Intuicionismo e Teoria de Categorias/Topos
Tempo, Linguagens e Limites Cognitivos em Matemática

20/Março/2007: Seminário de Filosofia da Matemática
CMUP/FCUP

Resumo

O programa intuicionista iniciado por Brower (que durante toda a sua vida, consistentemente o prosseguiu e desenvolveu) tem como características principais: por um lado a desvalorização da lógica, a par da linguagem, como instrumento de criação e fundamentação matemática e, principalmente, a recusa de alguns dos seus princípios clássicos (e.g. do 3º excluído, de negação de quantificadores,etc.); por outro lado, uma construção alternativa do continuum real (e, de forma associada, de uma teoria de conjuntos), que conduz a uma análise real com resultados fortemente divergentes dos correspondentes clássicos (e.g. o Teorema de Brower: toda a função real definida no continuum unitário é contínua).

Embora a lógica intuicionista tenha sido integrada desde cedo no estudo geral dos sistemas lógicos formais – em virtude da formalização por Heyting, que lhe concedeu um estatuto metafísico neutral – as suas origens são fenomenológicas e com claras raízes em Kant (não na sua filosofia da matemática, mas no idealismo transcendental), e contêm como parte essencial a consideração de limites cognitivos associados ao tempo – ou às relações de tempo e espaço.

Comparativamente, a análise intuicionista permaneceu marginal, mas, para um olhar matemático, é talvez nela que melhor se vê o estranho e radical alcance da lógica intuicionista e a forma como ela se associa, em estreita interdependência, a outros princípios que importam, quer à prática matemática quer à metafísica (ontologia) ou à filosofia da linguagem: princípios de escolha (axioma da escolha), de distinção extensional/intensional, de bivalência, de determinação da identidade e de elementos constituintes (atomização e noção de ponto espacial)).

Em contraste com a génese do intuicionismo, a teoria de categorias com a noção de topos, desenvolve-se a partir da década de 60 do século passado, sem pedigree filosófico mas na prática efectiva da matemática, com início na geometria (algébrica com Grothendieck), como um movimento de grande generalização, abstracção e extensão de noções e linguagem básicas, em particular da noção de entidades ("espaços") constituídos por pontos, procurando antes a essência dessas entidades nas suas relações (através morfismos) com outras entidades e nas propriedades universais que se possam manifestar nessas relações. De forma talvez surpreendente, revelou-se que noções básicas em que se fundamenta a matemática podem ser caracterizadas por propriedades universais e, por essa via, a teoria de topos constituiu-se como uma alternativa aos fundamentos clássicos, permitindo em particular, mas com crucial importância, a clonagem da teoria de conjuntos no seu seio, bem como formalizações adequadas da lógica (estabelecendo também, por esse meio, e num grau nunca antes atingido, fortes relações entre esta e a geometria)

Embora a teoria dos topos seja um monumento de abstracção, de difícil acesso e percurso, é claro logo a partir da sua modelação mais elementar das noções básicas da matemática e da lógica [*de que tentarei dar uma ideia*] que há uma prevalência das características intuicionistas e da forma como se interligam.

De um ponto de vista naturalista (o de P. Maddy, de inspiração quineana) que em parte adoptamos, a teoria de categorias, em particular a teoria de topos, cumpre os critérios (de uma indispensabilidade "relativizada") para merecer uma atenção privilegiada na filosofia da matemática: é essencial a variadas áreas de produção matemática, e tem ainda ligações reconhecidamente úteis a outras ciências, e.g. física e ciências da computação; e, sobretudo, tem o poder explicativo das grandes generalizações que relacionam, integram e reinterpretam conceitos anteriores.

Como explicar, e conciliar, a marginalidade do programa intuicionista com a clara prevalência dos seus princípios nesta recente e mais geral teoria de fundamentos da matemática?

"Uma vez que todos estes mistérios nos ultrapassam,

finjamos ser os seus organizadores"
Jean Cocteau

Confessada assim, à partida, a fraca pretensão das possíveis respostas, abordarei a questão da aplicabilidade e adequação da matemática intuicionista, cuja negação, que se parece impor de forma óbvia (por exemplo, como viver em ciência sem funções descontínuas?) poderia fornecer uma explicação imediata, e em seguida alguns aspectos do estruturalismo em ligação com a teoria das categorias; *especularei* depois sobre o valor geral da linguagem e da lógica (numa veia anti-broweriana) e de promessas hilbertianas de um finitismo reivindicado.