Redução do fenómeno de Gibbs através do ϵ-algoritmo

Ana C. Matos
Laboratoire Painlevé UMR 8524
UST Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX, France
e-mail: Ana.Matos@math.univ-lille1.fr

(em colaboração com Bernhard Beckermann, Franck Wielonsky)

Resumo

Seja $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ uma função com singularidades dada pela sua série de Fourier . Para reduzir o fenómeno de Gibbs que apresenta a sucessão das somas parciais

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} [a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)],$$

C. Brezinski propôs o algoritmo seguinte: calcular

$$G_n(f)(e^{it}) = S_n(f)(t) + i\widetilde{S}_n(f)(t), \text{ onde } \widetilde{S}_n(f)(t) = \sum_{j=1}^{n} [a_j \sin(jt) - b_j \cos(jt)],$$

e aplicar em seguida o ϵ-algoritmo à sucessão das somas parciais da série de potências

$$G(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) z^j, \quad c_0(f) = \frac{a_0}{2}, \quad \text{ e } j > 1, \quad c_j(f) = a_j - ib_j.$$

Utiliza-se a parte real das quantidades $\epsilon_{2k}^{(n)}(t)$ para aproximar $f(t) = \mathrm{Re}\,(G(f)(e^{it})$. Os resultados numéricos obtidos mostraram uma grande aceleração de convergência da sucessão de somas parciais, bem como uma redução significativa do fenómeno de Gibbs, mas nenhuma explicação teórica destes resultados foi avançada.

Nesta palestra, vamos obter limites superiores para o erro $(f(t) - \epsilon_{2k}^{(n)}(t))$ para funções da forma $f = f_1 + f_2$, onde f_1 apresenta singularidades em pontos conhecidos (por exemplo, f_1 é a função "saw-tooth" ou $f_1(t) = \mathrm{sign}\,(\cos(t)))$ e f_2 é tal que os seus coeficientes de Fourier decrescem suficientemente rápido. Para um tal tipo de funções, a série de Fourier converge lentamente e apresenta muitas oscilações próximo das singularidades de f_1. Mostraremos que as propriedades de aceleração do ϵ-algoritmo dependem essencialmente de f_1. Mais precisamente, consideraremos o caso em que $G(f_1)$ pertence a uma classe de funções hipergeométricas

$$G^{(\alpha,\beta)}(z) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \alpha+1, 1 \\ \alpha+\beta+2 \end{array} \middle| \, z \right), \quad \text{où} \qquad {}_2F_1\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} \middle| \, z \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j\,(b)_j}{(c)_j\,j!}\, z^j.$$

Para obter as estimações do erro, utilisaremos a relação entre o ϵ -algoritmo complexo e os aproximantes de Padé e estudiaremos a velocidade de convergência das colunas da tabela de Padé correspondente a funções de Stieltjes e perturbações de funções de Stieltjes .
Alguns exemplos numéricos ilustram os nossos resultados.
Damos também uma relação entre os aproximantes de Padé-Tchebychev para séries de Tchebychev e outros aproximantes racionais de séries de Fourier.