a declinação do Sol. Moya usa-as, também, deste modo, aplicando-as à determinação da altura do Sol na cidade de Sevilha, no solstício de Verão e no solstício de Inverno, que são, respectivamente, o dia de São Barnabé ("san Bernabeu"), 11 de Junho, e o dia se Santa Luzia ("santa Lucía"), 13 de Dezembro. Considerando que no dia de São Barnabé o Sol tem 23º 30' de declinação para norte (pois está no Trópico de Câncer) e que Sevilha tem 37º de latitude (estando, portanto a

[916] [Pedro de Medina, 1545, ff. 38v a 49v].

[917] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 170v].

[918] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 185r].

Norte do Sol), a altura, *h*, do Sol em Sevilha é dada por: $h = 90º - (37º - 23º30') = 76º30'$. E no solstício de Inverno a altura do Sol em Sevilha é dada por $h = 90º - (37º + 23º30') = 29º30'$. Vejamos como é detalhada e clara a explicação de Moya, no caso do dia de São Barnabé[919]:

> Para lo cual digo que el Sol sube sobre hacia el septentrion que es el circulo Cancro 23 grados y medio. Pues en Sevilla hay 37 grados de altura de polo pues quito 23 e medio de 37 e quedaran 13 y medio pues estos 13 y medio menos de 90 sube por nuestro meridiano el día de san Bernabeu. Porque en 13 y medio deja de llegar a mi cenit y desde el horizonte hasta el cenit hay 90 pues quitando de 90 [los] 13 ½ quedan 76 y medio. Tanto sube el Sol en el mayor dia en Sevilla por el meridiano mio [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 186v-187].

Moya considera 23º 30' a declinação máxima do Sol. Isso surpreendeu-nos, pois verificámos que Enciso, Faleiro e Medina tomaram como declinação máxima 23º 33'; que foi, também, o valor utilizado por Zacuto e pelos experientes navegadores portugueses até ao final do século XVI[920]. Dos autores cujas obras pensamos poderem ter sido referência para Moya, apenas Martín Cortés e Pedro Nunes tomaram 23º 30' como valor máximo da declinação, tal como fizera Regiomontano[921]. De acordo com Luís Albuquerque, Pedro Nunes foi quem primeiro chamou a atenção para a inutilidade de se manterem os três minutos, além dos 23º 30' [922].

b. Determinação da declinação do Sol

Para obter a declinação do Sol, os mareantes recorriam, geralmente, a tábuas solares. Essas eram previamente preparadas por cosmógrafos para um ciclo de 4 anos consecutivos, começando num ano imediatamente a seguir a um ano bissexto, e permitiam, por leitura directa, o conhecimento da declinação do Sol em graus e minutos, para todos os dias desses anos.

---

[919] Moya usa um símbolo constituído por um traço de fracção com uma pequena circunferência no numerador para representar meio grau. Na transcrição usamos ½ em vez do símbolo de Moya.

[920] [Ventura, M. S., 1985, p. 81].

[921] Ver [Costa, A. F., 1960, p. 83] e [Navarro Brotons, V., 2004, p. 232].

[922] [Albuquerque, L., 1986, p. 279, e 1965, p. 74].

Enciso, na *Suma de geographia* [1530], apresenta tábuas da declinação do Sol para os anos de 1529-1532[923] e tanto Faleiro, no *Tratado del Sphera y del Arte del Marear* [1535], como Medina, na *Arte de Navegar* [1545], indicam tábuas para esse mesmo quadriénio[924]. Acontece que, como diz Fontoura da Costa[925], todas elas estavam já desactualizadas quando as obras foram publicadas, causando embaraço aos pilotos que continuavam a usá-las. Na *Arte de Marear*, Moya não apresenta estas tábuas mas é provável que estivesse referir-se-lhes quando afirma que todos os mareantes as conheciam[926], pois graças à grande difusão da obra de Medina estas tábuas foram, naturalmente, muito divulgadas.

Em alternativa a este conjunto de 4 tábuas, Pedro Nunes[927] e Martín Cortés[928] advogam o uso de 5 tábuas. Destas, 4 davam o "lugar do Sol", ou seja, a posição que ele ocupa na eclíptica, expressa em graus e minutos para todos os dias de 4 anos consecutivos começando num ano imediatamente a seguir a um ano bissexto. Estas tábuas podiam ser reutilizadas, pois a posição do sol na eclíptica num certo mês e dia "praticamente" coincide com a que ele terá 4*n* anos depois[929]. A quinta era uma tábua de declinações do Sol, feita para uma "quarta" do Zodíaco[930] (figura 109), que permitia saber o ângulo que o Sol fazia com o Equador, ou seja a sua declinação, correspondente à posição que ele ocupava na Eclíptica. A articulação entre as 4 primeiras tábuas e a quinta fazia-se do seguinte modo: numa das quatro primeiras lia-se a posição do Sol na Eclíptica no dia e mês do ano que

---

[923] As tábuas de Enciso, dadas em [Fernández de Enciso, 1530, ff. 9v-21r], vêm já publicadas na edição de 1519 da *Suma de geographia*, com alguns erros de impressão [Costa, A. F., 1960, p. 99].

[924] [Pedro de Medina, 1545, ff. 54r- 60r]. As tábuas de Faleiro são dadas em [Francisco Faleiro, 1535, ff. 91-102].

[925] [Costa, A. F., 1960, p. 99].

[926] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 183r].

[927] [Pedro Nunes, 1537, f. 142].

[928] [Martín Cortés, 1551, ff. 30r-31r].

[929] Ver [Navarro-Brotons, V., 2004, p. 232].

[930] Quanto ao facto da tábua de declinações estar elaborada para uma "quarta" do Zodíaco, Cortés observa que isso era suficiente, explicando que como a declinação do Sol é o arco de meridiano compreendido entre o Equador e o seu lugar no zodíaco, quaisquer quatro pontos da Eclíptica igualmente distanciados dos equinócios têm declinações iguais e que, por isso, o Zodíaco podia dividir-se em quatro quartas com igual declinação. Observamos que, para Medina, o Zodíaco era o 8º céu, isto é, o lugar onde estavam localizados os signos, ou casas do Sol. O Sol movia-se no 4º céu e no seu movimento anual passava debaixo das estrelas dos signos; por isso, quando se dizia que o Sol estava em tal signo do Zodíaco, isso significava que estava debaixo das estrelas desse signo. Na *Arte de Marear*, Moya menciona, sem explicações, o "zodíaco", possivelmente porque o termo era tão bem conhecido dos destinatários do seu trabalho que dispensava qualquer esclarecimento; nos *Fragmentos* define Zodíaco do seguinte modo: " es un circulo, cuyo lugar se imagina ser enel octavo, o noveno, o décimo cielo (…) se finge mover eneste circulo las estrelas de que se componen las doze figuras, o imagines de los signos" [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 13-14].

interessasse; depois, entrando com esse valor na 5ª tábua sabia-se a declinação do sol nesse dia e mês.

Vamos explicar, em detalhe, como se usam as tábuas dadas por Pedro Nunes, porque acreditamos que elas podem ter servido de referência a Pérez de Moya. Pedro Nunes apresenta quatro tábuas dos lugares do Sol, uma para cada um dos anos de 1537-1540[931]. Suponhamos que se pretende saber, por estas tábuas, qual é a declinação do Sol no dia D, do mês M, do ano A (posterior a 1540). Primeiro, há que escolher qual das quatro tábuas do lugar do Sol utilizar. Para isso, calcula-se $\frac{A-1536}{4}$; se o resultado for inteiro usa-se a quarta tábua (que corresponde ao ano bissexto); se o resto for 1 usa a primeira tábua, que é a do primeiro ano depois do bissexto e assim por diante[932]. Escolhida a tábua, tem-se por leitura directa a posição do Sol no dia D do mês M. Observamos que Pedro Nunes soma ao valor obtido 1' e 46", por cada ciclo de quatro anos posteriores a 1540, para compensar o efeito da precessão do eixo da Terra[933]. Diz Nunes:

> O lugar do zodiaco onde esta ho sol se sabera pellas tavoas acima postas nos quatro annos pera que sam feitas: e dahi en diante tiraremos ho anno de Mil e quinientos e trinta y seis: do anno corrente: e ho que ficar partiremos per quatro: e se a partição for justa usaremos da quarta tavoa: e se sobejar hum: da primeira: se dous: da segunda: se tres: da terceira: e por cada revolução acrecentaremos hũ minuto & cuarenta e seys segundos ao que acharmos na tavoa: pera sabermos o verdadeiro lugar do sol." [Pedro Nunes, 1537, f. 180].

Para Pedro Nunes esta era uma opção melhor do que a que consistia em fornecer tábuas que indicavam directamente a declinação do Sol para quatro anos, como ele sustenta no *Tratado em defensam da carta de marear*[934]*:*

---

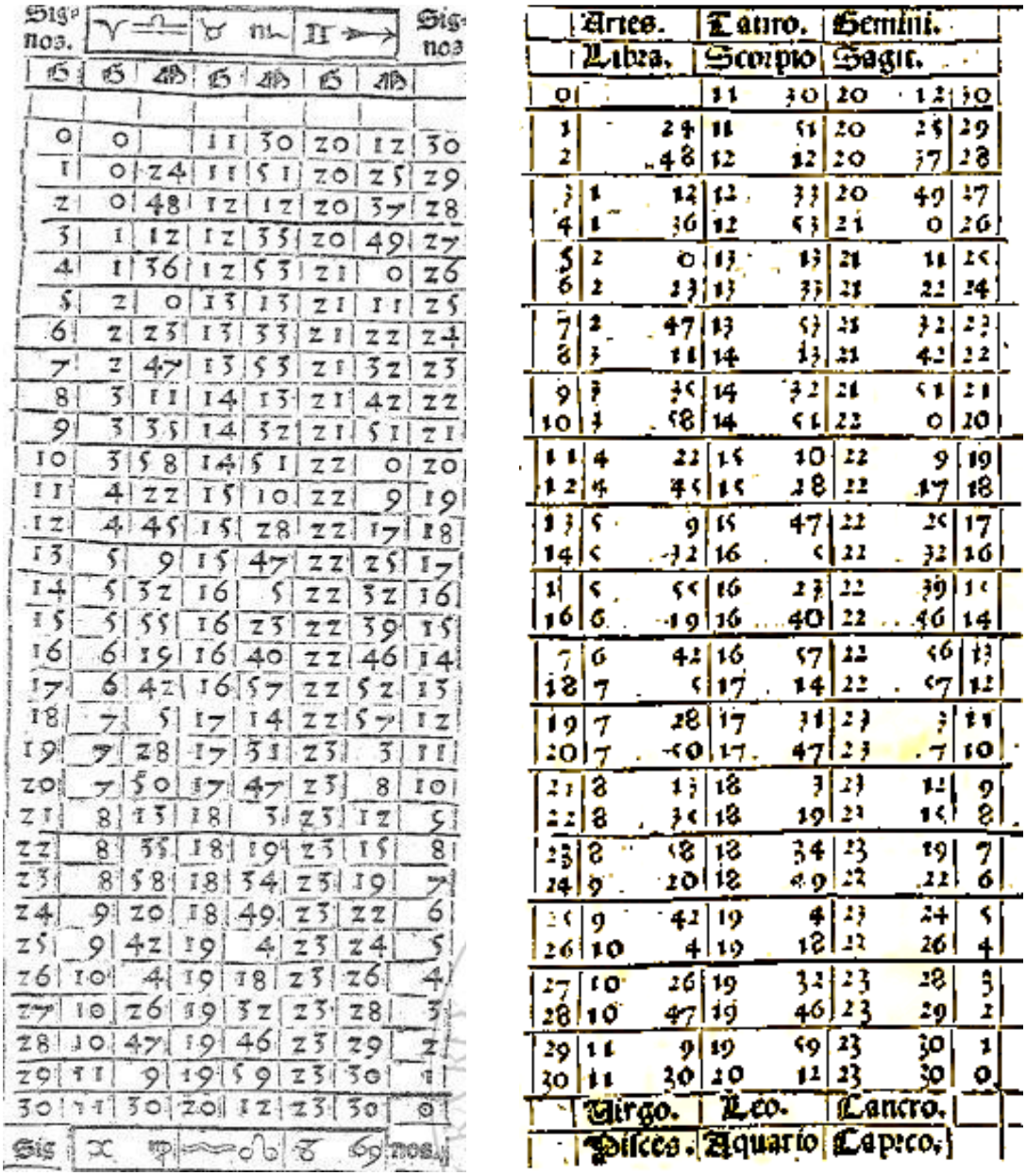
[931] Estas tábuas são semelhantes às "solis" de Zacuto, que dão o lugar do Sol, em graus, minutos e segundos, começando em Março de um certo ano e terminando em Fevereiro do ano seguinte, e são deduzidas delas [Costa, A. F., 1960, p. 105].

[932] Medina indicou uma regra semelhante para identificar os anos bissextos a partir de 1500: "Quando quisierdes saber si el año es bissiesto, o no, sin mirar el libro. Mirad el año del nascimiento del señor. Y dexados los mil y quinientos, los demas partidos por médio. Y quando cada mitad fueren numero pares, será año de Bissiesto." [Pedro de Medina, 1545, f. 52r].

[933] Este acrescentamento de 1' 46" por cada revolução de quatro anos foi, também, o que Zacuto propôs [Costa, A. F., 1960, p. 105]. Actualmente sabe-se que a precessão do eixo da Terra é um fenómeno periódico de 27000 anos (pelos cálculos de Pedro Nunes somos levados a cerca de $48905 = 360 \times 60 \times 60 : (106 : 4)$).

[934] De acordo com Luís Albuquerque, a opção de Pedro Nunes não teve grande êxito [Albuquerque, L., 1986, p. 275, Nota de rodapé].

E he milhor fazer as *quatro tavoas* para saber o lugar do sol: com a sua equação e despoys hũa tavoa pequena de declinações: pera hũa quarta do zodíaco: que serve pera todas quatro: que fazer quatro tavoas pera a declinaçam em quatro annos [Pedro Nunes, 1537, f. 142].



Signos.	♈ ♎	♉ ♏	♊ ♐	Signos
	G G ♑	G ♑	G ♑	
0	0	11 30	20 12	30
1	0 24	11 51	20 25	29
2	0 48	12 12	20 37	28
3	1 12	12 33	20 49	27
4	1 36	12 53	21 0	26
5	2 0	13 13	21 11	25
6	2 23	13 33	21 22	24
7	2 47	13 53	21 32	23
8	3 11	14 13	21 42	22
9	3 35	14 32	21 51	21
10	3 58	14 51	22 0	20
11	4 22	15 10	22 9	19
12	4 45	15 28	22 17	18
13	5 9	15 47	22 25	17
14	5 32	16 5	22 32	16
15	5 55	16 23	22 39	15
16	6 19	16 40	22 46	14
17	6 42	16 57	22 52	13
18	7 5	17 14	22 57	12
19	7 28	17 31	23 3	11
20	7 50	17 47	23 7	10
21	8 13	18 3	23 12	9
22	8 35	18 19	23 15	8
23	8 58	18 34	23 19	7
24	9 20	18 49	23 22	6
25	9 42	19 4	23 24	5
26	10 4	19 18	23 26	4
27	10 26	19 32	23 28	3
28	10 47	19 46	23 29	2
29	11 9	19 59	23 30	1
30	11 30	20 12	23 30	0
Sig	♓ ♍	♒ ♌	♑ ♋	nos.

Aries.	Tauro.	Gemini.
Libra.	Scorpio	Sagit.

0			11	30	20	12	30
1		24	11	51	20	25	29
2		48	12	12	20	37	28
3	1	12	12	33	20	49	27
4	1	36	12	53	21	0	26
5	2	0	13	13	21	11	25
6	2	23	13	33	21	22	24
7	2	47	13	53	21	32	23
8	3	11	14	13	21	42	22
9	3	35	14	32	21	51	21
10	3	58	14	51	22	0	20
11	4	22	15	10	22	9	19
12	4	45	15	28	22	17	18
13	5	9	15	47	22	25	17
14	5	32	16	5	22	32	16
15	5	55	16	23	22	39	15
16	6	19	16	40	22	46	14
17	6	42	16	57	22	52	13
18	7	5	17	14	22	57	12
19	7	28	17	31	23	3	11
20	7	50	17	47	23	7	10
21	8	13	18	3	23	12	9
22	8	35	18	19	23	15	8
23	8	58	18	34	23	19	7
24	9	20	18	49	23	22	6
25	9	42	19	4	23	24	5
26	10	4	19	18	23	26	4
27	10	26	19	32	23	28	3
28	10	47	19	46	23	29	2
29	11	9	19	59	23	30	1
30	11	30	20	12	23	30	0

Virgo.	Leo.	Cancro.
Pisces.	Aquario	Capric.

Figura 109: À esquerda a tábua incluída no *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar* [Martín Cortés, 1551, f. 30v]; à direita a tábua das declinações apresentada no *Tratado em defensam da carta de marear* [Pedro Nunes, 1537, f. 175].

Na *Arte de Marear*, Moya não inclui tábuas para obter o lugar do Sol, observando que esse lugar se pode determinar com o astrolábio ou quadrante, ou recorrendo à obra de

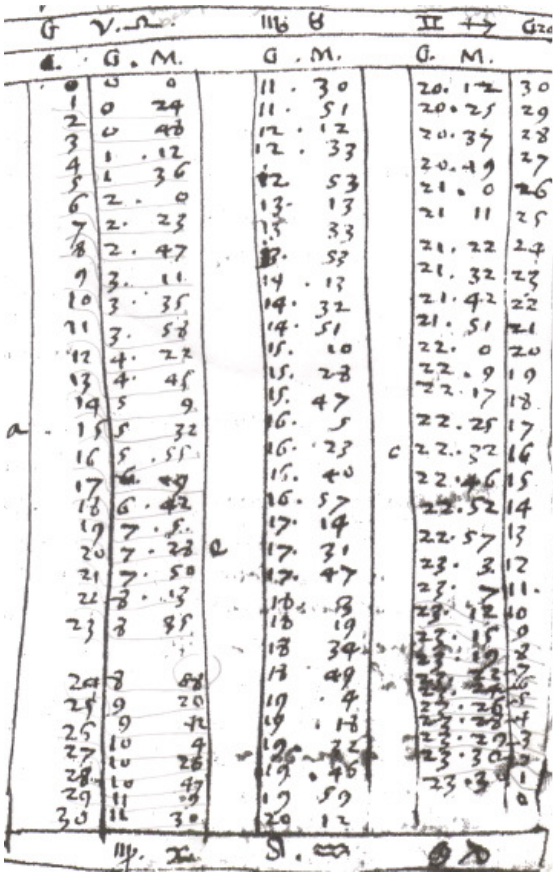
Apiano. Mas apresenta uma tábua de declinação do Sol (figura 110) e explica, vagamente, como ela se aplica quando é conhecido o lugar deste astro:

> El uso de la cual es que el dia que quisieres saber la declinacion del Sol veras por el astrolabio o cuadrante que grado de signo anda el Sol o por la figura de pº [Pedro] Apiano. Y si anduviere en algun signo delos que estan en la parte alta desta tabla sirve te con los grados de signo de la mano izquierda [;] y si en los bajos [,] de la derecha. Y si el signo fuere septentrional la declinacion sera septentrional. Y si austral, austral [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 183r].

Esta tábua de declinações (figura 110) não consta nos trabalhos de Enciso, de Faleiro e de Medina, mas está incluída no de Nunes e no de Cortés. Por isso, temos razões para acreditar que foram estas as fontes do nosso autor.

Vejamos uma breve explicação da constituição desta tábua (figura 110), que ajuda a perceber as indicações de Moya. Começamos por observar que ela é encimada por uma barra onde estão representados, dois a dois, da esquerda para a direita, os signos cuja declinação "cresce" (Carneiro (1) e Balança (7), Touro (2) e Escorpião (8), Gémeos (3) e Sagitário (9)); e tem uma barra em baixo com os signos cuja declinação decresce (Virgem (6) e Peixes (12), Leão (5) e Aquário (11), Câncer (4) e Capricórnio (10)). Na coluna mais à esquerda vêem-se os graus (ou os dias)[935] do Zodíaco correspondentes aos signos de cima e na do lado direito lê-se marcação semelhante para os signos de baixo. Entre elas há três colunas duplas de números que dão o valor da declinação do Sol, em graus e minutos, para cada grau de signo que o Sol ocupa no Zodíaco.

[935] Não podemos esquecer que o arco compreendido entre dois signos consecutivos tem, em média, 30º (que correspondem a 30 dias).



d.	G.	M.		G.	M.		G.	M.	
0	0	0		11	30		20	12	30
1	0	24		11	51		20	25	29
2	0	48		12	12		20	37	28
3	1	12		12	33		20	49	27
4	1	36		12	53		21	0	26
5	2	0		13	13		21	11	25
6	2	23		13	33		21	22	24
7	2	47		13	53		21	32	23
8	3	11		14	13		21	42	22
9	3	35		14	32		21	51	21
10	3	58		14	51		22	0	20
11	4	22		15	10		22	9	19
12	4	45		15	28		22	17	18
13	5	9		15	47		22	25	17
14	5	32		16	5	*c*	22	32	16
*a*15	5	55		16	23		[22	39]	15
16	6	19		16	40		22	46	14
17	6	42		16	57		22	52	13
18	7	5		17	14		22	57	12 *d*
19	7	28	*e*	17	31		23	3	11
20	7	50		17	47		23	7	10
21	8	13		18	3		23	12	9
22	8	35		18	19		23	15	8
23	8	58		18	34		23	19	7
24	9	20		18	49		23	22	6
25	9	42		19	4		23	24	5
26	10	4		19	18		23	26	4
27	10	26		19	32		23	28	3
28	10	47		19	46		23	29	2
29	11	9		19	59		23	30	1
30	11	30		20	12		23	30	0

Figura 110: Tábua de declinação do Sol incluída na *Arte de Marear* [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 183r]. A tábua está muito imperfeita; falta uma linha de dados na penúltima coluna, que é, possivelmente a que corresponde a 15º nos signos de Câncer e Capricórnio, que se indicam do lado direito, e que completámos com base nas tábuas de Pedro Nunes e de Martín Cortés.

Moya explica como se usam os números constantes nesta tábua de declinações, quando é sabido o lugar do Sol (pelo astrolábio, quadrante, ou tábuas quadrienais). A explicação dada baseia-se em dois exemplos concretos: num deles, supõe o Sol a 15º do signo de "Sagitário" (ou seja, a 15 dias de Sagitário) e no outro a 12º de "Virgo". Estes valores não foram escolhidos ao acaso, uma vez que permitem mostrar como se utilizava cada um dos lados da tábua. No primeiro caso, como Sagitário é dos signos de cima, procura-se do lado esquerdo a linha correspondente a 15 (que Moya sublinha com *a*) e lê-se o valor indicado na terceira coluna, que corresponde a Sagitário (que Moya sublinha com *c*); obtém-se 22º 32'. No segundo procede-se de modo análogo, entrando no lado direito:

> Pongo que a 15 de Sagitario quiero saber la declinacion del Sol. Porque Sagitario es de los que estan arriba toma el 15 a la parte izquierda que es ado esta la *a* y va derecho hasta llegar al Sagitario. Y hallaras que aquel dia que el Sol estuviere en 15 de Sagitario es la declinacion 22 grados y 32 minutos[936]. Y lo mismo fuera estando en Geminis porque esta renglera es para estos 2. Y para Escorpio y Tauro es la otra. Y para Aries y Libra es la de a mano izquierda [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 184r].

Esta tábua só dava informação da declinação do Sol para valores inteiros dos graus. Quando não fosse esse o caso, era necessário recorrer a uma interpolação linear, "entrando duas vezes na tábua" (ou seja, fazendo duas medições). Como aritmético que era, Moya resolve este problema sem dificuldade, expondo o processo num caso particular, mas facilmente generalizável. Supõe que se pretende saber qual a declinação do Sol correspondente a 1º 30' de Carneiro ["Aries"], que não se lê directamente na tabela. Para tal, toma os dois valores que lhe estavam mais próximos, que são 1º e 2º e entra duas vezes na tábua, anotando os minutos correspondentes a cada um deles, que neste caso são 24' e 48', respectivamente. Em seguida, calcula a diferença entre esses valores, ou seja, 48'- 24' = 24', que "equivalem" a 1º, e estabelece a correspondência seguinte:

$$1^{\circ} \longrightarrow 24'$$

$$30' \longrightarrow 12'$$

Finalmente, soma o valor obtido ao indicado na tábua para 1º, obtendo 1º 36' para declinação do Sol correspondente a 1º 30' de Carneiro. A explicação que dá está correcta e é clara:

> Pero nota que el dia que esto quieres hacer no son grados justos sino que es grado y medio o mas o menos entraras 2 veces en la tabla [,] quiere decir que proporcionaras. Ejemplo a 1 grado y treinta minutos de Aries que declinacion corresponde. Pues porque en esta tabla son grados justos y en este ejemplo se ofrece un grado y 30 minutos tem este aviso en que mirares a un grado de Aries que declinacion hay y hallaras haber 24 minutos. Mira luego a 2 grados de Aries que hay e hallaras haber 48. Luego un grado se aumento 24. Pues 30 minutos sale 12 minutos. Y 24 de un grado son todos 36 pues a grado y $\frac{1}{2}$ de Aries diras que

[936] Este valor não é o que se vê na tabela apresentada por Moya, mas sim o que está na linha abaixo. Este lapso está relacionado com o facto de na 5ª coluna só haver 30 entradas enquanto todas as outras têm 31.

hay 36 minutos de declinacion del Sol. Y asi de mas o menos grados y minutos [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 184v].

Voltemos agora às tábuas de declinação do Sol apresentadas por Moya, Cortés e Nunes, para fazermos algumas considerações sobre os valores nelas existentes. Comparando o manuscrito de Moya com os textos de Pedro Nunes e de Cortés, observa-se que na penúltima coluna da tabela de Moya falta uma linha de dados, possivelmente relativa a 15º dos signos Câncer e Capricórnio e constituída pelos elementos [22 39]. Além disso, na tabela de Moya todos os valores são coincidentes com os de Cortés, excepto para 10º dos signos de Câncer e Capricórnio, em que Cortés indica 23º e 8' e Moya e Nunes apontam 23º e 7'. Estas constatações levantaram-nos uma questão muito curiosa: supondo que Moya conhecia as tábuas de Nunes e Cortés (o que não nos surpreende!) o que teria determinado a opção pelo valor 23º 7', apresentado por Nunes, em vez de 23º 8' indicado por Cortés?

Embora não tenhamos informação que nos possibilite obter essa resposta, podemos afirmar que 23º 7' é uma melhor aproximação do valor exacto. Na verdade, aplicando a fórmula $sin\ \delta = sin\varepsilon\ sin\ L$ para determinar a declinação (δ) do Sol, quando são conhecidas a obliquidade da Eclíptica $\varepsilon = 23º\ 30'$ e a longitude solar, isto é, a amplitude do ângulo descrito pelo Sol na Eclíptica ($L = 80º$), obtém-se $\delta = 23º\ 7'\ 12''$. As operações aritméticas que os procedimentos atrás descritos implicam, nomeadamente as interpolações lineares, são muito elementares, mas os conhecimentos matemáticos que os pilotos tinham nessa época não eram, em geral, suficientes para as realizar. Por isso, o uso de tábuas era de grande utilidade para os mareantes, que a elas recorriam para obter, por simples leitura, o valor da declinação[937]. Notamos que para Moya a astronomia é a ciência que trata do movimento dos céus enquanto a astrologia é o estudo dos efeitos que esses movimentos causam nos corpos[938]. Pensamos, por isso, que o facto de Moya ter dado no manuscrito uma explicação tão minuciosa dos cálculos mostra que as suas preocupações não se limitavam à escrita de um texto de navegação de carácter simplesmente utilitário.

[937] Ver [Costa, A. F., 1960, p. 91].

[938] [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 35]. No século XVI a astrologia era naturalmente aceite pelos homens cultos, pois a fronteira que a separava da astronomia era ténue. Gomes Teixeira recorda uma frase de Pedro Nunes, relativa às navegações portuguesas, que mostra como eram estreitas as relações entre a astrologia e a astronomia: "Não iam a acertar, diz Pedro Nunes, mas partiam os seus mareantes mui ensinados e providos de instrumentos e regras de Astrologia e Geometria, que são as cousas de que os cosmógrafos hão-de andar apercebidos, segundo diz Ptolomeu no primeiro livro da sua Geografia" [Teixeira, G., 1934, pp. 75-76].

Por outro lado, Moya inclui no manuscrito uma mnemónica para as datas de entrada do Sol nos vários signos do zodíaco. Estava fixada nas palavras dos dois versos latinos seguintes:

Gratum, gerens, fluvium, fundebat, Eurus, com.
Dicta, divina, Dei, cuncta, Diana, aevi.

Para utilizar esta mnemónica devia ter-se em atenção que cada palavra correspondia a um mês do ano contado a partir de Janeiro e que era sabido que nos meses de Março, Abril, Maio, etc., o Sol entrava nos signos de Carneiro (*Aries*), Touro (*Tauro*), Gémeos (*Gemini*), etc. Assim, para usar o exemplo de Moya, supondo que se pretende saber em que grau está o Sol no dia 5 de Maio, procede-se do seguinte modo: Maio é o quinto mês por isso a palavra da mnemonica que lhe corresponde é "Eurus"; esta palavra começa em "E", que é a quinta letra do alfabeto. Toma-se, portanto, 5. A este 5 soma-se o número correspondente ao dia, que neste caso é também 5 e mais 3 (por regra não explicada). Obtém-se 13. Conclui-se, que no dia 5 de Maio o Sol está no grau 13 do signo de Gémeos.

> Pues para hacer la computatiom habemos de saber que cada diction de estas sirve a su signo y hacer de esta arte. Para saber 5 de mayo en que grado esta el Sol diremos assi mayo es lo 5 mes desde enero. Tomas la quinta diction que es Eurus. Y porque comienza en e y e es quinta en la orden de el abece tomaremos 5 y anadir se an los dias del mes y tres mas y aquel sera el numero de los grados do esta el Sol: para la tablilla de saber el signo del Sol [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. não numerada depois de 193].

É natural que Moya tivesse visto esta mnemónica no *Chronographia o Reportorio de Tiempos*, cuja primeira edição foi publicada em 1548, pois o seu autor, Jerónimo de Chaves, dá a mesma regra para determinar em que grau e qual o signo em que anda o Sol em qualquer dia do ano, utilizando precisamente a mnemónica que vemos no manuscrito[939]. De acordo com Luís Albuquerque, este tipo de mnemónicas foi usado por diversos autores para

[939] Chaves chama a atenção para que se trata de um método aproximado, "Curiosa cosa paresce dar regla para saber en qualquer dia, en que grado y de que signo anda el Sol, y aunque esto no se pueda saber tan precisamente como se alcança por las tablas del Rey don Alfonso, y por las Ephemerides, alomenos para el Astrologo rústico daremos aqui regla, com la qual se satisfaga, y no aya arriba de un grado de error que de poco incoveniẽte le sera, y peor sera ignorar lo del todo", e usa um exemplo explicativo diferente do do nosso autor [Jerónimo de Chaves, 1587, ff. 124v-125r].

o mesmo fim, mas são apenas "uma curiosidade para diversão dos cosmógrafos" e não tiveram qualquer interesse para os pilotos[940].

3.5. A agulha de marear e a questão da determinação da longitude

A agulha de marear, também conhecida por "aguja de navegar" ou "brujula", como Moya a denomina, foi, durante séculos, uma ferramenta indispensável na navegação[941]. Como Fontoura da Costa refere[942], nos finais do século XIII, quando este utensílio começou a ser usado para esse fim, era constituído por uma simples agulha de ferro magnetizado untada com azeite e posta a flutuar num recipiente com água, mas no século XVI os marinheiros já dispunham de uma versão mais elaborada em que os ferros da agulha estavam ligados a uma rosa-dos-ventos, de modo a que o conjunto não sofresse com os movimentos da embarcação. Na rosa-dos-ventos estavam marcados 32 rumos e a sua composição era, por vezes, decorada com uma flor-de-lis que indicava o Norte. É de uma agulha como esta última que Moya fala quando trata, por exemplo, de determinar os "rumbos o vientos por que se ha de navegar"[943]. Moya não descreve a construção nem a constituição da agulha de marear e dedica pouca atenção ao seu estudo, mas o facto de aconselhar a leitura do capítulo da *Arte de Navegar* de Medina ("Lee la hoja 80 del arte marear cap. primero del [6º] libro") onde se trata do assunto leva-nos a pensar que estava esclarecido sobre ele[944]. E para Medina a agulha de marear usada para indicar o Norte era o instrumento mais importante de todos os que serviam à navegação[945].

---

[940] [Albuquerque, L., 1991, p. 178 e 180]. Encontrámos regras deste tipo na *Arte de Navegar* de Francisco da Costa, obra presumivelmente datada de 1596, que Luís Albuquerque estudou e comentou [Albuquerque, L., 1970, p. 152]

[941] Luís Albuquerque [Albuquerque, L., 1991, p. 220] observa que o primeiro texto do século XVI que tratou da descrição, construção e uso náutico da agulha de marear foi o *Tratado da agulha de Marear*, que foi escrito em 1514 pelo piloto português João de Lisboa.

[942] [Costa, A. F., 1960, p. 164].

[943] Pérez de Moya fala, indistintamente, de uma agulha e de agulhas e Medina também [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 173r].

[944] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 172v].

[945] Instrumento que mas precisso y con mayor perfection deve el piloto siempre traer es el aguja de marear. Porque ningun instrumento tanto como este enseña la via que deve hazer, y aun que tambien por que los otros instrumentos sin este, poco prestan, y este sin los otros aprovecha mucho. Y assi puedese comparar el aguja de marear entre los otros instrumentos de la navegación a la vista del hombre, entre los otros sentidos [Pedro de Medina, 1545, f. 80v].

Segundo Medina, os marinheiros sustentavam que a agulha só indicava o pólo Norte no meridiano que passava nas ilhas dos Açores mostrando, a partir daí, desvios para Este ou para Oeste, a que chamaram "nordestear" e "noroestear":

> Opinion se tiene entre los que navegã que las agujas de marear nordestean y noroestean, y dizese que en el meridiano de las yslas de los Açores, que alli el aguja muestra el pólo en su lugar, y que de alli passando al oeste noroestea, esto es, que no enseña el pólo enel lugar dõde primero sino, que se aparta al noroeste. Y si vienen dl dicho meridiano al leste que el aguja nordestea, que es hazer la misma differencia a la parte dl nordeste. Por manera, que dizen que en solo aquel meridiano el aguja enseña el pólo, y no en outro lugar ninguno sino a una parte o a outra, y que quanto mas del se apartan, tanto las agujas tienen mas el dicho deffecto [Pedro de Medina, 1545, f. 82r].

Já em 1535, Faleiro tinha expresso a opinião que as ilhas dos Açores, e mais precisamente a ilha do Côrvo, eram lugares em que a agulha de marear apontava para o pólo[946]. E, sobre este assunto, foi no seu tratado que encontrámos a descrição mais parecida com a que Moya faz, como mostram os excertos seguintes:

Nota navegando de la isla del Cuerbo o de alguna de las de los Azores en las cuales el aguja pontualmente demanda el polo yendo a occidente las agujas noroestean y navegando del mismo meridiano a oriente[947] nordestean. Y cuanto mas las agujas se passan del dicho meridiano a una de las dichas bandas o de oriente a occidente tanto mas o menos nordestean. O noroestean. Segun la parte donde caminan [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 173r].

Navegando desde el meridiano dela ysla del cuervo o de outra qualquiera de las de los açores en que la aguja puntualmente demanda pólo yendo a ocidente las agujas noruestean; y navegando desde el mismo meridiano a oriente nordestean. (…) Y quãto mas las naos se apartã del meridiano psupuesto tãto mas las agujas nordesteã o noruesteã: segun la parte para que se apartan [Francisco Faleiro, 1535, f. 79].

---

[946] A título de curiosidade, incluímos a descrição da ilha do Côrvo, feita por Manoel Pimentel (1650-1719), que foi cosmógrafo-mor do reino de Portugal: "A Norte da Ilha das Flores está a Ilha do Corvo; que he redonda, e naõ tem mais de 3 legoas de circuito. As naos da India que vem para o Reyno, vindo cedo por todo Agosto, viraõ ao Norte della para fazerẽ melhor navegaçaõ. Tambem se passa por entre ella, e a das Flores, porque há hũa grande legoa de canal entre ambas. Estando Noroeste Sueste com esta ilha do Corvo vos parecerá a modo de um berço." [Pimentel, M., 1746, p. 225].

[947] No manuscrito está escrito occidente.

Para saber quanto a agulha nordesteava ou noroesteava, isto é, quanto se inclinava para nordeste ou para noroeste, Moya propõe que se recorra a um instrumento cuja construção explica. Consistia de uma placa circular de cartão cujo bordo era graduado de 10º em 10º, de 0º até 90º, contados desde o ponto que representava o pólo Norte até ao Equador, para a direita e para esquerda (figura 111). A placa tinha no meio uma cavidade circular, com o mesmo centro, de tal diâmetro que permitia ver a agulha de marear aí colocada e saber quanto ela se inclinava para nordeste ou para noroeste. Sobre o modo de o construir e utilizar, Moya dá indicações precisas:

> La cual figura sirve para que se haga de papelones, muy ygual y dividida en las lineas que tiene y otros tantos a la parte inferior [.] Y de raya a raya hay 10 grados. Han de estar divididos sus 10 de uno en uno asi . Ejemplo. Y ha de quedar sola la circunferencia porque lo demas ha de estar horadado o cortado para que se ponga de modo que el aguja este dentro y apunte la flor en alguna senal de ella para que se vea lo que nordestea o noroestea o cuando muestra perfectamente al norte. Lo cual mostrara cuando derechamente estubiere o senalare en lo alto en la raya que el instrumento tiene un triangulo porque aquel es el norte [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 178r].

Um instrumento como este já se encontrava referido no *Tratado del Sphera y del Arte del Marear*, de Francisco Faleiro, e apesar de Moya não lhe ter feito menção podemos ver que a explicação que dá parece ser influenciada pela sua:

> E para que sepamos lo que las agujas nordestean y noroestean conviene hazer un instrumento dela manera y forma dela figura que enel presente capitulo hallareys: que sea muy redondo y plano y tan grande que se pueda dividir en 360 grados: los quales se hás de señalar com una regla: de manera que siendo sacados desde el centro del solamente sean señalados en la circunferencia. Y desde el punto en que quisierdes que el aguja señale el polo empeçareys a graduar de ambas as partes, empeçando en uno y acabando en la linea que señalardes por equinocial en noventa. Y desde el otro polo hasta la equinocial podreys graduar otros tantos: aun que nos es necessário [Francisco Faleiro, 1535, f. 81].

Sublinhamos sobre este assunto duas coincidências curiosas: a primeira é que a figura que acompanha a explicação dada por Moya para a construção do instrumento (figura 111) é semelhante à proposta por Faleiro; a segunda é que Faleiro observa que se pode dispensar a graduação do semicírculo inferior e constatamos que Moya não faz essa

graduação. Pode, portanto, pensar-se que Moya conhecia não só o modo de utilização do instrumento descrito por Faleiro como também os processos por ele indicados para a determinação da declinação da agulha, recorrendo a esse instrumento.

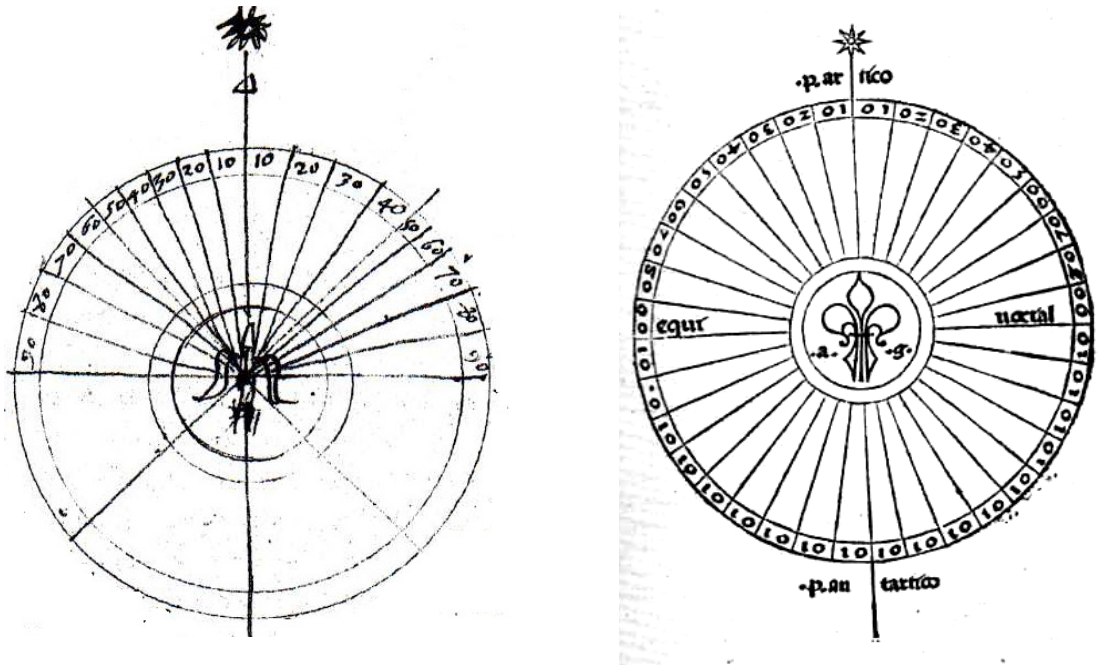


Figura 111: À esquerda está o esboço manuscrito do instrumento indicado por Pérez de Moya, para determinar quanto nordestea ou noroestea a agulha [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 178]; à direita, o instrumento apresentado em [Francisco Faleiro, 1535, f. 83].

O instrumento de Faleiro tinha como acessório um semicírculo de ferro ou aço muito fino, e de diâmetro igual ao da circunferência; a este conjunto (Figura 111) Fontoura da Costa chama alidade "mater de marcar", ou "prato azimutal"[948]. Faleiro indica quatro processos para obter, à custa do instrumento, a declinação da agulha magnética num lugar, pela observação do azimute do Sol nesse lugar. Resumimo-los a seguir baseando-nos nos estudos de Luís Albuquerque e de Fontoura da Costa (Albuquerque refere que o segundo e terceiro processos são, também, dados por Pedro Nunes)[949].

1.º Processo. Requeria que se utilizasse o semicírculo, que se fixava verticalmente sobre o círculo inicial por dois pernos, correspondendo aos pólos Norte e Sul. Começava por se colocar horizontalmente a caixa (constituída pelo círculo e pela bússola) orientando-a de modo que ao meio-dia solar a sombra projectada pelo semicírculo se reduzisse ao seu diâmetro. A orientação da caixa devia ser tal que o Sol, quando estivesse entre o observador

[948] Fontoura da Costa admite que o instrumento que atribui a Francisco Faleiro, então ao serviço do rei de Espanha, seja da autoria de Rui Faleiro, irmão de Francisco Faleiro [Costa, F., 1960, p. 171].
[949] Ver [Albuquerque, L., 1989, pp. 184-186].http://zircon.dcsa.fct.unl.pt/dspace/bitstream/123456789/136/1/5-5. PDF (Consultada em 22 de Setembro de 2010). Também em [Costa, A. F., 1960, pp. 188-189].

e o pólo, ficasse situado do lado em que a agulha assinalava o pólo Norte e ficasse do lado do pólo Sul, quando estivesse entre o observador e o pólo Sul. O plano da caixa ficava no plano do meridiano do observador e as pontas da agulha mostravam o valor da declinação magnética no lugar de observação. O principal problema que este processo envolvia era o reconhecimento exacto do meio-dia solar verdadeiro local.

2.º Processo. Neste processo, o semicírculo era substituído por um estilete ("astil") que se cravava no centro do tampo da agulha, perpendicularmente ao plano da caixa. Começava-se por fazer coincidir as pontas das agulhas com os zeros da graduação. Depois, tomava-se a sombra do Sol em momentos correspondentes em relação ao meio-dia solar, por exemplo uma, duas ou três horas antes do meio-dia e uma, duas ou três horas depois do meio-dia. A bissectriz do arco das sombras definia a intersecção do plano do meridiano verdadeiro com o plano do horizonte, pelo que o ângulo entre o norte da agulha e essa direcção era o nordestear ou noroestear. Faleiro nota que os momentos de observação favoráveis eram aqueles em que o Sol atinge a mesma altura, antes e depois do meio-dia solar, o que permitia ultrapassar o problema do conhecimento exacto do meio-dia[950].

3.º Processo. É um caso particular do anterior aplicado à determinação das sombras do Sol ao nascer e ao pôr do Sol, ou seja, nos momentos em que a altura é zero.

4.º Processo. Consiste em determinar o meridiano de um local observando a direcção do Sol ao nascer. Não entraremos em detalhe sobre este processo, apenas observamos que Faleiro supõe, erradamente, existir uma relação linear entre a declinação magnética (σ), a latitude do lugar de observação (φ) e a declinação do Sol no dia de observação (δ). Como se sabe, esta relação é dada pela fórmula $sin\sigma = \frac{sin\delta}{cos\varphi}$, mas, como Albuquerque nota, só em finais do século XVI se fez alguma luz sobre este assunto[951].

A ideia de que Moya conhecia e se inspirava no trabalho de Faleiro fica ainda reforçada com uma nota que o nosso autor inclui no manuscrito em que admite, erradamente como Faleiro, que a declinação magnética da agulha variava proporcionalmente com a longitude; a semelhança entre as redacções dos dois textos é bem elucidativa:

---

[950] Luís Albuquerque observa que a maior vantagem deste processo é poder ser aplicado mais do que uma vez por dia [Albuquerque, L., 1989, p. 185] http://zircon.dcsa.fct.unl.pt/dspace/bitstream/123456789/136/1/5-5.PDF (Consultada em 22 de Setembro de 2010).

[951] [Albuquerque, L., 1991, p. 237]. Ainda de acordo com [Albuquerque, L., 1991, p. 233-234], é possível que tenha sido na obra de Faleiro que foram apresentados, pela primeira vez, métodos para calcular a declinação magnética baseados em observações solares. Segundo [Ventura, M. S., 1985, p. 92] os métodos indicados por Faleiro foram analisados por Pedro Nunes, cujo "instrumento de sombras" foi, possivelmente, inspirado no instrumento de Faleiro.

Nota. Si la una parte de la dicha isla [do Corvo] y navegando por un paralelo que este 90 grados de longitud de la dicha isla del Cuervo las agujas iran siempre acrecentando en su nordestear o noroestear. Y pasando de los dichos 90 grados por el mismo paralelo por la misma proporcion que hubiesen nordesteado o noroesteado se tornarian a emendar hasta tanto que llegando a otros 90 grados que serian todos 180 de longitud de la dicha isla del Cuervo [,] la aguja tornaria a demandar precisamente el polo [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 173-173v].

Aun que es de tener que partiẽdo una não dla dicha ysla [do Corvo] y navegãdo por un paralelo que esta .xc. grados de lõgitud las agujas yrã siempre acrecẽtãdo en su nordestear o noruestear: y passando adelãte delos .xc. grados por el mismo paralelo por la misma pprociõ que oviessen nordesteado o noruesteado lo tornaria a emẽdar: de manera que quãdo oviessen navegado otros .xc. grados, que estaria en .clxxx. grados de lõgitud dela ysla que se há dicho: y justamẽte estaria enel antípoda y meridiano oposito dlla enel mismo paralelo, las agujas tornaria a demãdar precisamẽte el pólo como demãdavã en la ysla y meridiano de que empeço su viaje [Francisco Faleiro, 1535, ff. 79-80].

Finalmente, fazemos uma observação a respeito da descrição que Moya faz do instrumento de Faleiro. O material que ele propõe para a sua constituição, o cartão ("que se haga de papelones", disse Moya), é demasiado frágil para poder ser usado nas embarcações, em especial por se danificar com a humidade. Seria mais natural construí-lo em madeira ou em latão, como provavelmente Faleiro o concebeu[952]. Por isso, pensamos que o instrumento assim construído não se destinava às observações no mar mas sim à instrução prática em terra, de pilotos ou candidatos a sê-lo.

3.6. Regras para as marés

As marés, ou seja, o fluxo e refluxo da água do mar, e a relação existente entre a alta e a baixa maré e a posição da Lua no céu são fenómenos notados desde a Antiguidade[953]. O conhecimento dos horários das marés foi particularmente útil à navegação, permitindo aos marinheiros determinar a melhor hora para se aproximarem do porto, entrarem na barra e

[952] No trabalho de Faleiro não encontrámos referência ao material usado na construção do instrumento, mas Fontoura da Costa admite que seria de latão ou de madeira [Costa, A. F., 1960, p. 172].

[953] [Costa, A. F., 1960, p. 260].

identificarem os baixios. Dos autores do século XVI que consultámos, Martín Cortés foi quem melhor traduziu esta ideia, dizendo:

> Grande cuenta devem tener los pilotos y marineros con las mareas, para tomar puerto, entrar por barra, pasar por baxos y finalmente para toda la navegacion: porque de ignorar esto se les podrian seguir grandes daños y inconvenientes [Martín Cortés, 1551, f. 53r].

A fixação das horas das marés para um dado porto e em certo dia baseava-se no conhecimento da idade da Lua nesse dia e das horas a que no porto considerado ocorriam as vazantes e as enchentes em dia de lua nova[954]. No seu estudo das marés, Moya aconselha a leitura da obra de Medina: "Lee la hoja 90 del arte de marear"[955]; por isso, para mais facilmente se poderem compreender as explicações dadas no manuscrito, introduziremos alguns conceitos relacionados com este tema, tal como são expostos na *Arte de Navegar*, de Pedro de Medina.

3.6.1. Sobre o "aureo numero"[956]

Para determinar as conjunções (e as oposições) do Sol e da Lua em todos os meses de um certo ano, isto é, os momentos em que, nesse ano, estes dois astros se encontravam no mesmo ponto (respectivamente em pontos opostos) do zodíaco, os marinheiros recorriam ao chamado aúreo número[957]. Este número estava relacionado com o número 19, que era o período de um ciclo lunar, ou seja, o número mínimo de anos necessário para que o Sol e a Lua ocupassem toda a variedade possível de posições no zodíaco, incluindo as conjunções e oposições. Para obter o áureo número de um ano, por exemplo A, de memória ("sin mirar el libro"), Medina propõe uma regra simples, que passava por determinar o resto da divisão de $A-1500$ por 19. Se esse resto for zero, o aúreo número é dezanove, se for um, o aúreo número é um, e assim sucessivamente:

---

954 [Albuquerque, L., 1989, p. 21] http://zircon.dcsa.fct.unl.pt/dspace/bitstream/123456789/136/1/5-5.PDF (Consultada em 22 de Setembro de 2010).

955 Embora o nome do autor não seja indicado, é certamente à obra de Medina que Moya se refere, pois na folha 90 dessa obra está tratado este assunto.

956 Também se pode chamar número áureo; no entanto não usaremos esta designação por ser a que habitualmente se utiliza em matemática para referir o número φ.

957 Para Medina o nome áureo (de ouro) está associado à grande utilidade deste número em diversas aplicações [Pedro de Medina, 1545, f. 87r].

> Quãdo quisieredes saber en qualquier año que estuvierdes quantos son de aureo numero, sin mirar el libro. Mirad en que año correys, y dexados los mil y quinientos, de los demas sacad los diez y nueves, y lo que quedare tanto es de aureo numero esse año. Y si el numero delos años viniere justo en diez y nueves, diez y nueve son de aureo numero esse año [Pedro de Medina, 1545, f. 87v].

Medina nota que o aúreo número se repetia ao fim de cada período de 19 anos, pelo que a regra dada tinha, também, a vantagem de permitir calcular o áureo número de qualquer ano, a partir de 1500 e, em particular, de possibilitar o conhecimento desse número para qualquer um dos anos posteriores à publicação da sua obra.

No manuscrito, Moya não faz alusão ao modo de obter o áureo número, mas usa-o na resolução de problemas práticos, como vamos ver em seguida. Começamos por fazer referência a uma tabela (figura 112), dada por Moya no manuscrito, que permite conhecer, de um modo fácil e rápido, os dias da conjugação da Lua e do Sol.

Supondo que se quer saber o dia em que ocorreu (ou ocorrerá) a conjunção no mês M do ano A, começa-se por determinar o áureo número de A (como foi indicado) e procurar esse número na tabela. Em seguida, conta-se o número de casas existentes entre a que contém o mês M e a que contém o áureo número, incluindo essas casas na contagem. O resultado corresponde ao dia da conjunção. Nesta operação é apenas necessário ter em atenção que a contagem se faz sempre de cima para baixo, a partir da casa que corresponde ao mês M e até à casa que contém o número áureo, recomeçando do início, se necessário.

Dias	Para saber las conjunciones de la [luna] [aúreo número do ano]	
1	8	Marzo
2		Abril
3	16	Mayo
4	5	Junio
5		Júlio
6	13	Agosto
7	2	Septiembre
8		Octubre
9	10	Noviembre
10		Deziembre
11	18	Enero
12	7	Hebrero
13		
14	15	
15	4	
16		
17	12	
18	1	
19		
20	9	
21		
22	17	
23 *a*	6	
24		
25	14	
26	3	
27		
28	11	
29		
30	19	

Figura 112: Tabela auxiliar para calcular o dia da conjunção do Sol e da Lua num dado mês de um dado ano, a partir do áureo número do ano em questão. Os números do lado esquerdo são os dias da conjunção do Sol e da Lua no mês expresso na linha correspondente da segunda coluna da tabela. [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 177v].

Para explicar como se utiliza a tábua, Moya exemplifica os passos a dar para determinar o dia da conjunção no mês de Março de 1563. Primeiro vê-se qual é o áureo número de 1563, calculando o resto da divisão $\frac{1563-1500}{19}$, que é 6. Em seguida conta-se (na coluna "Dias") quantos dias vão desde a linha onde está "Março" até à linha onde está 6, incluindo as linhas correspondentes a Março e a 6. O número obtido, 23, é o dia da conjunção do Sol e da Lua no mês de Março de 1563. Moya nota que, neste exemplo, o

áureo número está colocado, na tabela, abaixo do mês em questão mas que, quando tal não acontece é necessário "dar a volta" à tabela, ou seja, voltar à primeira linha depois de atingir o fim da tabela.

> Ejemplo para entender esta tabla. Pregunto a cuantos de marzo es conjuncion este ano de 1563. Mira el aureo numero deste ano que es 6 ado esta y hallar le as en el punto *a*. Cuenta ahora desde el espacio de marzo hasta el quantos días hay contando inclusive. E seran 23. E asi diras que el año 1563 a 23 de marzo fue conjuncion de luna. Y en abril fue a 22 por que de abril hasta el 6 de aureo número hay 22 espacios. Y asi por los otros meses hasta deciembre. Y llegando a enero ha de mudar aureo número porque es outro ano. Nota si el aureo numero estuviese arriba del mês de lo cual quieres saber la conjuncion daremos vuelta a la tabla [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 177v-178].

É possível que Moya tenha recorrido às indicações de Medina para determinar o áureo número, mas não usa o mesmo procedimento desse autor, nem o de Cortés. De qualquer modo, vemos que, aplicando o método de Medina ao primeiro exemplo de Moya, se obtém o mesmo resultado. Sem pretendermos entrar em grandes detalhes, notamos que Medina usa três parâmetros para saber quantos dias há de lua num certo dia de um dado mês de um determinado ano (ou seja, quantos dias passaram desde a última conjunção): um desses parâmetros é o número de "concurriente" (obtido numa tabela que permite conhecer esse número para qualquer ano), que Moya não menciona, mas cujo procedimento indica; o segundo é o número de meses que vai de Março até ao mês indicado, incluindo ambos; o terceiro é o dia referido. A regra que propõe consiste em somar estes três números e, em seguida, subtrair-lhes 30. O resultado indica o número de dias depois da conjunção. Ora, aplicando este processo para determinar o número de dias existentes depois da conjunção em 23 de Março de 1563, temos de somar 6 (concurriente de 1563) com 1 (diferença entre Março e Março, incluindo Março) com 23 (número de dias) o que dá 30; 30 – 30 = 0 é justamente o valor que era suposto dar[958]. É claro que, para poder seguir as indicações de Moya, era necessário preparar previamente uma tabela com os dados correspondentes ao ano pretendido; mas depois de construída esta tabela ela permitia uma utilização bastante fácil, que era útil, em particular, aos marinheiros. Tratava-se, digamos, de tarefa para um cosmógrafo!

[958] Nestes cálculos socorremo-nos da tabela apresentada por Medina [Pedro de Medina, 1545, f. 90r].

3.6.2. Determinação do horário das marés

No que respeita ao estudo das marés, sabemos que a leitura da *Arte de Navegar* serviu de suporte a Moya para desenvolver o seu trabalho (é o próprio Moya quem o diz); no entanto reconhecemos que o nosso autor não se limita a uma mera transcrição do texto de Medina, imprimindo-lhe uma apresentação um pouco diferente que, como veremos a seguir, possibilita uma consulta fácil. No capítulo intitulado "Como por los dias de la luna y rumbo dõde hade estar el sol se sabra a que horas ade venir la marea cada dia", Medina refere que nas 24 horas em que realiza o seu movimento de rotação, a Lua provoca duas marés crescentes ("aguas bivas") e duas decrescentes ("aguas muertas") e, em seguida, descreve o comportamento das águas do mar em 30 dias, dividindo-o em quatro "quartos", do seguinte modo: no primeiro quarto, que vai desde o primeiro dia de Lua até ao oitavo, as águas vão minguando; no segundo, ou seja, até aos quinze dias, as águas vão crescendo até a maré ficar cheia; durante o terceiro quarto vão minguando; no quarto quarto crescem até ao dia da conjunção. Na *Arte de Marear*, Moya anota a mesma informação em termos muito semelhantes, dizendo:

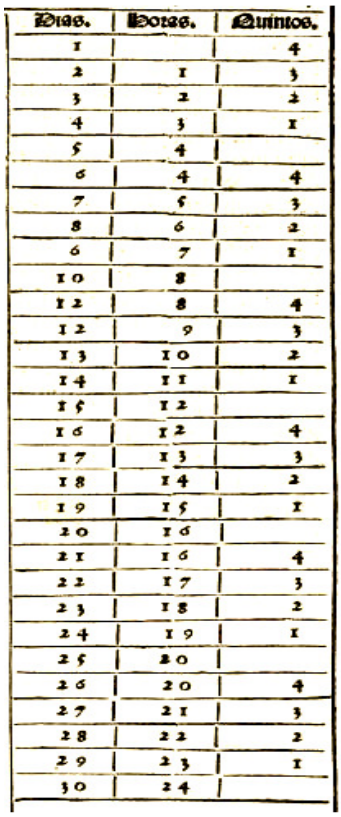
> La mar crece deste modo [.] El primero 4º de Luna que es desde 1 dia hasta 8 [,] la mar cada dia mengua mas. Y a esto dicen aguas muertas. El 2º cuarto que es desde 8 dias hasta los 15 la mar crece cada dia mas. Y llamanse aguas vivas. El 3º $\frac{1}{4}$ de Luna que es desde 15 hasta 22 mengua la mar como en el primero 4º. Y en el 4º quarto que es de 22 hasta 30 crece como en el 2º 4º [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 180v].

Moya indica dois modos de determinar os horários das marés: um deles dependente directamente do conhecimento de um novilúnio, ou seja, de um dia em que se observa a conjunção do Sol e da Lua[959]; e o outro recorre ao rumo do Sol. Medina também refere os dois métodos, mas não o faz pela ordem que Moya escolhe. O primeiro passo do processo mencionado por Moya consiste em registar a hora a que ocorre a praia-mar no dia de lua nova e estabelecer que em cada um dos dias seguintes a mesma maré se observará mais tarde $\frac{4}{5}$ de hora do que no dia anterior. Assim, sabido o dia de novilúnio e a hora a que

[959] Moya explica assim o que é o novilúnio: "Y de aqui es que quando la Luna esta en conjunction, porque entonces esta junta, y debaxo de una misma parte del Zodiaco, no se vee ninguna claridade, porque quando ansi estan, esta la parte alta de la Luna, que mira hazia las estrelas alumbrada, y la outra mitad correspondente hazia nosotros, esta obscura. Y a esto dizen Novilunio, o Conjunction" [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 87].

ocorre a praia-mar, a única dificuldade que se apresentava era a realização dos (simples) cálculos. Esta dependência dos novilúnios deve ter estado na opção, que tanto Moya como Medina fizeram, de incluir nos seus trabalhos tabelas (figura 113) que davam a conhecer a hora da praia-mar para os vários dias de lunação, partindo do dia de lua nova.

Regras para as marés			
Dias da Lua	Horas	Quintos	Dias da Lua
0	3	0	15
1	3	4	16
2	4	3	17
3	5	2	18
4	6	1	19
5	7	0	20
6	7	4	21
7	8	3	22
8	9	2	23
9	0	1	24
10	1	0	25
11	1	4	26
12	2	3	27
13	1	2	28
14	2	1	29
15	3	0	30



Dias.	Horas.	Quintos.
1		4
2	1	3
3	2	2
4	3	1
5	4	
6	4	4
7	5	3
8	6	2
6	7	1
10	8	
12	8	4
12	9	3
13	10	2
14	11	1
15	12	
16	12	4
17	13	3
18	14	2
19	15	1
20	16	
21	16	4
22	17	3
23	18	2
24	19	1
25	20	
26	20	4
27	21	3
28	22	2
29	23	1
30	24	

Figura 113: Tabelas que permitem conhecer a hora da praia-mar em cada dia, sabendo em que hora se deu a praia-mar no dia da conjunção do Sol e da Lua. À esquerda estão os valores apresentados por Moya [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 176v][960]; à direita os valores dados por Medina [Pedro de Medina, 1545, f. 92r].

As tabelas apresentadas por Moya e Medina são semelhantes, embora nelas ressaltem duas diferenças que mostram que a do nosso autor pode ser usada com vantagem sobre a de Medina. A primeira está relacionada com a disposição dos dados na tabela: na de Moya é posta em evidência a repetição de valores que ocorre de 15 em 15 dias (o que dá a lunação completa, se admitirmos que entre eles há uma diferença de 12 horas) e, por isso, ela é mais resumida e mais fácil de memorizar do que a de Medina. A segunda diz respeito aos

[960] Observamos que, na tabela de Moya na entrada de hora correspondente ao 9º dia de Lua, o número "0" significa "10", e na entrada dos 10º e 11º dias o número "1" significa "11". Além disso, na entrada de hora correspondente ao 13º dia o número "1" significa "1 hora depois das 12 horas". A título de exemplo, mostramos que os números relativos à linha de 8 dias de Lua são calculados por: $3\,(\text{correspondentes a } 0\,\text{dias}) + 8.\frac{4}{5} = 3 + \frac{32}{5} = 9 + \frac{2}{5}$, pois em cada dia a maré cresce $\frac{4}{5}$.

próprios dados: enquanto a tabela de Medina apenas indica o acréscimo a dar à hora de praia-mar no dia de lua nova para obter a hora da praia-mar noutro qualquer dia, a de Moya mostra a hora do dia da lua nova (3 horas) em que ocorre a praia-mar e as horas em que a praia-mar ocorrerá nos dias seguintes, permitindo, deste modo, uma leitura directa[961].

No *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar*, de Martín Cortés, encontrámos os mesmos valores que Moya inclui no manuscrito, apesar de o seu autor ter recorrido a uma forma diferente na apresentação dos dados. A tabela de Cortés é constituída por dois círculos concêntricos (figura 114) dos quais o mais pequeno mostra os dias da Lua, de um a trinta, e o maior regista as horas a que nesses dias ocorrem as marés. Assim, podemos ver, por exemplo, que tanto a tabela de Moya como a de Cortés registam a mesma hora para a praia-mar, no 1º e no 16º dias depois do novilúnio.

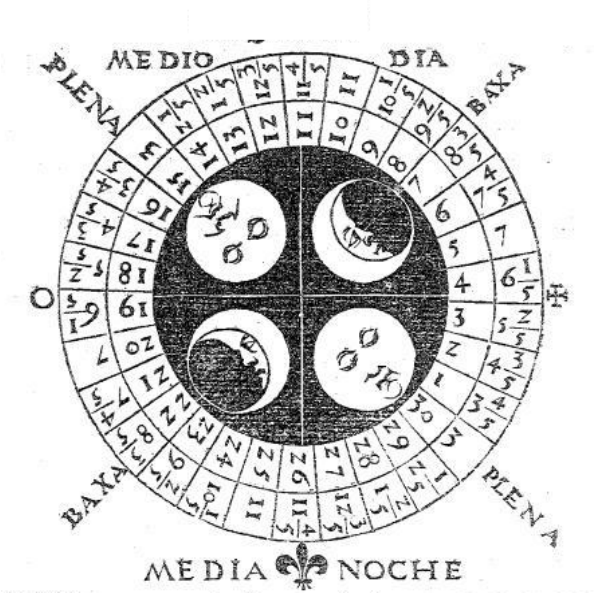


Figura 114: Tábua circular com indicação do horário das marés que ocorrem nos diferentes dias de Lua, depois do novilúnio. Na parte exterior estão registadas as diferentes marés que se observam ao longo de um dia [Martín Cortés, 1551, f. 55r].

Martín Cortés nota que o "crescer" e "decrescer" das marés não é sempre igual "en quantidade"; que nas conjunções e oposições as marés crescem e decrescem muito: os marinheiros chamam-lhes águas vivas e chamam "cabeça d'aguas" ao maior crescimento;

[961] Luís Albuquerque observa que os pilotos dispunham de listas com as horas das marés no primeiro dia de qualquer lunação, para os vários portos que frequentavam habitualmente, cada uma das quais constituía o "estabelecimento do porto" [Albuquerque, L., 1989, p. 21]. Fontoura da Costa sublinha que as obras sobre "*Arte de Navegar* do fim do século XVI já contêm uma tabela a começar em 3 horas no dia do novilúnio" [Costa, A. F., 1960, pp. 267-268].

nos quartos de lua, que são aos sete e aos vinte e dois dias de lua, crescem e decrescem pouco: os marinheiros chamam-lhes "aguas chifas" e "aguas muertas"[962].

O segundo processo de determinação dos horários das marés dado por Moya está relacionado com a passagem da Lua nos diferentes rumos, que ele indica nas seguintes "reglas generales":

> La luna al nordeste: o al sudoeste pleamar. La luna al leste: o al oeste media jusante. La luna al norueste: o al sueste baxa mar. La luna al norte: o al sur media montante [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 176v]

Para saber a posição da Lua nos rumos, os marinheiros recorriam à posição do Sol nos rumos, obtendo esta última com o auxílio da agulha de marear ou da estrela Polar, conforme fosse dia ou noite (no hemisfério Norte). Fontoura da Costa, no estudo que faz sobre o modo de determinação das marés pela rosa-dos-ventos, observa que os marinheiros antigos tinham imaginado uma "rosa horária ou equatorial" que consistia numa "rosa da agulha de marear" onde estavam marcadas as 32 "quartas". Esta podia representar um relógio horário para o Sol e para a Lua, equivalendo cada quarta à duração de 45 minutos. Colocando-a paralelamente ao Equador e com o Sul para cima, ela mostrava ao meio-dia o Sol no Sul, às três horas da tarde no Sudoeste, às seis horas no Oeste, às nove no Noroeste, à meia-noite no Norte, etc. A correspondência entre as direcções marcadas nessa "rosa" e as 24 horas do dia permitia saber em que rumo estava o Sol em cada hora do dia[963]. Este aspecto não passa despercebido a Moya que observa o seguinte:

> Para saber el Sol en que rumbo anda cada hora nota que a mediodia siempre esta en el meridiano que es lo que el marinero dice sur. Y a media noche en el meridiano inferior opuesto al dicho. Que es lo que el marinero dice norte. Y en cada $\frac{3}{4}$ de hora pasa un rumbo mas adelante de suerte que se quisieres saber a cualquiera hora en que rumbo anda el sol toma las horas de depues de mediodia o de media noche parte las por $\frac{3}{4}$ e lo que viniere sera el rumbo por donde esta el sol adelante del rumbo de mediodia se las horas son de despues

[962] [Martín Cortés, 1551, f. 55r].

[963] Para explicar o modo de funcionamento da roda horária, Fontoura da Costa baseou-se na interpretação e comentário feitos por Luciano Pereira da Silva ao trabalho do navegador português Duarte Pacheco, incluídos na sua obra *Arte de Navegar dos Portugueses* [Costa, A. F., 1960, pp. 263-264]. Mais detalhes sobre este assunto em [Silva, L. P., 1945, pp. 411- 422].

de mediodia o adelante del rumbo de la media noche se las horas fueren despues de media noche [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 199v].

De acordo com as palavras de Moya, para se saber em que rumo estava o Sol, por exemplo às quatro horas da madrugada, calculava-se o produto de 4 por 15, obtendo o número de graus que correspondem a 4 horas, e dividia-se o resultado por $11\frac{1}{4}$, que é o valor do ângulo formado por dois rumos consecutivos. Marcando esse número a partir do Norte, obtinha-se o rumo em que se encontrava o Sol; se em vez de 4 da madrugada se tratasse das 4 horas da tarde, a contagem era feita a partir do Sul.

Supongo ser las 4 de despues de media noche. Multiplica por 15 que son los grados que el Sol anda en una hora al moto rato. E parte por $11\frac{1}{2}$ [964] que son los grados que dista un rumbo de otro y el cociente cuenta lo desde el norte que es el meridiano de la media noche que se le dicen las horas. Y si estas horas son de despues de [medio] dia contaras desde el sur. Que es el meridiano superior o la parte que en el norte decimos cabeza. Y donde se cumplire el nº alli esta el Sol[965] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 200r].

Conhecida a posição que, num dado momento, o Sol ocupava nos rumos, não era difícil determinar a posição da Lua. Em Cortés[966] encontramos uma explicação muito simples. Diz o seguinte: enquanto o Sol, no seu movimento, dá a volta à Terra em 4 quartas de céu, que são 24 horas, a Lua gasta 24 h e 48′. Neste intervalo, a maré cresce duas vezes e decresce outras duas, ou seja, cresce durante 6 h e 12′, decresce nas 6 h e 12′ seguintes, volta a crescer durante 6 h e 12′ e a decrescer nas 6 h e 12′ seguintes. Isto significa que, se num dia às 12 h fosse praia-mar, às 6 h e 12′ da tarde seria maré vaza e às 12 h e 48′ do dia seguinte seria, outra vez, praia-mar. De modo que, ao intervalo de um dia correspondia $\frac{4}{5}$ de hora no atraso da maré, que era o tempo que a Lua se atrasava para voltar ao ponto de partida.

[964] Por lapso, o valor que consta no manuscrito é 11 ½ em vez de 11 ¼.

[965] Substituímos o símbolo que Moya usa para "médio", que é constituído pela letra m com um pequeno círculo em cima, pela palavra "médio".

[966] [Martín Cortés, 1551, ff. 54r-54v].

Moya não é tão explícito como Cortés, embora não deixe de referir a mesma correspondência entre a duração dos movimentos diurnos do Sol e da Lua:

> Sobre el andar del Sol e Luna por los 32 vientos cada día se entiende imaginando (como es la verdad) que el [Sol e la Luna] cada día y cada uno por sí al movimiento rato dan una vuelta. El sol la da entera y la [Luna] $\frac{4}{5}$ de ora más dá su vuelta [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 199r].

E utiliza esta correspondência para determinar a localização da Lua, supondo conhecido o rumo do Sol:

> Para saber en que rumbo anda la Luna a cada hora sabe primero en que rumbo esta el Sol como esta dicho. Y sabe este dia que lo quieres ver quantos son de Luna. Los cuales dias de Luna multiplica por 12 que es lo que la Luna se aparta cada dia del Sol e lo que viniere parte lo por $11\frac{1}{4}$ que es lo que hay de un rumbo a otro parte de 360 grados del zodiaco [,] por 32 rumbos. Y lo que viniere seran los rumbos que la Luna esta apartada del Sol hacia tras que segun el proprio movimiento del Sol o Luna que sera desde occidente hacia oriente. Y al se acabar este numero sera el rumbo donde esta la Luna [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, ff. 199v-200r].

Vejamos agora com mais detalhe, e baseando-nos nas indicações de Moya, como ele trata a questão. Por exemplo, para o 1º dia de Lua tem-se $(1\times12)\div11.25\approx1.07$; marcando 1 rumo (toma-se a parte inteira de 1.07) em sentido anti-horário (porque a Lua se atrasa em relação ao Sol) a partir do rumo do Sol nesse dia (ou seja, como ele diz, "nordeste quarta al leste"), obtém-se a posição da Lua no nordeste; o mesmo sucede para todos os dias até ao 14º, pois $(14\times12)\div11.25\approx14.93$. No 15º dia faz-se um acerto subtraindo 1 ao resultado obtido, porque há 32 rumos e apenas 30 dias de Lua ("por razõ que los rumbos sõ .xxxii. y los dias .xxx. damos enel medio una quarta"); assim, em vez de 16, que se obtém de $(15\times12)\div11.25\approx16$, considera-se 15, donde resulta que, quando o Sol está em sudueste, a Lua está em nordeste. No 16º dia recomeça o processo. Pelos cálculos propostos chega-se às mesmas conclusões de Medina, para cujo texto Moya remete o leitor ("Sobre esto del andar

el [sol e la luna] por los 32 rumbos lee la arte de marear fo. 90 et 81")[967]. Essas conclusões são, em resumo, as seguintes: desde o 1º dia de Lua até ao 15º, andando o Sol entre o 1º rumo ("nordeste quarta al leste") e o 14º rumo ("susudueste") a Lua está no nordeste, e estando o Sol entre o 16º rumo ("sudueste quarta al oeste") e o 29º ("nornordeste") a Lua está no sudueste:

> El .i. dia de la luna estãdo el sol en el nordeste quarta al leste esta la luna enel nordeste (…) El .v. dia el sol enel leste quarta al sueste la luna enel nordeste. El .vi. dia el sol enel sueste [sic][968] la luna enel nordeste. El .vii. dia el sol enel sueste quarta al leste la luna enel nordeste. El viiii. Dia el sol enele sueste la luna enel nordeste. El .ix. dia el sol enel sueste quarta al sur la luna enel nordeste. El .x. dia el sol enel susueste la luna enel nordeste. El .xi. dia el sol enel sur quarta al sueste la luna enel nordeste. El .xii. dia el sol enel sur la luna enel nordeste. El .xiii. dia el sol enel sur quarta al sudueste la luna enel nordeste. El .xiiii. dia el sol enel susudueste la luna enel nordeste. El .xv. dia. Este dia cõtamos dos quartas jũtas por razõ que los rumbos sõ .xxxii. y los dias .xxx. damos enel medio una quarta, y enel fin outra. Assi que, a los .xv, estado el sol en el sudueste estará la luna enel nordeste (…) Alos .xvi. dias. Estado el sol en el sudueste quarta al oeste, estará la luna enel sudueste[969] [Pedro de Medina, 1545, ff. 90v-91r].

A posição do Sol e da Lua nos rumos permitia conhecer os períodos de crescimento e decrescimento das marés. Moya faz esse registo numa tabela (figura 115), que designa por "tabla para los crecientes", em que figuram as horas da praia-mar de acordo com a posição do Sol. Na primeira coluna indica os primeiros quinze dias de lua depois da conjugação e na segunda os últimos 15. Na terceira coluna dá a posição do Sol, que corresponde aos dias de Lua indicados nas duas colunas anteriores. Na quarta coluna marca a hora da praia-mar correspondente à posição do Sol no rumo, que será antes ou depois do meio-dia conforme se refere ao dia representado na primeira ou na segunda coluna.

---

[967] Já atrás observámos que Moya se refere à obra de Medina intitulando-a *Arte de Marear*. Aqui não nos parece haver dúvida que se trata da *Arte de Navegar* pois nos capítulos que Moya menciona é tratado o assunto em causa.

[968] Onde se lê "sueste" devia ler-se "lessueste".

[969] No texto de Medina sobre a relação entre a posição que o Sol e da Lua ocupam nos rumos há alguns lapsos (por exemplo, o que diz respeito ao 2º dia, ao 6º dia, etc.) mas estão corrigidos na "Tabla para los crecientes" dada por Moya.

Tabla para las crecientes

Dias		*Rumbos*	*Oras*
1	16	Nordeste 4º al leste	$3\frac{3}{4}$
2	17	Lesnordeste	$4\frac{1}{4}$ (*)
3	18	Leste 4[º] al nordeste	$5\frac{1}{4}$
4	19	Leste	6
5	20	Leste 4[º] al sueste	$6\frac{3}{4}$
6	21	Lessueste	$7\frac{1}{2}$
7	22	Sueste 4[º] al leste	$8\frac{1}{4}$
8	23	Sueste	9
9	24	Sueste 4º al sul	$9\frac{3}{4}$
10	25	Susueste	$10\frac{1}{2}$
11	26	Sur 4º al sueste	$11\frac{1}{4}$
12	27	Sur	12
13	28	Sur 4º al sudoeste	$\frac{3}{4}$
14	29	Sursudoeste	$1\frac{1}{2}$
15	30	Sudoeste 4º al sur	$2\frac{1}{4}$

Figura 115: Tábua para os "crescientes". Na primeira e na segunda coluna está indicado o número de dias da Lua depois da conjunção: respectivamente, dias 1 a 15 e dias 16 a 30. Na terceira coluna é dada a posição do Sol, que corresponde aos dias de Lua indicados nas duas colunas anteriores. Na quarta coluna está marcada a hora da praia-mar correspondente à posição do Sol no rumo, que será antes ou depois do meio-dia conforme se refere ao dia representado na primeira ou na segunda coluna[970], respectivamente [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 181r].

Pela consulta desta tabela fica-se a saber que no 1º dia de Lua depois da conjunção o Sol está no rumo "nordeste 4ª al leste" e a praia-mar é às $3\frac{3}{4}$ da manhã, e que no 16º dia de Lua depois da conjunção a praia-mar é às $3\frac{3}{4}$ da tarde.

[970] O valor indicado em (*) está errado; devia ser $4\frac{1}{2}$ [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 181r].

Os dados constantes nesta tabela colocaram-nos uma questão: quando os comparamos com os inscritos na tabela intitulada "Regra para as marés" (dada na figura 113), observamos que naquela as marés ocorriam com intervalos de $\frac{4}{5}$ de hora (entenda-se, a mesma maré ocorria num certo dia mais tarde $\frac{4}{5}$ hora do que no dia anterior), enquanto nesta a diferença é de $\frac{3}{4}$ hora. E o certo é que, embora se trate de uma diferença muito pequena (apenas 3 minutos), os valores desta última tábua não estão correctos! Perguntámo-nos, por isso, por que a teria Moya apresentado no seu trabalho? Pensamos que a resposta mais provável estará relacionada com a sua evidente utilidade prática! De facto, como diz Pacheco Pereira[971], enquanto os astrólogos consideravam o valor exacto $\frac{4}{5}$, os marinheiros, na sua prática, adoptavam o valor $\frac{3}{4}$ que, embora aproximado, lhes permitia determinar mais facilmente o número de dias, contando-os por quartas da rosa-dos-ventos[972].

---

[971] Duarte Pacheco Pereira (nasceu c. 1460). Como cosmógrafo, foi escolhido por D. João II para fazer parte das testemunhas nas negociações e posterior assinatura do Tratado de Tordesilhas; como navegador, tem sido considerado precursor de Pedro Álvares Cabral na descoberta do Brasil, durante uma viagem pelo Atlântico, que teria realizado em 1498. É autor do *Esmeraldo de situs orbis*, obra que ficou incompleta e que constitui um roteiro comentado das costas ocidental e oriental da África. Nela, Duarte Pacheco Pereira refere, embora não muito claramente, que o rei D. Manuel o tinha mandado descobrir «uma tão grande terra firme» a ocidente do Oceano Atlântico, facto até hoje desprovido de provas convincentes e que deu origem a várias especulações sobre a sua veracidade. J. Barradas de Carvalho, no seu estudo da figura de Duarte Pacheco Pereira e da importância da sua obra no contexto do Renascimento português, considera como certo que a exploração se tenha realizado, chefiada por este navegador e cosmógrafo, que o seu destino provável era a costa brasileira e que terá mesmo passado além da linha de demarcação estabelecida pelo Tratado de Tordesilhas [*Cf. A la recherche de la specificité de la Renaissance portugaise*, Paris, Fond. Cal. Gulbenkian, 1983].

Jorge Couto, no seu livro *A construção do Brasil* (1995), apresenta uma «proposta interpretativa» dos dados existentes, que vai no sentido de considerar que Duarte Pacheco Pereira realizou essa missão, tendo atingido a costa brasileira. Com o intuito de calcular a localização do meridiano de Tordesilhas, Pacheco Pereira aproximou-se do litoral brasileiro numa zona localizada «na esfera de influência castelhana. Esse motivo – de carácter político-diplomático – explicaria que Portugal não tivesse divulgado as descobertas que efectuou, respondendo, assim, às interrogações colocadas sobre as razões que teriam estado na origem da ocultação dos resultados obtidos por aquela expedição». http://purl.pt/162/1/brasil/12_pacheco_esmeraldo.html (Consultada em 13 de Setembro de 2010).

[972] Entre os astrólogos e os marinheiros ha uma diferença sôbre o curso da lua, porque os astrólogos dizem que da hora da sua conjunção e novilunio, em cada dia natural, que é de 24 horas, até à hora em que é cheia e em oposição do Sol, quatro quintos de hora se arreda do mesmo sol, e passada a hora da sua oposição e plenilunio outros quatro quintos se vai ao Sol achegando até ser outra vez com ele em conjunção…; e os marinheiros dizem que neste curso da lua se não arreda ou achega ao sol em cada dia natural mais de tres quartos de hora que releva uma quarta pela agulha de marear; assim que entre êles há um vintavo de hora de diferença, e posto que os astrólogos nisto tenham a verdade e os marinheiros não, por êste conto ser tão pouco que não releva senão três minutos e não faz dificuldade nem êrro sensível às marés de que esperamos tratar, portanto seguiremos a opinião dos marinheiros, porque as marés mais ligeiramente se tiram pelo conto da agulha de marear que por outra guisa, segundo os ditos marinheiros d'antiguidade seguem e praticam [*Cf. Esmeraldo de Situs Orbi* de Duarte Pacheco Pereira em [Silva, L. P., 1945, p. 412]].

Ao incluir as duas possibilidades, Moya cumpre o duplo objectivo de tornar a sua obra atractiva para lições em terra e prática no mar.

3.7. A *Arte de Marear* e os *Fragmentos Mathematicos*

Três anos depois de ter escrito a *Arte de Marear*, Moya fez publicar os *Fragmentos Mathematicos* [1567-1568], cujo segundo tomo, aquele que inclui os assuntos que agora nos interessam, tem data de 1567. Como facilmente se reconhece, o extenso título da obra[973] anuncia algumas matérias que já se encontram incluídas no manuscrito, mas o número de páginas deste volume dos *Fragmentos Mathematicos*[974] (um pouco menos de 500 páginas) contrasta com o número de páginas da *Arte de Marear* (cerca de 65 páginas).

As questões que se nos colocaram quando iniciámos a comparação destes dois trabalhos foram as de saber se havia temas tratados no manuscrito que não constassem nos *Fragmentos* e se, no que toca aos assuntos constantes em ambos os textos, os *Fragmentos* seriam uma paráfrase da *Arte de Marear*.

As conclusões a que chegámos permitem responder afirmativamente à primeira questão, e mostram que nos temas comuns a ambos os textos os *Fragmentos* não são uma paráfrase do manuscrito *Arte de Marear*.

Referimos, em seguida, alguns tópicos que apenas são tratados na *Arte de Marear*.

1. A introdução de termos relacionados com a especificidade da profissão de marinheiro. Alguns destes termos dizem respeito à constituição de uma embarcação e ao seu equipamento. Por exemplo, Moya explica que "quartales" são lugares onde se guardam as

---

[973] *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos. En que se tratam cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Navegación, y Reloxes. Ordenada por el Bachiller Juan Perez de Moya, natural de Santistevan del Puerto*. Salamanca. *Libro segundo, trata cosas de Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Relojes.*

[974] O segundo volume dos *Fragmentos* está dividido em três partes. A primeira, e mais extensa, é constituida por trinta capítulos, nos quais se introduzem conceitos e princípios gerais sobre a composição do universo, que Moya considerava indispensáveis à arte de navegar. Aí podemos, por exemplo, ficar a saber qual é a sua interpretação da composição do mundo, dos céus e das estrelas, de que modo crescem e decrescem os dias do ano, por que é que "debaixo" da equinocial os dias e as noites têm igual duração. Mas podemos também aprender conceitos matemáticos como o de "fracção astronómica" e regras para obter a latitude dos lugares e para determinar, com o astrolábio, um arco igual a outro previamente definido. A segunda parte, com vinte capítulos, trata dos quatro elementos – fogo, ar, água e terra – da divisão e descrição da Terra, dedicando atenção especial a cada um dos continentes – Europa, Ásia, África e América. Nela encontramos temas tão diversos como a definição de ilha e de península e o estudo das zonas terrestres e dos climas, o modo como se elabora uma carta descritiva de uma província e uma regra para calcular o percurso, em linha recta, entre duas povoações representadas na carta. A terceira parte é praticamente dedicada à construção e utilização de relógios. Para determinar a hora, Moya recorre ao quadrante, ao astrolábio, à estrela Polar e à Lua, e parece conhecer bem o estudo sobre os relógios que Martín Cortés apresenta no seu trabalho [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 440].

velas, “escalamos” são as estacas de madeira, “crujia” é o espaço que vai da popa à proa no meio do convés do navio, “topa” é o anel de ferro ou de madeira usado para subir as velas, “postiza” é o lugar onde assentam os remos, “vela maestra”, “vela de trinquete” e “vela mesana” são as velas maior, menor e média, respectivamente, “maimoneta” é a estaca com que se atam as velas, “escota” é o cabo que serve para prender as velas, “nocher” é o responsável pelo guarda-roupa, “panol” é a despensa. Outros termos referem-se a conceitos que devem ser conhecidos por quem navega, como “dar al través”, que quer dizer perder-se por causa da tempestade, “leva remo”, que significa pára de remar, “ciaboga” que quer dizer dar a volta à embarcação, e “singladura” ou “jornada”, que é o que o navio percorre num dia de viagem.

2. A indicação relativa às marés e à sua relação com a posição do Sol e da Lua, conhecimentos de grande utilidade prática para os marinheiros, que deles se socorriam para saber, por exemplo, quando deviam entrar ou sair das barras.

3. A explicação do modo prático de determinar a profundidade do local em que a embarcação se encontrava, e a alusão à profundidade necessária para sustentar uma nau.

Por outro lado, notamos que no manuscrito Moya não faz referência ao método dos eclipses, que então se utilizava para determinar a diferença de longitude entre dois lugares, certamente porque o seu conhecimento não era importante para os marinheiros. De facto, durante uma viagem era bastante improvável que ocorresse um eclipse.

Nos parágrafos que se seguem, comparamos os *Fragmentos Mathematicos* e a *Arte de Marear* em 3 temas concretos estudados nas duas obras: os ventos e roda de léguas, a altura do Pólo e a questão da longitude.

3.7.1. Sobre os ventos e a roda das léguas

Tanto na *Arte de Marear* como nos *Fragmentos Mathematicos* Moya trata muito desenvolvidamente os ventos, o que revela bem a importância destes agentes atmosféricos, não só na navegação, mas também noutras actividades.

O estudo dos ventos apresentado nos *Fragmentos Mathematicos* inclui os conhecimentos de carácter mais teórico dados no manuscrito. Contudo, Moya trata, também, de outros aspectos que não cabem dentro de um texto de marear. Lembramos, por exemplo, uma passagem interessante em que descreve um aparelho que permite, sem sair de casa, obter a direcção do vento. Trata-se de um catavento (“veleta”) que se coloca no telhado de uma casa e ao qual se liga um outro catavento, sincronizado com o primeiro, no

interior da casa. A este segundo catavento conecta-se uma rosa-dos-ventos que permite saber, dentro de casa, a direcção do vento[975]. É claro que este aparelho não tem relação directa com a arte de marear, e não é dado no manuscrito.

Na revisão que faz das rodas das léguas, Moya inclui nos *Fragmentos Mathematicos* uma roda (figura 116) diferente das dadas na *Arte de Marear*, e também diferente das referidas pelos outros autores que consultámos.

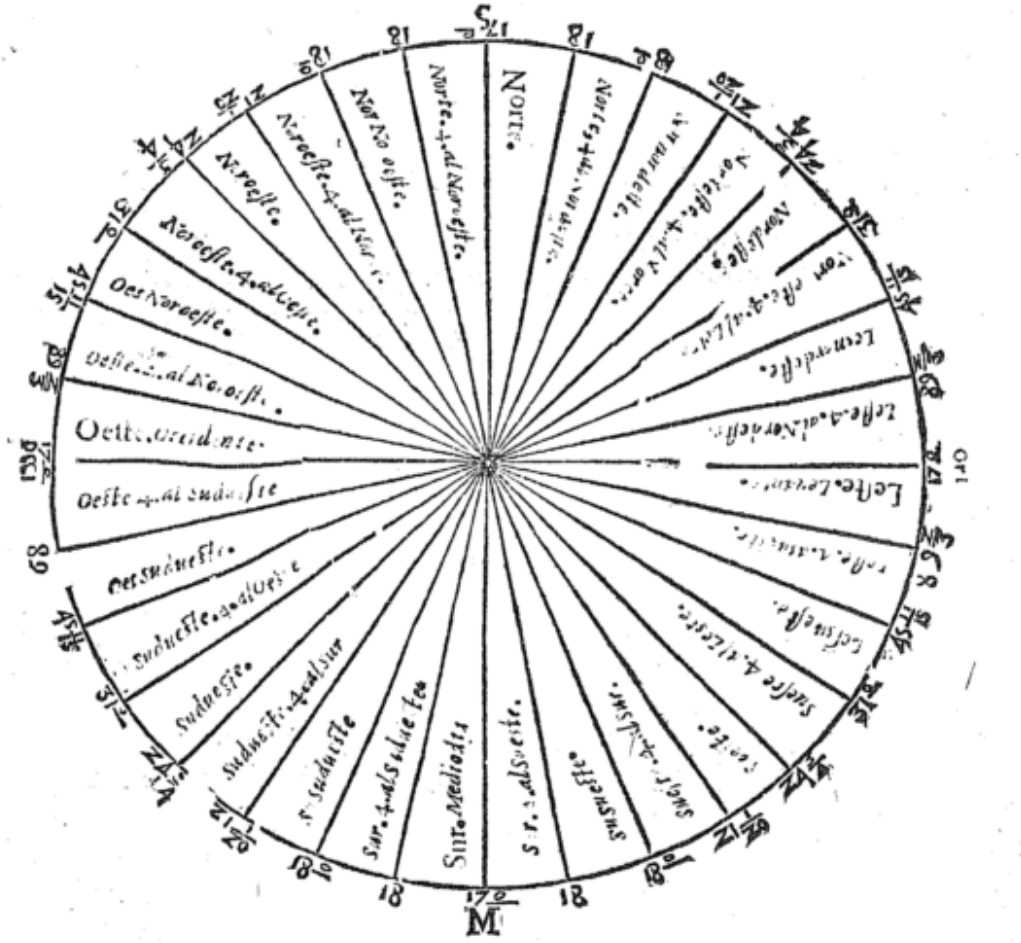


Figura 116: Roda das léguas. Mostra quantas léguas correspondem a cada uma das direcções dos 32 ventos, considerando a correspondência de $17\frac{1}{2}$ léguas a 1º de meridiano [Juan Pérez de Moya, 1567, entre p. 282 e p. 283].

Os valores que nela indica, que apresentamos no quadro 15, estão mais próximos dos de Cortés[976], diferindo apenas para os rumos correspondentes a 11,25º e 22,5º. Além disso, nos *Fragmentos*, Moya considera, invariavelmente, que o comprimento de 1º de círculo

[975] [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 293].

[976] Ver em "De las léguas que se corren por grado segũ diversas derrotas" [Martín Cortés, 1551, ff. 87v-88v].

máximo é $17\frac{1}{2}$ léguas, enquanto no manuscrito indica, também, outras hipóteses, como $16\frac{2}{3}$ léguas e 17 léguas.

Norte, Sul, Este, Oeste	$17\frac{1}{2}$
Norte 4ª a nordeste NE; Norte 4ª a noroeste; Sul 4ª a sudeste; Sul 4º a sudoeste	18
Nornordeste; Nornoroeste; Susudeste; Susudoeste	$18\frac{1}{2}$
Nordeste 4ª a norte; Noroeste 4ª a norte; Sudeste 4ª a sul; Sudoeste 4ª a sul	$21\frac{1}{20}$
Nordeste, Noroeste, Sudeste, Sudoeste	$24\frac{3}{4}$
Nordeste 4ª a este; Noroeste 4ª a este; Sudeste 4ª a este; Sudoeste 4ª a oeste	$31\frac{1}{2}$
Esnordeste; Oesnoroeste; Essudeste; Oessudoeste	$45\frac{11}{15}$
Este 4ª a nordeste; Oeste 4ª a noroeste; Este 4ª a sudeste; Oeste 4ª a Sudoeste	$89\frac{2}{3}$

Quadro 15: Síntese dos valores dados no Regimento das léguas (figura 116) incluído na obra *Fragmentos Mathematicos* [Juan Pérez de Moya, 1567, entre p. 282 e p. 283].

3.7.2. Determinação da altura do Pólo ou latitude dos lugares

Quando trata nos *Fragmentos* a determinação da altura do Pólo, Moya não inclui o regimento de Enciso nem o de Faleiro, dados no manuscrito, afirmando que opta por seguir as indicações que Cortés, Medina e Nunes deram nas suas obras.

> Es mas de advertir, que moviendo se la estrella polar al rededor del polo, en unas partes se abaxa, y alça mas que en otras, aunque la mayor distancia, o apartamento que puede hacer es tres grados y médio, que es el semidiametro de su circunferencia. El qual apartamiento haze, quando precisamente estuviere en derecho de la cabeça, o de los pies. Las variaciones deste desuiamiento de los dichos dos puntos se pondran en el siguiente articulo segun la opinion de Martin Cortes, y maestro Medina, y Pedro Nuñez, y otros que han escripto de la navegación [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 184].

Pudemos, no entanto, verificar que não seguiu as orientações de Pedro Nunes, e que o seu texto está muito mais próximo do de Medina do que do de Cortés. Ao fazermos esta afirmação, temos em atenção as seguintes particularidades: 1.ª Moya descreve as regras em linguagem retórica, num estilo semelhante ao da *Arte de Navegar* (embora não apresente as figuras que acompanham a explicação do texto de Medina); 2.ª Cortés explicita as correcções para apenas 8 posições[977] das guardas, enquanto Moya, como Medina, inclui as correcções para 16 posições (o dobro das que dá na *Arte de Marear*); 3.ª Nunes não dá este regimento, chegando mesmo a considerar errado que se tomasse $3º\,30'$ como a distância da estrela polar ao Pólo, e estimando o seu valor em $4º\,9'$ ou $4º\,10'$:

> No regimento que tem os pilotos pera tomar a altura do polo pella estrela: há erro: porque diz que da estrela ao polo há tres grãos e meo e sam quatro e nove ou dez minutos: ho mays que dizem que quando hũa guarda estever com ha outra em tal rumo que a estrela do norte estará abayxo ou acima do eyxo tantos grãos .ec. Nam tenho isto por certo e o melhor he tomar a estrela quãdo esta mais alta ou mais bayxa: porque entam esta no meridiano e acrecentar ou tirar os quatro grãos e dez minutos que há della ao polo [Pedro Nunes, 1537, f. 143].

Não sabemos se o facto de Moya mencionar o nome de Nunes se teria ficado a dever ao prestígio do matemático português, mas não deixa de ser curioso observar que ao preferir os $3º\,30'$ em lugar dos $4º\,9'$, ou $4º\,10'$, de Nunes, Moya estava a fazer a opção mais correcta, pois, de acordo com Luís Albuquerque[978], aquela coordenada da estrela polar atingiu, por volta de 1500, o valor $3º\,30'$, que adoptaram os pilotos e outros práticos.

3.7.3. Ainda a questão da longitude

Como refere Luís Albuquerque[979], a maior deficiência da náutica do século XVI foi o desconhecimento de um processo prático que possibilitasse a determinação frequente da longitude a bordo de navios. Esta questão atraiu a atenção de muitos mareantes e cosmógrafos, nomeadamente da Península Ibérica[980], sobretudo a partir da altura em que se firmou o Tratado de Tordesilhas (7 de Junho de 1494), que estabelecia a linha de demarcação entre os territórios de Portugal e Espanha num meridiano a 370 léguas a

[977] [Martin Cortés, 1551, ff. 81v-82r].

[978] [Albuquerque, L., 1989a, pp. 104-105]

[979] [Albuquerque, L., 1972, p. 231].

[980] [Costa, A. F., 1960, p. 150].

ocidente das ilhas de Cabo Verde[981]. Um dos processos apresentados na *Arte de Marear* para a determinação da longitude recorria, como referimos, ao nordestear e noroestear da agulha de marear. Recordamos que, nesse texto, Moya afirma que na ilha do Côrvo as agulhas de marear apontavam precisamente o Norte e que, sempre que o caminho se fizesse pelo meridiano que passa por essa ilha, elas não nordesteavam nem noroesteavam:

> El nordestear de las agujas no es outra cosa sino no ensenar el polo en el meridiano donde estan. Y nota que en las islas de los Azores y mas precisamente en la del Cuerbo señalam las agujas el verdadero polo [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 173v].

Esta indicação sugeria que se tomasse como referência na marcação da longitude o meridiano que passa pela ilha do Côrvo, que foi a opção feita no manuscrito. Nos *Fragmentos Mathematicos*, Moya abandona essa ideia, parecendo render-se à autoridade de Ptolomeu. Depois de observar que o sábio grego considera a marcação das longitudes a partir de um meridiano que passava pela ilha de Tenerife, porque no seu tempo ainda não tinham sido descobertas as ilhas dos Açores, Moya sublinha a preferência que os cosmógrafos tinham pela ilha de Hierro (a mais ocidental das ilhas do arquipélago das Canárias) como ponto de partida para a marcação dessa coordenada:

> Has de saber que los Cosmografos tan curiosamẽte trataron la traça del mundo, que hasta enel poner delas ciudades, quisieron mostrar los sítios por la longitud, y latitud, y dividiron el mundo con la equinoctial, en dos partes yguales, y por la dicha línea andando al rededor se cuenta la longitud. Y hechando outra línea al rededor, que passe por los pólos, y se cruze con la equinoctial, la corte en dos partes, el uno en el punto donde la tierra es la Isla del hierro, en las Canarias [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 345-346].

E define a longitude verdadeira, ou "absoluta", de um lugar como a amplitude, em graus, compreendida entre o meridiano das Canárias e o meridiano do lugar, considerada na Equinocial ou num paralelo:

---

[981] Esta divisão não foi na época levada a cabo por não se chegar a acordo sobre a forma de traçar o dito meridiano, tendo sido abolida pelo Tratado de 13 de Janeiro de 1750 [Costa, A. F., 1960, p. 158]. A primeira indicação sobre a determinação da longitude por meio de relógios é devida a Fernando Colombo (Hernando Colón), que foi o segundo filho de Cristóvão Colombo [Leitão, H. e Martins, L., 2004, p. 42], que a apresentou à Junta de Badajoz, em 13 de Abril de 1524. Fontoura da Costa conta que houve diversas tentativas para a efectivação do Tratado de Tordesilhas, uma delas provocada por D. João III, que deu origem à reunião que ficou conhecida por *Junta de Badajoz*. A esta junta terão concorrido os mais notáveis letrados, astrólogos e marinheiros de Portugal e Espanha, distinguindo-se os delegados portugueses pelo seu saber profissional [Costa, A. F., 1958, p. 46].

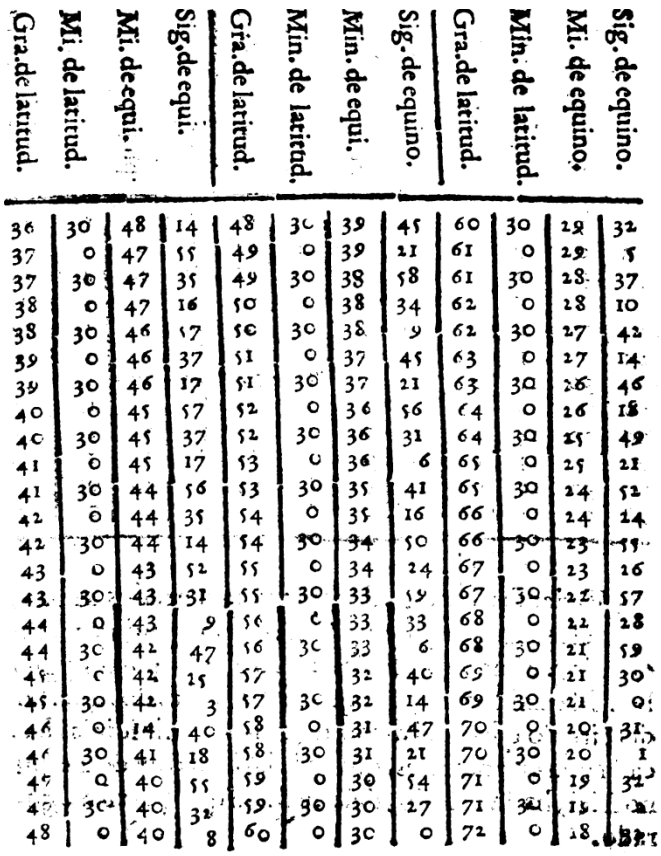
> Longitud verdadera, o absoluta de un pueblo, es los grados que ay la equinoctial adelante, o por algun parallelo entre el meridiano de tal pueblo, y el de las Canarias [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 237].

Moya observa que a distância entre dois lugares com longitudes diferentes não depende da longitude absoluta de cada um deles, mas apenas do número de graus compreendidos entre os meridianos desses lugares, independentemente do meridiano que se tome como referência; e define "longitud relata" como a amplitude do arco de meridiano que os separa, definição essa que não aparecia na *Arte de Marear*.

> Longitud relata es los grados que ay entre los meridianos de qualesquiera dos pueblos, sin tener respecto al meridiano de las Canarias [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 237].

A determinação da "longitude relata" dependia do conhecimento da relação entre os comprimentos dos arcos de um qualquer paralelo e os que lhes correspondiam na Equinocial; tratava-se, por isso, de um problema de trigonometria esférica que Moya refere como "converter graus de paralelo em graus de equinocial". Este problema não é abordado na *Arte de Marear*, mas é tratado nos *Fragmentos Mathematicos*, onde Moya apresenta uma tabela de conversão (figura 117) que transcreve na totalidade da *Cosmographia* de Apiano, fazendo menção explícita ao autor[982].

[982] Moya refere-se, provavelmente, à versão castelhana de 1548. Já no manuscrito aconselha, a dado momento, a leitura da obra: "lee Apiano cap. 9 del instrumento de la theorica del Sol".



Gra. de latitud.	Mi. de latitud.	Mi. de equi.	Sig. de equi.	Gra. de latitud.	Min. de latitud.	Min. de equi.	Sig. de equino.	Gra. de latitud.	Min. de latitud.	Mi. de equino.	Sig. de equino.
36	30	48	14	48	30	39	45	60	30	28	32
37	0	47	55	49	0	39	21	61	0	29	5
37	30	47	35	49	30	38	58	61	30	28	37
38	0	47	16	50	0	38	34	62	0	28	10
38	30	46	57	50	30	38	9	62	30	27	42
39	0	46	37	51	0	37	45	63	0	27	14
39	30	46	17	51	30	37	21	63	30	26	46
40	0	45	57	52	0	36	56	64	0	26	18
40	30	45	37	52	30	36	31	64	30	25	49
41	0	45	17	53	0	36	6	65	0	25	21
41	30	44	56	53	30	35	41	65	30	24	52
42	0	44	35	54	0	35	16	66	0	24	24
42	30	44	14	54	30	34	50	66	30	23	55
43	0	43	52	55	0	34	24	67	0	23	26
43	30	43	31	55	30	33	59	67	30	22	57
44	0	43	9	56	0	33	33	68	0	22	28
44	30	42	47	56	30	33	6	68	30	21	59
45	0	42	25	57		32	40	69	0	21	30
45	30	42	3	57	30	32	14	69	30	21	0
46	0	41	40	58	0	31	47	70	0	20	31
46	30	41	18	58	30	31	21	70	30	20	1
47	0	40	55	59	0	30	54	71	0	19	32
47	30	40	32	59	30	30	27	71	30	19	
48	0	40	8	60	0	30	0	72	0	18	

Figura 117: Mostra parte da transcrição feita por Moya da tabela dada por Apiano em [1548, ff. 21v- 22r] para converter graus de paralelos em graus de equinocial. Apiano intitula-a "Tabla de proportiones de todos los parallelos con la Equinoctial, o con outro qualquier gran circulo: que por outra manera se dirá, tabla de las conversiones de grados fuera de la Equinoctial, reduzidos a los de la Equinoctial" [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 365].

A tabela de Apiano indica a correspondência entre o comprimento de um grau de paralelo e de um grau de Equinocial, para todos os paralelos cuja latitude varia de zero a noventa graus, por intervalos de meio grau. Esses valores respeitam a relação seguinte:

$$\text{Comprimento de 1º do paralelo de latitude } \varphi = \text{Comprimento de 1º na Equinocial} \times \cos \varphi;$$

O que significa que, da Equinocial para os pólos, os comprimentos dos graus dos paralelos variam proporcionalmente com o co-seno da latitude correspondente, diminuindo à medida que a latitude do paralelo aumenta. Consultando a tabela, vemos, por exemplo, que a entrada 40º 0' indica 45' 57", o que quer dizer que o comprimento do arco correspondente ao ângulo de um grau no paralelo de latitude 40º 0' é igual ao comprimento do arco correspondente ao ângulo de 45' 47" na Equinocial; e a entrada 70º 30' mostra que o comprimento de um arco correspondente a um ângulo de 1º no paralelo de latitude 70º 30' é igual ao comprimento de

um arco correspondente a um ângulo de 20' 1" na Equinocial. Como se pode verificar efectuando os cálculos, estes valores estão correctos.

Moya utiliza esta tabela para explicar como se determina a distância entre duas povoações de igual latitude – 40º – que diferissem 10º de longitude. Depois de saber que o comprimento do arco de 1º do paralelo de latitude 40º é igual ao comprimento do arco de 45' 57" na Equinocial, exprime-o em léguas, por meio de uma regra de três, considerando a correspondência de 1º da Equinocial a $17\frac{1}{2}$ léguas. Por fim, como a diferença de longitude dos lugares é 10º, multiplica o valor obtido por 10 para obter a distância que os separa.

Apesar de mencionar a tabela que Apiano dá na *Cosmographia*, Moya não se limita a reproduzi-la, procurando um modo prático de explicar as informações nela contidas. Para isso, constrói uma figura (figura 118), que usa para mostrar como se podem facilmente "converter graus de paralelo em graus de Equinocial". É possível que Moya tivesse aproveitado uma sugestão dada por Apiano[983], que se baseia na interpretação de uma figura geométrica (que não existe na *Cosmographia*) útil para quem tivesse dificuldade em lidar com os cálculos aritméticos.

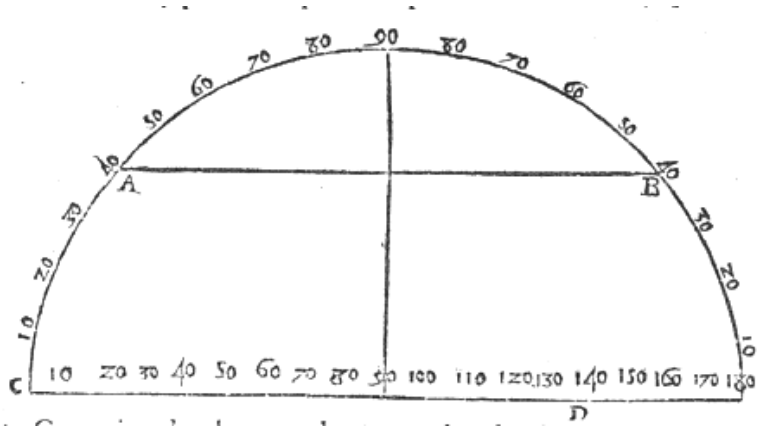


Figura 118: Recorrendo a esta figura, Moya indica um processo de converter graus de paralelo em graus de Equinocial que, por outro lado, permite compreender como foi construída a tabela de Apiano [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 367].

[983] O procedimento proposto foi apresentado sob o título "Por que el noviçio enel alguarismo este fuera de fatiga, lo mesmo demostraremos por via de Geometria", onde Apiano explica o seguinte: "Para saber la distancia de dos lugares apartados entresi en diversa longitude y latitude, por Geometrica medida. Cuenta enel globo Geographico, la latitude de la una ciudad desde la Equinoctial hazia el polo enel meridiano movile. Hallada la dicha latitude, buelve el globo, hasta que el grado de longitude de la ciutad dicha, esteja abaxo del meridiano movile: despues haras una señal enel globo enel punto dela latitude: elqual te mostrara el sitio del dicho lugar o ciutad. De la mesma manera hallaras el sitio del outro lugar y desta suerte en todos lugares haras. Hecho esto, estende el compas segun el espacio que ay entre tus lugares: y sim mas estenderle, llevalo sobre la Equinocial. Y tantos grados de circulo grande terna en espacio, entre los dichos lugares: quantos tomara el compas en la Equinocial: estes grados multiplica por .480. estádios, y la suma desta multiplicacion, sera el numero de los estádios, que ay entre estos lugares, o si multiplicas por .15. te dará la multiplicacion millas de Alemaña, o por .60. ternas millas Italianas" [Pedro Apiano, 1548, f. 17v].

A figura consiste numa semicircunferência cujo diâmetro, representando a Equinocial, está dividido em 180 partes iguais, e os arcos correspondentes a cada um dos dois quadrantes estão divididos em 90 partes iguais, correspondendo à diferença de latitude desde a Equinocial ao Pólo, numeradas de 0 a 90, a partir do diâmetro que passa por C.

Se se quiser saber, por exemplo, por recurso à figura, 'quantos graus' de Equinocial correspondem a um grau do paralelo que tenha 40º de latitude (situação que Moya ilustra) bastará tomar a medida do segmento [AB] e transportá-la com o compasso para o diâmetro da semicircunferência, a partir de C (extremo esquerdo do diâmetro), obtendo o ponto D (situado na figura entre as marcas 130 e 140 do diâmetro). Desta operação resultam para [CD] 137 partes das do diâmetro, ou seja, $\frac{137}{180}\times 60 = 45' 40''$ de Equinocial, uma vez que

$$cos\, 40^\circ = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{90} = \frac{\overline{AB}}{180} = \frac{137}{180}.$$

Moya descreve o procedimento, explica os cálculos a efectuar e tece comentários sobre os valores obtidos, que nota serem apenas aproximados aos registados na tabela de Apiano, por se basearem numa figura pouco rigorosa[984]:

> Y assi diras que un grado de los 360 del parallelo que dista quarenta grados dela equinoctial, vale tanto como 45 minutos, y 40 segŭdos, de un grado de equinoctial. Y porque esta figura no esta precisa sale menos, que lo que la tabla precedente dize. Mas si precisamente se hiziere, precisamente concertara, com lo que la tabla de Pedro Apiano dize [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 368].

Os aspectos peculiares que este exercício envolve e, em particular, o comentário final relativo ao pouco rigor associado a uma construção geométrica são bem o reflexo das preocupações didácticas do nosso autor.

O método que tradicionalmente se aplicava para determinar a diferença de longitude, em terra, entre dois lugares, era o da observação de eclipses. Moya usa-o para obter a longitude de um lugar em relação a outro, notando que bastava registar as horas a que um

[984] Moya não explica como a figura se constrói com régua e compasso (não era esse, então, o seu objectivo), mas essa indicação é dada nos *Fragmentos Mathematicos.* De facto, no volume I trata, correcta e pormenorizadamente, da questão da divisão de um segmento de recta em qualquer número de partes [Juan Pérez de Moya, 1568, pp. 53-62] e no volume II indica diversos modos de dividir uma circunferência, embora os processos que apresenta sejam, em geral, bastante inexactos e nenhum deles esteja directamente relacionado com a figura acima. O problema da divisão de uma circunferência em partes e as diligências que Moya fez para o resolver, em certos casos concretos, estão tratados na secção 3.3.8 da Terceira Parte desta dissertação.

eclipse se observava nos dois locais, tomar a correspondência entre 360º e 24 horas e fazer a respectiva diferença horária. E chama a atenção para que o lugar em que o eclipse se vê mais cedo está a Ocidente do outro. Tomando como referência "o" meridiano das Canárias, e supondo que aí ocorre, às 5 da madrugada, o início de um eclipse, que se vê às 5h e meia em Santisteban del Puerto, Moya explica que a diferença de meia hora entre os dois lugares equivale a 7º 30′, concluindo daí que a longitude da sua terra natal é 7º 30′ Leste:

> De modo, que si en Canaria se viesse el principio de un eclipse a las cinco de la noche, y en sant Estevan a las cinco y media, entenderas de esto, que porque la differencia del tiempo es media hora que valen siete grados y médio, que la longitud verdadera de sant Estevan es siete grados y médio [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 239].

No entanto, a pequena frequência com que estes fenómenos ocorriam (notamos que Moya exemplificou com o eclipse que se observou em 15 de Junho de 1562, cinco anos antes da publicação do segundo volume dos *Fragmentos*), e a falta de instrumentos e de tábuas, obstava à sua utilidade prática[985]. Talvez isso tivesse contribuído para que Moya procurasse outras respostas para o problema. Uma delas encontrou-a no trabalho de Frísio[986]. Trata-se de um processo de determinação da diferença de longitude entre dois lugares baseado no conhecimento da distância entre eles e da latitude de cada um, dados que Frísio considerava fáceis de obter[987].

> Gemã Frigio en el septimo capitulo del librito, que anda com la Cosmographia de Apiano, muestra sacar la longitude relata de outra manera, sabendo el caminho y la latitude de los pueblos [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 245]

Moya expõe o método dado por Frísio com mais clareza do que o autor[988]. Para o tratarmos aqui, socorremo-nos da figura 119, que apesar de não constar da obra de Moya, nem da de Frísio, está subentendida no texto de ambos. Sejam C e F dois lugares à superfície

---

[985] [Sellés, M. A., 2004, p. 180].

[986] A obra de Frísio que referimos encontra-se na versão castelhana da *Cosmographia* [1548] de Pedro Apiano e intitula-se *Libritto dela manera de describir o situar los lugares, y de hallar las distancias de aquellos, nunca visto hasta agora, de* Gemma Frísio.

[987] Este processo foi exposto sob o título "Muestra conoscer la diferencia dela longitud por la diferencia dela anchura y por la derecha distancia", em [Gemma Frísio, 1548, ff. 60v-61].

[988] [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 245-247].

da Terra, e suponhamos que se pretende determinar a diferença de longitude entre eles. Seja P o Pólo Norte, e AP e BP arcos de meridiano que passam, respectivamente, por C e F, determinando na Equinocial o arco AB. Sejam, ainda, CD e EF arcos de paralelos (à Equinocial). Com os elementos dados, AC representa a latitude de C e BF a latitude de F, ambas conhecidas, por hipótese. Supõe-se, também, conhecida a distância CF entre os lugares (indicada na figura por um arco de círculo máximo).

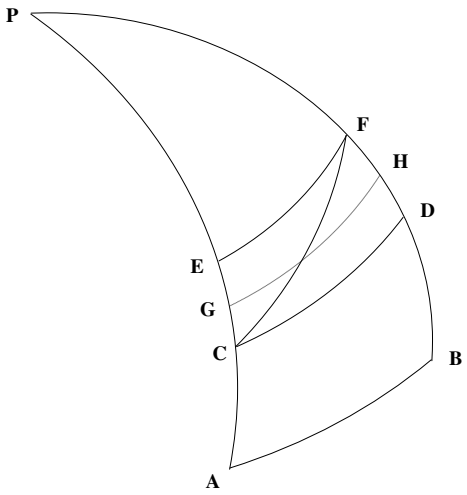


Figura 119: Determinação da diferença de longitude entre os lugares C e F.

O processo consiste em considerar [CDF] (ou [CEF]) como "triângulos rectângulos"[989] dos quais é conhecido o cateto [DF] (ou [CE]) e a hipotenusa comum [CF], e aplicar-lhes o teorema de Pitágoras. Não há dúvida que o procedimento é incorrecto pois, embora [CDF] e [CEF] tenham um cateto e a hipotenusa iguais, não são "triângulos" iguais! Mas o que é interessante é que, possivelmente por reconhecer esta particularidade, em especial por saber que o arco CD é maior do que o arco EF, tanto Frísio como Moya tomaram como hipotenusa a longitude "aproximada" definida pelo arco GH, determinado pelos pontos médios dos arcos CE e DF. Esta questão estava relacionada com a da correspondência entre os valores das coordenadas de um lugar no globo terrestre e na carta plana, para cuja impossibilidade Frísio chamara a atenção[990]. Moya procurou soluções para

[989] Não se trata, obviamente, de triângulos planos nem de triângulos esféricos.

[990] Frísio diz, a esse respeito, o seguinte: "Es empero de notar, que todo, lo que avemos dicho, de pintar las cartas en llano, sin dubda es impossible: si queremos mucho examinar la verdad. Ni puede el mesmo Ptolomeo pintar en llano las regiones: por que o dexara de guardarse la verdadera longitud o la distancia entre dos ciudades, o el sitio próprio, esto es por causa dela disproporcion que ay entre el cuerpo llano y el redondo. Pero en una provincia de 50 o 100 millas no será notable este error" [Gemma Frísio, 1548, f. 61v].

esse problema e propôs um processo para o resolver, que se baseava em observações com o astrolábio e recorria às tábuas de conversão que apresentara.

> Si quisieres hazer en un Mappa lo que en el globo has hecho, sirve te del Meridiano de en médio, que es de las Canarias. Podras saber la latitu y lõgitud de muchos pueblos que se vean a ojo, sabiendo el camino que ay de unos a otros, y la latitud, y longitud verdadera de alguno [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 250].

A terminar, deixamos ainda uma chamada de atenção para um outro aspecto importante que distingue a *Arte de Marear* dos *Fragmentos Mathematicos*: o cuidado que, nesta última obra, Moya põe nas definições. Citamos, a título de exemplo, o conceito de esfera. Nas diversas alusões que lhe faz na *Arte de Marear*, Moya refere-a grosseiramente como uma bola, enquanto nos *Fragmentos* a define correctamente, invocando a definição 14 de *Elementos* XI, de Euclides[991]:

> Sphera como Euclides diffine, es una revolucion de un medio circulo, a la redonda de su diametro, hasta bolver al lugar do começo [Juan Pérez de Moya, 1567, f. 7].

Além disso, junta-lhe um esclarecimento, que revela preocupações com o rigor, no qual vinca a diferença entre o significado de esfera e o de superfície esférica, dizendo:

> Esta deffinicion es imaginada mathematicamente. Porque assi como del movimiento de una línea lateralmente, se descrive, y haze, superfície plana, assi del movimiento de médio circulo traydo al rededor de su diâmetro, se descrivira una sphera maciça, y del movimiento de la mitad de una circunferencia de un circulo al rededor de su diametro, como los que traduxeron al Euclides de Griego, dizen se hara orbe, y no sphera [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 7-8].

4. Considerações finais

Quando iniciámos o estudo do manuscrito *Arte de Marear*, encontrámos um texto confuso, constituído por um conjunto de notas dispersas e incompletas. As figuras existentes estavam grosseiramente desenhadas e eram geralmente acompanhadas de explicações pouco

[991] Esta definição tem muitas semelhanças com a que dá Pedro Nunes: "Sphera segundo Euclides he hũ corpo que se causa pello movimento da circunferência do meo circulo levado per derredor ate tornar ao seu lugar:estando o diametro quedo" [Pedro Nunes, 1537, f. 7].

claras. Em alguns casos chega mesmo a suceder o autor aludir a figuras que não se encontram nesse trabalho. Além disso, as fontes mencionadas por Pérez de Moya eram escassas e, por vezes, pouco objectivas. Todos estes factores se constituíram para nós como um enorme desafio. Para o enfrentarmos traçámos um rumo que nos pareceu poder estar subjacente à exposição de Moya e que incluía a identificação das fontes utilizadas na redacção do manuscrito e a dimensão do impacto que elas teriam tido nesse trabalho. Concluída a nossa tarefa, podemos agora afirmar que, além da obra de Medina, explicitamente mencionada no manuscrito, Moya se inspira em dois textos em língua castelhana, hoje não muito conhecidos: *a Suma de geographia*, de Martín Fernandéz de Enciso [1ª edição em 1519], e o *Tratado del Sphera y del Arte del Marear*, de Francisco Faleiro [1535], dos quais não indica os títulos nem menciona os autores.

Na *Arte de Marear*, Moya não se limita a reproduzir conhecimentos inscritos noutras obras, mas procura um modo prático e inteligível de os divulgar. Assim se entende que nele existam, por exemplo, regimentos da declinação do Sol, da Polar e das léguas; regras que permitem calcular com facilidade o áureo número e determinar os dias de lua nova, em cada ano; tabelas que dão a hora de praia-mar para os vários dias de uma lunação e figuras explicativas de situações particulares. A estrutura do texto manuscrito está, por vezes, próxima das que têm os guias náuticos da época[992]. No entanto, a bagagem de conhecimentos que ele incorpora não se esgota nos itens descritos: no decurso da *Arte de Marear*, Moya faz referência ao texto latino *De Sphera* de Sacrobosco – "Mira sobre esto el 4º de la Sphera de Sacrobosco de circulis et motibus planetarum" – que, embora sendo um trabalho muito divulgado, só os especialistas estavam habilitados a consultar. E a obras como a *Theorica do Sol*, de Apiano – "lee Apiano cap. 9 del instrumento de la theorica del Sol" – e o *Astrolabio* de Aguilera – "Lee el canon 28 del 1º Lib. de Astrolabio. Y el canon 10 del 6 Lib. del astrolabio" – que eram textos científicos da maior importância para os cosmógrafos e astrólogos[993].

Moya não refere na *Arte de Marear* o nome de Martín Cortés, nem o de Pedro Nunes, mas diversas passagens do nosso trabalho sustentam que o *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar* de Cortés [1551] e o *Tratado em defensam da carta de marear*, *de* Pedro Nunes [1537] lhe eram familiares, quando redigiu este manuscrito. E ele

---

[992] De acordo com Luís Albuquerque, um guia náutico é um escrito que se limita a fornecer regras de arte náutica com carácter astronómico ou cosmográfico [Albuquerque, L., 1987, p. xv].

[993] [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 199r] e [Juan Pérez de Moya, *Arte de Marear*, f. 194r], respectivamente.

mesmo viria a mencionar os seus nomes nos *Fragmentos Mathematicos*, que publicou três anos mais tarde. Pensamos, por isso, que a *Arte de Marear* constituía um conjunto de apontamentos destinados à preparação científica de pilotos, de marinheiros, ou de aspirantes a sê-lo, que pode ter sido redigido explicitamente para esse fim, ou adaptado de um seu trabalho anterior. Como já antes referimos, o nosso estudo não nos permitiu tirar conclusões sobre a existência de uma versão impressa da *Arte de Marear*, mas admitindo que tal tenha ocorrido, esse trabalho não foi certamente muito divulgado, pois nem nas bibliotecas espanholas nem nas portuguesas se encontra algum exemplar de Moya com esse título. Nos *Fragmentos Mathematicos* Moya inclui grande parte dos estudos feitos na *Arte de Marear*, mas a sua exposição mostra a importância que atribui às definições e às justificações dos procedimentos que aplica. Por outro lado, no que respeita às fontes que utiliza nos *Fragmentos Mathematicos*, além da *Arte de Navegar*, de Medina, Moya recorre com frequência ao *Tratado em defensam da carta de marear*, de Pedro Nunes, e ao *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar*, de Martín Cortés, que são obras de carácter mais teórico do que as de Enciso e Faleiro. Moya não indica os títulos destas obras, mas destaca os nomes destes autores, com a importância que lhes reconhece: por exemplo, ao mencionar a carta de marear diz: "Desta pocos antiguos tratarõ. Los modernos que en nuestro tiempo han escripto son, el doctor Pero Nuñez, y el Maestro Medina, y Martín Cortes"[994]. Estas foram as fontes que priveligiámos no nosso estudo, juntamente com a *Cosmographia* de Apiano[995], por se relacionarem directamente com os temas que Moya trata na *Arte de Marear*. No entanto, nos *Fragmentos Mathematicos* Moya mostra conhecer outras obras, que menciona à medida que vai explorando diferentes assuntos, e embora essas fontes não intervenham directamente no nosso estudo indicamos aqui as que consideramos mais importantes. Assim, por exemplo, no capítulo da construção de relógios Moya baseia-se em Finé, em Aguilera e em Cortés[996]; a propósito das zonas climáticas e correspondentes latitudes menciona Sacrobosco, "el doctor de la Sphera"[997], e sobre a composição dos céus e os eclipses do Sol e da Lua alude a Purbáquio e à sua obra *Theoricae nouae planetarum*[998].

---

[994] [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 352].

[995] Moya menciona Apiano, por exemplo, nas páginas 305, 327, 328, 353, 361, 368 e 370

[996] [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 374, 417 e 493]. Moya refere ainda um "Farias, hombre ingenioso, y principal vezino de Madrid" que não conseguimos identificar [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 417].

[997] [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 333 e 342].

[998] [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 95 e 116]. Moya refere, também, Juan Baptista Capuano, que escreveu sobre essa obra de Purbáquio. Juan Baptista Capuano nasceu em Manfredónia (Itália), por volta de 1475. Publicou uma obra sobre a Esfera de Sacrobosco e, já depois de ordenado bispo, outra sobre as Teóricas de

Os nomes mais referidos são o de Ptolomeu, com o seu *Almagesto*[999], e o de Aristóteles, sobretudo as suas obras físicas, o *Libro de coelo y mundo* e *Physicos*[1000]. Moya conhece e discorda da teoria heliocêntrica de Copérnico, sublinhando, por mais do que uma vez, que "Nicolas Copernico es contra la comũ porque pone el sol enel centro, y la tierra y luna en el 4 [cielo]"[1001].

Conclusões gerais

A nossa dissertação centrou-se na obra matemática de Juan Pérez de Moya, que, como vimos, foi um autor de referência em Espanha, no século XVI. Os estudos que fizemos mostram-nos um homem persistente e empreendedor, de diversa e intensa cultura científica e humanística. Essas facetas revelam-se na quantidade e variedade das obras que publicou e nas múltiplas referências e citações que os seus textos contêm. Moya era um bom conhecedor dos textos científicos que se produziam na sua época, mas também de muitas obras da Antiguidade clássica, redescobertas e impressas no Renascimento, como as de Aristóteles, Plínio, Cícero, Quintiliano e Columela. Entre os autores que menciona, destaca-se Euclides. Os *Elementos* são a obra mais vezes referida nos seus trabalhos algébricos e geométricos. Como vimos, Moya conhecia os *Elementos* nas versões de Campano e Zamberto e, embora não possamos afirmar, com rigor, qual o texto (ou textos) dos *Elementos* que seguia neste ou naquele momento, admitimos que a edição dos *Elementos* composta por Tartaglia segundo as versões de Campano e Zamberto, e reeditada em Veneza em 1565, lhe era familiar; de facto, na demonstração geométrica de uma regra das equações, alude a uma igualdade que é resultado do corolário de *Elementos* II, 4, incluído nesse trabalho de Tartaglia.

No que respeita à álgebra, mostrámos que Moya recorreu à *Summa* de Pacioli quando compôs o seu primeiro texto algébrico, o *Compêndio dela regla dela cosa*, publicado em 1558. Moya alude, ainda que brevemente, ao matemático italiano, a quem trata por "Frater Lucas", mas não refere nenhuma passagem da sua obra em que tivesse sido influenciado pelo trabalho de Pacioli. Contudo, como vimos, resolve vários problemas usando os

---

Purbachio [Serrano, A. G., 1735, p. XXXX]. Martín Cortés também refere Juan Baptista Capuano a propósito do conceito de pólo ártico [Martín Cortés, 1551, f. 17].

[999] [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 73, 105, 321, 322, 331, 341].]

[1000] Ver [Juan Pérez de Moya, 1567, pp. 15, 57, 58, 63, 65, 67, 70, 113, 149, 296, 298, 300, 309, 311].

[1001] Ver [Juan Pérez de Moya, 1567, p. 60, 310, 318].

processos e os mesmos exemplos do autor italiano. No *Compendio dela regla dela cosa*, Moya não revela o nome de outras obras algébricas que possam ter-lhe servido de fonte, mas mostrámos que o *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, que Marco Aurel publicou em 1552, marcou fortemente o seu trabalho. Relativamente à hipótese adiantada por Rey Pastor e por Consolación Baranda, sobre a influência que o *Triparty en la science des nombres*, de Nicolas Chuquet, pode ter exercido na obra de Moya, acreditamos ter acrescentado a essa frágil suposição um argumento convincente relativo à parte de álgebra. Com efeito, notámos que a ideia de condensar em quatro tipos as equações de coeficientes inteiros a que Moya se dedica, estava já presente no *Triparty* de Chuquet.

O nosso trabalho permite afirmar que, na simbologia algébrica que adoptou, Moya seguiu os textos de tradição italiana, como a *Summa* de Pacioli e o *General Trattato* de Tartaglia, utilizando notações semelhantes às suas para representar a incógnita e as suas potências. Embora esta opção tenha sido, também, a que fizeram outros autores ibéricos do século XVI, como Antich Rocha e Pedro Nunes, foi Moya o responsável pela divulgação em Espanha da notação algébrica da *Summa*, sobretudo, por meio da *Arithmetica pratica y speculativa*. No *Tratado de Mathematicas*, quando estuda com mais profundidade os sistemas de equações (a "regla de la quantidade"), Moya propõe uma notação eficaz para representar as diferentes incógnitas que utiliza. A sua escolha revela a influência exercida pela *Arithmetica Integra*, publicada em 1544 por Stifel. Na resolução dos problemas, o nosso autor recorre, tal como Stifel, às sucessivas letras do alfabeto para representar as sucessivas incógnitas, e admite a possibilidade de utilizar outros símbolos quando essas letras forem insuficientes. Esta escolha, que rompe com a prática, até então usual, de exprimir a primeira incógnita por "co." e a segunda por "q.", viria a mostrar-se um passo importante no progresso da álgebra. Há um outro momento, no *Tratado de Mathematicas*, em que Moya aborda uma questão de notação; ocorre quando ele propõe um símbolo ( ) para representar a igualdade entre os dois membros de uma equação. Não encontrámos esse símbolo, com este significado, em nenhuma obra da época, que tivéssemos podido consultar, mas mais significativo do que a sua criação, até porque as dificuldades inerentes à imprensa da época não permitiram a Moya o seu uso na escrita das equações, foi a ideia da sua importância. Num aspecto mais geral, esperamos ter tornado patente a percepção que o nosso autor teve da necessidade de uma notação adequada aos estudos algébricos. A álgebra do *Tratado de Mathematicas* fica marcada pelas abundantes referências ao livro X dos *Elementos* de Euclides e pela leitura que Moya fez do *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes. Como ficou claro, Moya baseou no *Libro de Algebra* a parte mais teórica do seu trabalho,

transcrevendo quase textualmente excertos desta obra, como os relativos às demonstrações das regras de resolução das equações do 2º grau e às operações com polinómios, o que provavelmente faz dele o primeiro autor a divulgar em Espanha a álgebra de Pedro Nunes.

Relativamente à geometria, mostrámos que os trabalhos de Moya tiveram quatro momentos marcantes determinados pelos objectivos que o autor pretendia atingir com esses textos. No "Libro quarto" da *Arithmetica practica, y speculativa*, Moya trata questões práticas de agrimensura semelhantes às resolvidas na *Sígue se una compusicion de la arte dela arismetica y Juntamente de Geometria* publicada em 1512 por Juan de Ortega, e que também estão propostas noutros trabalhos ibéricos daquela época, entre os quais o *Tratado da Pratica Darismetyca* publicado em 1519 por Gaspar Nicolas. Apesar de o "Libro quarto" ser um trabalho pouco ambicioso, na medida em que exige conhecimentos aritméticos e geométricos muito simples, como a regra de três e a área do triângulo, vimos que ele denota já algumas preocupações mais teóricas, introduzindo as definições dos entes matemáticos que são posteriormente utilizados. No entanto, o único livro dos *Elementos* mencionado é o terceiro, e uma só vez. O primeiro volume de *Fragmentos Mathematicos* tem, como concluímos, características muito diferentes do anterior, aliando, logo no primeiro livro, uma introdução teórica ao estilo dos *Elementos* de Euclides a uma parte prática constituída por um grande número de construções com régua e compasso. Esta obra de Moya destinava-se, sobretudo, àqueles leitores para quem a geometria constituía uma ferramenta indispensável à sua actividade profissional, mas cujos conhecimentos nem sempre lhes permitiam aceder aos difíceis conteúdos de alguns tratados mais teóricos. Pensamos que ficou claro que, se por um lado, Moya considerava os *Elementos* como o fundamento das construções práticas que expôs nos *Fragmentos Mathematicos*, por outro, não julgava necessário integrar nas explicações dadas a sua justificação teórica. Por isso, em geral, Moya limita-se a indicar como se realiza a construção, informando quando muito qual a proposição dos *Elementos* que pode ser consultada; o livro mais citado dos *Elementos* é o quarto, embora apenas 5 vezes! Como referimos, Moya provavelmente conhecia a obra *Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum*, de Peletier, publicada em Lyon em 1557, e o *Chaos Mathematicum*, *Ad Geometriam Spectantia*, de Ringelberg**,** publicado em Lyon em 1531, pois sobre a construção da circunferência definida por três pontos refere o nome de Peletier, e cita Forcio quando indica uma construção aproximada da quadratura do círculo. Nestas últimas obras encontrámos as construções que Moya apresenta. É certo que nos *Fragmentos Mathematicos* se sente já a influência de Tartaglia, sobretudo no estudo de construções mais delicadas, como as que requerem uma só abertura do compasso, mas é no *Tratado de*

Geometria, publicado em 1573, que Moya segue de perto o *General Trattato* do "ingeniosissimo" Tartaglia (assim o refere Moya). Como acreditamos ter mostrado, foi esta a sua principal fonte neste trabalho. Esta obra de Moya incluiu, tal como os *Fragmentos Mathematicos*, uma grande variedade de construções com régua e compasso, mas é mais consistente do que ela do ponto de vista teórico. Moya introduz definições, postulados e sentenças comuns que constituem o suporte dos desenvolvimentos posteriores, e recorre a um grande número de proposições dos *Elementos* de Euclides para complementar a justificação das questões que apresenta. O esquema axiomático-dedutivo típico dos *Elementos* de Euclides reflecte o objectivo do seu *Tratado de Geometria*, que é o de chegar a um público mais exigente do que os leitores dos seus textos anteriores. Moya procura, neste trabalho, e uma vez mais, diversificar as suas referências; assim, como vimos, consulta a *Geometrie practique*, de Bovelle, publicada em Paris em 1551, referindo explicitamente o nome do autor francês quando trata, por exemplo, a quadratura do círculo. E muito provavelmente, conhece a obra de Dürer, *Underweysung der Mesung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, und gantzen corporen*, publicada em Nuremberga em 1525, pois em mais do que um momento menciona o nome do autor alemão; isto não nos surpreende, dada a influência que esta obra teve em Espanha no século XVI.

Realçámos o cuidado que Moya põe na explicação da construção e manuseamento dos instrumentos de medida que inclui nos *Fragmentos Mathematicos* e no *Tratado de Geometria*, e a diversidade de aplicações que trata; no entanto, como vimos, só no *Tratado de Geometria* é clara a preocupação com a justificação teórica dos procedimentos utilizados. A respeito dos instrumentos de medida, mostrámos que Moya utiliza o *Libellus de Locorum*, de Frísio, que pode conhecer na edição castelhana com o título *Libritto dela manera de describir o situar los lugares, y de hallar las distancias de aquellos, nunca visto hasta agora, impressa* em Antuérpia em 1548; e apontámos semelhanças entre algumas das suas figuras e as que Oronce Finé inclui na obra *La composition et usage du quarre geometrique*, impressa em Paris em 1556.

Um aspecto que nos surpreendeu, e que está perfeitamente documentado no nosso trabalho, foi o de Moya indicar construções aproximadas para certas divisões da circunferência, quando algumas delas podem fazer-se exactamente, sem dificuldade, com régua e compasso; e, como vimos, ele tinha conhecimentos que lhe permitiam realizá-las! A conclusão a que chegámos foi que a escolha de Moya recaiu sobre o recurso a construções que não requeriam modificação na abertura do compasso.

Notámos que Moya considerava a álgebra, ou seja, a "arte mayor", uma ferramenta muito importante, porque permitia não só resolver um número infindável de problemas, como podia através dela concluir-se se um problema era impossível. Moya aplica procedimentos algébricos à resolução de questões que a "arte menor" permitia solucionar, quer se tratasse de problemas da vida corrente, quer de problemas abstractos relativos à determinação de números em determinadas condições. Esta prática não constitui novidade entre os primeiros textos de álgebra impressos na Península Ibérica; Marco Aurel e Bento Fernandes fazem o mesmo. Contudo, Moya não aplica as regras da álgebra à resolução de problemas de geometria. Apesar disso, o facto de o nosso autor ter usado álgebra para resolver problemas constitui um avanço considerável relativamente às aritméticas ibéricas de Juan Ortega, de Joan Andrés e de Gaspar Nicolas, que nem sequer tratam o estudo das equações.

Como observámos, no contexto da aritmética Moya distingue o "numero" do "quebrado" ou "roto" e do "entero y quebrado", dando a "número" o significado que actualmente coincide com o de número natural. Mas no domínio da álgebra não é feita esta distinção e o termo "número" é até, às vezes, usado num sentido mais amplo do que o do tradicional *arithmos*. Com efeito, Moya classifica as raízes de um número em "racional" ou "discreta" e "irracional" ou "sorda", referindo-se às primeiras como as que podem representar-se por um número inteiro, fraccionário ou misto, e designando por "sordas" aquelas em que tal não é possível. Portanto, aqui, chama "números" às fracções e aos números mistos. A terminologia usada por Moya é muitas vezes confusa; por exemplo, vemos que refere o número 3 como "sordo" porque não tem "raiz justamente". Moya não define o termo "quantidade", mas usa frequentemente a palavra "número" num sentido abrangente, que poderíamos considerar como sinónimo de "quantidade" ou de "grandeza", seja ela discreta ou continua. Apesar desta ambiguidade nas definições dadas, o aspecto operativo está perfeitamente claro; Moya manipula facilmente quantidades irracionais, indicando regras das operações aritméticas com radicais, que estende às operações com binómios e resíduos.

Como se sabe, a primeira tradução em castelhano dos *Elementos* de Euclides, que é devida a Rodrigo Zamorano, foi impressa em 1576, e contempla apenas os seis primeiros volumes desta obra. Ora, como o nosso trabalho mostra, no *Tratado de Mathematicas* publicado em 1573, Moya alude a proposições da maioria dos livros dos *Elementos* de Euclides, incluindo o apócrifo livro XIV. Isto significa, antes de mais, que ele espera que os leitores do seu *Tratado de Mathematicas* tenham conhecimentos linguísticos que lhes

permitam aceder aos *Elementos*, escritos num idioma diferente do castelhano. Por outro lado, ao incluir nessa obra abundantes referências ao livro X dos *Elementos*, que é considerado o livro mais difícil da obra de Euclides, Moya tem, sobretudo, como objectivo chegar a um público exigente, no que toca ao conhecimento científico. Os *Elementos* constituíram, como vimos, o modelo axiomático que serviu de referência ao *Tratado de Geometria*; Moya propõe problemas dos *Elementos*, raciocina sobre figuras para os resolver e baseia as suas provas em proposições e conceitos que estabelece previamente, ou que remetem para a obra de Euclides. No *Tratado de Geometria* contabilizámos mais de 120 menções aos *Elementos*, sendo os livros mais citados o primeiro, com mais de 50 referências, e o sexto, com mais de 20. Apesar disso, este texto de Moya é, também, atractivo para quem faz um uso prático da geometria, pois ao contrário do que se observa nos *Elementos*, inclui uma descrição minuciosa e cuidada das construções e está escrito numa linguagem acessível. Lembramos que a importância que Moya atribui aos *Elementos* de Euclides e o interesse que esta obra lhe suscita estavam já bem patentes em *Fragmentos Mathematicos*, que compôs em 1568, onde revela a sua intenção de vir a escrever umas anotações sobre esse trabalho de Euclides ("como mostraremos en nuestras annotaciones sobre Euclides siendo Dios servido"); contudo, nas diversas diligências que fizemos, não encontrámos qualquer texto de Moya com um título semelhante.

Olhemos, agora para o manuscrito *Arte de Marear*. O trabalho que sobre ele desenvolvemos possibilitou-nos o conhecimento de uma outra faceta da actividade de Moya: arredado de tarefas relacionadas com a náutica, vemo-lo a preparar um conjunto de apontamentos destinados à formação de marinheiros, estribando-se em obras dos mais reputados autores do seu tempo. Como mostrámos no decurso do nosso trabalho, Moya baseia os seus estudos nos textos de Pedro de Medina, Jerónimo Chaves e Pedro Nunes, que foram, como se sabe, cosmógrafos de grande nomeada (os dois primeiros da *Casa de Contratación* e Pedro Nunes Cosmógrafo-mor do reino de Portugal), mas também recorre a outros textos de profundos conhecedores da arte de navegação, como Fernandez de Enciso, Francisco Faleiro e Martín Cortés.

Embora não mencione a *Chronographia o Reportorio de Tiempos*, nem o seu autor Jerónimo Chaves, Moya reproduz quase textualmente no manuscrito a descrição dos ventos dada nessa obra, onde se resumem os nomes pelos quais os ventos eram conhecidos pelos marinheiros dos diversos países; no entanto, dedica um espaço especial a indicar os nomes dos ventos segundo Medina. Mostrámos que no seu trabalho, Moya recorre frequentemente à *Arte de Navegar*, quer usando a carta de marear aí dada, quer socorrendo-se de tabelas

diversas, como as que indicam rumos e distâncias ou o regimento da Polar. Mas como também mostrámos, ao longo do seu texto vai diversificando as fontes em que se documenta. De facto, das duas rodas de léguas incluídas no manuscrito, uma é dada na *Suma de geographia* de Enciso, e a outra no *Tratado del Sphera y del Arte del Marear* de Faleiro; dos dois regimentos da Polar que apresenta, um está na obra de Medina e o outor nas de Faleiro e Enciso. E estes exemplos repetem-se. Como ficou claro, Moya mostra como se obtém a latitude pelo Sol: ensina a pesar o Sol, refere as regras das sombras e expõe a tábua de declinação solar que Nunes e Cortés recomendam; explicando até como se podem fazer interpolações lineares dos dados que permitem melhorar a precisão dos resultados. No manuscrito, Moya inclui apontamentos sobre a agulha de marear, sobre a determinação do áureo número, que ele ensina a determinar, sobre o crescimento e decrescimento das marés.

Um dos aspectos que sobressai na *Arte de Marear* é o da preocupação constante em fornecer material de trabalho adequado às necessidades dos aprendizes de marinheiros; são disso exemplos, a apresentação em forma de rodas e de tabelas, que possibilitam uma consulta muito mais fácil do que a dada em forma retórica, o recurso a um instrumento, que Moya ensina a construir em cartão e que utiliza na explicação do nordestear e o noroestear da agulha de marear.

Na comparação que fizemos entre o manuscrito *Arte de Marear* e os *Fragmentos Mathematicos*, sublinhámos o papel desta última obra, que entendemos ser um texto de referência para um público mais erudito, contribuindo para elevar o estatuto social de Moya. Mas isso não tira valor ao manuscrito *Arte de Marear*, que reflecte o trabalho de preparação que a actividade de professor requer.

Esperamos que esta dissertação tenha deixado claro que, à medida que compunha novas obras, Moya revisitava os seus textos anteriores corrigindo erros, diversificando processos de resolução, ampliando referências a outros autores, e privilegiando fontes mais teóricas, das quais podia socorrer-se para justificar os procedimentos que utilizava.

ANEXOS

Anexo 1. Conteúdo de *Principios de Geometria* (Res 6553P da Biblioteca Nacional de Portugal)

Principios de Geometria, De que se podran aprovechar los estudiosos de Artes liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y cõpas en la mano. Con el orden de medir, y dividir tierras.Ordenado por el bachiller Juan Perez de Moya. Irigido al Illustre Señor Juan Baptista Gentil, hijo d Costantin Genil. (E)n Madrid, por Francisco Sanchez, 1584.

Tem marca de posse: "Foi do uso de Fr. M^{el} Peccador Pellig^{o} de S. Fran^{co} de X^{as} ". Era, portanto, pertença do convento de São Francisco de Xabregas. Encadernada em pele, formato 8'' (15cm). Numerado por folhas 2 a 127. Falta a Folha 1. Termina com uma folha não numerada onde se lê: "Impresso en Madrid en casa de Francisco Sanchez. Ano de mil y quinientos y ocheta y quatro"

A obra é constituída por dois livros (aqui, com o significado de capítulos):

***Libro Primero*:** [*Capítulo* I] La Geometría tiene tres diferencias de principios sobre que haze su fundamiento, que son definiciones, peticiones y sentencias com(u)nes (d)e que trataremos por orden, en los primeros tres capitulos siguientes (f. 2-3); *Capítulo* II. Trata diffiniciones delas figuras de Geometria (f. [1]-13)[1002]; *Capítulo* III. Trata Peticiones (f. 13-15); *Capítulo* IV. Trata sentencias, o concepciones comunes (f. 15- 16). *Capítulo* V. Declara varias diferencias de lineas delas que enel Capitulo ij tratando de la diffiniciõ de la linea se hizo mencion (f. 16 -24);[1003] *Capítulo* VI. Trata de angulos (f. 24- 28); *Capítulo* VII. Muestra dividir una linea en dos o mas partes (f. 28-32); *Capítulo* VIII. Muestra cortar de dos lineas desiguales, una parte igual a ala menor (f. 32); *Capítulo* IX. Muestra cortar de una linea dos o mas partes yguales (f. 32-33); *Capítulo* X. Muestra hazer un trianglo Equilatero, sobre una propuesta linea (f. 33-34); *Capítulo* XI. Muesta hazer una linea de un punto dado, igual a otra linea propuesta (f. 34-35); *Capítulo* XII. Muestra hazer triangulos de todas diferencias, y primero tiniendo respecto a los lados (f. 35-39); *Capítulo* XIII. Muestra hazer triangulos, tiniendo consideración a los ángulos (f. 39-41); *Capítulo* XIIII. Muestra conocer de q angulos es un triangulo (f. 41- 43); *Capítulo* XV. Dize que todo triangulo tiene tres anglos

[1002] Este capítulo não está dividido em artículos mas o autor evidencia os temas de que trata e que são: linha, superfície, corpo, ângulo, termo, figura, círculo, ou figura circular, diâmetro, semicírculo, porção de círculo, sector de círculo, figuras que se fazem de linha rectas, figuras de quatro lados, figuras hisoperimetras, área.

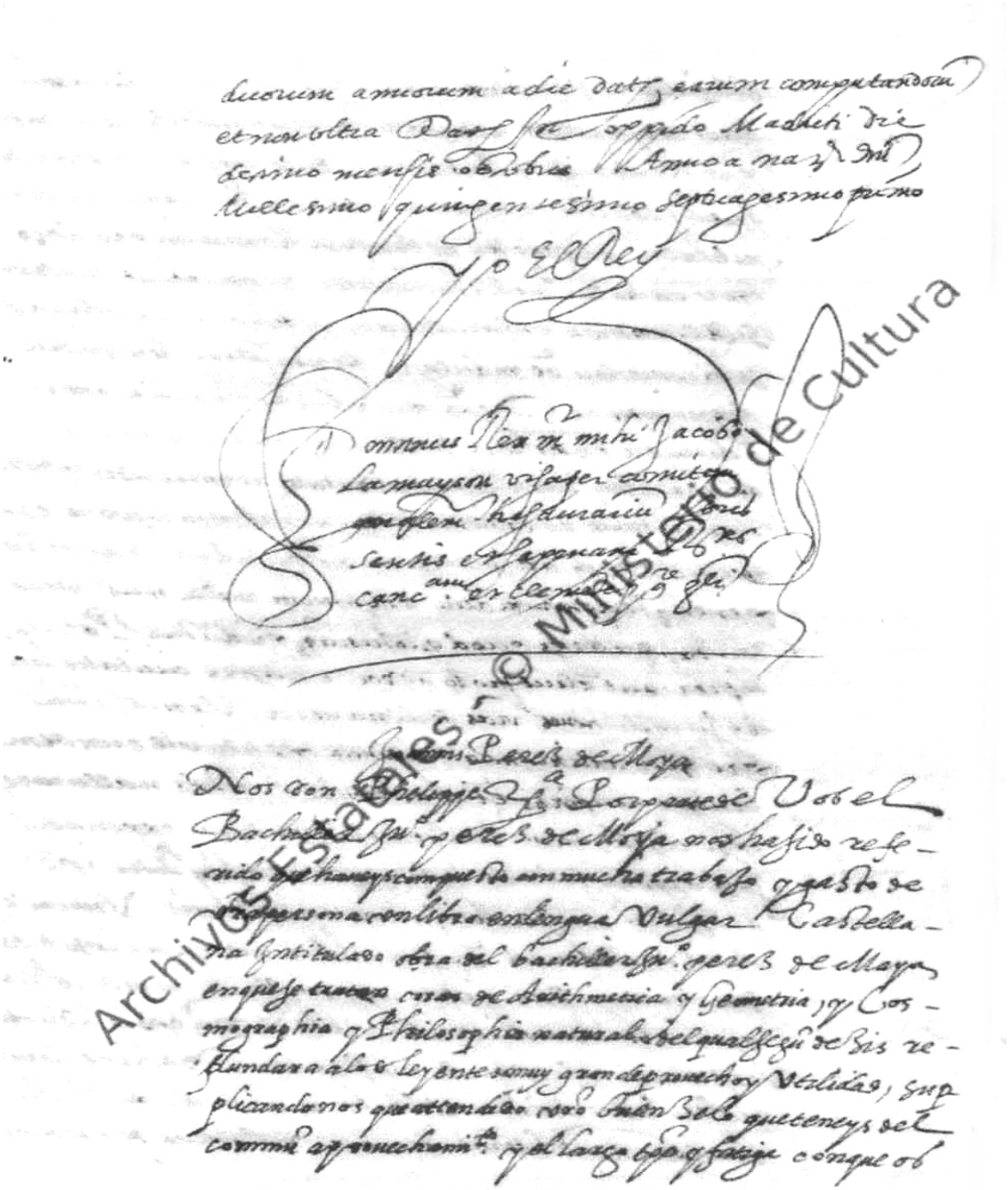
[1003] Embora não esteja dividido em articulos tem em evidencia os seguintes títulos: "linhas paralelas, perpendiculares ou cateto, diametral e diagonal, hipothumisa, visual, flexuosa, spiral, circular"

yguales a dos rectos (f. 44 – 45); *Capítulo* XVI. Trata del numero de angulos, de que las figuras planas lineales se componen (f. 45-46); *Capítulo* XVII. Muestra hazer una esquadra (f. 46 – 47); *Capítulo* XVIII. Muestra hazer un cuadrado sobre una propuesta linea (f. 47-48); *Capítulo* XIX. Muestra hazer parallelogramos, ò Tretagonos (f. 48- 49); *Capítulo* XX. Muestra saber los tamaños de las diagonales, en las figuras quadrilateras rectangulares, por la noticia de los lados, y a la contra (f. 49-53); *Capítulo* XXI. Muestra hazer pentagonos, y otras figuras de mas lados (f. 53-55); *Capítulo* XXII. Muestra hazer figuras ovales (f. 55-57); *Capítulo* XXIII. Muestra hazer un circulo (f. 57-58); *Capítulo* XXIII. Muestra sacar el diámetro de un propuesto circulo (f. 58-59); *Capítulo* XXV. Muestra hallar el centro de un circulo, o de una porcion de circulo (f. 59-61); *Capítulo* XXVI. Muestra hazer un circulo a la redonda de un triangulo que toque con su circunferencia a sus tres angulos (f. 61- 62); *Capítulo* XXVII. Muestra dividir la circunferecia de un círculo, en dos o mas partes yguales (f. 62-63): *Artículo* 1. Muestra dividir la circunferencia de un medio circulo en dos partes yguales; *Artículo* 2. Muestra dividir una circunferencia de un circulo en dos o en quatro partes yguales; *Artículo* 3. Muestra dividir una circunferencia de un circulo en 3 o en 7 o en 11 partes yguales; *Artículo* 4. Muestra dividir una circunferencia de un circulo en cinco o en diez partes yguales; *Artículo* 5. Muestra dividir la circunferencia de circulo en seis, o en doze partes yguales; *Artículo* 6. Muestra dividir la circunferencia de un cuarto de circulo en 2 partes yguales, y por tanto lo circulo en 8; *Artículo* 7. Muestra dividir la circunferencia de un cuarto de circulo en 4 partes yguales, y por tanto la medio circulo en 8 y la de todo en 16; *Artículo* 8. Muestra dividir la circunferencia de un cuarto de circulo en 6 partes yguales, y por tanto lo circulo en 12 y la de todo el circulo en 24; *Artículo* 9. Muestra dividir la circunferencia de un cuarto de circulo en 8 partes yguales, y por tanto lo circulo en 16 y la de todo el circulo en 32; *Artículo* 10. Muestra dividir la circunferencia de un cuarto de circulo en 9 partes yguales, y por tanto lo circulo en 18 y la de todo el circulo en 36; *Capítulo* XXVIII. Muestra sacar rayz cuadrada por via de línea (f. 69-72).

Libro segundo*: *Trata coisas pertencentes ao género de medida, que dizem Planimetria, que pertence ao medir e dividir terras. Capítulo I. Diz o que é planimetria (f. 72- 73); *Capítulo* II. Trata das medidas que usam os geómetras e cosmógrafos (f. 73-75); *Capítulo* III. Diz que coisa é vara em quadra, ou superfície (f. 75-76); *Capítulo*. Mostra fazer um instrumento para medir terras (f. 76-77); *Capítulo* V. Mostra "echar" [achar] ou fazer linhas rectas (f. 77-78); *Capítulo* VI. Mostra regra para que de um ponto assinalado numa linha sacar outra linha perpendicular sobre ela (f. 78-79); *Capítulo* VII. Mostra fazer no campo figuras elementares de geometria (f. 79-81); *Capítulo* VIII. Trata de um género de medida que dizem estadal, e

de outra que chamam corda, ou cordelada e foga, e diz quantos estadais quadrados fazem uma hanega de sembradura (f. 81-82); *Capítulo* IX. Mostra medir terras de figuras de 4 lados rectangulares (f. 82- 87); *Capítulo* X. Mostra medir triângulos(f. 87); *Capítulo* XI. Mostra medir figuras de 4 lados não rectangulares (f. 87-88); *Capítulo* XII. Mostra medir figuras ovais (f.88-89); *Capítulo* XIII. Mostra medir figuras circulares e semicirculares e porções e sectores (f.89-92); *Capítulo* XIIII. Trata da capacidade das figuras lineares de geometria. Isoperímetros (f. 92-94); *Capítulo* XV. Mostra converter por números umas figuras de geometria noutras (f. 94); *Capítulo* XVI. Em que se põem exemplos para conclusão de saber medir terras, e a ordem de medir as bases ou plantas dos montes- (f. 94-102); *Capítulo* XVII. Mostra dividir terras (f.102-115): *Artículo* I. Dividir uma terra triangular em duas ou mais partes iguais; *Artículo* II. Dividir uma terra de 4 lados equidistantes assim como quadrado, paralelogramo, Helmuyam, em duas ou mais partes iguais; *Artículo* III. Dividir quaisquer figuras quadriláteras, de lados não equidistantes, em 2 ou mais partes iguais; *Artículo* IIII. Dividir uma terra triangular em duas ou mais partes iguais; *Artículo* V. Dividir figuras hexagonais; *Artículo* VI. Dividir uma terra redonda em duas partes iguais; *Capítulo* XVIII. Mostra somar 2 ou mais figuras rectangulares de um mesmo género (f. 115-116); *Capítulo* XIX. Mostra dobrar ou tresdobrar ou quatodobrar uma figura linear Geométrica equilátera e equiângula, que é o mesmo que multiplicar (f.116-119); *Capítulo* XX. Mostra restar umas figuras rectangulares de Geometria de outras, de uma espécie (f. 119-120); *Capítulo* XXI. Mostra partir figuras geométricas (f. 120-122); *Capítulo* XXII. Mostra medir distâncias (f. 122-125); *Capítulo* XXIII. Mostra saber de 2 pontos apartados o que dista um de outro (f. 125-127).

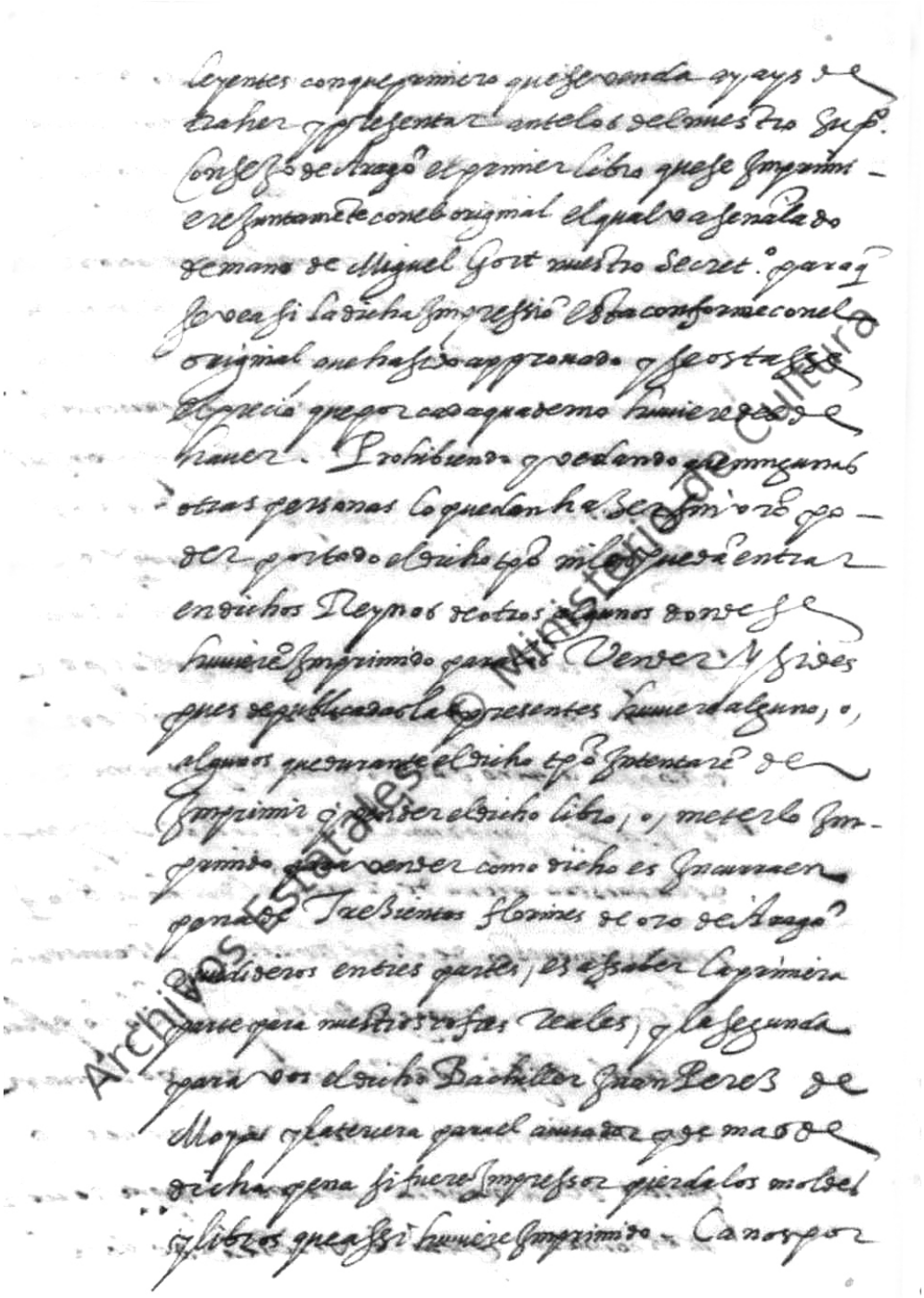
Anexo 2. ***Cópia da licença dada por Filipe II para a impressão e privilégio por dez anos do*** **Tratado de Mathematicas**



clxv

al mismo tenor delas presentes. dezimos y manda-
mos alos Ill.es Spectables nobles mag.cos y amados
Consejeros qualesquier lugarestenientes Capitanes
generales nuestros Ill.es nuestra canzilleria y Rege
te lo off.o dela general gouernacion y portantvezes
de nuestro general gouernador Alguaziles y otros
qualesquiere officiales nuestros enlos dichos nuestros
Reynos dela corona de Aragon constituydos y
constituyderos y a sus lugarestenientes y Regentes
los dichos officios so incurrimiento de nuestra
yra e indignacion y pena de mill florines de Aragon
delos bienes delos que lo contrario hiziezen
irremisible mente exigideros y a nuestros cofres
Reales applicaderos que la presente nuestra
licencia gracia y prohibicion y todo lo en ella
contenido tengan guarden y obseruen tener
guardar y obseruar hagan y contra ello no ven
gan por manera o razon alguna si mes-
tra gracia les es chara y de mas de nuestra
yra e indignacion en la pena sussodicha
dessean no incurrir En testimonio delo
qual hauemos mandado despachar las

Archivos Estatales © Ministerio de Cultura



Archivos Estatales Ministerio de Cultura

CLXIIII

haueys empleado en esto fuessemos seruido de os
dar licencia y facultad para que vos y quien de vos tuuiere
poder para ello y no otra persona alguna lo podays
y pueda imprimir y vender en los nuestros Reynos de la
Corona de Aragon, E nos teniendo consideracion
a lo sobredicho y que el dicho libro ha sido reconocido
por nuestro mandado lo hauemos tenido assi
por bien. Por ende con tenor de las presentes
de nuestra cierta sciencia deliberadamente y consul-
ta damos licencia permisso y facultad a vos
el bachiller Juan Perez de Moya para que por
tiempo de diez años contaderos del dia de la data
de las presentes en adelante vos o las per-
sonas y personas que vro poder tuuieren
y no otro alguno podays y pueda imprimir
o hazer imprimir en los dichos Reynos
de la nuestra corona de Aragon el dicho libro que
haueys compuesto de Arithmetica, Geometria
Astronomia, Cosmographia y Philosophia
natural assi todo junto en un volumen
como diuidido en dos o tres volumenes o
partes de la manera que a vos os pareciere
mas conuenir, para la utilidad de los

Archivos Estatales © Ministerio de Cultura

presentes con nuestro sello comun en el dorso sellada. Dat. en Madrid a doze de octubre año del nascimiento de N.º S.r mill quinientos setenta y uno.

Yo el Rey.

Dominus Rex mandavit mihi Michaeli Gort visa per comitem gnale Thesaurarium Loris Sentis et Sola et Sapena R.s Cancellariam et me pro Conser. generali

nobilis Rhiz. Clement

Don Phelippe etc. al egregio don Francisco de Moncada Conde de Aytona pariente nuestro lacienal de nuestra casa y corte salud y dilection, por parte de don Hieronymo Clemente nuestro Protonotario nos ha sido referido que en las consignaciones delas deudas liquidas de Aragon delas Cortes que ultimamente celebramos a los del nuestro Reyno de Aragon en el año Mil quinientos sessenta y quatro se asiento una partida a los herederos, o havientes derecho y accion de Mosser Miguel Velazquez Clemente su padre de

Archivo Estatal © Ministerio de Cultura

Anexo 3. Notas complementares sobre a biografia de Bento Fernandes e sobre o *Tratado da arte de arismetica*

A biografia de Bento Fernandes é mal conhecida, mas não há dúvida que foi mercador na cidade do Porto. Quem o afirma é Artur Magalhães Basto (1894-1960), personalidade incontornável na história da cidade do Porto, que assegura que o autor da *Arte de arismetica* viveu na Rua da Ponte de S. Domingos, onde tinha uma loja. Para chegar a esta conclusão, Magalhães Basto comparou a assinatura autógrafa existente no Arquivo Distrital do Porto num "instrumento de obrigação"[1004] feito e assinado por Bento Fernandes, em 22 de Julho de 1552, com a assinatura patente no colofón da referida obra. O portuense Ricardo Jorge (1858-1939), prestigiado médico e historiador, acrescenta alguma informação sobre o autor do *Tratado da arte de arismetica*, mas das suas palavras pouco mais se fica a conhecer: "Não sabemos que figura commercial era Bento Fernandes, se o mercador grangeou cabedaes ou se rebentou os haveres na edição, deixando romper o banco, como então se dizia em terminologia de fallencia. Hoje em dia com certeza não passava de guarda-livros ou de ensinar á noite contas de caixaria e arrumação de livros" [Jorge, R., 1908, pp. 67-68].

Sobre o *Tratado da arte de arismetica*, de Bento Fernandes, Ricardo Jorge observa que se trata de uma obra rara e refere-se-lhe como sendo "um Guttemberg quasi primitivo, destinado a um escuro balcão da rua dos Mercadores". Desta obra menciona a existência de apenas três volumes, pertencentes à Biblioteca Pública Municipal do Porto, à Biblioteca Pública de Évora e à "livraria particular d'El-rei" [Jorge, R., 1908, pp. 67-68]. Marques de Almeida afirma que este *Tratado da arte de arismetica* é a segunda edição de uma obra cuja primeira edição, intitulada *Arte de Arismetica*, foi impressa por Vasco Dias Tanco do Frexenal, em 1541, mas diz não conhecer nenhum exemplar da *Arte de Arismetica* [Almeida, A. A. M., 1994, I, p. 92]. A *Arte de Arismetica* é, também, citada por Ribeiro dos Santos [Santos, R., 1812, parte I, p. 108]. Sobre a existência desta edição, o reputado bibliógafo português do século XIX, Innocêncio Francisco da Silva, refere que não viu nenhum exemplar nem sabe onde exista [Silva, 1858, p. 344]. Venâncio Deslandes fala, também, da existência do tratado impresso por Vasco Diaz Tanco Frexenal, mas reproduz o privilégio real, datado de 1555, de impressão e venda por dez anos com que o *Tratado da*

[1004] Arquivo Distrital do Porto-Po, 3ª S^{e}, n^{os} 4 e 5 fl. 298.

arte de arismetica foi agraciado [Deslandes, V., 1988, p. 18]. Na *Bibliografia das obras impressas em Portugal no século XVI*, a única obra de Bento Fernandes que António Joaquim Anselmo menciona é o *Tratado da Arte de arimetica*, impresso em 1555 [Anselmo, A. J., 1929, p. 127]. Anselmo refere que a obra "está composta bellamente em gothico de incunábulo; faz honra aos primeiros prélos portuenses d'onde sahiram as «Constituições do Bispado» e o «Compromisso da Misericordia». Portada floreada, onciaes de capítulo, itens de paragraphos, tudo alegra os olhos do amador; a taboada até 100 que abre o livro estampa-se a sanguínea e os cálculos illustrativos marginam o corpo das páginas[1005].

O conteúdo do *Tratado da arte de arismetica* está assim distribuído:[1006] as páginas iniciais mostram o *Prólogo* e as *Tavoadas* e as últimas têm a função de índice, indicando os temas constantes da obra e a página correspondente a cada um deles. O texto é uma sequência de temas, que não está dividida em capítulos; no entanto, nos fólios que têm a função de índice, são dadas indicações muito detalhadas dos temas tratados na obra. Na descrição que apresentamos a seguir, tanto o agrupamento dos assuntos como as indicações numéricas que os precedem, que colocámos entre parêntesis, são da nossa responsabilidade.

(1) Numeração e operações com inteiros (ff. 7f- 17v)

(2) Regras de três e de cinco (ff. 17v- 21v)

(3) Regras de companhias (ff. 21v- 23f)

(4) Provas reais (ff. 23f- 24f)

(5) Outras Regras de companhia (ff. 24f- 26v)

(6) Operações com fracções (ff. 26v- 32f)

(7) Regras de três com fracções (ff. 32f- 33f)

(8) Regras de companhias com fracções (ff. 33f- 36v)

(9) Regra "da menos deminuição" (ff. 36v- 38v)[1007]

(10) Regra de "quarto e vintena, da conta de frandres e de baratas" (ff. 38v- 45v)

[1005] As *Constituições Sinodais do Bispado do Porto*, de Frei Baltasar Limpo, foram impressas no Porto, em 1541, por Vasco Diaz Tanco de Frejenal, impressor espanhol que trouxe ao Porto a sua prensa móvel, para este fim. Só passados catorze anos se voltou a imprimir no Porto uma obra, o *Tratado da arte de arismetica*, de Bento Fernandes. O impressor foi Francisco Correia, impressor da Tipografia do Colégio Real em Coimbra. [Meireles, M. A., 1997, p. 13].

[1006] No exemplar da Biblioteca Pública Municipal do Porto [Res. Y1-3-31], todas as folhas até à 22 estão em mau estado de conservação. O volume da Biblioteca Pública de Évora [Res. 55] está em bom estado de conservação.

[1007] O conceito que está aqui estudado é o da determinação do *máximo divisor comum* de dois números. Foi tratado por Pacioli, na *Summa*, onde é referido como *esquissacion*, e corresponde ao processo que ficou conhecido por *algoritmo de Euclides*.

No fólio 44, no estudo da regra das baratas, Bento Fernandes fala pela primeira vez da "regra da cousa", que utiliza como um processo alternativo para resolver dois problemas sobre comércio de mercadorias. Nesse contexto menciona termos que não estavam anteriormente apresentados, como "cousa" para referir a incógnita, e recorre a uma equação que só posteriormente ensina a resolver.

(11) Regras para trabalhar com progressões (ff. 45f- 47v)

Este tema começa com uma breve e confusa explicação do que é uma progressão, embora inclua a apresentação de regras correctas para o cálculo da soma dos termos de progressões aritméticas e de progressões geométricas, de diferentes razões. Bento Fernandes usa a designação "números ao galalim" (não encontrámos esta expressão em nenhuma obra impressa ou manuscrita, que consultámos) com o significado de progressão geométrica de razão 2 e indica como soma dos termos desta progressão a expressão que em notação simbólica usual é dada por $S = 2u_n - u_1$.

(12) Regras para prosseguir caminhando (ff. 46f- 47v)

(13) Regras para fazer pagamentos em diferentes moedas, descontos e problemas sobre o trato de mercadorias: regra da falsa posição (ff. 48f- 59f)

(14) Regra de duas falsas posições e problemas do quotidiano que se resolvem pela falsa posição (ff. 59f- 70v)

(15) Problemas de aplicação da falsa posição à determinação de números (ff. 70v- 80v)

Nesta secção são propostos e resolvidos cinquenta e quatro problemas sobre a determinação de números em certas condições. Tal como antes sucedera, Bento Fernandes também aqui aplica a "regra da cousa" na resolução de um problema, antes de ter introduzido as regras da álgebra. Não obstante, todo o procedimento algébrico conducente à determinação da solução está perfeitamente estruturado e as operações elementares realizadas com a incógnita (a "cousa") estão correctas. As únicas diferenças que se observam relativamente aos textos actuais são as que estão relacionadas com a não utilização de notação adequada e a não consideração da solução nula.

(16) Determinação de raízes e operações com radicais (ff. 80v- 82v)

(17) Regras da álgebra (ff. 83f- 94v)

O estudo deste tópico intitula-se: "Aqui vos mostrarei regras da zibra moquavel a qual vulgarmente se chama regra da cousa e de çẽso, de cẽso e de cubi e raiz da cousa e raiz de numero e de toda valia de regra e razão para quem tiver delicado engenho e memoria". Ao introduzir o assunto, Bento Fernandes escreve: "As rezões & regra da zibra moquavel,

que se diz regra da cousa de que entendo tratar ao diãte mediante a graça do espirito santo ainda que pareça ao principio escura aqui vos darei declaraçam & regras pera cada pregunta. E ho modo & regra geral de todas as rezões & alem desta regla em ho principio de cada rezam vos tornarey há dar regra geral para cada rezã para vos per ela regerdes & primeiramente vos mostrarei aqui hua tavoada que é necessaria para terdes em vossa memoria e a saberdes de cor assi como vos disse da tavoada pequena que atras fica" [Bento Fernandes, 1555, f. [83].

Seguem-se-lhe algumas notas que, nas suas palavras, constituem um pré-requisito para a resolução de equações. Apresentamo-las em seguida, acompanhando o texto da sua interpretação em simbologia actual:

E aveis de notar que partindo numero per cousa vem número	$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
E partindo numero per censo vem raiz	$ax^2 = b \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}$
E partindo cousa per censo vem número	$ax^2 = b\,x \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
E partindo numero per cubo vem raiz de cubica	$ax^3 = b \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$
E partindo cousa per cubo vem raiz	$ax^3 = bx \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}$
E partindo censo per cubo vem numero	$ax^3 = bx^2 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
E partindo numero per censo de censo vem raiz de raiz	$ax^4 = b \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$
E partindo cousa per censo de censo vem raiz cubica	$ax^4 = bx \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$
E partindo censo per censo de censo vem raiz	$ax^4 = bx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}$
E partindo cubo per censo de censo vem numero	$ax^4 = bx^3 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
E partindo numero per cubo de cubo vem raiz cubica de raiz cubica	$ax^6 = b \Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{b}{a}}$
E partindo cousa per cubo[1008] [de cubo] vem raiz de raiz cubica	$ax^6 = bx \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{b}{a}}$
E partindo censo per cubo de cubo vem raiz de raiz	$ax^6 = bx^2 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$
E partindo cubo per cubo de cubo vem raiz cubica	$ax^6 = bx^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$
E partindo censo de censo por cubo de cubo vem raiz	$ax^6 = bx^4 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}$

[1008] No original está escrito apenas cubo mas, de acordo com todo o restante texto, deve ler-se "cubo de cubo".

Vejamos, agora, quais os tipos de equações estudados por Bento Fernandes e as regras de resolução indicadas para cada um. Notamos que algumas destas regras estão erradas (é o que se passa com as indicadas para os casos 12, 13, 14 e 23) e outras só são válidas em casos particulares (como as dadas para os casos 24, 25 e 26). No texto de Bento Fernandes as equações não estão numeradas, mas aqui antecedemo-las de um número para facilitar a sua indicação.

1.	$ax = b$	$x = \frac{b}{a}$
2.	$ax^2 = b$	$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$
3.	$ax^2 = bx$	$x = \frac{b}{a}$
4.	$ax^2 + bx = c$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$
5	$ax^2 = bx + c$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$
6.	$bx = ax^2 + c$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$
7.	$ax^3 = c$	$x = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$
8.	$ax^3 = \sqrt{c}$	$x = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}}$
9.	$ax^3 = bx$	$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$
10.	$ax^3 = bx^2$	$x = \frac{b}{a}$
11.	$ax^3 = bx^2 + cx$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$
12.	$ax^3 = bx + c$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$

13.	$ax^3 = bx^2 + c$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$
14.	$ax^3 = bx^2 + cx + d$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c+d}{a}} + \frac{b}{2a}$
15.	$bx^2 + ax^3 = cx$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$
16.	$ax^3 + cx = bx^2$	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$
17.	$ax^4 = d$	$x = \sqrt{\sqrt{\frac{d}{a}}}$
18.	$ax^4 = cx$	$x = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$
19.	$ax^4 = cx^2$	$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$
20.	$ax^4 = cx^3$	$x = \frac{c}{a}$
21.	$cx^2 = ax^4 + e$	$x = \sqrt{\frac{c}{2a} - \sqrt{\left(\frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{e}{a}}}$
22.	$ax^2 = \sqrt{c}$	$x = \sqrt{\sqrt{\frac{c}{a^2}}}$
23.	$ax^2 = c + \sqrt{c}$	$x = \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\sqrt{\frac{c}{a}}}$
24.	$cx + bx^2 + ax^3 = d$	$x = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^3}{\left(\frac{b}{a}\right)^3} + \frac{d}{a}} - \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}$
25.	$dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 = e$	$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\frac{d}{a}}{\frac{b}{a}}\right)^2} + \frac{e}{a}}} - \sqrt{\frac{\frac{d}{a}}{\frac{b}{a}}}$

26.	$cx^2 + bx^3 + ax^4 = \sqrt{e}$	$x = \sqrt{\left(\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}\right)^2 + \sqrt{\frac{e}{a^2}}} - \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}$
27.	$\sqrt{cx^2+dx+ax^4} = \sqrt{e+bx^3}$	$\sqrt{\frac{\frac{d}{2a}}{\frac{b}{a}} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{4}\right)^2} + \frac{\frac{b}{a}}{4} - \sqrt{\frac{\frac{d}{2a}}{\frac{b}{a}}}$

(18) Resolução de problemas (f. 94v-106v)

(19) Questões sobre as ligas de prata e de ouro (f. 106v- 118v).

Anexo 4. Poema laudatório de *Dominicus Çapatta*[1009]

"Cuanto leerás, no há sido visto nunca.
Es agradable mencionar algo de cuánto se estima el espíritu.
Agrada hablar un poco contigo mismo.
¿Quién puede explicar mucho en tiempo tan insuficiente?
Y de qué modo lo dice.
A pesar de que Júpiter deje pasar los años de gloria,
aunque yo reniegue que esto pueda recordar pocas cosas.
Nadie me va aún el espléndido Arte de los Números,
tantas veces demandado. Moya te lo da ahora.
Moya te lo entrega gustoso, mostrándotelo con tal semblante
cuanto es piadoso de alma, piadoso de sentimientos.
Su fama vuela,
Su alabanza a las estrellas gusta elevarse
y contemplar los coros sagrados.
Con merecimiento, venerándolo, lo cantará España;
que nada se oponga a la evidencia;
pido que mi voto se cumpla.
Merecidamente lo venerará;
que lo canten los Sátiros Marinos, y las Ninfas y Faunos;
pido que mi voto se cumpla.
Incluso el Puerto de San Esteban,
pues es nuestra patria,
(conforme nombran a Moya);
pido que mi voto se cumpla.
Y que participe de mis deseos,
mientras recatadamente cuenta sus últimos años
y contempla su propia obra.
Finalmente que Tritón, amarrado en su propio anillo,

[1009] Tradução, de latim para castelhano, feita por Moreno Uclés. Ver [Moreno Uclés, 1996, folha não numerada].

domine con apropiado mando el alboroto de la serpiente.
Al Rey se le concede, créeme, vivir eternamente
y no al dueño, ni a quien tiene vestido innoble.
Ciertamente, pero verás a tus mares retirarse,
Antes de que la fama de Moya pueda languidecer."

Anexo 5. Unidades de medida indicadas por Moya e relação entre elas

palmo	4 dedos (de acordo com Vitrúvio)
pie	4 palmos (de acordo com Vitrúvio)
cubito ou codo pequeno	pie y medio
pertica	10 pies
estádio	125 pasos (de acordo com Plínio)
milla ou milla romana	8 stadios ou 1000 pasos
onça	3 dedos ou doze grãos de cevada
dicha	2 palmos
espithema	3 palmos
codo	6 palmos
codo comum	8 palmos
codo grande	36 palmos
paso ou passada comum	2 pies
pasada geométrica	4 pies (Columela considera 5 pies)
vara	3 pies
ulna comum	4 pies
ulna agreste; orgya	6 pies
plethrum; iugero	100 pies
legua italiana	1000 pasos geométricos
legua	1 milla e meia (12 estádios, segundo dizem os Italianos)
legua comum	3 millas; 24 estádios
legua alemana	4 millas
legua española	5000 varas
legua de Suevia	5 millas
diaulos	2 estádios
dolicos	12 estádios
parafanga	30 estádios
milla Alemaña comum	32 estádios; 4000 pasos
schenus	60 estádios
stathmos	28 millas y media
lapis	1000 pasos
milla grande	5000 pasos

Bibliografia

Fontes primárias

MANUSCRITOS

Pérez de Moya, Juan (1564). *Arte de Marear escrita por Juan Pérez de Moya en el año de 1564*. São Lourenço do Escorial.

Pérez de Moya, Juan (1573). *Obras del Bachiller Juan Perez de Moya. En que se tratan cosas de Aritmética, y Geometria. Y Astronomia y Cosmographia y Philosophia natural.* Biblioteca Nacional de España.

IMPRESSOS

Aguilera, Juan (1554). *Canones Astrolabii Universalis.* Salamanca.

Andrés, Joan (1515). *Sumario breve de la pratica de la Arithmetica de todo el curso del arte mercantivol bien declarado: el qual se llama maestro del quento.* Valência.

Anónimo. *Il Trattato d'Algibra* (séc. XIV). Ms. Fond. Princ. II.V.152 della Biblioteca Nazionale di Firenze. Em Franci, R. e Pancati, M. (eds.) [1988].

Anónimo. *Libro dí contí e mercatanzie* (séc. XV). Ms. Pal. 312 della Biblioteca Palatina di Parma. Em Gregori, S. e Grugnetti, L. (eds.) [1998].

Apiano, Pedro (1548). *Libro dela Cosmographia de Pedro Apiano, el qual trata la descripcion del Mundo, y sus partes, por muy claro discurso y lindo artificio: com otros dos libros del dicho Gemma, de la materia misma*. (Enveres) Antuérpia.

Apiano, Pedro (1553). *Cosmographia Petri Apiani. Additis eiusdem argumenti libellis ipsius Gẽmæ Frisii*. (1ª ed sem contribuição de Gemma Frísio, 1524, Landshut) (1ª ed com contribuição de Gemma Frisio, 1539, Antuérpia). Paris.

Aurel, Marco (1541). *Tratado muy util y provechoso: para toda manera de tratantes: y psonas (sic) afficionadas al contar: de reglas breves de reducciões d monedas e otras reglas tãto breves quanto cõpediosas*. Valência.

Aurel, Marco (1552). *Libro primero de Arithmetica Algebratica, enel qual se contiene el arte Mercantivol, com otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Álgebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la cosa: sin la qual no se podra a*

entender el decimo de Euclides, ni otros muchos primores, assi en Aritmética como en Geometría. Valência.

Bombelli, Rafael (1572). *L'Algebra*. Em Bortolotti, E e Forti, U. (eds.) [1996].

Bovelles, Charles de (1551). *Geometrie practique*. (1ª ed., 1547, Antuérpia). Paris.

Cardano, Girolamo (1539). *Practica arithmetice, & mensurandi singularis: in quaque parter alias continentur, versa pagina demonstrabit*. (Mediolani) Milão.

Cardano, Girolamo (1545). *Ars Magna sive de regulis algebraicis.* Nuremberga. Witmer, R. T. (ed.) (1968) M.I.T. Cambridge. Reimpressa por Dover (1993) Nova Iorque.

Cardano, Girolamo (1663). *Opera.* 10 vols. Lion. Repr. em *Il Giardino de Archimede*.

Chaves, Jerónimo de (1584). *Chronographia o Reportorio de Tiempos, el mas copioso y precisso, que hasta ahora ha salido a luz.* (1ª ed., 1548). Sevilha.

Chuquet, Nicolas [t] (1484). *Triparty en la science des nombres*. Ms fds franç. 1346. B. N. de França, ff. 2r-147r. Lyon, 1484. Em Marre, A. (ed) [1880].

Chuquet, Nicolas [a] (1484). *Apéndice del Triparty en la science des nombres.* Ms fds franç. 1346. B. N. França, ff. 148r-210r. Lyon, 1484. Em Marre, A. (ed) [1881].

Columela. *De re Rústica Libri XII*. http://www.thelatinlibrary.com/columella.html (Consultado o livro V, em 20 de Agosto de 2010).

Corachán, Juan Baustista (depois de 1735). *Arithmetica demo[n]strada theorica e pratica para o mathematico e mercantil*. Cod. 13038//2 da B. N. Portugal. Cópia da trad. da edição (Barcelona, 1735).

Cortés, Martín (1551). *Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar con nuevos instrumentos y reglas: exemplificado con muy subtiles demonstraciones*. Sevilha.

Dürer, Albrecht (1525). *Underweysung der Mesung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, und gantzen corporen*. Nuremberga.

Euclides (1482). *Euclides Elementa*. Campano (trad). Veneza.

Euclides (1482). *Campanus of Novara and Euclid's Elements.* 2 Vols. Busard, H. L. L. (ed.) [2005].

Euclides (1558). *Elementorum geometricorum Libri XV*. Zamberti, B. (ed.). (1ª ed., 1516). Paris.

Euclides (1557). *In Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum libri sex.* Peletier, J. (ed.). (*Lugduni*) Lion.

Euclides (1558). *Euclid, Elementorum geometricorum Libri XV.* Heruagium, Joannem (ed.). Basileia.

Euclides (1565). *Euclide Megarense philosopho, solo introduttore delle scientie mathematiche. Diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto.* Tartaglia, N. (ed.) (1ª ed., 1543). Curtio Troiano. Veneza.

Euclides (1895). "Optica". Em *Euclidis Opera Omina.* Vol II. Heiberg, I. L. e Menge, H. (eds.). Leipsig.

Faleiro, Francisco (1535). *Tratado del Sphera y del Arte del Marear.* Sevilha. Reimp. em Bensaúde, J. [1995].

Feliciano, Francesco (1563). *Libro di Arithmetica & Geometria speculativa & praticale*. (1ª ed., 1526). Veneza.

Fernandes, Bento (1555). *Tratado da arte de arismetica*. Porto.

Fernandéz de Enciso, Martín (1530). *Suma de geographia: que trata de todas las partidas e provincias del mundo, en especial de las índias e …del arte de marear … com la esphera en romance, com el regimieto del sol y del norte*. (1ª ed., 1519). Sevilha.

Finé, Oronce (1556). *La composition et usage du quarre geometrique, par lequel on peut mesurer fidelement toutes longueurs, hauteurs, & profonditez, tant accessibles comme inaccessibles, que lon peut apercevoir à l'œil.* Paris.

Finé, Oronce (1587). *Opera di Orontio Fineo del Delfinato divise in cinque parti Arimetica, Geometria, Cosmografia e Orinoli*. (Trad. italiana das 4 partes da *Protomathesis*, 1532; trad de *De Speculo ustorio*, 1551). Bartoli, C. (trad.). Veneza.

Frísio, Gemma (1548). *Libritto dela manera de describir o situar los lugares, y de hallar las distancias de aquellos, nunca visto hasta agora.* Em *A*piano, P. [1548]. (Enveres) Antuérpia, 55r- 68v.

Frísio, Gemma (1556). *Les Principes d'Astronomie & Cosmographie: avec l'usage du Globe. Plus, est adiousté l'usage de l'anneau Astronomic.* Boissiere, M. C. (trad.) Paris.

García Céspedes, Andrés (1606). *Libro de instrumentos nuevos de Geometria muy necessarios para medir distancias, y alturas, sin que intervegan numeros, como se demuestra en la practica. Demas desto se ponen otros tratados, como es uno de conduzir aguas, y otro una question de artilleria, en donde se ponen algunas demostraciones curiosas.* (1ª ed.). Madrid.

Gerardi, Paolo (1328). *Libro di ragioni*. Ms Magl. C.L.XI.87 della Biblioteca Nazionale di Firenze. Em Van Egmond, W. (ed.) [1978].

Ghaligai, Francesco (1552). *Pratica d'arithmetica.* (1ª ed, 1521, com o título *Summa de Arithmetica*). Florença.

Leonardo Pisano (1202). *Liber abaci.* Ms. Magl. C.I. 2616, badia Fiorentina, nº 73. Biblioteca Nazionale di Firenze. Sigler, L. (trad.) [2002].

Leonardo Pisano (1225). *Liber quadratorum*. Ms. Ambr. E 75. Biblioteca Ambrosiana. Sigler, L. (trad.) [1987].

Mº Gilio. *Questioni d'Algebra* (séc. XIV). Cod. L.IX.28 della Biblioteca Comunale di Siena. Em Franci, R. (ed.) [1983].

Medina, Pedro de (1545). *Arte de Navegar: en que se contienen todas las reglas, declaraciones, secretos y avisos, que a la buena navegacion son necessaros, y se deven saber.* Valadolid.

Medina, Pedro de (1563). *Regimiento de navegación: contiene las cosas que los pilotos han de saber para bien navegar: y los remedios y avisos que han de tener para los peligros que navegando les pueden suceder*. Sevilha.

Mendez, Ruy (1540). *Pratica darismetica nouamente agora composta pelo licenciado ruy Mendez: na qual se decraram por boa ordem e craro estilo as quatorze especias darte darismetica .&. as sete dellas por numeros inteyros e as outras sete por numeros quebrados: e assi mesmo trinta e cinco regras da dita arte muito sotil e breue e craramente decraradas.* Lisboa.

Mexía, Pedro (1540). *Silva de varia lecion.* Sevilha.

Münster, Sebastien (1551). *Rudimenta Mathematica: haec in duos digeruntur libros, quorum prior geometriae tradit principia seu prima elementa, unà cum rerum et uariarum figurarum dimensionibus, posterior uerò omnigenum horologiorum docet delineationes*. Basileia.

Nicolas, Gaspar (1519). *Tratado da Pratica Darismetyca*. Lisboa.

Nunes, Pedro (1537). *Tratado da Sphera*, *Astronomici Introductorii de Spaera Epítome. Obras*, Vol. I. 1-62.

Nunes, Pedro (1537). *Tratado que ho doutor Pero nunez Cosmographo del Rey nosso senhor fez em defensam da carta de marear: cõ o regiměto da altura. Obras*, Vol. I., 120-184.

Nunes, Pedro (1567). *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria.* (Amberes) Antuérpia.

Ortega, Juan de (1512). *Sígue se una compusicion de la arte dela arismetica y Juntamente de Geometria.* Barcelona.

Ortega, Juan de (1537). *Tratado subtilissimo de arismetica y de geometria.* (1ª ed., 1534). Sevilha.

Ortega, Juan de (1552). *Tractado subtilissimo d'Arismetica y de Geometría*. Sevilha.

Ortega, Juan de (1563). *Tractado subtilissimo d'arismetica y geometria. Cõpuesto por el reverĕdo padre fray Juã de Hortega: agora de nuevo emendado cõ mucha diligĕcia por Juan Lagarto, y antes por Gõçalo Busto; de muchos errores q avia en algunas impresiones passadas. Van Añadidas en esta impresión las pruevas desde reducir hasta partir quebrados. Y en las mas delas figuras de geometria sus pruevas, con ciertos avisos subjectos al Álgebra. Va añadido en esta postrera impressiõ un tractado del bachiller Juã Perez de Moya. Trata reglas para cõtar sin pluma y de reducir unas monedas castellanas en otras*. Granada.

Pacioli, Luca (1494). *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*. Veneza.

Pacioli, Luca (1494a). *Tractatus geometrie. Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita Pars II*. ed. Simi, A. e Presas, A. (ed.).

Peletier, Jacques (1554). *L'Algebre de Iaqves Peletier Du Mans, departie an deus Livres.* Lion.

Peletier, Jacques (1557). *In Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum libri sex.* (*Lugduni*) Lion.

Peletier, Jacques (1573). *De l'usage de Geometrie*. Paris.

Pellos, Francés (1492). *Compendion de l'Abaco*. Em Lafont, R. (ed.). Turín.

Pérez de Moya, Juan (1554). *Libro de Cuenta, que tracta las cuatro reglas generales de Arithmetica practica por numeros enteros y quebrados, y reducciones de monedas destos reynos de Castilla, com un razonamiento sobre la misma facultad*. Toledo.

Pérez de Moya, Juan (1557). *Silva, eutrapelias id est Comitatis et urbanitatis ex variis probatae fidei Authoribus & vitae experimentis.* (Pinae). Córdova.

Pérez de Moya, Juan (1558). *Compendio dela regla dela cosa o Arte Mayor*. Burgos.

Pérez de Moya, Juan (1562). *Arithmetica practica, y speculativa. Agora nueuamente corregida y añadidas por el mismo author muchas cosas, con otros dos libros y vna Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que eneste libro se contiene.* Salamanca.

Pérez de Moya, Juan (1567). *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos. Libro segundo, trata cosas de Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Relojes.* Salamanca.

Pérez de Moya, Juan (1568). *Obra Intitulada Fragmentos Mathematicos. Libro primeiro: Geometria Practica.* Salamanca.

Pérez de Moya, Juan (1569). *Aritmetica, Practica, y Speculativa.* (1ª ed., 1562). Alcalá.

Pérez de Moya, Juan (1573). *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural. Con otras varias materias, necesarias a todas artes Liberales, y Mecanicas*. Alcalá de Henares.

Pérez de Moya, Juan (1573a). *Tratado de Mathematicas. Libro primero de Aritmetica Teorica o Speculativa*. Alcalá de Henares.

Pérez de Moya, Juan (1573b). *Tratado de Mathematicas. Libro segundo de Geometria practica, y speculactiva*. Alcalá de Henares.

Pérez de Moya, Juan (1573c). *Tratado de Mathematicas: Tratado de cosas de Astronomia y Cosmographia y Philosofia natural*. Alcalá de Henares.

Pérez de Moya, Juan (1582). *Aritmetica de Moya intitulada manual de contadores*. Alcalá de Henares.

Pérez de Moya, Juan (1583). *Varia historia de sanctas e illustres mugeres en todo genero de virtudes, recopilado de varios autores.* Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1584). *Principios de Geometria, de que se podran aprovechar los estudiosos de Arts Liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y cõpas en la mano. Con el orden de medir, y dividir tierras.* Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1585). *Philosophia secreta: donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina, provechosa a todos los estudios: con el origin de los idolos o dioses de la gentilidad*. Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1598). *Arismetica pratica, y especvlativa*. (1ª ed., 1562). Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1599). *Filosofía secreta donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina provechosa a todos los estudios.* (1ª ed. 1585). Alcalá de Henares.

Pérez de Moya, Juan (1599). *Comparaciones o similes para los vicios y virtudes; muy util y necesario para predicadores y otras personas curiosas.* (1ª ed., 1584). Valência.

Pérez de Moya, Juan (1624). *Aritmetica; Practica y Especulativa*. (1ª ed., 1562). Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1673). *Filosofía secreta donde debaxo de histórias fabulosas se contiene mucha doctrina provechosa a todos los estudios*. (1ª ed., 1585). Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1675). *Aritmetica; Practica y Especulativa.* Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1735). *Filosofia Secreta, donde debaixo de histórias fabulosas se contem muita doutrina proveitosa com a origem dos ídolos ou deoses da gentilidade*. Cod. 1471 B. N. Portugal. Cristo, A. (trad.).

Pérez de Moya, Juan (1745). *Aritmetica; Practica y Especulativa*. (1ª ed., 1562). Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1996). *Comparaciones o símiles para los vicios y virtudes. Philosophía secreta*. Baranda, C. (ed.). Madrid.

Pérez de Moya, Juan (1998). *Arithmética práctica y speculativa. Varia historia de sanctas e illustres mugeres*. Baranda, C. (ed.). Madrid.

Pimentel, Manoel (1746). *Arte de navegar:em que se ensinam as regras praticas, e os modos de cartear, e de graduar a balestilha por via de numeros, e muitos problemas uteis á navegaçao: e Roteyro das viagens, e costas maritimas de Guiné, Angóla, Brasil, Indias, e Ilhas Occidentaes, e Orientaes novamente emendado, e accrescentadas muitas derrotas.* (1ª ed., 1699). Lisboa.

Plínio. *Pline l'Ancien, Histoire Naturelle*. Livres II (10), XVII (XVII), LXXVII (XXXIV) (3). Em Littré, É. (ed.) (1848-1850). Paris. http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre17.htm (Consultada em 15 de Novembro de 2009) e http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre18.htm (Consultada em 15 de Novembro de 2009).

Plínio. *Pline l'Ancien, Histoire Naturelle.* Livre VII. Schilling, R. (trad. e notas). Em Budé (ed.) (1977). Universités de France.

Puig, Andrès (1715). *Arithmetica Especulativa, y Practica; y Arte del Algebra. En la qual se contiene todo lo que pertenece al Arte menor, ò mercantil, y à las dos Algebras, Racional, è Irracional; con la explicacion de todas la Proposiciones, y Problemas de los Libros quinto, septimo, octavo, nono, y dezimo del Principe de la Mathematica Euclides.* (1ª ed, 1672). Barcelona.

Purbáquio, Georg von (1516). *Quadratum geometricum.* Nuremberga.

Ringelberg, Joachim Forcio (1531). *Chaos Mathematicum. Ad Geometriam Spectantia*. Em *Opera*, Lion, 1531, 480-509. Graaf, B. (ed. Facsímil, 1967). Nieuwkoop, 332 - 517.

Rocha, Antich (1565). *Arithmetica recopilacion de todas las otras que se han publicado hasta agora.* (1ª ed., 1564). Barcelona.

Rodrigo Zamorano (1576). *Los seis Libros Primeros dela Geometria de Euclides.* Sevilha.

Rojas, Cristóval de (1598). *Teorica y Practica de Fortificacion, conforme las medidas y defensas destos tiempos, repartida en tres partes.* Madrid.

Santcliment, Francesc (1482). *Summa de l'art d'Aritmètica*. Em Malet, A. (ed.) [1998].

Sequeira, Gaspar C. (1612). *Thesouro de Prudentes.* Coimbra.

Serlio, Sebastiano (1545). *Il primo libro d'Architettura, di Sabastiano Serlio, Bolognese. Iehan Martin* (trad.) (1ª ed., 1537, apenas o vol. 1). Paris. http://architectura.cesr.univ-tours.fr/traite/Notice/ENSBA_LES1736.asp (Consultada em 30 de Janeiro de 2011).

Stevin, Simon (1634). *Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin de Bruges. Ou sont inserées les Memoires Mathematiques.* Albert Girard (ed.). Leyde.

Stifel, Michael (1544). *Arithmetica Integra*. Nuremberga. http://num-scd-ulp.u-strasbg.fr:8080/679/ (Consultada em 4 de Janeiro de 2010).

Strabon (1512). *Straboniis ilustrissimi scriptoris Geographia decem et septem libros cotinens. Liber Primus.* Paris.

Tartaglia, Nicolo (1546). *Quesiti et inventioni diverse.* Veneza.

Tartaglia, Nicolo (1556). *La Seconda Parte del General Trattato de Numeri, et Misure di Nicolo Tartaglia, nella quale in undici libri si notifica la piu ellevata, et speculativa parte della Pratica Aritmética, laqual è tutte le regole, & operationi pratica delle progresión, radici, proportioni, & quantita irrationali.* Veneza.

Tartaglia, Nicolo (1560a). *La Terza Parte del General Trattato de Numeri, et Misure di Nicolo Tartaglia*, *nel quale si dechiarano i primi principii, et la prima parte della Geometría, con bellissimp, et facilísimo modo; cose utilissime, et dilettevoli, per tutte quelle persone, che si dilettano disapere. Dimostrasi oltra di cio, la prattica del misurare ciascuna cosa, con brieve, & facile via.* Veneza.

Tartaglia, Nicolo (1560b). *La Quarta Parte del General Trattato de Numeri, et Misure, di Nicolo Tartaglia; nella quale si riducono in numeri quasi la maggior parte delle figue, cosi superficiali, cme corporee della geometría; et oltre à oio s'applicano alla materia, o si metteno in atto prattico. Cose molto utili à tutte le qualità dele persone, et infiniamente desiderate' de' studiosi delle Divine Mathematice.* Veneza.

Tartaglia, Nicolo (1560c). *La Quinta Parte del General Trattato de Numeri, et Misure, di Nicolo Tartaglia*; *nella quale si mostra il modo de essequire com il compasso, et com la regha tutti li problemi geometrici di Euclide et, materia non men'utile che necessaria à Geometrici, Designatori, perspettivi, Architetori, Ingegneri, & Machinatori, si naturali, come Mathematici*. Veneza.

Tartaglia, Nicolo (1560d). *La Sesta Parte del General Trattato de Numeri, et Misure, di Nicolo Tartaglia; nella quale si delucida quella antica pratica speculativa de Larte Magna, detta in Arabo Algebra, et Almucabala, over regola Della cosa trovata da maumeth, figliolo de Moise arabo, La qual se puo dire la perfeta arte del calculare, perche la sulisse, & serve, per risolvere infiniti casi, over questioni, si in Geometria, come in Arithmetica, che alcuna delle altre regole (an'hora datte) non potria servire. Giontovi in fine molti quesiti risolti per Algebra, si in Arithmetica, come in Geometria*. Veneza.

Ventallol, Joan (1521). *Pràtica mercantívol.* Lion. Pérez, L. (ed.) [1985].

Fontes secundárias

Albuquerque, L. (1965). *Os Guias Náuticos de Munique e Évora.* Junta de Investigações do Ultramar. Lisboa.

Albuquerque, L. (1972). *Curso de História da Náutica.* Coimbra.

Albuquerque, L. (1986). *Introdução à História dos Descobrimentos Portugueses*. Men Martins.

Albuquerque, L. (1987). *Códice Bastião Lopes*. Imprensa Nacional-Casa da Moeda. Lisboa.

Albuquerque, L. (1988). *Instrumentos de Navegação*. Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, Lisboa.

Albuquerque, L. (1989). *A Arte de Navegar.* Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa.

Albuquerque, L. (1989a). *A náutica e a Ciência em Portugal*. Notas sobre as navegações. Lisboa.

Albuquerque, L. (1991). *Historia de la Navegación Portuguesa*. Trad. José Manuel Fuentes. Madrid.

Allard, A. (1997). *L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval*. Em: *Histoire des sciences arabes*, Vol. 2. Rashed, R. (ed.). Paris. 199-229.

Almeida, A. A. M. (1994). *Aritmética como descrição do real (1519-1679)*, 2 Vols. Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa.

Altamirano, C. (2008). *História de los intelectuales en América Latina*. Vol I. Argentina.

Anselmo, A. J. (1926). *Bibliografia das obras impressas em Portugal no século XVI*. Oficinas Gráficas da Biblioteca Nacional. Lisboa.

Arquimedes. *Archimedes*. C. Dikshoorn (trad.). Dijksterhuis, E. J. (1987). Princeton University, New Jersey.

Arrighi, G. (2004). *Gino Arrighi. La Matematica dell'Età di Mezzo. Scritti scelti*. Ed. F. Barbieri, R. Franci, L. Toti Rigatelli. Edizioni ETS. Pisa.

Astorgano Abajo, A. (1999). "La venta de los libros prohibidos de la biblioteca mayansiana (1801)". En Sanchis, A. M. (coord.). *Actas del Congreso internacional sobre Gregorio Mayans*. Valência. 625-659.

Baranda, C. (1996). "Introducción" à ed. de *Comparaciones o símiles para los vicios y virtudes* e de *Philosophía secreta*. Vol. I. Madrid, IX-XXXVIII.

Baranda, C. (1998). *Juan Pérez de Moya. Arithmética práctica y speculativa. Vária historia de sanctas e illustres mugeres*. Vol. II. Madrid, IX-XLI.

Basto, A. M. (1933). *Boletim Cultural da Câmara do Porto*. Porto. 130-131.

Beaujeu, J. (1950) *Pline l'Ancien, Histoire naturelle, livre II, texte latin et trad. fr.* Les Belles Lettres, Paris.

Bensaúde, J. (1995). *Tratado del Sphera y del Arte del Marear.* Facsímil do exemplar da B. Real de Munique. Em *Opera Omnia*. Academia Portuguesa da História. Vol. IV. Lisboa, 9 - 110.

Bold, B. (1982). *Famous Problems of geometry and how to solve them.* Dover, Nova Iorque.

Bortolotti, E. e Forti, U. (1966). *Prefazione e Analisi de «L'Algebra» di Rafael Bombelli*. Feltrinelli. Milão.

Bosmans, H. (1907-1908). "Sur le «Libro de algebra» de Pedro Nuñez". *Bibliotheca Mathematica*. Ser. 3. Vol. VIII, 155-169.

Bosmans, H. (1908). "L'Algèbre de Pedro Nuñez". *Anais Scientificos da Academia Polytecnica do Porto*, Vol. 3, 222-271.

Busard, H. L. L (2005). *Campanus of Novara and Euclid's Elements.* 2 Vols. F. S.Verlag. Estugarda.

Cajori, F. (1980). *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company. Nova Iorque.

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. Dover Publications. Nova Iorque.

Carvalho, J. (1950). "Anotações histórico-bibliográficas". Em *Pedro Nunes*, *Obras*, Vol. VI, Imprensa Nacional de Lisboa. 415-467.

Carvalho, J. (1960). "Anotações ao «De erratis Orontii Finae»". Em *Pedro Nunes, Obras*, Vol. III, Imprensa Nacional de Lisboa. III-IX.

Caunedo, B., Córdoba, R. (2000). *El arte del alguarismo: Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV (Ms. 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León).* Estudio, edición, glossário e índices. Valladolid: Junta de Castilla y León, Consejaría de Educación y Cultura.

Chasles, M. (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Gabay, Y. (ed.) (1989). Paris.

Chica Arellano, F. (1999). "Juan Pérez de Moya (1513-1596) en su vertiente de orador sagrado". Em *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses*, Enero/Julio, nº 171, 147-198.

Clavería, C. (ed.) (1995). *Philosofia secreta de Juan Pérez de Moya*. Cátedra, Letras Hispânicas. Madrid.

Corral, M. A. M. (2000). "La enseñanza de las matemáticas en la Nueva España". Em *Ciencia Desarrollo*. Vol XXVI, 155, México. 58-68.

Cossío, J. M. (1952). *Fábulas Mitológicas en España*. Madrid.

Costa, A. F. (1958). *A Ciência Náutica dos Portugueses na época dos descobrimentos*. Lisboa.

Costa, A. F. (1960). *A Marinharia dos Descobrimentos*. (3ª edição). (1ª ed., 1933). Lisboa.

Davis, M. D. (1977). *Piero della Francesca's Mathematical Treatises. The «Trattato d'abaco» and «Libellus de quinque corporibus regularibus»*.

Deslandes, V. (1988). *Documentos para a história da typographia portugueza nos séculos XVI e XVII*. 2 Vols. Imprensa Nacional, Lisboa.

Docampo, J. (2004). *La formación matemática del mercador catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas*. Ph D dissertation. Univ. Santiago de Compostela.

Docampo, J. (2008). "A new source for medieval mathematics in the Iberian Peninsula: The comercial arithmetic in Ms 10106 (Biblioteca Nacional, Madrid)". *Revue de Histoire des Mathématiques*, 15, 1 (2009), 123-177.

Docampo, J. (2008a). *Algebraic operations in an early sixteenth-century Catalan manuscript: An approach to the possible sources.* Grup d'estudis d'Història de la Ciencia, Univ. Pompeu Fabra. Preprint 4. Barcelona.

Domínguez Berrueta, M. (1899). "Estudo bio-bibliográfico del bachiller Pérez de Moya", *Revista de Archivos, Biliotecas y Museos*. 3, 464-482.

Eugénio de Ocho (1870). "Coleccion de Cartas de Españoles Ilustres Antiguos y Modernos", em *Biblioteca de Autores Españoles, desde la formacion del lenguaje hasta nuestros dias*, Rivadeneyra, M. (ed.), Vol. II, Madrid. 39.

Fernández Navarrete, M. (1831). *Diccionario Marítimo Español*. Madrid.

Fernández Navarrete, M. (1846). *Disertación sobre la Historia de la Náutica, y de las Ciencias Matemáticas que han contribuido á sus progresos entre los españoles*. Obra póstuma. Real Academia de História. Madrid.

Franci, R. (1983). "Mº Gilio. Questioni d'Algebra (séc. XIV)". Em *Quaderni del Centro Studi della matemática Medioevale,* 6. Universitá degli Studi di Siena. Siena.

Franci, R. (1988). "Antonio d' Mazzinghi: an algebraist of the 14th Century". *Historia Mathematica* 15, 240-249.

Franci, R. (1992). "Le matematiche dell'abaco nel Quattrocento". *Contributi alla Storia delle Matematiche*, 53-74. Modena.

Franci, R. (1994). "La Trattatistica d'Abaco nel Quattrocento". Em "Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento". *Atti del convegno internazionale di studi*. A cura di E. Giusti, 61-75. Sansepolcro.

Franci, R. (2002). "Trends in Fourteenth-Century Italian Algebra". *Oriens-Occidens*, 4, 81-105.

Franci, R. e Rigatelli, L. (1979). *Storia delle teoria delle equazione algebriche*. Milão.

Franci, R. e Rigatelli, L. (1983). "Maestro Benedetto da Firenze e la Storia dell'Algebra". *Historia Mathematica,* 10, 297-317.

Franci, R. e Rigatelli, L. (1985). "Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli". *Janus*, t. 2, 17-82. Haia.

Franci, R. e Rigatelli, L. (1988). "Fourteenth-Century Italian Algebra". Hay, C. (ed.). *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*. Oxford: Clarendon Press, 11-29.

Franci, R. e Pancanti, M. (1988). Anónimo (séc. XIV). *Il Trattato d'Algibra*. Em *Quaderni del Centro Studi della matemática Medioevale,* 18. Universitá degli Studi di Siena. Siena.

Gandz, S. (1936). "The Sources of al – Khowarizmi's Algebra". *Osiris* 1, 263-277.

Gessner, S. (2010). "Savoir manier les instruments: la géométrie dans les écrits italiens d'architecture (1545-1570)". Revue d'Histoire des Mathématiques 16, 1, 1-62.

Gillespie, C. C. (1970-1978). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova Iorque.

Gómez de Baquero, E. (1928). "Introducción" a *Philosophia secreta*, T I, V-XXII. Madrid.

Gregori, S. e Grugnetti, L. (ed.) (1998). Anónimo. *Libro dí contí e mercatanzie*. Università degli Studi di Parma, Dipartimento di Matematica. Parma.

Gregori, S. e Grugnetti, L. (2001). *AA.VV*. (XV secolo). *Trattato d'Abaco*. Università Degli Studi di Parma. Parma.

Hannah, J. (2007). "False position in Leonardo of Pisa's *Liber Abbaci*". *Historia Mathematica* 34, 306-332.

Hay, C. (ed.) (1988). *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*. Oxford: Clarendon Press.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Eucli's Elements*. 3 Vols. Dover Publications. Nova Iorque.

Heath, T. L. (1970). *Mathematics in Aristotle*. University Press, Oxford.

Heeffer, A. (2008). "A conceptual analysis of early arabic algebra". Em *The Unity of Science in the Arabic tradition: science, logic, epistemology and their interactions*, Springer Verlag, 89-128.

Heeffer, A. (2009). Algebraic partitioning problems from Luca Pacioli's Perugia manuscript. Vat. Lat. 3129. SCIAMVS 10, 1-45.

Hopkins, J. (1987). "Nicholas de Cusa". Em *Dictionary of the Middle Ages*. Joseph R. (ed.). Nova Iorque, 122-125.

Høyrup, J. (1992). "Archimedism, not Platonism: on a Malleable Ideology of Renaissance Mathematicians (1400 to 1600), and on its Role in the Formation of Seventeenth-Century Philosophies of Science". Em Dollo, C. (ed.): *Archimede. Mito Tradizione Scienza*. (Biblioteca di Nuncius. Studi e testi IV). Florença. 81–110. http://akira.ruc.dk/~jensh/Publications/1992%7Bh%7D_Archimedism_MS.PDF (Consultada em 5 de Dezembro de 2010 a versão manuscrita).

Høyrup, J. (2006). "Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra". *Historia Mathematica*, 33, 4-42.

Høyrup, J. (2007). *What did the abacus teachers really do when they (sometimes) ended up doing mathematics*. Roskilde Universitetscenter 3. Preprint og reprints, N. 4.

Høyrup, J. (2007-1). *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture. Science Networks*. Historical Studies. 34.

Høyrup, J. (2008). *The Tortuous ways toward a new understanding of algebra in the italian abbacus school (14th-16th centuries).* Em O. Figueras, J. L. Corina, S. Alatorre, T.Rojano, A. Sepúlveda (eds), 1-15. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. Morelia, Mexico, July 17–21, 2008*, Vol. I. México.

Jorge, R. (1908). "O primeiro arithmetico do Porto". Em *O Tripeiro*. Série 1, Ano 1 (5), 67-68. Porto.

Lafont, R., Tournerie, G. (1967). *Francés Pellos. Compendion de l'Abaco.* Montpellier.

Leal y Leal, L. (1971-1972). "El Bachiller Juan Pérez de Moya", em *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses* (70-71), Jaen. 17-36

Leitão, H. (2002). *Pedro Nunes, 1502-1578: novas terras, novos mares e o que mays he: novo ceo e novas estrellas*. Biblioteca Nacional. Lisboa

Leitão, H. e Martins, L. (2004). *O Livro Científico dos Séculos XV e XVI: Ciências Físico-Matemáticas na Biblioteca Nacional.* Ministério da Cultura, Biblioteca Nacional. Lisboa.

Libri, G. (1838-1841). *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie, depuis la Renaissance des Lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle.* 4 Vols. Paris.
http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-28736&I=292&M=tdm
(Consultado em 27 de Fevereiro de 2011).

López Piñero, J. M. (1979). *Ciência y técnica en la Sociedad española de los siglos XVI e XVII*. Barcelona.

López Piñero, J. M. (1979 a). *El Arte de Navegar en la España del Renacimiento*. Barcelona.

Louis, P. (1982). *Aristote, Météorologiques*, tome II. Texte établi et traduit par Louis, P. Paris.

Malet, A. (1985). "Pedro Nuñez, Simon Stevin y el calculo del M.C.D. de polinomios (1585)". *Thales* 1 (1985), 29-34.

Malet, A. (1990). "Changing Notions of Proportionality in Pre-modern Mathematics". *Asclepio* 42. 183-212.

Malet, A. (1998). *Summa de l'art d'Aritmètica*. Francesc Santcliment, 1482. *Introducció, transcriptió i notes a cura d'Antoni Malet*. Textos d'Història de la Ciência. Eumo Editorial. Barcelona.

Malet, A. (2006). "Renaissance notions of number and magnitude". Em *Historia Mathematica*, vol. 33 (1), 63-81.

Malet, A. (2007). "Just before Viète: Numbers, polynomials, demonstrations, and variables in Simon Stevin's «Arithmétique» (1585)". Em *Liber Amicorum Jean Dhombres,* Centre de recherche en histoire des sciences. Louvain-la-Neuve, 9-27.

Malet, A. e Paradís, J. (1984). *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica (1478-1545)*. Barcelona.

Marías, F. (1989). *El Largo siglo XVI*: *los usos artísticos del Renacimiento*. Taurus. Madrid.

Maroto, M. I. V. e Piñero, M. E. (2006). *Aspectos de la Ciencia aplicada en la España del Siglo de Oro*. Junta de Castilla y León.

Marre, A. (1880). "Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres". Em *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche Publicato da B. Boncompagni* (13), 555-659 e 693-814.

Marre, A. (1881). "Appendice au Triparty en la science des nombre de Nicolas Chuquet parisien". Em *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche Publicato da B. Boncompagni*, 14, 413-460.

Martínez-Hidalgo, J. M. e Carbonell Relat, L (1984). *Vocabulari Maritím Catalá- Castellà; Castellano-Catalán*. Barcelona.

Meireles, M. A. (1997). "Outros «mestres» e mercadores de livros: séculos XVI e XVII". *Obras impressas no Porto. Séc. XV a Séc. XVIII*. Catálogo da Exposição da Biblioteca Pública Municipal do Porto no V Centenário dos Primeiros Livros Impressos no Porto. Porto.

Morais, C. M. (1997). *A aritmética em Portugal até aos princípios do século XVI*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto.

Moreno Castillo, R. (2009). *El libro de Álgebra Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi*. Trad. e notas. España.

Moreno Uclés, J. (1996). *Homenaje al ilustre giennense Juan Pérez de Moya: en el IV centenario de su muerte (1596-1996)*. Instituto de Bachillerato Virgen del Carmen.

Muñoz y Riviero, J. (1917). *Manual de Paleografía Diplomática Española de los siglos XII al XVI*. Madrid.

Navarrete Orcera, A. R (sd). "La *Filosofía Secreta* de Juan Pérez de Moya". Publicação on-line da Universidad de Jaén. http://www.ujaen.es/investiga/hum669/Perez_Moya.htm (Consultada em 2 de Outubro de 2010).

Navarro-Brotons, V. (2004). "Astronomy and Cosmography 1561-1625. Different aspects of the activities of Spanish and Portuguese Mathematicians and cosmographers". Em *The Practice of Mathematics in Portugal*. Saraiva, L. e Leitão, H. (eds). Imprensa da Universidade, Coimbra, 225-274.

Paradís, J. e Malet, A. (1989). *Los Orígenes del Álgebra: de los Árabes al Renacimiento. i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica (1478-1545)*. Vol I. PPU, Barcelona.

Pedoe, D. (1976). *Geometry and the Liberal Arts*. Penguin Books.

Pereira, B. F. (2004). "A edição conimbricense da Rhetorica de Joachim Ringelberg". *Revista de Estudos Ibéricos* (1), 201-213.

Pérez, L. (1985). *Pràtica mercantívol*. Facsímil e apresentação. Palma.

Pérez Pastor, C. (1891). *Bibliografía madrileña ó descripción de las obras impresas en* Madrid. Séc. XVI. Madrid.

Pérez Pastor, C. (1906). *Bibliografía madrileña ó descripción de las obras impresas en* Madrid. Parte II (1601 al 1620). Madrid.

Pérez Pastor, C. (1907). *Bibliografía madrileña ó descripción de las obras impresas en Madrid.* Parte III. Madrid.

Picatoste y Rodríguez, F. (1868). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI: estudios biográficos y bibliográficos de Ciencias exactas físicas y naturales y sus inmediatas aplicaciones en dicho siglo*. Madrid.

Picatoste y Rodríguez, F. (1875). "Diálogos" por el Bachiller Perez de Moya. Anot. e Prólogo. Madrid.

Prieto, Á. W. (1993). *Libros y lectura en Salamanca – del Barroco a la Ilustración 1650-1725.* Junta de Castilla y Léon.

Ptolomeu (1984). *Ptolemy's Almagest*, G.J. Toomer (ed. e trad). Londres.

Rankin, F. K. C. (1992). *The Arithmetic and Álgebra of Luca Pacioli (c. 1445-1517)*. Tesis. London.

Rashed, R. (1997). *L'algébre*. Vol. 2. Em *Histoire des sciences arabes*. 3 Vols. Paris. 31-54.

Reguero, V. (1997). "El bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes bibliográficos". *Boletim del Instituto de estúdios giennenses* CLXV, 371-412.

Rey Pastor, J. (1934). *Los Matemáticos Españoles del siglo XVI.* Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas. Monografía nº 1. Madrid.

Rivadeneyra, M. (1870). *Biblioteca de Autores Españoles, desde la formacion del lenguaje hasta nuestros dias*. Vol. II. Madrid.

Rodriguéz, A. (1915). "La Regla de la Cosa o Almucabala". Em *La Ciudad de Dios*, CI, 170-185.

Rodríguez Vidal, R. (1972). "Para una Nueva edicion de los «Dialogos de Aritmetica» del Bachiller Perez de Moya". Em *Actas de las Primeras Jornadas Matematicas Luso-Españolas.* Consejo Superior de Investigaciones Cientificas. Instituto «Jorge Juan» de Matematicas, 401-409.

Rodríguez Vidal, R. (1987). *Dialogos de Aritmetica Practica y Especulativa (1562) del Bachiller Juan Pérez de Moya.* Prólogo y notas de Rafael Rodríguez Vidal. Universidad de Zaragoza.

Sá, C. (2000). "A Matemática na Grécia Antiga". Em *História da Matemática*. Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. J. (eds.), 220-367. Universidade Aberta. Lisboa.

Salavert Fabiani, V. (1990). "Introducción a la historia de la aritmética práctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI". *Dynamis. Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam* (10), 63-91.

Sanchez Pérez, J. A. (1929). *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial.* Madrid, Imprenta de Estanislao Maestre, 229-230.

Sánchez Pérez, J.A. (1949). *La Aritmética en Roma, en Índia y en Arábia.* C.S.I.C., Madrid.

Santos, R. (1812). "Memórias sobre alguns matemáticos portugueses e estrangeiros domiciliados em Portugal ou nas conquistas". Em *Memorias de Literatura Portugueza* (VIII). Academia Real das Sciencias. Lisboa.

Sarton, G. (1955). *Appreciation of Ancient and Medieval Science during the Renaissance*. University of Pensylvania.

Sellés, M. A. (2004). "El Arte de la Navegación en la Península Ibérica". Em *Los Orígenes de la Ciencia Moderna. Actas Años XI y XII*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 167- 186.

Serrano, A. G. (1735). *Astronomía universal theorica, y practica, conforme a la doctrina de antigos, y modernos astrónomos, com Methodo fácil, y muy claros exemplos*. Vol. I, Córdoba.

Sesiano, J. (1984). "Une arithmétique médiévale en langue provençale". Em *Centaurs*, I, 27(1984), 26-75.

Sesiano, J. (1985). "The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics". Em *Archive for History of Exact Sciences*, 32 (1985), 105-150.

Sesiano, J. (1988) "On an Algorithm for the Approximation of Surds from a Provençal Treatise". Hay, C. (ed.) *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*. Oxford: Clarendon Press, 30-55.

Sigler, L. (1987). *Leonardo Pisano, Fionacci. The Book of Squares. An Annoted Translation into Modern English*. Academic Press, Orlando, Florida.

Sigler, L. (2002). *Fibonacci's Liber abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* Springer, Nova Iorque.

Silva, I. F. (1858). *Diccionario Bibliographico Portuguez.* Lisboa, Imprensa Nacional.

Silva, L. P. (1945). *Obras Completas de Luciano Pereira da Silva*. Vol II. Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra.

Silva, L. P. (1972). *A Astronomia de «Os Lusíadas»*. Junta de Investigações do Ultramar. Lisboa.

Silva, M. C. (1999). "*Aspectos da Álgebra no Renascimento*". Em *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (41), 67-74.

Silva, M. C. (2000). "A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI". Em *História da Matemática*. Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. J. (eds.) Universidade Aberta. Lisboa. 448 - 478

Silva, M. C. (2002). "Equações no *Libro de Algebra* de Pedro Nunes". Em *Educação e Matemática* (68), 3-7.

Silva, M. C. (2008). "The algebraic content of Bento Fernandes's *Tratado da arte de arismetica (1555)*". Em *Historia Mathematica*, 35 (3), 190-219.

Silva, M. C. e Malet, A. (2008). "A note on Pérez de Moya's Principios de Geometria (1584)". Em *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14 (1), 113-133.

Silva, M. C. e Ribeiro, R. (1999). "Aspectos do *Libro de Algebra* de Pedro Nunes". Em *Informat* I (4). Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário, 4-5.

Simi, A. (2000). "La geometria nel primo Rinascimento. I contributi di un anónimo allievo di Domenico d'Agostino". Em *Bolletino di Storia della Scienza Matematiche*. Vol. XX, 189- 206.

Simi, A. (2002). *Teofilo Gallaccini. Matematico e Teorico dell'Architettura nella Siena di fine '500*. Max Planck Institute for the History of Science. Preprint 207.

Simi, A., Presas i Puig, A. (ed.). Luca Pacioli, *Tractatus geometrie. Summa de Arithmetica et Geometria, Proportioni et Proportionalita Pars II.* Obra disponível em http://archimedes.mpiwg-berlin.mpg.de/cgi-bin/toc/toc.cgi (Consultada em 10 de Janeiro de 2011).

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. Vols I, II. Dover Publications. Nova Iorque.

Smith, D. E. (1970). *Rara Arithmetica. A catalogue of the arithmetics written before the year MCCI with a description of those in the Library of George Arthur Plimpton of New York*. Nova Iorque.

Soler Selva, V. F. (2002). La Secció Científicotècnica de l'inventari de possessions de Bernardino de Càrdenas en el Marquesat d'Elx (I). La Rella, 15 (2002), 109-138.

Spiesser, M. (2006). "L'Algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte Français de L'Arithmétique Commerciale". Em *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 12, 7-33.

Swetz, F. J. e Katz, V. J. "Francisco Feliciano's Libro di Arithmetica". Em *Mathematical Treasures.* Loci: Convergence.

http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&bodyId=3735 (Consultada em 27 de Fevereiro de 2011).

Tassinari, A. (2001). *O Espaço Moderno*. São Paulo.

Teixeira, G. (1934). *História das Matemáticas em Portugal*. Academia das Ciências. Biblioteca de Altos Estudos. Lisboa.

Todd, L. E., Canseco, C. G., Morantes, C. G. (2009). *Breve História de la Ciencia en Mexico*. México.

Valladares Reguero, A. (1997). "El bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes bio-bibliográficos". Em *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses* CLXV, 371-412.

Vallin y Bustillo, A. F. (1893). "Cultura científica de España en el siglo XVI". Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid.

Van Egmond, W. (1978). "The Earliest Vernacular Treatment of Algebra: *The Libro di Ragioni of Paolo Gerardi*". Em *Physis* (20), 155-189.

Van Egmond, W. (1980). *Pratical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600.* Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza (sep.). Florença.

Van Egmond, W. (1983). "The Algebra of Master Dardi de Pisa". Em *Historia Mathematica* 10, 399-421.

Van Egmond, W. (1988). "How algebra came to France". Em *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*, C. Hay (ed.). Oxford. Clarendon Press, 127-144.

Van Praag, P. (2001). *Pedro Nuñez, Simon Stevin, et le plus grand diviseur des polynômes*. Institut de Mathématiques et d'Informatique. Université de Mons-Hainault. Preprint 8.

Vasconcelos, J. (1929). *Albrecht Durer e a sua influencia na península*. Imprensa da Universidade. Coimbra.

Veltman, K. (2000). "Mesures, quantification et Science". Em *L'Époque de la Renaissance*. *Crises et essors nouveaux (1560-1610)* Klaniczay, T., e Stegmann, A. (ed.). Amsterdão/ Philadelphia (4), 401-415.

Ventura, M. S. (1985). *Vida e Obra de Pedro Nunes*. Colecção Biblioteca Breve, Vol. 99.

Wilkinson, A. S. (2010). *Iberian Books. Books Published in Spanish or Portuguese on the Iberian Peninsula before 1601*. Leiden.

Zuili, M. (1995). “Algunas observaciones acerca de un moralista toledano del siglo xvi: Alejo Venegas de Busto”. Em *Criticón* (65), 17-29.